MATEMATIKA

Martin Kalina

STU

Slovenská technická univerzita v Bratislave
2012

Recenzenti: doc. RNDr. Jana Dobrakovová, CSc.
doc. RNDr. Vladimír Janiš, CSc.

MATEMATIKA

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave v Nakladateľstve STU, Bratislava, Vazovova 5, v roku 2012.

Edícia skrípt

Schválila Edičná rada Stavebnej fakulty STU v Bratislave.

Rozsah 297 strán, 145 obrázkov, 2 tabuľky, 15,075 AH, 15,532 VH, 1. vydanie,
edičné číslo 5611, vydané v elektronickej forme;
umiestnenie na http://www.svf.stuba.sk

85 – 212 – 2012

ISBN 978-80-227-3655-8

Obsah

Úvod **9**

1 Lineárna algebra **11**

1.1 Základné pojmy 11

1.1.1 Matice a vektory 11

1.1.2 Gaussov tvar a hodnosť matice 12

1.2 Gaussova eliminačná metóda 14

1.3 Determinanty matíc 17

1.3.1 Pojem determinatu 17

1.3.2 Determinanty a riadkovo (stĺpcovo) ekvivalentné operácie 19

1.3.3 Cramerovo pravidlo 21

1.4 Aritmetické operácie s maticami 22

1.4.1 Súčet, násobenie matíc konštantou a transponovanie matíc 22

1.4.2 Súčin matíc 23

1.4.3 Inverzné matice 26

1.4.4 Maticové operácie a determinanty 29

1.4.5 Maticové rovnice 30

1.5 Analytická geometria 30

1.5.1 Základy vektorového počtu 30

1.5.2 Analytická geometria v rovine 32

Vyjadrenie priamky v rovine 32

Vzdialenosť bodu od priamky 34
1.5.3 Analytická geometria v trojrozmernom priestore 34
Priamka a bod 34
Rovina a bod 35
Dve priamky 37
1.5.4 Obsahy rovnobežníkov a objemy rovnobežnostenov 38
1.6 Lineárne transformácie 39
1.6.1 Lineárne transformácie a maticové operácie 40
Lineárne transformácie a súčin matíc 40
Inverzné matice a inverzné transformácie 41
1.6.2 Lineárne transformácie a maticové rovnice 42
1.6.3 Niektoré špeciálne transformácie 42
Matica otočenia o uhol α 43
Matica osovej súmernosti 44
1.7 Vlastné čísla a vlastné vektory 47
1.7.1 Vlastné čísla a vlastné vektory matice 47
1.7.2 Kvadratické formy 53
1.8 Cvičenia 56

2 Diferenciálny počet **61**
2.1 Úvod do funkcií jednej premennej 61
2.1.1 Základné pojmy 62
Rovnosť funkcií 63
Symetria a periodicita funkcií 63
Prosté (jedno-jednoznačné) a inverzné funkcie 64
Monotónnosť funkcií 66
Lokálne extrémy 67
2.1.2 Elementárne funkcie 67

Mocninové funkcie 67
Polynómy a racionálne (lomené) funkcie 69
Exponenciálne a logaritmické funkcie 72
Goniometrické a cyklometrické funkcie 73
Hyperbolické funkcie 76
Absolútna hodnota a funkcia signum 80
2.2 Limity a spojitosť funkcií 81
2.2.1 Postupnosti a ich limity 81
2.2.2 Spojitosť funkcií 83
2.2.3 Limity funkcií 84
Vlastné limity vo vlastných bodoch 84
Nevlastné a jednostranné limity 86
Limity v nevlastných bodoch 88
2.2.4 Číslo e 89
2.2.5 Asymptoty 91
Asymptoty so smernicou 91
Asymptoty bez smernice 94
2.3 Derivácie 95
2.3.1 Geometrická interpretácia a definícia 95
2.3.2 Základné vzorce na derivovanie 98
Základné pravidlá 98
Derivácia zloženej a inverznej funkcie 101
2.3.3 Logaritmické derivovanie 104
2.3.4 Derivácie vyšších rádov 106
2.3.5 Aplikácie 107
2.4 Extrémy, konvexnosť a konkávnosť 110
2.4.1 Monotónnosť a lokálne extrémy 110
2.4.2 Konvexnosť a konkávnosť 115

2.4.3 Globálne extrémy 122

2.5 Diferenciály a Taylorov polynóm 124

2.5.1 Diferenciály funkcie 124

2.5.2 Lagrangeova veta o strednej hodnote a Taylorov rozvoj 127

2.6 L'Hospitalovo pravidlo 133

2.7 Parametrické krivky 136

2.8 Cvičenia 142

3 Integrály **147**

3.1 Neurčité integrály 148

3.1.1 Základné vzťahy 148

3.1.2 Integrovanie racionálnych funkcií 152

3.1.3 Metóda per partes 156

Prvá skupina integrálov typu $\int P_n(x) \cdot f(x)\,dx$ 156

Druhá skupina integrálov typu $\int P_n(x) \cdot f(x)\,dx$ 158

Integrály počítané ako rovnice 158

3.1.4 Substitučná metóda 160

Integrály typu $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ *a* $\int R(\sinh x, \cosh x)\,dx$ 161

Integrovanie výrazov s odmocninami 163

3.2 Určité integrály 166

3.2.1 Základné vzťahy 166

3.2.2 Nevlastné integrály 171

3.2.3 Určitý integrál ako funkcia hornej hranice 173

3.3 Geometrické aplikácie určitých integrálov 174

3.3.1 Obsah rovinnej oblasti 174

Explicitne dané hranice oblasti 174

Parametricky dané hranice oblasti 177

3.3.2 Objemy rotačných telies 178

Explicitne dané hranice rotačnej oblasti 178

Parametricky dané hranice rotačnej oblasti 182

3.3.3 Dĺžka krivky 183

Explicitne daná funkcia (krivka) 183

Parametricky daná funkcia (krivka) 185

3.3.4 Obsah rotačnej plochy 186

Explicitne dané hranice rotačnej plochy 186

Parametricky dané hranice rotačnej plochy 187

3.4 Fyzikálne aplikácie určitých integrálov 189

3.5 Cvičenia 191

4 Obyčajné diferenciálne rovnice 195

4.1 Úvod 195

4.1.1 Komplexné čísla 195

Spôsoby vyjadrenia komplexných čísel 195

Aritmetika komplexných čísel 197

Komplexne združené čísla a korene polynómov 197

4.1.2 Základné pojmy teórie diferenciálnych rovníc 198

4.1.3 Motivačné príklady 200

4.2 Diferenciálne rovnice prvého rádu 204

4.2.1 Separované a separovateľné diferenciálne rovnice 204

4.2.2 Lineárne diferenciálne rovnice 1. rádu 205

4.2.3 Homogénne diferenciálne rovnice 208

4.2.4 Bernoulliho diferenciálne rovnice 210

4.3 Lineárne diferenciálne rovnice 2. a vyšších stupňov 212

4.3.1 Základné pojmy 212

4.3.2 Lineárne diferenciálne rovnice bez pravej strany 213

4.3.3 Lineárne diferenciálne rovnice so špeciálnou pravou stranou 218

4.4 Cvičenia 229

5 Funkcie viacerých premenných 231

5.1 Základné pojmy a vzťahy 231

5.1.1 Vzdialenosti a podmnožiny $\mathbb{R}^2$ 231

5.1.2 Funkcie dvoch premenných a ich grafy 233

5.1.3 Limity a spojitosť 236

5.2 Parciálne derivácie a diferencovateľnosť 240

5.2.1 Parciálne derivácie 240

5.2.2 Diferencovateľnosť a dotyková rovina 242

5.2.3 Reťazové pravidlo 244

5.2.4 Gradient a derivácia v smere 247

5.3 Parciálne derivácie vyšších rádov 250

5.3.1 Základné pravidlá 250

5.3.2 Taylorov rozvoj 252

5.4 Extrémy 254

5.4.1 Lokálne extrémy a sedlové body 254

5.4.2 Viazané extrémy 265

5.4.3 Globálne extrémy 268

5.5 Cvičenia 278

Výsledky cvičení 281

Kapitola 1 281

Kapitola 2 283

Kapitola 3 289

Kapitola 4 291

Kapitola 5 293

Literatúra 297

Úvod

Text učebnice Matematika vznikol na základe prednášok predmetov *Matematika 1* a *Matematika 2* pre študijné programy *Inžinierske konštrukcie a dopravné stavby*, *Inžinierstvo životného prostredia* a *Vodné stavby a vodné hospodárstvo*. Určený je najmä študentom týchto programov.

Je to elektronická učebnica. Text, vyznačený červenou farbou, predstavuje „aktívne linky". Po kliknutí myšou text prejde na citovanú časť (definíciu, formulu...). Kvalitnejšie programy na prezeranie pdf-súborov obsahujú aj ikonu pre návrat späť z takéhoto „odskoku".

Na konci učebnice je uvedená základná slovenská a česká literatúra vrátane zbierok úloh, kde si čitateľ môže hlbšie naštudovať preberanú problematiku. Okrem toho sú v závere každej kapitoly uvedené úlohy, ktoré pomôžu lepšie pochopiť látku.

Záverom by som sa chcel poďakovať doc. RNDr. Jane Dobrakovovej, CSc. a doc. RNDr. Vladimírovi Janišovi, CSc., za podnetné pripomienky, ktoré pomohli skvalitniť text.

Kapitola 1

Lineárna algebra

1.1 Základné pojmy

1.1.1 Matice a vektory

Voľne povedané, *matica* rozmeru $n \times m$ je tabuľka čísel alebo funkcií (prípadne aj iných veličín), ktorá má n riadkov a m stĺpcov. Maticu dávame do okrúhlych zátvoriek. Matice, ktorých rozmery sú $n \times 1$, resp. $1 \times n$, nazývame aj n-rozmerné (stĺpcové, resp. riadkové) *vektory*. Matice zvyčajne označujeme veľkými písmenami $A, B, C \dots$

Príklad 1.1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & \pi \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 \\ 31 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A, B, C, D sú matice, ktorých rozmery sú postupne 2×4, 4×2, 1×4, 3×1. Matica C je štvorrozmerný riadkový vektor, matica D je trojrozmerný stĺpcový vektor. Keď potrebujeme zdôrazniť rozmer matice, zapíšeme ho do indexu, teda môžeme písať $A_{2\times4}$, $B_{4\times2}$, $C_{1\times4}$, $D_{3\times1}$.

Na označenie prvkov matice používame dvojité indexy, kde prvá hodnota označuje poradové číslo stĺpca a druhá hodnota poradové číslo riadku, v ktorom sa daný prvok nachádza. Keď si vezmeme nejakú maticu $X_{n\times m}$ s prvkami $x_{i,j}$, kde $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

a $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, tak platí

$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,m} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \dots & x_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \dots & x_{n,m} \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Stručnejšie môžeme výraz (1.1) zapísať v tvare $X = \|x_{i,j}\|$.

- Maticu X nazveme *štvorcovou*, ak $n = m$. Ak $n \neq m$, hovoríme o *obdĺžnikovej* matici.
- Maticu X nazveme *hornou trojuholníkovou*, ak $x_{i,j} = 0$ pre $i > j$.
- Maticu X nazveme *dolnou trojuholníkovou,* ak $x_{i,j} = 0$ pre $i < j$.
- Prvky $x_{i,i}$ nazveme *diagonálnymi.*
- Prvok $x_{i,j}$ nazveme *pivotom i-teho riadku*, ak $x_{i,k} = 0$ pre $k < j$ (teda ak $x_{i,j}$ je prvým nenulovým prvkom v i-tom riadku).

V niektorých prípadoch nie je dôležité, či je matica X horná alebo dolná trojuholníková. Potom hovoríme len o trojuholníkovej matici. Počet pivotov matice môže byť menší, ako je počet jej riadkov.

1.1.2 Gaussov tvar a hodnosť matice

Prv než sa dostaneme ku Gaussovmu tvaru matice a jej hodnosti, zavedieme si *riadkovo ekvivalentné operácie.*

Definícia 1.1 *Nech X a Y sú matice rovnakého rozmeru. Nazveme ich riadkovo ekvivalentné, ak maticu Y dostaneme z matice X pomocou jednej z nasledujúcich operácií (alebo kombináciou niekoľkých operácií):*

1. *Zámena poradia riadkov matice X.*
2. *Prenásobenie riadku matice X nenulovou konštantou.*
3. *K niektorému riadku matice X pripočítame násobok iného riadku.*

Tieto operácie nazveme riadkovo ekvivalentné.

Definícia 1.2 *Hovoríme, že matica Y je Gaussov tvar matice X, ak sú tieto matice riadkovo ekvivalentné a platí*

1. *Y je horná trojuholníková matica,*
2. *každý pivot matice Y sa rovná 1,*
3. *ak $y_{i,j}$ je pivot i-teho riadku a $y_{k,l}$ je pivot k-teho riadku matice Y pre $i < k$, tak $j < l$.*

Navyše, ak pre každý pivot y_{i,j_i} ($i = 1, 2, \dots, \tilde{n}$[1]) platí, že $y_{r,j_i} = 0$ pre $r \neq i$, tak hovoríme, že Y je v redukovanom Gaussovom tvare.

Každá matica sa pomocou riadkových operácií dá upraviť na Gaussov tvar, aj redukovaný Gaussov tvar. Redukovaný Gaussov tvar matice X je daný jednoznačne.

Definícia 1.3 *Nech X je daná matica. Počet nenulových riadkov jej Gaussovho tvaru nazveme hodnosťou matice X a označíme $h(X)$.*
Nech má matica X n riadkov a m stĺpcov. Hovoríme, že X má plnú hodnosť, ak platí $h(X) = \min\{n, m\}$.

Príklad 1.2 Majme matice

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matice A_1 až A_5 sú riadkovo ekvivalentné. Napr. maticu A_2 sme z A_1 dostali operáciou $(r_1, r_2 + 2r_3, r_1 + r_3)$[2]. Akou operáciou dostaneme maticu A_3 z A_2?
Matice A_2 až A_5 sú horné trojuholníkové. A_3 až A_5 majú pivoty rovné 1. Matice A_4 a A_5 sú v Gaussovom tvare a matica A_5 je v redukovanom Gaussovom tvare. Pre hodnosti matíc A_1 až A_5 platí $h(A_i) = 3$, $i = 1, 2, \dots, 5$.

[1] $\tilde{n} \leq n$ je počet nenulových riadkov Gaussovho tvaru. Tento počet je daný jednoznačne.
[2] r_i označuje i-ty riadok matice A_1 a j-ta súradnica vektora $(r_1, r_2 + 2r_3, r_1 + r_3)$ označuje operáciu, ktorú sme spravili s j-tym riadkom matice A_1.

1.2 Sústavy lineárnych rovníc, Gaussova eliminačná metóda

Majme sústavu lineárnych rovníc

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 2 \\ & & y & + & 6z & = & 1 \end{array} \tag{1.2}$$

Označme

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{array}\right).$$

Potom:

1. A nazveme maticou sústavy (1.2),
2. vektor b nazveme vektorom pravých strán sústavy (1.2),
3. maticu B nazveme rozšírenou maticou sústavy (1.2).

O riešiteľnosti a o počte riešení sústavy hovorí Frobeniova veta:

Veta 1.1 (Frobeniova). *Majme sústavu lineárnych rovníc o n neznámych. A nech je matica sústavy a B rozšírená matica tejto sústavy. Potom*

- *sústava má jednoznačné riešenie, ak $h(A) = h(B) = n$,*
- *sústava má nekonečne veľa riešení, ak $h(A) = h(B) < n$,*
- *sústava nemá riešenie, ak $h(A) \neq h(B)$.*

Teraz vyriešime sústavu (1.2). Napíšeme rozšírenú maticu sústavy B a budeme ju upravovať riadkovo ekvivalentnými úpravami na Gaussov tvar. Na znak toho, že jednotlivé matice budú riadkovo ekvivalentné, budeme písať znak „$\sim$". Ako pomôcku za každou maticou napíšeme operácie, ktoré budeme robiť s jednotlivými riadkami matice (znakom r_i budeme označovať i-ty riadok aktuálnej matice). Keď budeme mať Gaussov tvar matice B, túto maticu prepíšeme do tvaru sústavy rovníc a vypočítame jej korene.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_2 \\ r_1 \\ r_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_1 \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_1 \\ -r_2 \\ r_2 + r_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Vidíme, že $h(A) = h(B) = 3$, teda sústava (1.2) má jednoznačné riešenie. Prepisom poslednej matice dostaneme sústavu

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 2z & = & 2 \\ & & y & + & 5z & = & 4 \\ & & & & z & = & -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 - 2 \cdot 19 - 2(-3) = -30, \\ y = 4 - 5(-3) = 19, \\ z = -3. \end{array}\right.$$

Maticu B sme mohli upravovať až na redukovaný Gaussov tvar. Potom by sme nemuseli spätne prepisovať výslednú maticu do sústavy rovníc, ale hneď by sme dostali riešenie. Ukážeme si to na nasledujúcom príklade.

Príklad 1.3 Je daná nasledujúca sústava rovníc

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & 2z & = & 3 \\ 2x & + & 5y & - & z & = & 10 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 13 \\ & & y & - & z & = & 0 \end{array} \tag{1.3}$$

Sústava (1.3) má 4 rovnice, ale len 3 neznáme. Sústavy, ktoré majú viac rovníc ako neznámych sa volajú *preurčené*. Napíšeme teraz rozšírenú maticu sústavy a upravíme ju do redukovaného Gaussovho tvaru.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & 10 \\ 3 & 2 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_1 \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1 \\ r_4 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 11 & -5 & 4 \\ 0 & 11 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_1 + 3r_4 \\ r_4 \\ r_3 \\ r_2 - r_3 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 11 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_1 \\ r_2 \\ r_3 - 11r_2 \\ r_4 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_1 \\ r_2 \\ \frac{1}{6}r_3 \\ r_4 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_1 + r_3 \\ r_2 + r_3 \\ r_3 \\ r_4 \end{array} \sim \quad \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Riešenie sústavy (1.3) je $(x, y, z) = \left(\frac{11}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Ukážeme si ešte sústavy rovníc, ktoré majú nekonečne veľa riešení, resp. nemajú žiadne riešenie.

Príklad 1.4 Vyriešte sústavu rovníc

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ 5x & + & 5y & - & z & = & 10 \\ 4x & + & 7y & - & 8z & = & 11 \end{array} \tag{1.4}$$

Riešenie: Napíšeme rozšírenú maticu sústavy a upravíme ju na (redukovaný) Gaussov tvar.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & -1 & 10 \\ 4 & 7 & -8 & 11 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_1 \\ r_2 - r_3 \\ r_3 - 2r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 7 & -1 \\ 0 & 5 & -12 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_2 \\ r_1 - 2r_2 \\ r_3 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 7 & -1 \\ 0 & 5 & -12 & 5 \\ 0 & 5 & -12 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_1 \\ r_2 \\ r_3 - r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 7 & -12 \\ 0 & 5 & -12 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_1 \\ \frac{1}{5}r_2 \\ r_3 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{12}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_1 + 2r_2 \\ r_2 \\ r_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{11}{5} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{12}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Posledná úprava už nebola nutná, ale zjednoduší nám zapísanie výsledku. Máme v skutočnosti len dve rovnice s tromi neznámymi. Jedna neznáma bude mať úlohu parametra. Graficky počítame prienik dvoch rovín, teda, ak nie sú rovnobežné, ich prienikom je priamka a analytické riešenie je parametrické vyjadrenie tejto priamky. Toto vyjadrenie nie je dané jednoznačne. Keď si za parameter zvolíme premennú z, dostaneme v našom prípade zápis riešenia v tvare $(x, y, z) = \left(1 - \frac{11}{5}t,\, 1 + \frac{12}{5}t,\, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$. □

Príklad 1.5 Vyriešte sústavu rovníc

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 3x_1 & & & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 10 \\ x_1 & - & 12x_2 & + & 14x_3 & + & 7x_4 & = & 1 \end{array} \tag{1.5}$$

Riešenie: Sústava (1.5) má štyri neznáme, ale len tri rovnice. Takáto sústava rovníc sa volá *nedourčená*.
Napíšeme rozšírenú maticu sústavy a upravíme ju na (redukovaný) Gaussov tvar.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & -3 & 10 \\ 1 & -12 & 14 & 7 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_1 \\ r_2 - 3r_1 \\ r_3 - r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 9 & -10 & -6 & 1 \\ 0 & -9 & 10 & 6 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_1 \\ r_2 \\ r_3 + r_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 9 & -10 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Maticu sme neupravili na Gaussov tvar, lebo pivoty sa nerovnajú 1 (s výnimkou prvého riadku). V tomto prípade nie je nutné dostať Gaussov tvar matice, lebo $h(A) = 2$

a $h(B) = 3$, kde A je matica sústavy a B je rozšírená matica sústavy. Podľa Frobeniovej vety sústava (1.5) nemá riešenie. □

V príkladoch 1.3, 1.4, 1.5 sme videli, že samotný rozmer sústavy rovníc (teda počet rovníc × počet neznámych) nesúvisí s riešiteľnosťou sústavy. Samozrejme, nedourčené sústavy nikdy nemajú jednoznačné riešenie.

1.3 Determinanty matíc

1.3.1 Pojem determinatu

Determinant sa zavádza len pre štvorcové matice. Uvedieme rekurentnú definíciu determinantu. Nech A je daná štvorcová matica. Potom jej determinant označíme $\det(A)$ alebo $|A|$. Pre maticu $A = (a_{1,1})$ rozmeru 1×1 platí $det(A) = a_{1,1}$. Teraz nech A je matica rozmeru $n \times n$ (pre $n \geq 1$). Označme $A_{i,j}$ maticu, ktorá vznikne z matice A tak, že vynecháme i-ty riadok a j-ty stĺpec. Potom *determinat matice* A budeme definovať vzťahom

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} |A_{i,j}|, \tag{1.6}$$

kde $a_{i,j}$ je prvok matice A, ktorý je v i-tom riadku a j-tom stĺpci.

Poznámka 1.1 Vzťahom (1.6) sme zadefinovali determinat matice A pomocou tzv. rozvoja podľa j-teho stĺpca. Dá sa ukázať, že determinant môžeme počítať pomocou rozvoja podľa ľubovoľného stĺpca, prípadne riadku.

Pre maticu A rozmeru 2×2 dostaneme

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}. \tag{1.7}$$

Pre maticu rozmeru 3×3 môžeme na výpočet determinantu použiť tzv. *Sarrusovo pravidlo*, ktoré hovorí, že za maticu pripíšeme prvé dva stĺpce (prípadne podpíšeme pod ňu prvé dva riadky) a násobíme vždy trojice hodnôt – keď ideme v smere vyznačenom

$\ddots$, súčiny sčítavame, keď ideme v opačnom smere, súčiny odčítavame:

$$det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = \left|\begin{array}{ccccc|cccc} a_{1,1} & & a_{1,2} & & a_{1,3} & & a_{1,1} & & a_{1,2} \\ & \ddots & & \ddots & & \ddots & & & \\ a_{2,1} & & a_{2,2} & & a_{2,3} & & a_{2,1} & & a_{2,2} \\ & & & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\ a_{3,1} & & a_{3,2} & & a_{3,3} & & a_{3,1} & & a_{3,2} \end{array}\right. = \tag{1.8}$$

$$= \quad a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - (a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} + a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} + a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}).$$

Toto Sarrusovo pravidlo sa nedá zovšeobecniť pre matice väčšieho rozmeru ako 3×3.

Príklad 1.6 Vypočítajte determinanty matíc A, B, C:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Riešenie: Pre výpočet $\det(A)$ môžeme použiť vzťah (1.7) a dostaneme

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 7.$$

Pre výpočet $\det(B)$ môžeme použiť vzťah (1.8) (Sarrusovo pravidlo) a dostaneme

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & 7 & -1 & 5 \end{array}\right. \begin{array}{l} = \quad 1 \cdot 0 \cdot 7 + 2 \cdot 4 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) \cdot 5 - \\ \quad -(2 \cdot (-2) \cdot 7 + 1 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 0 \cdot (-1)) \quad = \quad -30. \end{array}$$

Determinant matice C musíme počítať rozvojom podľa niektorého riadku alebo stĺpca. Najvýhodnejšie je zvoliť si taký riadok alebo stĺpec, ktorý má najviac núl. Preto si zvolíme rozvoj podľa 2. stĺpca.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+0(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \; 0 \; + \; 3 \begin{array}{ccccc} 1 & & 2 & & 4 \\ & \ddots & & & \\ 1 & & 2 & & 3 \\ & \ddots & & \ddots & \\ 1 & & 2 & & 4 \\ & \ddots & & \ddots & \\ 1 & & 2 & & 4 \\ & & & \ddots & \\ 1 & & 2 & & 3 \end{array} \; + \; 0 \; - \; 3 \begin{array}{ccccc} 1 & & 2 & & 4 \\ & \ddots & & & \\ -2 & & 0 & & -1 \\ & \ddots & & \ddots & \\ 1 & & 2 & & 3 \\ & \ddots & & \ddots & \\ 1 & & 2 & & 4 \\ & & & \ddots & \\ -2 & & 0 & & -1 \end{array} \; =$$

$$= 3(\underbrace{1 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 3 - (4 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \cdot 1)}_{=0}) -$$

$$-3(\underbrace{1 \cdot 0 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot (-1) - (4 \cdot 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot (-2))}_{=-4}) =$$

$$= 12.$$

□

Na záver tohto odseku uvedieme ešte dôležité vlastnosti determinantov.

Lema 1.1 *Nech A je matica rozmeru $n \times n$. Potom* $\det(A) = 0$ *práve vtedy, keď platí $h(A) < n$, teda keď matica A nemá plnú hodnosť.*

Lema 1.2 *Nech $A = \|a_{i,k}\|$, pre $i, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, je trojuholníková matica rozmeru $n \times n$. Potom*[3] $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

1.3.2 Determinanty a riadkovo (stĺpcovo) ekvivalentné operácie

V príklade 1.6 sme videli, že výpočet determinantu rozvojom podľa niektorého riadku alebo stĺpca nie je veľmi efektívna metóda. Uvedieme teraz inú možnosť, ako počítať

[3]Symbol $\prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$ označuje súčin hodnôt $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n.n}$.

determinanty. Naprv si ukážeme, ako jednotlivé riadkové (stĺpcové) operácie ovplyvňujú hodnotu determinantu. Označme A danú štvorcovú maticu.

- Nech maticu B dostaneme z matice A výmenou dvoch riadkov (alebo stĺpcov). Potom $\det(B) = -\det(A)$.

- Nech maticu C dostaneme z matice A prenásobením i-teho riadku (alebo i-teho stĺpca) konštantou c. Potom $\det(C) = c \cdot \det(A)$.

- Nech maticu D dostaneme z matice A tak, že k i-temu riadku (stĺpcu) pripočítame c-násobok j-teho riadku (stĺpca). Potom $\det(D) = \det(A)$.

Tieto tri vlastnosti nám umožňujú upraviť maticu A pomocou riadkovo ekvivalentných operácií na trojuholníkovú a potom na výpočet determinantu využiť lemu 1.2.

Príklad 1.7 Opäť vypočítame determinant matice C z príkladu 1.6. Teraz maticu C upravíme najprv na trojuholníkovú. Poznačíme si vždy, akú operáciu sme spravili. Z toho potom odvodíme, ako sa bude meniť hodnota determinantu.

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} r_1 \\ r_2 + 2r_1 \\ r_3 - r_1 \\ r_4 - r_1 \end{array}
\sim
\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=C_1}
\begin{array}{l} r_1 \\ r_2 + r_4 \\ r_3 \\ r_4 \end{array}
\sim
$$

$$
\sim
\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=C_2}
\begin{array}{l} r_1 \\ r_2 \\ r_4 \\ r_3 \end{array}
\sim
\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=C_3}
\begin{array}{l} r_1 \\ r_3 \\ r_2 \\ r_4 \end{array}
\sim
\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=C_4}
$$

Matica C_1 vznikla pričítaním vhodného násobku prvého riadku ku zvyšným riadkom. V skutočnosti sme spravili 3 riadkovo ekvivalentné operácie odrazu. Tieto nemenia hodnotu determinantu. Z rovnakého dôvodu aj pri matici C_2 sa hodnota determinantu nezmenila. Pri matici C_3 sa zmenilo znamienko determinantu (výmena 3. a 4. riadku) a pri matici C_4 sa tiež zmenila hodnota determinantu (výmena 2. a 3. riadku). Z toho dostaneme

$$\det(C) = \det(C_1) = \det(C_2) = -\det C_3 = -(-1)\det(C_4) = 1 \cdot (-3) \cdot 4 \cdot (-1) = 12.$$

1.3.3 Cramerovo pravidlo

Ukážeme si teraz súvis medzi determinantami a riešením sústavy lineárnych rovníc. Majme sústavu lineárnych rovníc

$$\begin{array}{ccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & = & b_2 \end{array} \tag{1.9}$$

Potom, za podmienky $a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2} \neq 0$, má sústava (1.9) jednoznačné riešenie, ktoré môžeme vyjadriť v tvare

$$x_1 = \frac{b_1 a_{2,2} - b_2 a_{1,2}}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}}, \qquad x_2 = \frac{a_{1,1}b_2 - a_{2,1}b_1}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}}.$$

Označme D maticu tejto sústavy. D_1 nech označuje maticu, ktorá vznikne z D tak, že prvý stĺpec nahradíme vektorom pravých strán. D_2 nech označuje maticu, ktorá vznikne z D tak, že druhý stĺpec nahradíme vektorom pravých strán. Potom riešenie sústavy rovníc (1.9) môžeme vyjadriť v tvare

$$x_1 = \frac{\det(D_1)}{\det(D)}, \quad x_2 = \frac{\det(D_2)}{\det(D)}. \tag{1.10}$$

Tento výsledok môžeme zovšeobecniť:

Veta 1.2 (Cramerovo pravidlo). *Majme sústavu n lineárnych rovníc s n neznámymi*

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array} \tag{1.11}$$

Označme D maticu sústavy a D_j maticu, ktorá vznikne s D nahradením jej j-teho stĺpca vektorom pravých strán (pre $j \in \{1, 2, \dots, n\}$). Potom má sústava rovníc (1.11) jediné riešenie práve vtedy, keď $\det(D) \neq 0$ a toto riešenie sa dá vyjadriť v tvare $x_j = \frac{\det(D_j)}{\det(D)}$ pre $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Príklad 1.8 Vyriešte nasledujúcu sústavu lineárnych rovníc pomocou Cramerovho pravidla:

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \end{array}$$

Riešenie: Označíme

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$
$$D_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Potom

$$\det(D) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{matrix} = \begin{array}{l} 2(-2)(-1) + 1 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 3 \cdot 1 - \\ -(-3(-2)1 + 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 3) \end{array} = -9.$$

Podrobný výpočet $\det(D_1)$, $\det(D_2)$ a $\det(D_3)$ prenecháme na čitateľa. Výsledky sú

$$\det(D_1) = -12, \quad \det(D_2) = -21, \quad \det(D_3) = -15.$$

Použitím Cramerovho pravidla dostaneme riešenie sústavy rovníc

$$x_1 = \frac{-12}{-9} = \frac{4}{3}, \quad x_2 = \frac{-21}{-9} = \frac{7}{3}, \quad x_3 = \frac{-15}{-9} = \frac{5}{3}.$$

□

1.4 Aritmetické operácie s maticami

1.4.1 Súčet, násobenie matíc konštantou a transponovanie matíc

Nech $A = \|a_{i,j}\|$, $B = \|b_{i,j}\|$ sú matice rozmeru $n \times m$ a $c \in R$ je ľubovoľná konštanta.

- Potom súčet $A + B$ definujeme vzťahom

  $$A + B = \|a_{i,j} + b_{i,j}\|. \tag{1.12}$$

  Sčitovať vieme len matice rovnakých rozmerov.

- Násobenie matice konštantou, teda $c \cdot A$, definujeme

  $$c \cdot A = \|c \cdot a_{i,j}\|.$$

  Teda konštantu môžeme podľa potreby vyňať pred maticu alebo ňou prenásobiť každý prvok tejto matice.

- Transponovanie matice znamená „výmenu riadkov za stĺpce a naopak". Maticu, transponovanú k A budeme označovat' A^T. V literatúre sa používa aj označenie A'. Keď A má rozmer $n \times m$, tak A^T má rozmer $m \times n$ a platí

$$A = \|a_{i,j}\| \quad \Rightarrow \quad A^T = \|a_{j,i}\|.$$

Definícia 1.4 *Maticu A nazveme symetrickou, ak platí $A^T = A$.*

So symetrickými maticami sa ešte stretneme neskôr.

Príklad 1.9 Majme danú konštantu $c = \frac{2}{5}$ a matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Potom

$$A + B = \begin{pmatrix} 0+2 & 1+3 & 2+1 & 3+5 \\ -2+1 & 3+4 & 0-2 & 4+0 \\ 3-1 & 1-2 & 2-3 & -2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 8 \\ -1 & 7 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$c \cdot A = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{6}{5} & 0 & \frac{8}{5} \\ \frac{6}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix},$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

1.4.2 Súčin matíc

Dôležitým pojmom pri zavedení súčinu matíc je skalárny súčin vektorov.

Definícia 1.5 *Nech $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ a $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ sú n-rozmerné vektory. Potom ich skalárny súčin označíme $u \cdot v$ a zadefinujeme vzt'ahom*

$$u \cdot v = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j.$$

Poznámka 1.2 Skalárny súčin sme práve zaviedli pre riadkové vektory. Rovnakým vzt'ahom sa tento súčin dá zaviest' aj pre stĺpcové vektory i v prípade, keď je jeden vektor riadkový a druhý stĺpcový. Podstatné je, že oba vektory musia mat' rovnaký rozmer.

Definícia 1.6 *Nech $A = \|a_{i,j}\|$ je matica rozmeru $m \times n$ a $B = \|b_{k,l}\|$ je matica rozmeru $n \times s$. Označme $a_{i.}$, $b_{.l}$ i-ty riadok matice A, resp. l-tý stĺpec matice B[4]. Potom súčin matíc A a B označíme $A \cdot B$ a definujeme vzťahom*

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{1.} \cdot b_{.1} & a_{1.} \cdot b_{.2} & \cdots & a_{1.} \cdot b_{.s} \\ a_{2.} \cdot b_{.1} & a_{2.} \cdot b_{.2} & \cdots & a_{2.} \cdot b_{.s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m.} \cdot b_{.1} & a_{m.} \cdot b_{.2} & \cdots & a_{m1.} \cdot b_{.s} \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

Rozmer matice $C = A \cdot B$ je $m \times s$.

Napríklad prvok $c_{2,3}$ (teda prvok z druhého riadku a tretieho stĺpca matice C) je skalárnym súčinom vektora, ktorý vznikne z druhého riadku matice A a vektorom, vzniknutým z tretieho stĺpca matice B:

$$c_{2,3} = a_{2,1}b_{1,3} + a_{2,2}b_{2,3} + \cdots + a2, nb_{n,3}.$$

Vlastnosti súčinu matíc Nech X je matica rozmeru $i \times j$ a Y matica rozmeru $k \times m$. Potom platí:

1. Súčin $X \cdot Y$ existuje práve vtedy, keď $j = k$.
2. Ak $j = k$ a $i = m$, potom existujú súčiny $X \cdot Y$ aj $Y \cdot X$. Ale tieto súčiny sa nemusia rovnať, teda vo všeobecnosti $X \cdot Y \neq Y \cdot X$. (To znamená, že násobenie matíc nie je komutatívne.)

Niektoré ďalšie dôležité vlastnosti súčinu matíc uvádzame v nasledujúcej leme.

Lema 1.3 *Nech A, B, C sú matice rozmerov postupne $i \times j$, $j \times k$ a $k \times m$. Potom platia vzťahy*
(a) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (asociatívnosť súčinu).
(b) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.
(c) *Nech D je matica rozmeru $j \times k$. Potom*

$$(B + D) \cdot C = B \cdot C + D \cdot C. \qquad \text{(distributívnosť súčtu vzhľadom k súčinu).}$$

Príklad 1.10 Majme dané matice A a B, obe rozmeru 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

[4] Poznamenajme, že $a_{i.}$ aj $b_{.l}$ (pre $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ a $l \in \{1, 2, \ldots, s\}$) sú n-rozmerné vektory.

Vypočítame $A \cdot B$ aj $B \cdot A$. Oba súčiny budú mať rozmer 3×3. (Prečo?)

$$\begin{aligned}
A \cdot B &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \\ -2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 0 \cdot 0 & -2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) + 0 \cdot (-1) & -2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 & 3 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 8 & -12 & -2 \\ 10 & 5 & 7 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B \cdot A &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \\ 4 \cdot 0 - 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 3 & 4 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 & 4 \cdot 2 - 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 & 0 \cdot 1 - 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 2 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -3 & 12 & 6 \\ 4 & -2 & 8 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Vidíme, že $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Príklad 1.11 Majme danú maticu A rozmeru 3×2 a B rozmeru 2×4

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vypočítame $A \cdot B$. Tento súčin bude mať rozmer 3×4. Súčin $B \cdot A$ pre dané matice neexistuje (Prečo?).

$$
\begin{aligned}
A \cdot B &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0\cdot 2+1\cdot 4 & 0\cdot 3+1\cdot(-2) & 0\cdot 1+1\cdot 0 & 0\cdot 0+1\cdot(-1) \\ 2\cdot 2+3\cdot 4 & 2\cdot 3+3\cdot(-2) & 2\cdot 1+3\cdot 0 & 2\cdot 0+3\cdot(-1) \\ 4\cdot 2+2\cdot 4 & 4\cdot 3+2\cdot(-2) & 4\cdot 1+2\cdot 0 & 4\cdot 0+2\cdot(-1) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & -1 \\ 16 & 0 & 2 & -3 \\ 16 & 8 & 4 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Dôležitú úlohu pri súčine matíc má tzv. *jednotková matica*, ozn. I, ktorá je štvorcová rozmeru $n \times n$. Pre konkrétne n má matica I tvar

$$
\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.14}
$$

Lema 1.4 *Pre ľubovoľné m, n nech A, B, C sú matice, ktorých rozmery sú postupne $m \times n$, $n \times n$ a $n \times m$. Ďalej nech* I *je jednotková matica rozmeru $n \times n$. Potom platí*

$$
A \cdot \mathrm{I} = A, \quad B \cdot \mathrm{I} = \mathrm{I} \cdot B = B, \quad \mathrm{I} \cdot C = C.
$$

Teda matica I hrá pri násobení matíc rovnakú úlohu ako 1 pri násobení reálnych čísel.

1.4.3 Inverzné matice

Nech matica A je rozmeru $n \times n$. Potom existuje *inverzná matica* k A, ozn. A^{-1}, práve vtedy, keď platí

$$
A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathrm{I}. \tag{1.15}
$$

Vzťah (1.15) hovorí, že matice A a A^{-1} sú si navzájom inverzné, to znamená, že platí $(A^{-1})^{-1} = A$. Matica A^{-1} ma takisto rozmer $n \times n$.

Lema 1.5 *Nech A je matica rozmeru $n \times n$. Inverzná matica A^{-1} existuje práve vtedy, keď* $\det(A) \neq 0$.

Podľa lemy 1.1 inverzná matica A^{-1} existuje práve vtedy, keď A má plnú hodnosť. Na výpočet matice A^{-1} môžeme použiť rovnicu $A \cdot A^{-1} = \mathrm{I}$, ktorá sa dá vyjadriť ako sústava n^2 lineárnych rovníc s n^2 neznámymi. Táto sústava sa však bude dať dosť výrazne zjednodušiť. Ilustrujeme si to na nasledujúcom príklade.

Príklad 1.12 Nájdite inverznú maticu k A, keď

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Riešenie: Riešime rovnicu $A \cdot A^{-1} = \mathrm{I}$. Prvky matice A^{-1} si označíme $x_{i,j}$. Potom prepisom uvedeného súčinu matíc dostaneme sústavu 9 rovníc, ktorá v skutočnosti predstavuje tri samostatné sústavy rovníc, z ktorých každá má 3 rovnice a 3 neznáme. Tieto tri sústavy dostaneme tak, keď budeme postupne násobiť maticu A jednotlivými stĺpcami hľadanej inverznej matice

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x_{1,1} & + & 0x_{2,1} & + & 3x_{3,1} & = & 1 \\ 1x_{1,1} & + & 4x_{2,1} & - & 2x_{3,1} & = & 0 \\ 0x_{1,1} & + & 2x_{2,1} & + & 1x_{3,1} & = & 0 \end{array}\right\} \tag{1.16}$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x_{1,2} & + & 0x_{2,2} & + & 3x_{3,2} & = & 0 \\ x_{1,2} & + & 4x_{2,2} & - & 2x_{3,2} & = & 1 \\ 0x_{1,2} & + & 2x_{2,2} & + & 1x_{3,2} & = & 0 \end{array}\right\} \tag{1.17}$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x_{1,3} & + & 0x_{2,3} & + & 3x_{3,3} & = & 0 \\ 1x_{1,3} & + & 4x_{2,3} & - & 2x_{3,3} & = & 0 \\ 0x_{1,3} & + & 2x_{2,3} & + & 1x_{3,3} & = & 1 \end{array}\right\} \tag{1.18}$$

Matica A je maticou všetkých troch sústav rovníc. Na riešenie týchto sústav môžeme použiť Gaussovu eliminačnú metódu alebo Cramerovo pravidlo.

(a) Riešenie pomocou Gaussovej eliminačnej metódy Tieto tri sústavy budeme riešiť odrazu. Jednotlivé neznáme sústav (1.16), (1.17), (1.18) predstavujú postupne stĺpce matice A^{-1}. To znamená, že keď upravíme rozšírenú maticu týchto sústav na redukovaný Gaussov tvar, na pravej strane („za čiarou") budeme mať maticu A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_2 \\ r_1 \\ r_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_1 \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 7 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_1 - 2r_3 \\ r_2 + 4r_3 \\ r_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -4 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 11 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_1 \\ r_3 \\ r_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -4 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_1 \\ r_2 \\ \frac{r_3}{11} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -4 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{4}{11} \end{array}\right) \begin{array}{l} r_1 + 4r_3 \\ r_2 - r_3 \\ r_3 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{3}{11} & -\frac{6}{11} \\ 0 & 2 & 0 & -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} & \frac{7}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{4}{11} \end{array}\right) \begin{array}{l} r_1 \\ \frac{r_2}{2} \\ r_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{3}{11} & -\frac{6}{11} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{22} & \frac{2}{22} & \frac{7}{22} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{4}{11} \end{array}\right).$$

Riešenie je:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} & -\frac{6}{11} \\ -\frac{1}{22} & \frac{2}{22} & \frac{7}{22} \\ \frac{1}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{4}{11} \end{pmatrix}.$$

Schématicky môžeme výpočet inverznej matice pomocou Gaussovej eliminačnej metódy zapísať takto:

$$\text{Ak } A \text{ má rozmer } n \times n \text{ a } h(A) = n, \text{ tak platí} \quad (A|\mathrm{I}) \sim \left(\mathrm{I}|A^{-1}\right). \tag{1.19}$$

(b) Riešenie pomocou Cramerovho pravidla Vektory pravých strán sústav rovníc (1.16), (1.17) a (1.18) sú postupne stĺpcové vektory $b_1^T = (1, 0, 0)$, $b_2^T = (0, 1, 0)$ a $b_3^T = (0, 0, 1)$. To znamená, že keď počítame neznámu $x_{i,j}$, tak vektor pravých strán príslušnej sústavy rovníc je b_j. Keď v matici A nahradíme i-ty stĺpec vektorom b_j, determinant tejto matice môžeme počítať rozvojom podľa i-teho stĺpca. Označme $A_{i,j}$ maticu, ktorá vznikne z A vynechaním i-teho riadku a j-teho stĺpca. Potom z Cramerovho pravidla dostaneme vzťah

$$x_{i,j} = (-1)^{i+j} \frac{\det(A_{j,i})}{\det(A)}. \tag{1.20}$$

Napríklad prvok $x_{3,1}$ počítame zo sústavy rovníc (1.16), pričom vektor pravých strán je b_1. Z toho dostaneme

$$x_{3,1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \cdot 1(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{\det(A_{1,3})}{\det(A)}.$$

$$\begin{array}{lll} \det(A) = 22 & & \\ \det(A_{1,1}) = 8 & \det(A_{1,2}) = 1 & \det(A_{1,3}) = 2 \\ \det(A_{2,1}) = -6 & \det(A_{2,2}) = 2 & \det(A_{2,3}) = 4 \\ \det(A_{3,1}) = -12 & \det(A_{3,2}) = -7 & \det(A_{3,3}) = 8 \end{array}$$

Dosadením vypočítaných hodnôt do vzorca (1.20) dostaneme inverznú maticu A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 8 & 6 & -12 \\ -1 & 2 & 7 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

□

Zo vzťahu (1.20) dostaneme nasledujúce tvrdenie.

Veta 1.3 *Nech A je matica rozmeru $n \times n$ a predpokladajme, že má plnú hodnosť. Potom inverzná matica A^{-1} existuje a platí*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\frac{\det(A_{1,1})}{\det(A)} & (-1)^{1+2}\frac{\det(A_{2,1})}{\det(A)} & \cdots & (-1)^{1+n}\frac{\det(A_{n,1})}{\det(A)} \\ (-1)^{2+1}\frac{\det(A_{1,2})}{\det(A)} & (-1)^{2+2}\frac{\det(A_{2,2})}{\det(A)} & \cdots & (-1)^{2+n}\frac{\det(A_{n,2})}{\det(A)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1}\frac{\det(A_{1,n})}{\det(A)} & (-1)^{n+2}\frac{\det(A_{2,n})}{\det(A)} & \cdots & (-1)^{n+n}\frac{\det(A_{n,n})}{\det(A)} \end{pmatrix},$$

kde $A_{i,j}$ označuje maticu, ktorá vznikne z A vynechaním i-teho riadku a j-teho stĺpca.

Špeciálne, keď $A = \|a_{i,j}\|$, pre $i, j \in \{1, 2\}$, je matica s plnou hodnosťou, tak dostaneme vzťah

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a_{2,2}}{\det(A)} & -\frac{a_{1,2}}{\det(A)} \\ -\frac{a_{2,1}}{\det(A)} & \frac{a_{1,1}}{\det(A)} \end{pmatrix}.$$

1.4.4 Maticové operácie a determinanty

Dáme si do súvisu niektoré maticové operácie a výpočet determinantov. Budeme predpokladať, že A, B sú štvorcové matice rovnakého rozmeru $n \times n$. Potom platí

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B). \tag{1.21}$$

Bezprostredne zo vzťahu (1.21) dostaneme, že ak má matica A plnú hodnosť, tak platí

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}. \tag{1.22}$$

Nech $c \in \mathbf{R}$ je ľubovoľná konštanta. Potom platí

$$\det(cA) = c^n \det(A). \tag{1.23}$$

Ako dostaneme vzťah (1.23)? Keď násobíme riadok matice konštantou c, vieme, že rovnako sa zmení aj determinant. Hodnota cA znamená, že každý riadok násobíme konštantou c a riadkov je n. Z toho vyplýva (1.23).

$$\det(A) = \det(A^T). \tag{1.24}$$

Posledný vzťah hovorí, že pri výpočte determinantu môžeme používať riadkové a stĺpcové operácie ekvivalentne.

1.4.5 Maticové rovnice

Maticové rovnice majú bezprostrednú geometrickú interpretáciu. Túto interpretáciu si ukážeme neskôr. Základný tvar maticovej rovnice je

$$A \cdot X = B \quad \text{alebo} \quad X \cdot A = B,$$

kde A, B sú známe a X je neznáma matica. Nech A je štvorcová matica s plnou hodnosťou a rozmerom $n \times n$.

- Predpokladajme, že rozmer matice B je $n \times m$ (m môže byť ľubovoľné číslo). Potom platí

  $$A \cdot X = B \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

  Z toho dostaneme riešenie

  $$X = A^{-1} \cdot B. \tag{1.25}$$

- Predpokladajme, že rozmer matice B je $m \times n$. Potom platí

  $$X \cdot A = B \quad \Leftrightarrow \quad X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}.$$

  Z toho dostaneme riešenie

  $$X = B \cdot A^{-1}. \tag{1.26}$$

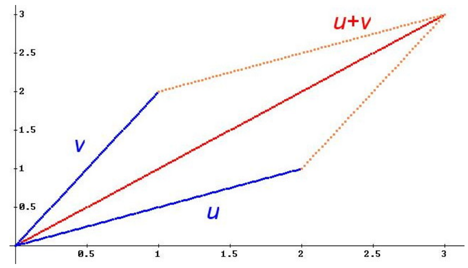
1.5 Analytická geometria

Analytická geometria je rozsiahla disciplína. Cieľom tejto časti je spraviť stručný prehľad vzťahov medzi bodom, priamkou a rovinou. Najprv zavedieme operácie s vektormi.

1.5.1 Základy vektorového počtu

Ako sme už uviedli v časti Matice a vektory, vektory sú špeciálne matice. Z toho vyplývajú aj niektoré operácie s vektormi. Majme dané n-rozmerné vektory $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ a $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

- *Súčet vektorov* (ako špeciálnych prípadov matíc) je daný vzťahom (1.12).



Obr. 1.1. Grafické vyjadrenie súčtu vektorov

Graficky (v dvojrozmernom prípade) vektory sčítame tak, že ich doplníme na rovnobežník a ich súčtom je uhlopriečka, ktorá začína v rovnakom vrchole, ako vektory u a v (pozri obr. 1.1).

- *Dĺžka vektora* u, ozn. $\|u\|$, je definovaná vzťahom

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}.$$

- *Skalárny súčin vektorov* sme už zaviedli v definícii 1.5. Keď označíme α uhol, ktorý zvierajú vektory u, v, tak dostaneme ďalší dôležitý vzťah pre skalárny súčin týchto vektorov

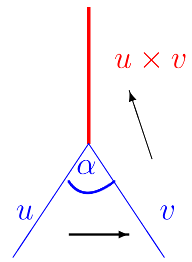
$$u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos \alpha. \tag{1.27}$$

Z rovnice (1.27) vyplýva, že nenulové vektory u a v sú na seba kolmé práve vtedy, keď $u \cdot v = 0$. V prípade dvojrozmerného vektora $u = (u_1, u_2)$ z toho dostaneme, že vektor u je kolmý na vektor $(u_2, -u_1)$ (a jeho ľubovoľný nenulový násobok).

- *Vektorový súčin* je, na rozdiel od skalárneho súčinu, vektor. Tento typ súčinu existuje len v trojrozmernom priestore. Označme $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ jednotkové vektory v smere osí x, y, z, teda $\vec{\imath} = (1, 0, 0)$, $\vec{\jmath} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Potom vektorový súčin u a v označíme $u \times v$ a definujeme vzťahom

$$\begin{aligned} u \times v &= \det \begin{pmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \qquad (1.28) \\ &= \vec{\imath}(u_2 v_3 - u_3 v_2) + \vec{\jmath}(u_3 v_1 - u_1 v_3) + \vec{k}(u_1 v_2 - u_2 v_1). \end{aligned}$$

Geometricky vektor $u \times v$ predstavuje vektor, ktorý je kolmý na u aj v a orientovaný v *kladnom zmysle*, teda keď prsty pravej ruky ukazujú smer od vektora u k v, tak palec ukazuje smer (orientáciu) vektorového súčinu. Hovoríme, že systém vektorov $(u, v, u \times v)$ je prvotočivý. To znamená $u \times v = -v \times u$.



Obr. 1.2. Vektorový súčin $u \times v$. Šípky vyjadrujú jeho pravotočivý charakter.

Pre dĺžku vektorového súčinu platí vyjadrenie

$$\|u \times v\| = \|u\|\|v\| \sin \alpha, \tag{1.29}$$

kde α je menší z uhlov, ktoré zvierajú vektory u a v, teda $\alpha \in [0, \pi]$.

Definícia 1.7 *Nech $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sú dané vektory. Hovoríme, že tieto vektory sú lineárne závislé ak, existujú čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$, z ktorých aspoň jedno je rôzne od nuly, také že platí*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = \vec{0}, \quad \text{kde } \vec{0} \text{ je nulový vektor.}$$

V opačnom prípade hovoríme, že $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sú lineárne nezávislé.

Lema 1.6 *Majme vektory $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Z týchto vektorov zostavíme maticu X (vektory v_i budú tvoriť riadky, resp. stĺpce matice X). Potom vektory $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sú lineárne nezávislé práve vtedy, keď pre hodnosť matice X platí $h(X) = n$.*

1.5.2 Analytická geometria v rovine

Ukážeme rôzne možnosti vyjadrenia priamky v rovine, popíšeme vzťahy medzi bodom a priamkou a medzi dvoma priamkami.

Vyjadrenie priamky v rovine

Majme daný bod $A = (x_0, y_0)$ (ležiaci na priamke p) a smerový vektor $u = (u_x, u_y)$ priamky p. Potom priamku p môžeme vyjadriť nasledujúcimi spôsobmi:

- **Parametrické rovnice** Jej parametrické vyjadrenie je

$$p: \begin{array}{rl} x = & x_0 + s \cdot u_x \\ y = & y_0 + s \cdot u_y \end{array} \quad s \in \mathbb{R}.$$

- **Všeobecná rovnica** Normálový vektor (ozn. n) je kolmý na smerový, teda dá sa vyjadriť v tvare $n = (u_y, -u_x)$. Z tohto vyjadrenia dostaneme všeobecnú rovnicu priamky p. Jej tvar je

  $$a \cdot x + b \cdot y + c = 0, \qquad \text{kde } n = (a, b)$$

  Koeficient c vypočítame tak, že bod A dosadíme do rovnice priamky.

- **Smernicový tvar** rovnice priamky p dostaneme zo všeobecnej rovnice vyjadrením premennej y (ak $b \neq 0$):

  $$p: \qquad y = -\frac{a}{b}\,x - \frac{c}{b} \quad \text{teda} \quad y = \frac{u_y}{u_x}\,x + \frac{c}{u_x}$$

  Označenie: $k = \frac{u_y}{u_x}$, $\quad q = \frac{c}{u_x}$. Alternatívne

  $$y - y_0 = k(x - x_0)$$

  - Číslo k sa volá *smernica priamky* p a rovná sa $k = \operatorname{tg}\alpha$, kde α je uhol, ktorý zviera priamka p s kladnou poloosou o_x, meraný v kladnom zmysle (proti smeru hodinových ručičiek).
  - Číslo q sa volá *úsek priamky* p a rovná sa y-ovej súradnici prieniku priamky s osou o_y.

Parametrickými rovnicami a všeobecnou rovnicou môžeme vyjadriť ľubovoľnú priamku. V smernicovom tvare môžeme vyjadriť priamku, ktorá nie je kolmá na os o_x.

Príklad 1.13 Majme bod $A = (1, 3)$ a smerový vektor $u = (-2, 5)$. Potom parametrické vyjadrenie priamky p je

$$p: \begin{array}{rl} x = & 1 - 2s, \\ y = & 3 + 5s, \end{array} \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Normálový vektor k priamke p je $n = (5, 2)$. Z toho dostaneme všeobecnú rovnicu priamky $p : 5x+2y+c = 0$. Využijeme, že $A \in p$ a vypočítame hodnotu $c : 5+2\cdot 3 = -c$. Dosadením do rovnice dostaneme

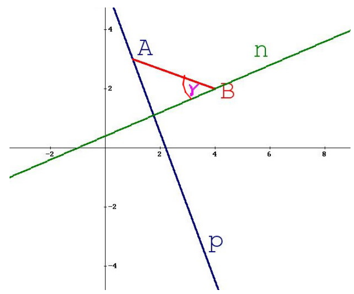
$$p: \ 5x + 2y - 11 = 0.$$

V smernicovom tvare sa priamka p dá vyjadriť

$$y = -\frac{5}{2}x + \frac{11}{2} \quad \text{alebo} \quad y = -\frac{5}{2}\left(x - \frac{11}{5}\right).$$

Vzdialenosť bodu od priamky

Príklad 1.14 Daná je priamka $p: 5x + 2y - 11 = 0$ a bod $B = (4, 2)$. Vypočítajte vzdialenosť bodu B od priamky p, ozn. $\|Bp\|$.



Obr. 1.3. Priamka p, priamka n, komá na p a bod B

Riešenie: Zvolíme si bod, ležiaci na priamke p, napr. $A = (1, 3)$. Poznáme normálový vektor $n = (5, 2)$. Potom $\vec{AB} = B - A = (3, -1)$. Pre vzdialenosť $\|Bp\|$ platí

$$\begin{aligned} \|Bp\| &= \|\vec{AB}\| \cos\gamma = \|\vec{AB}\| \frac{|\vec{AB} \cdot n|}{\|\vec{AB}\| \cdot \|n\|} = \frac{|\vec{AB} \cdot n|}{\|n\|} = \\ &= \frac{3 \cdot 5 - 2}{\sqrt{25 + 4}} = \frac{13}{\sqrt{29}} \end{aligned} \tag{1.30}$$

Vzťah (1.30) môžeme zovšeobecniť do nasledujúcej lemy.

Lema 1.7 *Majme danú priamku $p: ax + by + c = 0$ a bod $B = (x_b, y_b)$. Potom vzdialenosť bodu B od priamky p sa rovná*

$$\|Bp\| = \frac{|a \cdot x_b + b \cdot y_b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

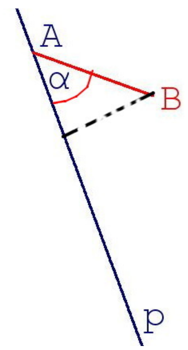
1.5.3 Analytická geometria v trojrozmernom priestore

Priamka a bod

Priamka v priestore má len parametrické vyjadrenie.[5] Keď je priamka p zadaná bodom A a smerovým vektorom v, tak vzdialenosť bodu B od priamky p vypočítame ako $\|Bp\| =$

[5] V niektorých učebniciach sa zavádza aj všeobecné vyjadrenie priamky ako prienik dvoch rovín. V skutočnosti, v tomto prípade ide o nedourčenú sústavu lineárnych rovníc a jej riešenie (pokiaľ existuje) je opäť parametrické vyjadrenie priamky.

$= \|\vec{AB}\| \sin\alpha$, kde α je uhol medzi smerovým vektorom v a vektorom $\vec{AB}$ (pozri obr. 1.4). Zo vzťahu (1.29) dostaneme



Obr. 1.4. Vzdialenosť bodu od priamky

$$\|Bp\| = \|\vec{AB}\| \frac{\|v \times \vec{AB}\|}{\|v\|\|\vec{AB}\|} = \frac{\|v \times \vec{AB}\|}{\|v\|}. \tag{1.31}$$

Príklad 1.15 Priamka p je daná bodom $A = (1, 2, 3) \in p$ a jej smerový, vektorom $v = (-1, 0, -3)$. Určte vzdialenosť priamky p a bod $B = (2, -3, 4)$.

Riešenie: Priamka p má parametrické vyjadrenie

$$p: \ x = 1 - 2s, \quad y = 2, \quad z = 3 - 3s, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Ďalej $\vec{AB} = (1, -5, 1)$. Využijúc vektorový súčin, dostaneme

$$\begin{aligned} v \times \vec{AB} &= \det \begin{pmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix} = (-15, -2, 5), \\ \|v \times \vec{AB}\| &= \|(-15, -2, 5)\| = \sqrt{15^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{254}, \\ \|v\| &= \|(-1, 0, -3)\| = \sqrt{1 + 3^2} = \sqrt{10}. \end{aligned}$$

Potom z výrazu (1.31) vyplýva $\|Bp\| = \sqrt{\frac{254}{10}}$. □

Rovina a bod

Majme rovinu ρ, danú bodom $A = (a_x, a_y, a_z)$ a smerovými vektormi v, u, ktoré sú lineárne nezávislé. Rovina ρ má dva základné spôsoby vyjadrenia.

- **Parametrické vyjadrenie** je dané rovnicami

$$\begin{aligned} \rho: \quad x &= a_x + v_x \cdot s + u_x \cdot t, \\ y &= a_y + v_y \cdot s + u_y \cdot t, \qquad s, t \in \mathbb{R}. \\ z &= a_z + v_z \cdot s + u_z \cdot t, \end{aligned}$$

- **Všeobecná rovnica** je daná normálovým vektorom $n = u \times v = (a, b, c)$ a bodom $A \in \rho$. Potom analogicky ako pri všeobecnej rovnici priamky v rovine (teda v dvojrozmernom priestore), dostaneme

$$\rho: \ ax+by+cz+d = 0, \quad \text{a z toho, že } A \in \rho \text{, dostaneme} \quad d = -a \cdot a_x - b \cdot a_y - c \cdot a_z.$$

Príklad 1.16 Nech $A = (1, -2, 0)$, $v = (2, -1, 4)$, $u = (0, 3, -2)$. Potom

$$\begin{aligned} \rho: \quad x &= 1 + 2s, \\ y &= -2 - s + 3t, \qquad s, t \in \mathbb{R}. \\ z &= 4s - 2t, \end{aligned}$$

$$v \times u = \det \begin{pmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} = (-10, 4, 6).$$

Teda

$$\begin{aligned} \rho: & \qquad -10x + 4y + 6z + d = 0, \\ A \in \rho \ \Rightarrow & \qquad -10 - 2 \cdot 4 + 0 + d = 0. \\ \rho: & \qquad -10x + 4y + 6z + 18 = 0. \end{aligned}$$

Vzorec pre vzdialenosť bodu od roviny môžme odvodiť podobne ako sme odvodili pre vzdialenosť bodu od priamky v dvojrozmernom priestore (vzorec (1.30)).

Nech sú dané bod $B = (b_x, b_y, b_z)$ a rovina $\rho: ax + by + cz + d = 0$. Potom

$$\|B\rho\| = \frac{|a \cdot b_x + b \cdot b_y + c \cdot b_z + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \tag{1.32}$$

Príklad 1.17 Nech $B = (3, 3, -1)$ a rovina $\rho: \ x - 2y + 5z + 4 = 0$. Potom vzdialenosť $\|B\rho\|$ je

$$\|B\rho\| = \frac{|3 - 2 \cdot 3 - 5 + 4|}{\sqrt{1 + 4 + 25}} = \frac{4}{\sqrt{30}}.$$

Dve priamky

Pre určenie vzťahu (vzájomnej polohy) dvoch priamok je najzaujímavejšia ich vzdialenosť.

Definícia 1.8 *Nech p a q sú priamky trojrozmernom priestore. Potom p a q voláme mimobežkami, ak nie sú rovnobežné ani nemajú spoločný bod.*

Na príklade si ilustrujeme, ako zistíme, že dané priamky sú mimobežky a vypočítame ich vzdialenosť.

Príklad 1.18 Nech p a q sú priamky, ktorých parametrické vyjadrenia sú

$$\begin{array}{llll} p: & x = 3t+1 \qquad q: & x = 2s+2 & \\ & y = t-2 & y = s-3 & s,t \in \mathbb{R}. \\ & z = t+3 & z = -s & \end{array}$$

Overíme, že p a q sú mimobežky a vypočítame ich vzdialenosť. Vzdialenosť priamok p, q budeme označovať $\|pq\|$.

(a) Zistíme prienik $p \cap q$, teda nájdeme riešenie sústavy rovníc

$$3t+1 = 2s+2, \quad t-2 = s-3, \quad t+3 = -s.$$

$$\left(\begin{array}{rr|r} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & 10 \end{array}\right)$$

Vidíme, že sústava rovníc nemá riešenie, lebo z druhej rovnice dostaneme $s = -1$ a z tretej $s = -2$. Ešte potrebujeme overiť, že priamky p a q nie sú rovnobežné. Pre rovnobežné priamky platí, že smerové vektory sú lineárne závislé (inými slovami, smerový vektor jednej z priamok je násobkom smerového vektora druhej priamky). Vytvoríme maticu, ktorej riadky budú tvoriť smerové vektory priamok p a q. Potom dostaneme

$$h\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2.$$

To znamená, že p a q sú momobežné priamky. Vypočítame ich vzdialenosť.

(b) Určenie vzdialenosti mimobežiek

1. Napíšeme rovnicu takej roviny ρ, pre ktorú platí $p \in \rho$ a $q \parallel \rho$.

2. Vezmeme ľubovoľný bod $B \in q$ a vypočítame vzdialenosť $\|B\rho\| = \|pq\|$.

Rovina ρ má smerové vektory $u = (3,1,1)$, $v = (2,1,-1)$ a z toho, že $p \in \rho$, dostaneme $A = (1,-2,3) \in \rho$. Určíme normálový vektor n k rovine ρ:

$$n = u \times v = \det\begin{pmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (-2,5,1).$$

Pre všeobecnú rovnicu roviny ρ dostaneme vzťah $-2x + 5y + z + d = 0$ a dosadením súradníc bodu A dostaneme $d = 9$ (overte). Zvolíme bod $B \in q$, napr. $B = (2, -3, 0)$. Pre vzdialenosť $\|B\rho\|$ platí

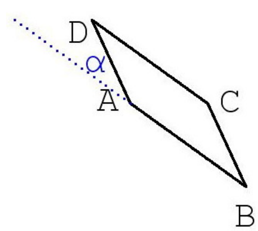
$$\|B\rho\| = \frac{|-2 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) + 1 \cdot 0 + 9|}{\sqrt{(-2)^2 + 5^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{10}{3}} = \frac{\sqrt{30}}{3}.$$

1.5.4 Obsahy rovnobežníkov a objemy rovnobežnostenov

Tieto typy úloh si ilustrujeme na príkladoch.

Príklad 1.19 Majme rovnobežník $ABCD$ daný vrcholmi $A = (1, 2)$, $B = (4, 0)$, $D = (0, 4)$. Vypočítajte jeho obsah P_{ABCD} a súradnicu vrchola C.
Riešenie: Z rovnobežnosti protiľahlých strán dostaneme $C - D = B - A$. Z toho

$$C = B - A + D = (3, 2).$$



Obr. 1.5. Rovnobežník $ABCD$

Rovnobežník môžeme vnoriť do trojrozmerného priestoru (pridaním tretej súradnice rovnej 0). Potom

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AD}\| \cdot \sin\alpha, \\ \sin\alpha &= \frac{\|\vec{AB} \times \vec{AD}\|}{\|AB\| \cdot \|AD\|} \end{aligned}$$

a z toho dostaneme výsledný vzorec

$$P_{ABCD} = \|\vec{AB} \times \vec{AD}\|. \tag{1.33}$$

$\vec{AB} = B - A = (3, -2, 0)$, $\vec{AD} = D - A = (-1, 2, 0)$, teda

$$\|\vec{AB} \times \vec{AD}\| = \left\| \det \begin{pmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \vec{k} \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right\| = 8.$$

Všimnime si, že obsah rovnobežníka $ABCD$ sme vypočítali ako absolútnu hodnotu determinantu matice (rozmeru 2×2), kde v 1. riadku je vektor $\vec{AB}$ a v 2. riadku vektor $\vec{AD}$.

Príklad 1.20 Vypočítajte jeho objem V rovnobežnostena $ABCDEFGH$, ktorý je daný vrcholmi $A = (1,1,1)$, $B = (2,1,4)$, $D = (0,3,2)$, $E = (1,5,5)$.

Riešenie: Z príkladu 1.19 už vieme, že obsah podstavy, P_{ABCD}, vypočítame ako veľkosť vektorového súčinu $\vec{AB} \times \vec{AD}$. Potom $V = \|\vec{AB} \times \vec{AD}\| \cdot v$, kde v je telesová výška. Označme $\vec{AB} \times \vec{AD} = \vec{n}$.

Obr. 1.6. Vektory $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{AE}$ a vektory $\vec{AE}$ a $\vec{n}$

$$v = \|\vec{AE}\| \cdot |\cos\varepsilon| = \|\vec{AE}\| \cdot \frac{|\vec{AE} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{AE}\| \cdot \|\vec{n}\|}$$

$$V = \left\|\vec{AB} \times \vec{AD}\right\| \cdot \|\vec{AE}\| \cdot \frac{|\vec{AE} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{AE}\| \cdot \|\vec{n}\|} = \left|\vec{AE} \cdot \vec{n}\right|$$

$$\vec{AB} = (1,0,3),\ \ \vec{AD} = (-1,2,1),\ \ \vec{AE} = (0,4,4).$$

$$\Rightarrow \quad V = \left|(0,4,4) \cdot \det \begin{pmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\det \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right| = |-8| = 8$$

Pri úpravách práve odvodeného vzťahu sme využili definíciu skalárneho súčinu. To znamená, že objem rovnobežnostena môžeme taktiež počítať ako absolútnu hodnotu determinantu matice 3×3, kde po riadkoch sú zapísané súradnice vektorov $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{AE}$.

1.6 Lineárne transformácie

V tejto časti budeme pracovať so stĺpcovými vektormi. Nech T je daná matica rozmeru $n \times m$ a v je m-rozmerný stĺpcový vektor. Potom

$$T \cdot v = w, \quad \text{kde } w \text{ je } n\text{-rozmerný vektor.}$$

To znamená, že vektor v sa transformoval na w. Keď si premyslíme, ako je definovaný súčin matíc, dostaneme dôležitú vlastnosť tejto transformácie:
Pre ľubovoľné vektory u_1, u_2 a ľubovoľné čísla $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ platí:

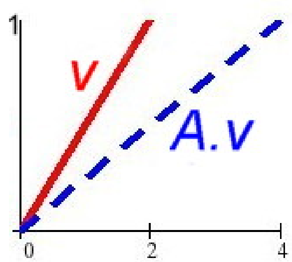
$$T(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1Tu_1 + c_2Tu_2 \tag{1.34}$$

Definícia 1.9 *Transformácia T vektorového priestoru W do vektorového priestoru $\tilde{W}$ sa volá lineárna, ak pre ľubovoľné vektory $u_1, u_2 \in W$ a ľubovoľné čísla $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ platí vzťah (1.34) a navyše ak pre každý vektor $u \in W$ jeho transformácia Tu je z priestoru $\tilde{W}$.*

Každá matica reprezentuje nejakú lineárnu transformáciu.

Príklad 1.21 Majme maticu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ a vektor $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Potom

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Obr. 1.7. Vektory v a $A \cdot v$

1.6.1 Lineárne transformácie a maticové operácie

Lineárne transformácie a súčin matíc

Nech A je daná matica rozmeru $k \times m$, B matica rozmeru $n \times k$ a v nech je m-rozmerný vektor. Potom

$$B \cdot (\underbrace{A \cdot v}_{=w}) = \underbrace{B \cdot w}_{=u} = (B \cdot A)v = u$$

To znamená, že súčin matíc predstavuje skladanie transformácií.

Príklad 1.22 Majme matice A, B a vektor v dané nasledovne

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \ v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Potom

$$w = A \cdot v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u = B \cdot w = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(B \cdot A) \cdot v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Inverzné matice a inverzné transformácie

Majme transformáciu, danú maticou A, ku ktorej existuje inverzná matica A^{-1}. Keď zložíme transformáciu A s A^{-1}, dostaneme

$$A^{-1} \cdot (\underbrace{A \cdot v}_{=w}) = A^{-1} \cdot w = (A^{-1} \cdot A) \cdot v = I \cdot v = v.$$

To znamená, že inverzná matica predstavuje inverznú transformáciu.

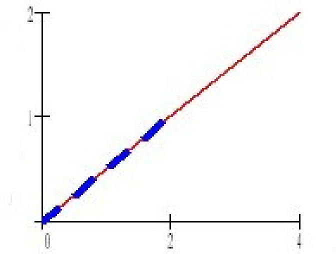
Príklad 1.23 Majme maticu $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Potom $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Majme vektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ a transformujme postupne

$$A \cdot v = w = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} \cdot w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Príklad 1.24 Nech $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Potom A^{-1} neexistuje, lebo $h(A) = 1$. Transformujme vektory $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vektory u a v sú lineárne nezávislé.

$$A \cdot u = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A \cdot v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Transformované vektory sú lineárne závislé.



Obr. 1.8. Transformované vektory $A \cdot u$ a $A \cdot v$

Lema 1.8 *Nech A je matica rozmeru $n \times m$ s hodnosťou $h(A) = k$. Nech $u_1, u_2, \ldots, u_j$ sú m-rozmerné vektory a nech $j > k$. Potom vektory $A \cdot u_1, a \cdot u_2, \ldots, A \cdot u_j$ sú lineárne závislé.*

1.6.2 Lineárne transformácie a maticové rovnice

Ukážeme si geometrickú interpretáciu maticových rovníc. Majme dané matice A, B a X, ktorých rozmery sú také, že rovnica $A \cdot X = B$, resp. $X \cdot A = B$ má zmysel (to znamená, že súčin $A \cdot X$, resp. $X \cdot A$ sa dá vypočítať a rozmer súčinu je zhodný s rozmerom matice B).

- Nech A predstavuje maticu lineárnej transformácie a nech $u_1, \ldots, u_n$ sú neznáme vektory, ktoré máme transformovať pomocou A. Označme $A \cdot u_i = v_i$ (pre $i = = 1, 2, \ldots, n$). Predpokladajme, že poznáme vektory v_i a tieto tvoria postupne stĺpce matice B. Potom rovnica

  $$A \cdot X = B$$

  je maticovým vyjadrením tejto transformácie. Hľadané vektory $u_1, \ldots, u_n$ tvoria stĺpce matice X.

- Predpokladajme, že poznáme vektory $u_1, \ldots, u_n$, ktoré máme transformovať, ako aj vektory $v_1, \ldots, v_n$, ktoré predstavujú výsledok transformácie, ale nepoznáme maticu tejto transformácie. Potom z maticovej rovnice

  $$X \cdot A = B$$

  môžeme určiť hľadanú maticu transformácie X.

1.6.3 Niektoré špeciálne transformácie

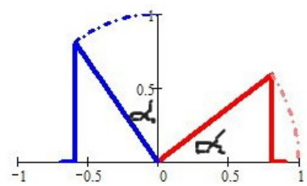
Budeme sa zaoberať len transformáciami dvojrozmerného priestoru do dvojrozmerného, teda transformáciami, ktoré sa dajú reprezentovať maticami rozmeru 2×2. Pre maticu

$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ platí

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \end{pmatrix}, \quad A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Preto, keď potrebujeme nájsť maticu nejakej transformácie, stačí nám zistiť, ako sa transformujú vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Matica otočenia o uhol α



Obr. 1.9. Otočenie o uhol α

Pod otočením o uhol α budeme rozumieť otočenie v kladnom zmysle, teda proti smeru hodinových ručičiek. Keď otočíme vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ o uhol α, dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Z toho, keď hľadanú maticu otočenia označíme O_α, tak dostaneme

$$O_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{1.35}$$

Vlastnosti matice otočenia $O_\alpha = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$:

(O1) vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ je kolmý na vektor $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$,

(O2) $\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\| = 1$

(O3) ${O_\alpha}^T \neq O_\alpha$, teda matica O_α nie je symetrická.

Lema 1.9 *Nech A je matica rozmeru 2×2. Potom A predstavuje maticu otočenia práve vtedy, keď spĺňa vlastnosti* **(O1)-(O3)**.

Keď otočíme vektory o uhol α, tak inverzná transformácia je otočenie o uhol $-\alpha$. Z formuly (1.35) dostaneme $O_{-\alpha} = {O_\alpha}^T$. Z toho dostávame nasledujúce tvrdenie.

Lema 1.10 *Nech O_α je matica otočenia o uhol α. Potom*

$$O_\alpha^{-1} = O_{-\alpha} = {O_\alpha}^T.$$

Príklad 1.25 Napíšte maticu otočenia o uhol $\frac{2}{3}\pi$ a otočte vektory $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ a $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Riešenie:
$\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}$, $\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Z toho dostaneme maticu otočenia $O_{\frac{2}{3}\pi}$:

$$O_{\frac{2}{3}\pi} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Keď potrebujeme transformovať vektory u_1, u_2, u_3, stačí ich usporiadať do matice A (ako stĺpce matice A) a prenásobiť

$$O_{\frac{2}{3}\pi} A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2+\sqrt{3}}{2} & -\frac{1-\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \\ \frac{2\sqrt{3}-1}{2} & \frac{\sqrt{3}+1}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

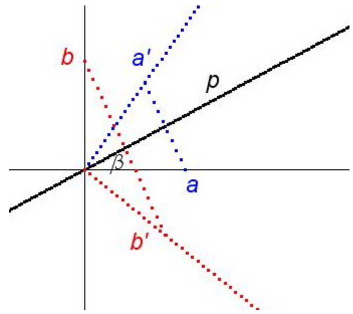
Transformované vektory sú potom postupne stĺpce súčinu matíc $O_{\frac{2}{3}\pi} A$, teda

$$O_{\frac{2}{3}\pi} u_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{2\sqrt{3}-1}{2} \end{pmatrix}, \quad O_{\frac{2}{3}\pi} u_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{pmatrix}, \quad O_{\frac{2}{3}\pi} u_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

□

Matica osovej súmernosti

Budeme uvažovať len tie osové súmernosti, keď os (pramka p) prechádza začiatkom súradnicovej sústavy. Predpokladajme, že os súmernosti zviera s kladnou x-ovou osou uhol β. Rovnako ako pri otočení o uhol α, aj teraz uhol β meriame v kladnom zmysle. Aby sme našli maticu osovej súmernosti (ozn. S_β), potrebujeme zistiť, ako sa transformujú vektory $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (pozri obr. 1.10). Keď transformujeme vektor a osovou súmernosťou S_β, tak ho otáčame u uhol 2β. Keď transformujeme vektor b osovou súmernosťou S_β, tak ho otáčame o uhol $2\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$, ale v zápornom zmysle, teda uhol otočenia je $(2\beta-\pi)$. To znamená, že $S_\beta \cdot a = O_{2\beta} a$ a $S_\beta \cdot b = O_{(2\beta-\pi)} \cdot b$. Aplikáciou príslušných matíc O_α dostaneme



Obr. 1.10. Osová súmernosť

$$O_{(2\beta)} \cdot a = \begin{pmatrix} \cos(2\beta) & -\sin(2\beta) \\ \sin(2\beta) & \cos(2\beta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\beta) \\ \sin(2\beta) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} O_{(2\beta-\pi)} b &= O_{(2\beta-\pi)} = \begin{pmatrix} \cos(2\beta-\pi) & -\sin(2\beta-\pi) \\ \sin(2\beta-\pi) & \cos(2\beta-\pi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\sin(2\beta-\pi) \\ \cos(2\beta-\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(2\beta) \\ -\cos(2\beta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Matica osovej súmernosti S_β je

$$S_\beta = \begin{pmatrix} \cos(2\beta) & \sin(2\beta) \\ \sin(2\beta) & -\cos(2\beta) \end{pmatrix} \tag{1.36}$$

Vlastnosti matice osovej súmernosti $S_\beta = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$:

(S1) vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ je kolmý na vektor $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$,

(S2) $\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\| = 1$

(S3) ${S_\beta}^T = S_\beta$, teda matica S_β je symetrická.

Lema 1.11 *Nech A je matica rozmeru 2×2. Potom A predstavuje maticu osovej súmernosti práve vtedy, keď spĺňa vlastnosti* **(S1)-(S3)**.

Keď transformujeme vektory pomocou osovej súmernosti S_β, tak inverzná transformácia je opäť osová súmernosť S_β. Z toho dostávame nasledujúce tvrdenie.

Lema 1.12 *Nech S_β je matica osovej súmernosti, definovaná vzťahom (1.36). Potom*

$$S_\beta^{-1} = S_\beta = {S_\beta}^T.$$

Lemy 1.9 a 1.11 majú nasledujúci dôsledok.

Dôsledok 1.1 *Nech A je matica rozmeru 2×2, ktorej stĺpce sú vektory kolmé na seba a ich dĺžky sú rovné 1. Potom:*
(a) *ak A je nesymetrická matica, tak existuje uhol α tak, že $A = O_\alpha$,*
(b) *ak A je symetrická matica, tak existuje uhol β tak, že $A = S_\beta$.*

Príklad 1.26 Napíšte maticu osovej súmernosti $S_{\frac{2}{3}\pi}$ a transformujte vektory $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Riešenie:
$\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}$, $\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Z toho dostaneme maticu osovej súmernosti $S_{\frac{2}{3}\pi}$:

$$S_{\frac{2}{3}\pi} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Usporiadame vektory u_1, u_2 do matice A ako stĺpce tejto matice a vypočítame hľadané transformácie

$$S_{\frac{2}{3}\pi} A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1+\sqrt{3}}{2} & -\frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}-1}{2} & -\frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{pmatrix}.$$

Transformované vektory sú

$$S_{\frac{2}{3}\pi} u_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{pmatrix}, \quad S_{\frac{2}{3}\pi} u_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{pmatrix}.$$

□

1.7 Vlastné čísla a vlastné vektory matice, kvadratické formy

V predchádzajúcej časti sme sa zaoberali lineárnymi transformáciami. Keď transformujeme nejaký vektor u maticou A, môže sa stať, že výsledok transformácie je násobok vektora u. To znamená, že potom vektor u aj jeho obraz sú smerové vektory rovnakej priamky. Napr., keď $A = S_{\frac{\pi}{4}}$, tak pre ľubovoľný vektor $u = (c, c)^T$ platí $S_{\frac{\pi}{4}} \cdot u = u$ a pre ľubovoľný vektor $v = (c, -c)^T$ platí $S_{\frac{\pi}{4}} \cdot v = -v$. (Prečo potrebujeme mať stĺpcové vektory u a v?) Vektor v mení svoju orientáciu, ale ostáva smerovým vektorom rovnakej priamky. Pre dané transformácie A budeme hľadať vektory v s vlastnosťou, že ich obraz je $\lambda \cdot v$, kde λ je konštanta.

1.7.1 Vlastné čísla a vlastné vektory matice

Definícia 1.10 *Nech A je daná štvorcová matica. Nech existuje vektor $v \neq \mathbf{0}$ a konštanta $\lambda \in \mathbb{R}$, pre ktoré platí*

$$A \cdot v = \lambda \cdot v. \tag{1.37}$$

Potom vektor v nazveme vlastným vektorom matice A a konštantu λ vlastným číslom, prislúchajúcim k vektoru v.

Poznámka 1.3 *Ľahko sa môžeme presvedčiť, že keď existuje vlastný vektor v matice A, tak jeho ľubovoľný nenulový násobok je takisto vlastným vektorom matice A.*

Upravíme rovnicu (1.37)

$$A \cdot v - \lambda \cdot v = A \cdot v - \lambda \cdot I \cdot v = (A - \lambda \cdot I) \cdot v = \mathbf{0}.$$

Vsunutie jednotkovej matice I nemení hodnotu, ale umožňuje vyňať vektor v pre zátvorku. Nech

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Potom

$$(A - \lambda \cdot I) \cdot v = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \tag{1.38}$$

- Vlastných vektorov (riešení rovnice (1.38) je nekonečne veľa (ak existujú), to znamená $\det(A - \lambda \cdot I) = 0$. Rovnica $\det(A - \lambda \cdot I) = 0$ je polynóm n-tého stupňa. Jeho korene sú *vlastné čísla* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ $(m \leq n)$ matice A.

- Pre každé vlastné číslo λ_i budeme hľadať vlastné vektory. Už vieme, že ich je nekonečne veľa. Hodnosť $h(A - \lambda_i \cdot I)$ nám prezradí, koľko lineárne nezávislých vlastných vektorov existuje k vlastnému číslu λ_i. Vlastný vektor, prislúchajúci k λ_i je **ľubovoľné nenulové riešenie** rovnice (1.38).

Veta 1.4 *Nech A je matica rozmeru $n \times n$ a nech $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ $(m \leq n)$ sú jej vlastné čísla. Potom*
(a) *Pre každé vlastné číslo λ_i existuje aspoň jeden vlastný vektor.*
(b) *Nech pre vlastné číslo λ_i platí $h(A - \lambda_i \cdot I) = k$. Potom má matica A práve $n - k$ lineárne nezávislých vlastných vektorov, prislúchajúcich k vlastnému číslu λ_i.*

V našich neskorších úvahách budú dôležité symetrické matice. Pre symetrické matice platí:

Veta 1.5 *Ak $A_{n \times n}$ je symetrická matica, tak vždy existuje n vlastných čísel (vrátane násobnosti). Pre k-násobné vlastné číslo existuje k lineárne nezávislých vlastných vektorov. Ľubovoľné dva vlastné vektory, ktoré prislúchajú rôznym vlastným číslam, sú na seba kolmé.*

Veta 1.4 má dôležitý dôsledok:

Dôsledok 1.2 *Nech A je symetrická matica rozmeru $n \times n$. Potom z jej vlastných vektorov môžeme vytvoriť takú maticu V, že $V^T = V^{-1}$. Stĺpcové vektory matice V majú vlastnosti:*

1. *Každý stĺpcový vektor v_i matice V je vlastný vektor matice A dĺžky $\|v_i\| = 1$;*

2. *Stĺpcové vektory v_i, v_j pre $i \neq j$ sú na seba kolmé.*

Matica V z dôsledku 1.2 sa dá použiť na rozklad symetrickej matice:

Veta 1.6 (Choleského rozklad) *Nech A je symetrická matica rozmeru $n \times n$. Označme $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ vlatné čísla matice A. Predpokladajme, že $\mathbf{V}$ je matica, ktorej stĺpce tvoria vlastné vektory $v_1, v_2, \ldots, v_n$ matice A, prislúchajúce postupne vlastným číslam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Ďalej nech $\|v_i\| = 1$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$ a $v_i \cdot v_j = 0$ pre $1 \leq i < j \leq n$.*[6]

[6]Ide o maticu V z dôsledku 1.2.

Potom platí

$$\mathbf{V}^T A\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{1.39}$$

$$A = \mathbf{V} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \mathbf{V}^T. \tag{1.40}$$

Príklad 1.27 Nájdite vlastné čísla a vlastné vektory matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Riešenie: **1. krok – výpočet vlastných čísel:** $\det(A - \lambda \cdot I) = 0$, z toho

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 5\lambda + 5 = 0.$$

Vlastné čísla sú $\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$.

2. krok – výpočet vlastných vektorov: Riešime rovnicu $(A - \lambda \cdot I)v = \mathbf{0}$. Za λ dosadíme postupne λ_1 a λ_2.

- *Vlastné vektory pre λ_1:*

$$\begin{pmatrix} 2 - \frac{5+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & 3 - \frac{5+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} -\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}x_1 + y_1 &= 0 \\ x_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}y_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad y_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}x_1$$

Zvolíme hodnotu $x_1 = 2$ (*ľubovoľne, ale nie* 0) a dostaneme $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$

- *Vlastné vektory pre λ_2:*

$$\begin{pmatrix} 2 - \frac{5-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & 3 - \frac{5-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} -\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}x_2 + y_2 &= 0 \\ x_2 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}y_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad y_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}x_2$$

Zvolíme hodnotu $x_2 = 2$ ((*ľubovoľne, ale nie* 0) a dostaneme $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

Ľubovoľný nenulový násobok v_1 je vlastný vektor pre vlastné číslo λ_1 a podobne ľubovoľný nenulový násobok v_2 je vlastný vektor pre vlastné číslo λ_2. Vlastné vektory v_1 a v_2 sú na seba kolmé. □

Vlastné vektory v_1 a v_2, ktoré sme našli pre maticu A z príkladu 1.27, generujú všetky vlastné vektory. Pri hľadaní vlastných vektorov nám stačí pre každé vlastné číslo nájsť maximálny systém lineárne nezávislých vlastných vektorov. O ich počte hovorí veta 1.4.

Príklad 1.28 Nájdite vlastné čísla a vlastné vektory matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Riešenie: **1. krok – výpočet vlastných čísel**: $\det(A - \lambda \cdot I) = 0$, z toho vyplýva

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 3 \end{array}$$

2. krok – výpočet vlastných vektorov:

$$(A - \lambda \cdot I) \cdot v = \mathbf{0}$$

- *Vlastné vektory pre λ_1:*

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 1 \\ 0 & 3-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} y_1 & = & 0 \\ y_1 & = & 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x_1 \text{ je ľubovoľné}$$

Zvolíme hodnotu $x_1 = 1$ a dostaneme $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- *Vlastné vektory pre λ_2:*

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 1 \\ 0 & 3-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} -x_2 + y_2 & = & 0 \\ 0 \cdot x_2 + 0 \cdot y_2 & = & 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad y_2 = x_2$$

Zvolíme hodnotu $x_2 = 1$ a dostaneme $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Teraz $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nie je kolmé na $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. □

Príklad 1.29 Nájdite vlastné čísla a vlastné vektory matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{16}{25} & -\frac{12}{25} \\ 0 & -\frac{12}{25} & \frac{9}{25} \end{pmatrix}$.

Riešenie: **1. krok – výpočet vlastných čísel:**

$$A = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{16}{25}-\lambda & -\frac{12}{25} \\ 0 & -\frac{12}{25} & \frac{9}{25}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda \cdot (\lambda - 1)^2 = 0.$$

Z toho $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = 1$. Teda máme dve vlastné čísla, z toho $\lambda_{2,3} = 1$ je dvojnásobné vlastné číslo.

2. krok – výpočet vlastných vektorov:

- *Vlastné vektory pre λ_1:*

$$A = \begin{pmatrix} 1-0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{16}{25}-0 & -\frac{12}{25} \\ 0 & -\frac{12}{25} & \frac{9}{25}-0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\qquad &= 0 \\ \tfrac{16}{25} \cdot y_1 - \tfrac{12}{25} \cdot z_1 &= 0 \\ -\tfrac{12}{25} \cdot y_1 + \tfrac{9}{25} \cdot z_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{gathered} x_1 = 0 \\ z_1 = \tfrac{4}{3} \cdot y_1 \end{gathered}$$

Zvolíme (napríklad) $y_1 = 3$ a dostaneme $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

- *Vlastné vektory pre $\lambda_{2,3}$:*

$$A = \begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{16}{25}-1 & -\frac{12}{25} \\ 0 & -\frac{12}{25} & \frac{9}{25}-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} -\tfrac{9}{25} \cdot y_1 - \tfrac{12}{25} \cdot z_1 &= 0 \\ -\tfrac{12}{25} \cdot y_1 - \tfrac{16}{25} \cdot z_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{gathered} x_{2,3} \text{ je ľubovoľné} \\ z_{2,3} = -\tfrac{3}{4} \cdot y_{2,3} \end{gathered}$$

Môžme zvoliť napríklad $\begin{matrix} x_2 = 1, & y_2 = 0 \\ x_3 = 0, & y_3 = 4 \end{matrix}$. Potom $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Záver:

1. Ak u je vlastný vektor, prislúchajúci k vlastnému číslu $\lambda_{2,3} = 1$, tak sa dá vyjadriť v tvare

$$u = k_1 \cdot v_2 + k_2 \cdot v_3.$$

2. Vektory $v_1,\ v_2,\ v_3$ sú navzájom kolmé. □

Príklad 1.30 Nájdite vlastné čísla a vlastné vektory matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Riešenie: **1. krok – výpočet vlastných čísel:**

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 2$$

2. krok – výpočet vlastných vektorov: *Vlastné vektory pre* $\lambda_{1,2}$*:*

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 1 \\ 0 & 2-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = 0, \quad x_1 \text{ je ľubovoľné}$$

Zvolíme hodnotu x_1, napríklad $x_1 = 1$ a dostaneme $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a každý vlastný vektor je násobkom vektora v_1. □

Príklad 1.31 Nájdite vlastné čísla a vlastné vektory matice $A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$.

Riešenie: **1. krok – výpočet vlastných čísel:**

$$\begin{vmatrix} \frac{4}{5}-\lambda & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5}-\lambda \end{vmatrix} = (\frac{4}{5}-\lambda)^2 + \frac{9}{25} = \lambda^2 - \frac{8}{5}\lambda + 1 = 0.$$

Rovnica nemá reálne korene, čo znamená, že neexistujú (reálne) vlastné čísla a teda ani vlastné vektory. □

Poznámka 1.4 Matica A z príkladu 1.31 je maticou otočenia. Keď otáčame vektory o iný uhol ako π, tak žiaden **nenulový** vektor sa nezobrazí na svoj násobok. To je dôvod, pre ktorý matica A nemá vlastné čísla ani vlastné vektory.

1.7.2 Kvadratické formy

Kvadratická forma je výraz tvaru

$$a_1 \cdot x^2 + 2a_2 \cdot xy + a_3 \cdot y^2 = c,$$

kde c je ľubovoľná konštanta. Tento výraz môžeme zapísať v maticovom tvare pomocou symetrickej matice

$$(x, y) \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c. \tag{1.41}$$

My sa budeme zaoberať len prípadmi, keď $c = 1$. Zvyšné prípady prenecháme na čitateľa. Označme $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}$. Matica A je symetrická, teda podľa vety 1.5 má dve vlastné čísla λ_1, λ_2 (λ_1 a λ_2 sa môžu zhodovať) a vlastné vektory v_1, v_2[7], ktoré sú na seba kolmé. Vlastné vektory v_1 a v_2 môžeme voliť tak, aby sa ich dĺžky rovnali 1 a aby vytvorili maticu otočenia O_α[8] pre nejaký uhol α, kde prvý stĺpec matice O_α je vektor v_1 a druhý stĺpec je v_2. To znamená $v_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$. Máme rovnicu

$$(x, y) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1. \tag{1.42}$$

Použijeme Choleského rozklad matice A. Z tohto rozkladu dostaneme

$$O_{-\alpha} \cdot A \cdot O_\alpha = \mathbf{V}^T \cdot A \cdot \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

To znamená, že kvadratická forma $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$ sa otočením zmenila na formu $\lambda_1\bar{x}^2 + \lambda_2\bar{y}^2 = 1$, pričom vlastný vektor v_1 je smerový vektor natočenej osi $\bar{x}$ a vlastný vektor v_2 je smerový vektor natočenej osi $\bar{y}$.

Nech $\lambda_1 \geq \lambda_2$. Potom kvadratická forma $\lambda_1\bar{x}^2 + \lambda_2\bar{y}^2 = 1$ (a teda aj pôvodná kvadratická forma $a_1 \cdot x^2 + 2a_2 \cdot xy + a_3 \cdot y^2 = 1$) predstavuje:

- *elipsu*, ak $\lambda_2 > 0$,
- *hyperbolu*, ak $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$,
- *dve rovnobežné priamky*, ak $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$,
- *prázdnu množinu* vo zvyšných prípadoch.

[7] v_1 je vlastný vektor pre λ_1 a v_2 vlastný vektor pre λ_2.
[8] Podľa dôsledku 1.2 je $O_\alpha = V$.

Príklad 1.32 Vyšetrite kvadratickú formu $\frac{5}{2}x^2 - \sqrt{3} \cdot xy + \frac{3}{2}y^2 = 1$.

Riesenie:
Kvadratickú formu zapíšeme v maticovom tvare:

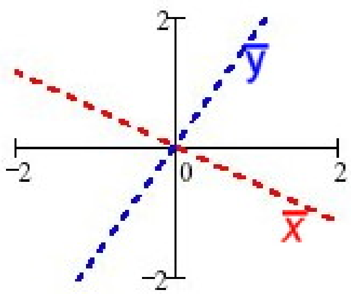
$$(x, y) \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

(a) Vlastné čísla matice $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ sú $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 1$ (overte).

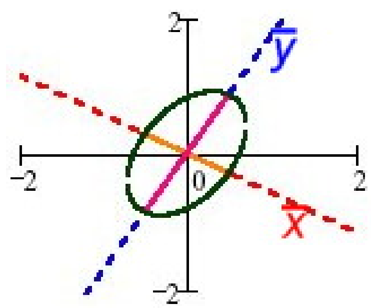
(b) Vlastný vektor pre λ_1 je $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ a pre λ_2 je $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

(c) Obe vlastné čísla sú kladné, teda kvadratická forma $\frac{5}{2}x^2 - \sqrt{3} \cdot xy + \frac{3}{2}y^2 = 1$ je elipsa. Dĺžky poloosí sú $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ a $\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} = 1$. Vlastné vektory v_1 a v_2 predstavujú smerové vektory otočených súradných osí $\bar{x}$ a $\bar{y}$, v ktorých má elipsa rovnicu $\frac{\sqrt{3}}{3}\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 1$, pričom na osi $\bar{x}$ sa dĺžka polosi elipsy rovná $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(d) Konštrukcia elipsy:



Obr. 1.11. Otočené osi $\bar{x}$ a $\bar{y}$



Obr. 1.12. Elipsa $\frac{5}{2}x^2 - \sqrt{3} \cdot xy + \frac{3}{2}y^2 = 1$. □

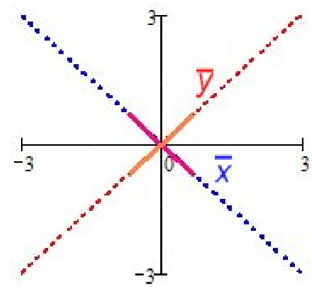
Príklad 1.33 Vyšetrite kvadratickú formu $-2xy = 1$.

Riešenie Kvadratickú formu zapíšeme v maticovom tvare:

$$(x, y) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

(a) Vlastné čísla matice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ sú $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$.

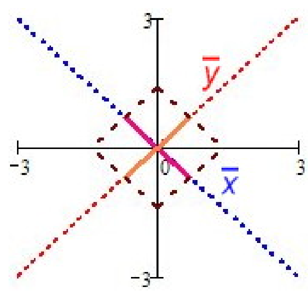
(b) Vlastný vektor pre vlastné číslo λ_1 (smerový vektor otočenej osi $\bar{x}$) je $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$
a pre vlastné číslo λ_2 (smerový vektor otočenej osi $\bar{y}$) je $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.



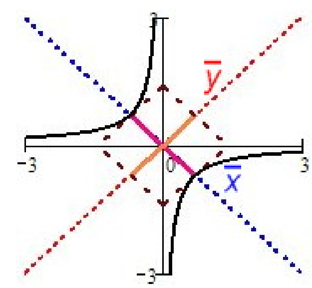
Obr. 1.13. Otočené osi $\bar{x}$ a $\bar{y}$

(c) $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0$, teda kvadratická forma $-2xy = 1$ je hyperbola. Dĺžky polosí sú $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = 1$ a $\frac{1}{\sqrt{|\lambda_2|}} = 1$. Kvadratická forma $-2xy = 1$ má v otočených osiach $\bar{x}$ a $\bar{y}$ rovnicu $\bar{x}^2 - \bar{y}^2 = 1$, pričom na osi $\bar{x}$ sa dĺžka jej polosi rovná 1.

(d) Obrázok a konštrukcia hyperboly: Pomocný obdĺžnik má osi pritiľahlých strán zhodné s otočenými osami $\bar{x}$ a $\bar{y}$. Priamky, v ktorých ležia uhlopriečky pomocného obdĺžnika, sú asymptoty hyperboly $\bar{x}^2 - \bar{y}^2 = 1$.



Obr. 1.14. Pomocný obdĺžnik



Obr. 1.15. Hyperbola $-2xy = 1$.

□

Príklad 1.34 Vyšetrite kvadratickú formu $4x^2 + 4xy + y^2 = 1$.

Riešenie: Kvadratickú formu zapíšeme v maticovom tvare:

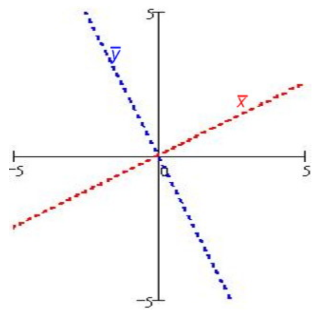
$$(x, y) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

(a) Vlastné čísla matice $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ sú $\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 0$.

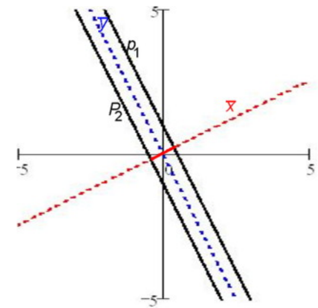
(b) Vlastný vektor pre vlastné číslo λ_1 (smerový vektor otočenej osi $\bar{x}$) je $v_1 = \begin{pmatrix} 2\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$ a pre vlastné číslo λ_2 (smerový vektor otočenej osi $\bar{y}$) je $v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 2\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$.

(c) $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 = 0$, teda kvadratická forma $4x^2+4xy+y^2 = 1$ predstavuje dve rovnobežné

priamky. V otočených osiach $\bar{x}$ a $\bar{y}$ majú rovnicu $5\bar{x}^2 = 1$ alebo $|x| = \frac{\sqrt{5}}{5}$.
(d) Obrázok:



Obr. 1.16. Otočené osi $\bar{x}$ a $\bar{y}$



Obr. 1.17. Rovnobežky $4x^2 + 4xy + y^2 = 1$

Vzdialenosť rovnobežných priamok je $\|p_1 p_2\| = \frac{2}{5}\sqrt{5}$. (Overte to – pomôcka: $4x^2 + 4xy + y^2 = (2x + y)^2$, teda rovnobežky majú rovnice $|2x + y| = 1$.) □

1.8 Cvičenia

Cvičenie 1.1 Nájdite všetky riešenia sústavy rovníc (ak existujú):

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & 4y & & & = & 9 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 6 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & 3z & = & 18 \\ x & + & 4y & & & = & 3 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 13 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & 4y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 11y & + & 3z & = & -1 \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & 4y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & y & + & 3z & = & 3 \end{array}$$

(e)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 2z & = & -9 \\ 3x & + & 5y & + & 4z & = & 10 \\ 5x & + & 12y & + & 6z & = & 29 \end{array}$$

(f)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & & & = & 7 \\ x & & & + & z & = & -6 \\ x & + & 6y & - & 3z & = & 0 \end{array}$$

(g)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 4 \\ x & + & 3y & - & 2z & = & 2 \\ 3x & - & 5y & + & 4z & = & 6 \end{array}$$

(h)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 4 \\ x & + & 3y & - & 2z & = & 7 \\ 3x & - & 5y & + & 4z & = & 6 \end{array}$$

(i)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 2 \\ x & + & 4y & & & = & 1 \\ -x & + & 2y & - & 2z & = & 3 \end{array}$$

(j)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 4y & - & z & = & 1 \\ -x & + & y & - & z & = & -1 \end{array}$$

(k)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & 5z & = & -15 \\ x & & & + & 3z & = & -10 \\ 4x & + & 2y & & & = & 10 \end{array}$$

(l)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & 5z & = & 10 \\ x & & & + & 3z & = & 7 \\ 4x & + & 2y & & & = & 0 \end{array}$$

Cvičenie 1.2 Vypočítajte determinant matice:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -4 & 4 & -1 \\ -3 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cvičenie 1.3 Nájdite inverznú maticu (ak existuje) k matici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -4 & 4 & -1 \\ -3 & 9 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cvičenie 1.4 Nájdite maticu X, pre ktorú platí:

(a) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$,

(b) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 11 & 23 \end{pmatrix}$,

(c) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -4 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

(d) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$,

(e) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -4 & 4 & -1 \\ -3 & 9 & 1 \end{pmatrix}$,

(f) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -4 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(h) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 17 & 1 \\ 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$,

(i) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 17 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$,

(j) $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ 18 & 22 \end{pmatrix}$,

(k) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ 18 & 22 \end{pmatrix}$,

(l) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -4 & 4 & -1 \\ -3 & 9 & 1 \end{pmatrix}$,

(m) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 11 & 23 \end{pmatrix}$,

(n) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -5 & 4 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$,

(o) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 \\ -5 & 14 & -1 \end{pmatrix}$,

(p) Existuje matica X, ktorá je riešením rovnice
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$?

Cvičenie 1.5 Daný je bod $A = [2, 1, 3]$ a rovina ρ:

$$\begin{aligned} \rho: \ x &= 2s + 3t - 6, \\ y &= 3s - 2t + 1, \quad s, t \in \mathbb{R}. \\ z &= -s + 3t, \end{aligned}$$

Napíšte všeobecnú rovnicu roviny ρ a vypočítajte vzdialenosť $\|A\rho\|$.

Cvičenie 1.6 Dané sú roviny $\rho: \ x + 2y - z + 1 = 0$ a $\tau: \ 2x - y + 3z = 0$. Určte ich vzájomnú polohu (teda prienik a uhol, pod ktorým sa prenikajú).

Cvičenie 1.7 Dané sú roviny $\rho:\ x+2y-z+1=0$ a τ,

$$\begin{aligned}\tau:\ x &= 2s+3t-6,\\ y &= 3s-2t+1, \quad s,t\in\mathbb{R}.\\ z &= -s+3t,\end{aligned}$$

Určte ich vzájomnú polohu.

Cvičenie 1.8 Zistite vzájomnú polohu priamky p a roviny ρ:

$$p:\ \begin{aligned} x &= 1+3t,\\ y &= -t, \quad t\in\mathbb{R},\\ z &= 1+4t,\end{aligned} \qquad \rho:\ \begin{aligned} x &= 4+u-v,\\ y &= 3+2u-v, \quad u,v\in\mathbb{R}.\\ z &= 2-3u,\end{aligned}$$

Cvičenie 1.9 Dané sú priamky p,q. Vypočítajte ich vzdialenosť, ak platí

$$p:\ \begin{aligned} x &= s+2,\\ y &= 3s+1, \quad s\in\mathbb{R},\\ z &= s-2\end{aligned} \qquad q:\ \begin{aligned} x &= t-4,\\ y &= -2t+3, \quad t\in\mathbb{R}.\\ z &= t,\end{aligned}$$

Cvičenie 1.10 Zistite vzájomnú polohu priamok

$$p:\ \begin{aligned} x &= 1+3t,\\ y &= 2-t,\end{aligned} \quad t\in\mathbb{R}, \qquad q:\ \begin{aligned} x &= 2-s,\\ y &= 3,\end{aligned} \quad s\in\mathbb{R}.$$

Cvičenie 1.11 Zistite vzájomnú polohu priamok (ak sa nepretínajú, vypočítajte ich vzdialenosť)

$$p:\ \begin{aligned} x &= 1+3t,\\ y &= -t, \quad t\in\mathbb{R},\\ z &= 1+4t,\end{aligned} \qquad q:\ \begin{aligned} x &= 4,\\ y &= 3+s, \quad s\in\mathbb{R}.\\ z &= 2-3s,\end{aligned}$$

Cvičenie 1.12 Daný je bod $A=[2,0,-1]$ a priamka p:

$$p:\ \begin{aligned} x &= 1+4t,\\ y &= 2-t, \quad t\in\mathbb{R}.\\ z &= 2t,\end{aligned}$$

Vypočítajte ich vzdialenosť.

Cvičenie 1.13 Daný je rovnobežnosten $ABCDEFGH$ s podstavou $ABCD$. Vypočítajte jeho objem ak poznáte súradnice vrcholov $A=(1;0;1)$, $B=(2;1;3)$, $C=(1;3;4)$ a $E=(2;3;-1)$.

Cvičenie 1.14 Vypočítajte objem štvorbokého ihlana s rovnobežníkovou podstavou, ak poznáte vrcholy $A = (1, 1, 1),\ B = (2, 1, 4),\ C = (3, 2, 5)$ z podstavy a vrchol $E = (4, 5, 5)$, spájajúci bočné steny ihlana.

Cvičenie 1.15 Vypočítajte obsah rovnobežníka $ABCD$, ak poznáte vrcholy $A = (1, 3, -1),\ B = (2, 1, 4),\ C = (3, 2, 5)$.

Cvičenie 1.16 Vypočítajte objem rovnobežnostena $ABCDEFGH$, ak poznáte vrcholy $A = (1, 2, 1),\ B = (2, 3, 0),\ D = (3, 4, 2)$, ležiace v dolnej stene rovnobežnostena a vrchol $E = (5, 5, 6)$ z hornej steny.

Cvičenie 1.17 Zistite vzájomnú polohu priamok (ak sa nepretínajú, vypočítajte ich vzdialenosť)

$$\begin{array}{rrcrcrl} p: & x & = & 1 & + & 4t, & \\ & y & = & 2 & - & t, & t \in \mathbb{R}, \\ & z & = & & & 2t, & \end{array} \qquad \begin{array}{rrcrcrl} q: & x & = & 2 & - & s, & \\ & y & = & 3 & - & s, & s \in \mathbb{R}. \\ & z & = & 1 & + & 3s, & \end{array}$$

Cvičenie 1.18 Vypočítajte objem rovnobežnostena $ABCDEFGH$, ak poznáte vrcholy $A = (1, 2, 1),\ B = (2, -1, 2),\ D = (3, 3, 2)$, ležiace v dolnej stene rovnobežnostena a vrchol $E = (6, 4, 6)$ z hornej steny.

Cvičenie 1.19 Nájdite vlastné čísla a vlastné vektory matíc:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$E = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}.$$

Cvičenie 1.20 Zistite, aké geometrické útvary predstavujú kvadratické formy. Napíšte ich rovnice v natočených osiach $\bar{x}$ a $\bar{y}$ a smerové vektory týchto natočených osí:

(a) $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 1$, **(b)** $3x^2 + 6xy + 3y^2 = 1$, **(c)** $7x^2 - 4xy + 4y^2 = 1$,
(d) $10x^2 + 12xy + 5y^2 = 1$, **(e)** $7x^2 - 12xy + 2y^2 = 1$, **(f)** $2x^2 - 8xy + 8y^2 = 1$,
(g) $3x^2 + 4xy = 1$, **(h)** $9x^2 - 4xy + 6y^2 = 1$, **(i)** $2x^2 - 4xy - y^2 = 1$.

Kapitola 2

Diferenciálny počet funkcie jednej premennej

2.1 Úvod do funkcií jednej premennej

V tejto časti si zopakujeme dôležité pojmy pre funkcie jednej premennej a spravíme prehľad tzv. elementárnych funkcií. Najprv si však pripomenieme základné označenia a niektoré vlastnosti reálnych čísel:

- $\mathbb{N}$ je množina všetkých prirodzených čísel, teda $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$,
- $\mathbb{Z}$ je množina všetkých celých čísel,
- $\mathbb{Q}$ je množina všetkých racionálnych čísel,
- $\mathbb{R}$ je množina všetkých reálnych čísel.

Nech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom označíme

$$\begin{aligned} [a,b] &= \{x \in \mathbb{R}; a \le x \le b\}, \quad (a,b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < y\}, \\ (a,b] &= \{x \in \mathbb{R}; a < x \le y\}, \quad [a,b) = \{x \in \mathbb{R}; a \le x < y\} \end{aligned}$$

a nazveme postupne *uzavretým, otvoreným* a *polootvoreným* intervalom (niekedy hovoríme presnejšie o *zľava otvorenom*, resp. *sprava otvorenom* intervale).

Hovoríme, že $M \in X$ a $m \in X$ je *najväčším*, resp. *najmenším prvkom* množiny X, ak pre každé $x \in X$ platí $x \le M$ (ozn. $M = \max X$), resp. $m \le x$ (ozn. $m = \min X$).

Nech $X \subset \mathbb{R}$. Hovoríme, že $\xi \in \mathbb{R}$, resp. $\eta \in \mathbb{R}$, je *horným*, resp. *dolným ohraničením* množiny X, ak platí

$(\forall x \in X)(x \le \xi)$, resp. $(\forall x \in X)(\eta \le x)$.

Definícia 2.1 *Nech* $X \subset \mathbb{R}$. *Hovoríme, že* $S \in \mathbb{R}$ *je suprémum množiny* X, *ak* S *je najmenšie horné ohraničenie množiny* X. *Ozn.* $S = \sup X$.
Hovoríme, že $s \in \mathbb{R}$ *je ifimum množiny* X, *ak* s *je najväčšie dolné ohraničenie množiny* X. *Ozn.* $s = \inf X$.

Lema 2.1 *Nech* $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$ *je zhora (resp. zdola) ohraničená množina. Potom existuje* $\sup X$ *(resp. existuje* $\inf X$*).*

Poznámka 2.1 Nech $X \subset \mathbb{R}$. Potom $\max X$ (ak existuje) aj $\sup X$ sú najmenšım horným ohraničením množiny X a platí $\sup X = \max X$. Hlavný rozdiel medzi $\sup X$ a $\max X$ je ten, že $\max X$ existuje len vtedy, ak je najmenšie horné ohraničenie množiny X prvkom tejto množiny. $\sup X$ nie je nutne prvkom množiny X.

Príklad 2.1 Interval $[2,3]$ má najväčší prvok 3 a najmenší prvok 2. Číslo 3 je súčasne najmenšie horné ohraničenie intervalu $[2,3]$, teda $\sup [2,3] = 3$ a číslo 2 je najväčšie dolné ohraničenie intervalu $[2,3]$, teda $\inf [2,3] = 2$.
Interval $(2,3)$ nemá najväčší prvok ani najmenší prvok. Ale platí, že číslo 3 je najmenšie horné ohraničenie intervalu $(2,3)$, teda $\sup (2,3) = 3$ a číslo 2 je najväčšie dolné ohraničenie intervalu $(2,3)$, teda $\inf (2,3) = 2$.

Intervaly nemusia byť sprava, resp. zľava ohraničené. Takéto (otvorené) intervaly označujeme

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}; a < x\}, \quad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}; x < b\}.$$

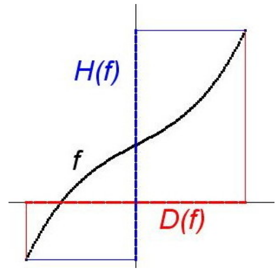
Podobné označenie môžeme zaviesť aj pre polootvorené intervaly.

2.1.1 Základné pojmy

Funkcia $f : X \to Y$ je zobrazenie množiny X do množiny Y. Presnejšie, každému prvku $x \in X$ vieme jednoznačne priradiť prvok $y \in Y$ tak, že platí $f(x) = y$. My sa budeme zaoberať najmä reálnymi funkciami reálnej premennej, to znamená, že budeme predpokladať $X \subset \mathbb{R}$ aj $Y \subset \mathbb{R}$. Pre funkcie zavádzame:

- *definičný obor*, $D(f) = \{x \in X; (\exists y \in Y)(f(x) = y)\}$,
- *obor hodnôt*, $H(f) = \{y \in Y; (\exists x \in X)(f(x) = y)\}$.

Definičný obor, resp. obor hodnôt funkcie f niekedy označujeme D_f, H_f.



Obr. 2.1. Funkcia f, jej definičný obor a obor hodnôt

Rovnosť funkcií

Funkcie f a g sa rovnajú, ak platí

1. $D_f = D_g$,
2. $\forall x \in D_f$ platí $f(x) = g(x)$.

Príklad 2.2 $f(x) = x$, $g(x) = \frac{x^2}{x}$

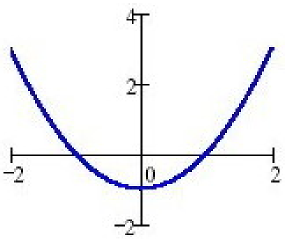
$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x}, & \text{ak } x \neq 0, \\ 0, & \text{ak } x = 0. \end{cases}$$

Porovnaním dostaneme $f \neq g$, lebo $D(f) \neq D(g)$.
Funkcie f a h sa rovnajú, lebo majú rovnaké definičné obory a platí $f(x) = h(x)$ pre všetky $x \in D(f)$.

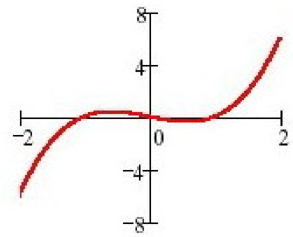
Symetria a periodicita funkcií

Nech $f : X \to \mathbb{R}$ ($X \subset \mathbb{R}$) je daná funkcia.

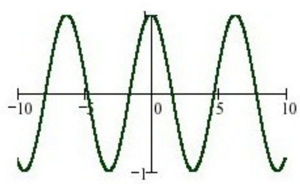
- Funkcia f sa nazýva *párna*, ak pre každé $x \in X$ platí $f(x) = f(-x)$.
- Funkcia f sa nazýva *nepárna*, ak pre každé $x \in X$ platí $-f(x) = f(-x)$.
- Funkcia f sa nazýva *periodická*, ak $\exists \lambda > 0$ také, že $f(x) = f(x+\lambda)$ pre každé $x \in X$. Najmenšie číslo $\bar{\lambda} > 0$ s vlastnosťou $f(x) = f(x + \lambda)$ pre každé $x \in X$ sa nazýva perióda funkcie f.



Obr. 2.2. Párna funkcia



Obr. 2.3. Nepárna funkcia



Obr. 2.4. Periodická funkcia

Ak je funkcia f párna (alebo nepárna), tak $D(f)$ je symetrická množina okolo bodu 0. Navyše, ak f je nepárna, tak $f(0) = 0$ alebo $0 \notin D(f)$.

Príklad 2.3 Funkcia $f(x) = x^2$ je párna, funkcia $g(x) = x^3$ je nepárna. $h(x) = \sin x$ je periodická funkcia s periódu $\bar{\lambda} = 2\pi$.
Konštantná funkcia, napr. $\tilde{h}(x) = 5$, je periodická, lebo pre každé $\lambda > 0$ platí $\tilde{h}(x) = \tilde{h}(x + \lambda)$, ale funkcia $\tilde{h}$ nemá periódu, lebo interval $(0, \infty)$ nemá najmenší prvok.

Prosté (jedno-jednoznačné) a inverzné funkcie

Definícia 2.2 *Funkcia f je prostá, ak pre každé $y \in H(f)$ existuje práve jedno $x \in D(f)$ také, že $f(x) = y$.*

Lema 2.2 *Funkcia f je prostá práve vtedy, keď pre ľubovoľné $x_1, x_2 \in D(f)$ platí*

$$f(x_1) \neq f(x_2) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \neq x_2.$$

Definícia 2.3 *Nech f je prostá funkcia s $D(f) = X$ a $H(f) = Y$. Potom označíme $f^{-1} : Y \to X$ funkciu, definovanú predpisom*

$$f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y.$$

Funkciu f^{-1} nazveme inverznou k f.

Bezprostredne z definície inverznej funkcie vyplýva:

Tvrdenie 2.1 *Nech f je prostá funkcia s $D(f) = X$ a $H(f) = Y$. Potom platí:*

$$D(f) = H\left(f^{-1}\right), \quad D\left(f^{-1}\right) = H(f),$$
$$(\forall x \in X)(f^{-1}(f(x)) = x).$$

Ak existuje inverzná funkcia k f, tak *grafy funkcií f a f^{-1} sú súmerné podľa osi prvého kvadrantu, teda podľa priamky $y = x$.*

Príklad 2.4 Zistite, či je funkcia $f(x) = \frac{x^3-3}{2+x^3}$ prostá a ak je, nájdite k nej inverznú.

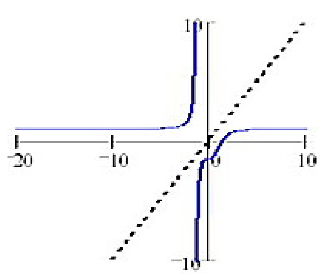
Riešenie:
1. Overíme, či je f prostá. Podľa lemy 2.2 vezmeme ľubovoľné $x_1, x_2 \in D(f)$ a predpokladáme $f(x_1) = f(x_2)$. Z toho dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{x_1^3-3}{2+x_1^3} &= \frac{x_2^3-3}{2+x_2^3}\\
\left(x_1^3-3\right)\cdot\left(2+x_2^3\right) &= \left(x_2^3-3\right)\cdot\left(2+x_1^3\right)\\
2x_1^3+x_1^3x_2^3-6-3x_2^3 &= 2x_2^3+x_1^3x_2^3-6-3x_1^3\\
5x_1^3 &= 5x_2^3.
\end{aligned}$$

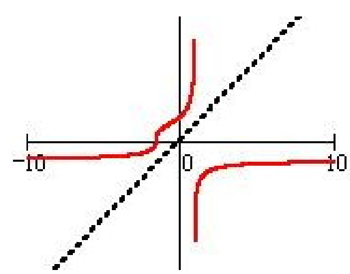
Posledná rovnica má jediné riešenie $x_1 = x_2$, z čoho vyplýva, že f je prostá funkcia.
2. Nájdeme inverznú funkciu.

$$\begin{aligned}
x &= \frac{y^3-3}{2+y^3} \quad \Rightarrow \quad x\cdot\left(2+y^3\right) = y^3-3,\\
x\cdot y^3 - y^3 &= -3-2x\\
y^3 &= \frac{-3-2x}{x-1}\\
y &= f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{3+2x}{1-x}}.
\end{aligned}$$

Určíme definičné obory a obory hodnôt funkcií f a f^{-1}.
Pre funkciu f dostaneme podmienku $2 + x^3 \neq 0$, teda $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\sqrt[3]{-2}\right\} = H(f^{-1})$.
Pre funkciu f^{-1} dostaneme podmienku $1 - x \neq 0$, teda $D(f^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \{1\} = H(f)$.



Obr. 2.5. Graf funkcie f a $y = x$



Obr. 2.6. Graf funkcie f^{-1} a $y = x$

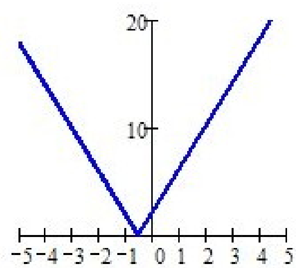
□

Príklad 2.5 Zistite, či je funkcia $f(x) = |2 + 4x|$ prostá a ak je, nájdite k nej inverznú.

Riešenie:
Overíme, či je f prostá funkcia. Podľa lemy 2.2 vezmeme ľubovoľné $x_1, x_2 \in D(f)$ a predpokladáme $f(x_1) = f(x_2)$. Z toho

$$\begin{aligned} |2 + 4x_1| &= |2 + 4x_2| \\ 2 + 4x_1 &= \begin{cases} 2 + 4x_2 \\ -2 - 4x_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Dostaneme dve riešenia: $x_1 = \begin{cases} x_2 \\ -1 - x_2 \end{cases}$. Funkcia f nie je prostá, teda neexistuje inverzná funkcia.



Obr. 2.7. Graf funkcie $f(x) = |2 + 4x|$

$\square$

Monotónnosť funkcií

Definícia 2.4 *Funkcia f sa nazýva rýdzo rastúca na množine $M \subset D(f)$, ak pre všetky $x_1, x_2 \in M$ také, že $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) < f(x_2)$.*
Funkcia f sa nazýva rastúca na množine $M \subset D(f)$, ak pre všetky $x_1, x_2 \in M$ také, že $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Presné znenie definície rýdzo klesajúcej (klesajúcej) funkcie prenecháme na čitateľa.

Definícia 2.5 *Funkcia f sa nazýva rýdzo monotónna na množine $M \subset D(f)$, ak je rýdzo rastúca alebo rýdzo klesajúca na množine M.*
Funkcia f sa nazýva monotónna na množine $M \subset D(f)$, ak je rastúca alebo klesajúca na množine M.

Veta 2.1 *Ak je funkcie f na množine $D(f)$ monotónna, tak je prostá.*

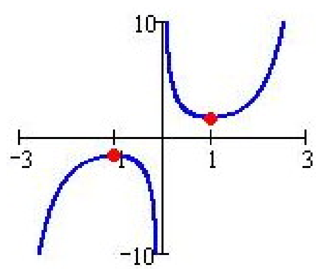
Poznámka 2.2 Ak je funkcia f rastúca (klesajúca) na množine $M_1 \subset D(f)$ aj na množine $M_2 \subset D(f)$ takej, že $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, tak z toho nevyplýva, že f je rastúca (klesajúca) na množine $M_1 \cup M_2$.

Príklad 2.6 Majme funkciu $f(x) = \frac{1}{x}$. Potom f je rýdzo klesajúca na intervale $(-\infty, 0)$ aj na intervale $(0, \infty)$, ale nie je rýdzo klesajúca (ani klesajúca) na množine $(0, \infty) \cup (0, \infty)$, lebo, napríklad, $f(-1) = -1 < f(1) = 1$, teda f nie je monotónna (pozri obr. 2.9). Ľahko sa môžeme presvedčiť, že je prostá. □

Lokálne extrémy

Definícia 2.6 *Nech $f : X \to Y$ je ľubovoľná funkcia. Hovoríme, že $(x_M, f(x_M))$ je lokálne maximum funkcie f, ak existuje $\varepsilon > 0$ také, že pre všetky $x \in (x_M - \varepsilon, x_M + \varepsilon) \cap X$ platí $f(x_M) \geq f(x)$.* (Alternatívne, f má lokálne maximálnu hodnotu $f(x_M) \in Y$, ktorá sa nadobúda v $x_M \in X$.)
Hovoríme, že $(x_m, f(x_m))$ je lokálne minimum funkcie f, ak existuje $\varepsilon > 0$ také, že pre všetky $x \in (x_m - \varepsilon, x_m + \varepsilon) \cap X$ platí $f(x_m) \leq f(x)$. (Alternatívne, f má lokálne minimálnu hodnotu $f(x_m) \in Y$ v $x_m \in X$.)

Funkcia f môže mať niekoľko (aj nekonečne veľa) lokálnych miním a maxím. Lokálne minimum a maximum sú „*lokálne vlastnosti*" funkcie f. To znamená, napríklad, ak $f(x_M)$ je lokálne maximálna hodnota funkcia f, tak to nemusí byť najväčšia hodnota, ktorú funkcia f dosahuje. Dokonca, ak $f(x_m)$ je jej lokálne minimálne hodnota, tak môžeme mať $f(x_M) < f(x_m)$ (pozri obr. 2.8).



Obr. 2.8. Graf funkcie f

2.1.2 Elementárne funkcie

Mocninové funkcie

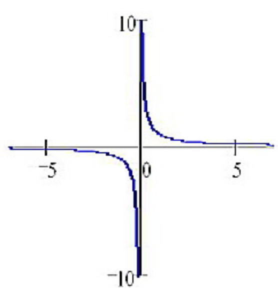
Sú to funkcie typu $f_t(x) = x^t$, kde $t \in \mathbb{R}$ je daná konštanta. Pre ich definičný obor platí $(0, \infty) \subset D(f_t)$. Pre $t \in \mathbb{Z}$ dostaneme:

- ak $t \in \mathbb{N}$, tak $D(f_t) = \mathbb{R}$,
- ak $t \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, tak $D(f_t) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

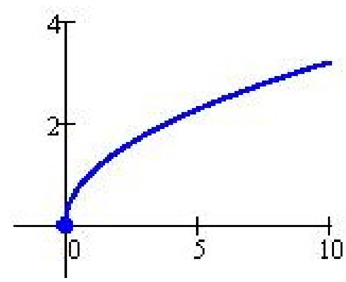
Poznamenajme, že ak je $t = \frac{1}{s}$ a $s \in \mathbb{N}$, tak $x^t = \sqrt[s]{x}$. Odmocnina párneho stupňa je definovaná na intervale $[0, \infty)$, odmocnina nepárneho stupňa je definivaná pre ľubovoľné reálne číslo.

Pre $t \neq 0$ je funkcia f_t rýdzo monotónna na intervale $(0, \infty)$ a ak $(-\infty, 0) \subset D(f)$, tak je rýdzo monotónna aj na intervale $(-\infty, 0)$. Ako ilustrujeme na obrázkoch 2.9, 2.10, 2.11, 2.12, 2.13 a 2.14, nie všetky funkcie f_t, pre $t \neq 0$, sú rýdzo monotónne na svojom definičnom obore.

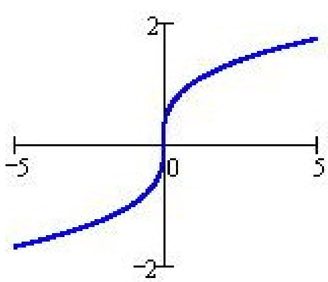
Poznámka 2.3 Funkcia $f_0(x) = x^0$ má definičný obor $D(f_0) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Jej obor hodnôt je $H(f_0) = \{1\}$ (pozri obr. 2.15). V aplikáciách sa často definuje aj hodnota $0^0 = 1$. Keď túto hodnotu použijeme, vždy na to upozorníme.



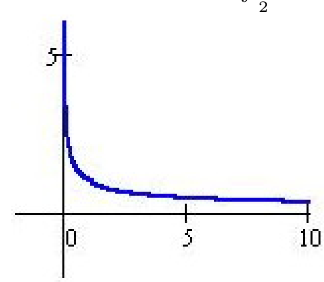
Obr. 2.9. Funkcia $f_{-1} = \frac{1}{x}$



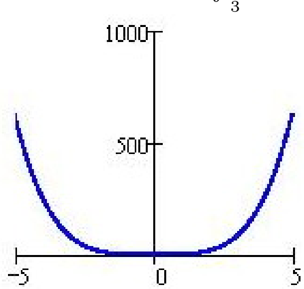
Obr. 2.10. Funkcia $f_{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$



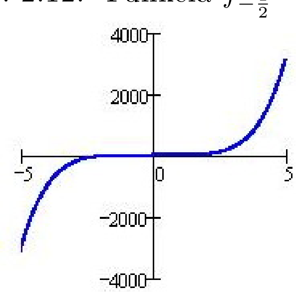
Obr. 2.11. Funkcia $f_{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$



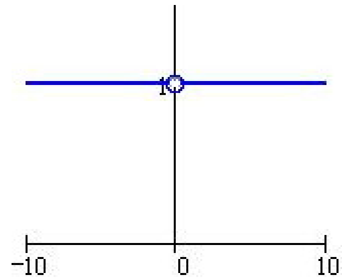
Obr. 2.12. Funkcia $f_{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$



Obr. 2.13. Funkcia $f_4 = x^4$



Obr. 2.14. Funkcia $f_5 = x^5$



Obr. 2.15. Funkcia $f_0 = x^0$

Polynómy a racionálne (lomené) funkcie

Definícia 2.7 *Funkcia*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad a_i \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

pre $a_n \neq 0$*, sa nazýva polynóm* n*-tého stupňa. Vo vzorci (2.1) používame dohodu* $0^0 = 1$.

Definícia 2.8 *Nech* P_1 *a* P_2 *sú polynómy stupňa* n_1*, resp.* n_2*. Potom funkciu*

$$R(x) = \frac{P_2(x)}{P_1(x)} \tag{2.2}$$

nazveme racionálnou (alebo lomenou).

Nech P je polynóm n-tého stupňa. Hodnotu x_0 nazveme *koreňom* polynómu P_n, ak $P(x_0) = 0$. Ak x_0 je koreňom polynómu P, tak výraz $(x - x_0)$ nazveme *koreňovým činiteľom.*

Lema 2.3 *Nech* P *je polynóm* n*-tého stupňa. Potom* P *má najviac* n *reálnych koreňov. Ak* n *je nepárne číslo, tak* P *má aspoň jeden reálny koreň.*

Veta 2.2 *Nech* P *je polynóm* n*-tého stupňa, kde* $n \geq 3$*. Potom sa dá zapísať v tvare*

$$P(x) = P_1(x)P_2(x), \tag{2.3}$$

kde P_1 *a* P_2 *sú polynómy menšieho stupňa ako* n*.*

Veta 2.2 má nasledujúci dôležitý dôsledok:

Dôsledok 2.1 *Nech $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, kde $a_n \neq 0$, je ľubovoľný polynóm stupňa $n \geq 1$. Nech $x_1, x_2, \ldots, x_m$ $(m \leq n)$ sú všetky (navzájom rôzne) korene polynómu P. Nech existujú čísla $k_1, k_2, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$ také, že platí*

$$P(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_m)^{k_m} \cdot \tilde{Q}(x) = \tilde{Q}(x) \cdot a_n \prod_{i=1}^{m}(x - x_i)^{k_i},$$

kde $\tilde{Q}(x) = 1$, ak $\sum\limits_{i=1}^{m} k_i = n$ a ak $\sum\limits_{i=1}^{m} k_i < n$, tak $\tilde{Q}$ je polynóm stupňa r $(2 \leq r \leq n)$, ktorý nemá reálne korene. V takom prípade existujú navzájom rôzne polynómy $Q_1, Q_2, \ldots, Q_l$, každý stupňa 2,

$$Q_i(x) = x^2 + b_{i,1}\, x + b_{i,0} \quad \text{pre } i \in \{1, 2, \ldots, l\},$$

tak, že

$$P(x) = a_n \prod_{i=1}^{m}(x - x_i)^{k_i} \prod_{j=1}^{l} Q_j^{r_j}(x), \tag{2.4}$$

pričom $n = \sum\limits_{i=1}^{m} k_i + 2\sum\limits_{j=1}^{l} r_j$. Rozklad (2.4) je daný jednoznačne.

Exponenty k_i zo vzorca (2.4), pre $i = 1, 2, \ldots, m$, sa volajú *násobnosti koreňov x_i*. Rozklad zo vzorca (2.4) sa volá *rozklad na koreňové činitele.*

Veta 2.3 *Nech P_1 a P_2 sú ľubovoľné polynómy, ktorých stupne sú postupne n_1 a n_2. Ďalej nech*

$$P_1(x) = A \prod_{i=1}^{m}(x - x_i)^{k_i} \prod_{j=1}^{l} Q_j^{r_j}(x)$$

je rozklad polynómu P_1 na koreňové činitele. Potom racionálna funkcia $R(x) = \frac{P_2}{P_1}$ sa dá *vyjadriť v tvare*

$$\begin{aligned}
R(x) &= P_3(x) + \frac{1}{A}\left(\frac{C_{1,1}}{x-x_1} + \frac{C_{1,2}}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{C_{1,k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \right.\\
&+ \frac{C_{2,1}}{x-x_2} + \frac{C_{2,2}}{(x-x_2)^2} + \dots + \frac{C_{2,k_2}}{(x-x_2)^{k_2}} + \\
&\vdots \\
&+ \left.\frac{C_{m,1}}{x-x_m} + \frac{C_{m,2}}{(x-x_m)^2} + \dots + \frac{C_{m,k_m}}{(x-x_m)^{k_m}}\right) + \\
&+ \frac{1}{A}\left(\frac{D_{1,1}x+E_{1,1}}{Q_1(x)} + \frac{D_{1,2}x+E_{1,2}}{(Q_1(x))^2} + \dots + \frac{C_{1,l_1}x+E_{1,l_1}}{(Q_1(x))^{r_1}} + \right.\\
&+ \frac{D_{2,1}x+E_{2,1}}{Q_2(x)} + \frac{D_{2,2}x+E_{2,2}}{(Q_2(x))^2} + \dots + \frac{D_{2,k_2}x+E_{2,k_2}}{(Q_2(x))^{r_2}} + \\
&\vdots \\
&+ \left.\frac{D_{l,1}x+E_{l,1}}{Q_l(x)} + \frac{D_{l,2}x+E_{l,2}}{(Q_l(x))^2} + \dots + \frac{D_{l,r_l}x+E_{l,r_l}}{(Q_l(x))^{r_l}}\right) = \\
&= P_3(x) + \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{C_{i,j}}{(x-x_i)^j} + \frac{1}{A}\sum_{I=1}^{l}\sum_{J=1}^{r_i}\frac{D_{I,J}x+E_{I,J}}{(Q_I(x))^J}, \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

kde P_3 je polynóm stupňa $(n_2 - n_1)$, ak je $n_2 \geq n_1$ a $P_3(x) = 0$, ak je $n_2 < n_1$ a $C_{i,j} \in \mathbb{R}$, $D_{I,J} \in \mathbb{R}$, $E_{I,J} \in \mathbb{R}$ sú vhodné konštanty.
Navyše, vyjadrenie racionálnej funkcie R v tvare (2.5) je dané jednoznačne.

Vyjadrenie racionálnej funkcie R v tvare (2.5) sa volá *rozklad na parciálne zlomky.* Tento rozklad na parciálne zlomky bude dôležitý pri integrovaní racionálnych funkcií.

Užitočné rovnosti pre $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$:

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + b^n \\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i \qquad (2.6)\\
a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b^1 + a^{n-3}b^2 + \dots a^1b^{n-2} + b^{n-1}) \\
&= (a-b)\sum_{i=0}^{n-1}a^{n-1-i}b^i, \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

kde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ a $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$[1]. Hodnota $0!$ je definovaná rovnosťou $0! = 1$.

[1] $n!$ sa číta n-faktoriál.

Exponenciálne a logaritmické funkcie

Exponenciálna funkcia je funkcia $f(x) = a^x$, kde $a > 0$ je daná konštanta. Číslo a sa volá *základ exponenciálnej funkcie*. Definičný obor exponenciálnej funkcie je $D(a^x) = \mathbb{R}$ a obor hodnôt je

$$H(a^x) = \begin{cases} (0, \infty), & \text{ak } a \neq 1, \\ 1, & \text{ak } a = 1. \end{cases}$$

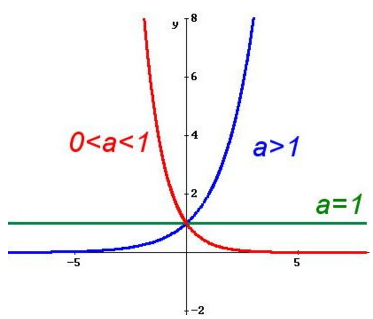
Pre $a > 1$ je $f(x) = a^x$ rýdzo rastúca funkcia, pre $a \in (0, 1)$ je $f(x) = a^x$ rýdzo klesajúca. V oboch prípadoch existuje inverzná funkcia, ktorou je *logaritmus pri základe* a, $f^{-1}(x) = \log_a x$. Teda

$$\log_a x = z \quad \text{práve vtedy, keď} \quad x = a^z.$$

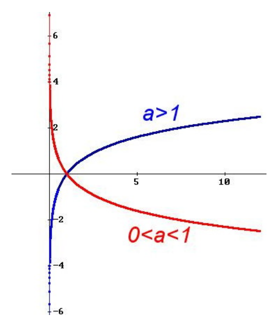
Z toho dostaneme dôležitý vzťah pre $a > 0$, $a \neq 1$

$$a^{\log_a x} = x \quad \text{pre } x > 0 \text{ a} \quad \log_a (a^x) = x \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

Definičný obor logaritmu je $D(\log_a) = (0, \infty)$ a obor hodnôt je $H(\log_a) = \mathbb{R}$.



Obr. 2.16. Exponenciálne funkcie



Obr. 2.17. Logaritmické funkcie

Základné pravidlá pre prácu s exponenciálnymi funkciami:

$$a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}, \quad a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x, \quad (a^x)^z = a^{x \cdot z} \neq a^{x^z} = a^{(x^z)}$$

Základné pravidlá pre prácu s logaritmickými funkciami:

$$\log_a(x \cdot z) = \log_a x + \log_a z, \quad \log_a x^z = z \cdot \log_a x, \quad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Základ prirodzeného logaritmu (označenie $\log_e x = \ln x$) $e \doteq 2,718\ldots$. Exponenciálnu funkciu so základom e označujeme $e^x = \exp(x)$. Presnú definíciu čísla e dáme v časti 2.2.4.

Dekadický logaritmus (logaritmus pri základe 10) označujeme $\log_{10} x = \log x$.
Základné hodnoty exponenciálnych a logaritmických funkcií:

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 \qquad \log_a 1 = 0 \\ a^1 &= a \qquad \log_a a = 1 \\ & \qquad\quad \log_a a^n = n \end{aligned} \tag{2.9}$$

Goniometrické a cyklometrické funkcie

Hodnoty goniometrických funkcií na intervale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ sú dané pomerom dĺžok dvojice strán pravouhlého trojuholníka. Takýchto (usporiadaných) dvojíc môžeme vybrať 6, teda aj goniometrických funkcií je 6. Konkrétne, keď máme pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C a so štandardným označením strán a, b, c, tak

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \csc\alpha = \frac{c}{a}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad \sec\alpha = \frac{c}{b}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

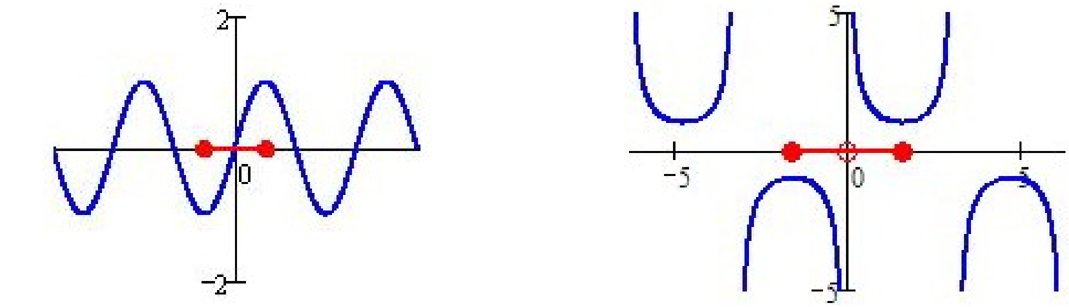
Funkcie sa volajú postupne *sínus, kosekans, kosínus, sekans, tangens, kotangens.*

Základné vlastnosti goniometrických funkcií:

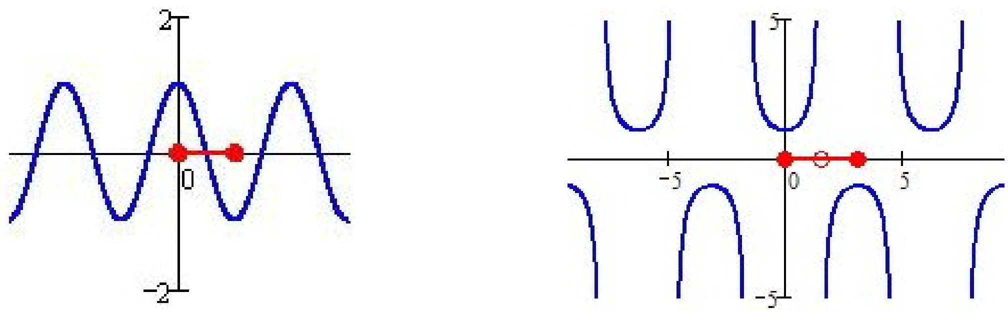
- $D(\sin) = D(\cos) = \mathbb{R}, \quad H(\sin) = H(\cos) = [-1, 1],$
  $D(\operatorname{tg}) = D(\sec) = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\cdot\pi; k \in \mathbb{Z}\},$
  $H(\operatorname{tg}) = \mathbb{R}, H(\sec) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
  $D(\operatorname{cotg}) = D(\csc) = \mathbb{R}\setminus\{k\cdot\pi; k \in Z\}, \quad H(\operatorname{cotg}) = \mathbb{R}, H(\csc) = (-\infty, -1]\cup[1, \infty).$
- Všetkých 6 funkcií je periodických, perióda funkcií tg a cotg je π, perióda zvyšných funkcií je 2π.
- Funkcie cos a sec sú párne, zvyšné funkcie sú nepárne.

Goniometrické funkcie nie sú prosté, teda neexistujú k nim inverzné funkcie. Napriek tomu, niekedy potrebujeme zistiť, akému uhlu (argumentu funkcie) zodpovedá konkrétna hodnota funkcie. Postupuje sa tak, že definičný obor príslušnej funkcie zúžime na oblasť, v ktorej je táto funkcia prostá. Zvyčajne sa ako tieto zúžené definičné obory berú nasledujúce oblasti:

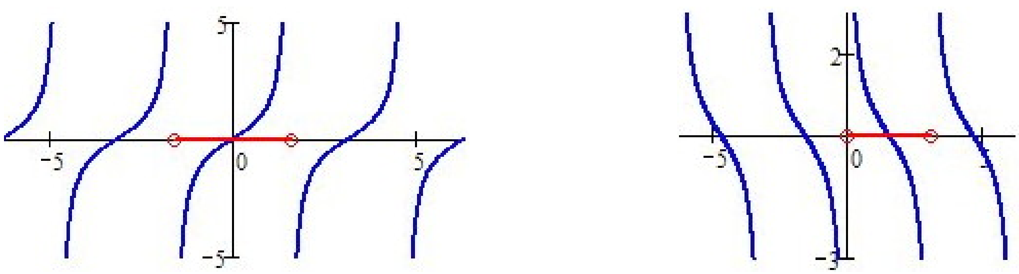
$$\begin{aligned} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \quad \text{pre funkciu sin,} \\ \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right] & \quad \text{pre funkciu csc,} \\ [0, \pi] & \quad \text{pre funkciu cos,} \\ \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] & \quad \text{pre funciu sec,} \\ \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) & \quad \text{pre funkciu tg,} \\ (0, \pi) & \quad \text{pre funkciu cotg.} \end{aligned}$$



Obr. 2.18. Grafy funkcií sin a csc a ich zúžené definičné obory



Obr. 2.19. Grafy funkcií cos a sec a ich zúžené definičné obory

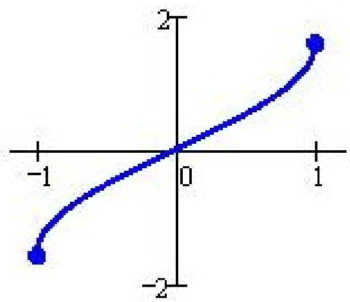


Obr. 2.20. Grafy funkcií tg a cotg a ich zúžené definičné obory

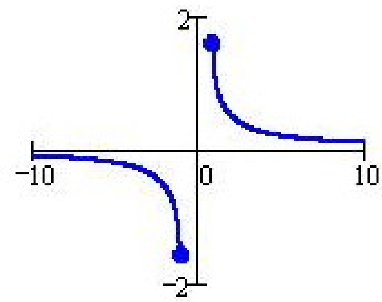
Keď takýmto spôsobom zúžime definičné obory goniometrických funkcií, môžeme zaviesť k nim inverzné funkcie (*v tejto súvislosti budeme hovoriť o zúžených goniometrických funkciách*). Tieto sa volajú *cyklometrické*.

Definícia 2.9 *Inverzná funkcia k zúženému sínusu sa volá arkus sínus, ozn.* arcsin.
$D(\text{arcsin}) = [-1, 1],\ H(\text{arcsin}) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
Inverzná funkcia k zúženému kosekansu sa volá arkus kosekans, ozn. arccsc.
$D(\text{arccsc}) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty),\ H(\text{arccsc}) = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Inverzná funkcia k zúženému kosínusu sa volá arkus kosínus, ozn. arccos.
$D(\text{arccos}) = [-1, 1],\ H(\text{arccos}) = [0, \pi]$.
Inverzná funkcia k zúženému sekansu sa volá arkus sekans, ozn. arcsec.

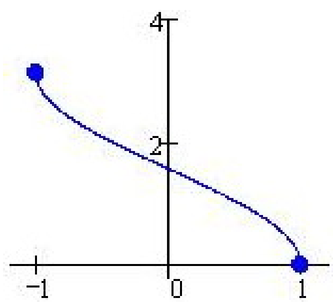
$D(\text{arcsec}) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, $H(\text{arccsc}) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.
Inverzná funkcia k zúženému tangensu sa volá arkus tangens, ozn. arctg.
$D(\text{arctg}) = \mathbb{R}$, $H(\text{arctg}) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
Inverzná funkcia k zúženému kotangensu sa volá arkus kotangens, ozn. arccotg.
$D(\text{arccotg}) = \mathbb{R}$, $H(\text{arccotg}) = (0, \pi)$.



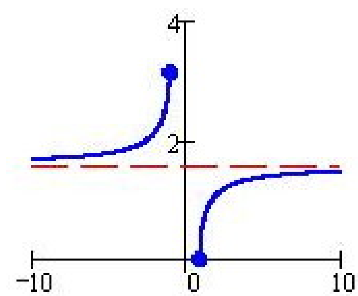
Obr. 2.21. Funkcia arcsin



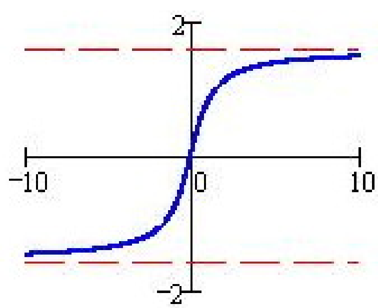
Obr. 2.22. Funkcia arccsc



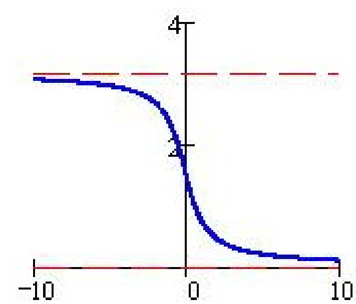
Obr. 2.23. Funkcia arccos



Obr. 2.24. Funkcia arcsec



Obr. 2.25. Funkcia arctg



Obr. 2.26. Funkcia arccotg

Užitočné vzťahy:

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$,

2. $\sin(x_1 \pm x_2) = \sin(x_1)\cos(x_2) \pm \cos(x_1)\sin(x_2)$ pre všetky $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,

3. $\cos(x_1 \pm x_2) = \cos(x_1)\cos(x_2) \mp \sin(x_1)\sin(x_2)$ pre všetky $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,
4. $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x, \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

Hyperbolické funkcie

Definícia 2.10 *Hyperbolický sínus (ozn.* sinh*) je definovaný pre všetky $x \in \mathbb{R}$ predpisom*

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Hyperbolický kosinus (ozn. cosh*) je definovaný pre všetky $x \in \mathbb{R}$ predpisom*

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Hyperbolický tangens (ozn. tanh*) je definovaný pre všetky $x \in \mathbb{R}$ predpisom*

$$\sinh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

Hyperbolický kotangens (ozn. coth*) je definovaný pre všetky $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ predpisom*

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

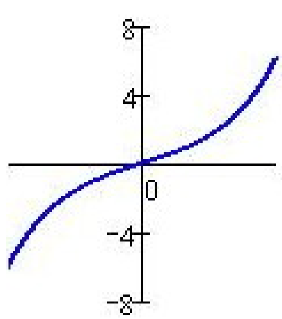
Základný vzťah medzi hyperbolickým sínusom a hyperbolickým kosínusom je nasledujúci:

$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = 1. \tag{2.10}$$

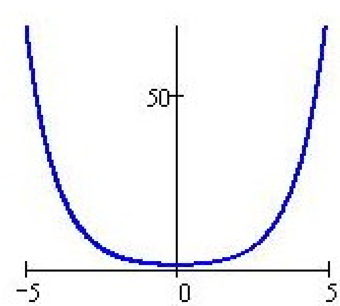
Tento vzťah hovorí, že body $(\cosh x, \sinh x)$ ležia na hyperbole (teda tvoria hyperbolickú krivku).

Základné vlastnosti hypebolických funkcií (ich overenie prenecháme na čitateľa)

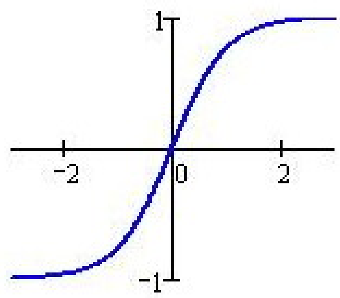
1. cosh je párna funkcia, sinh, tanh, coth sú nepárne funkcie,
2. $\cosh x > \sinh x$ pre každé $x \in \mathbb{R}$,
3. $H(\cosh) = [1, \infty)$, $H(\sinh) = \mathbb{R}$, $H(\tanh) \subset (-1, 1)$, $H(\coth) \subset (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.



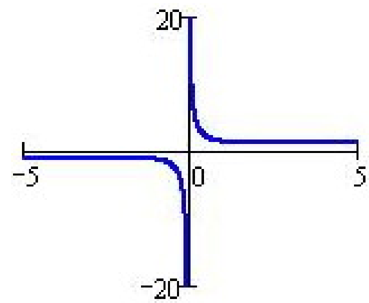
Obr. 2.27. Hyperbolický sínus



Obr. 2.28. Hyperbolický kosínus



Obr. 2.29. Hyperbolický tangens



Obr. 2.30. Hyperbolický kotangens

Veta 2.4 *Funkcie* sinh, tanh, coth *sú prosté.*
Inverzná funkcia k sinh *je* $f_1(x) = \ln\left(x + \sqrt{(1+x^2)}\right)$, $D(f_1) = \mathbb{R}$,
inverzná funkcia k tanh *je* $f_2(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $D(f_2) = (-1, 1)$
inverzná funkcia k coth *je* $f_3(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$, $D(f_3) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Dôkaz: Ukážeme, že sinh je prostá funkcia. Nech $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sú ľubovoľné čísla, pre ktoré platí $\sinh x_1 = \sinh x_2$, teda

$$\frac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{2} = \frac{e^{x_2} - e^{-x_2}}{2}. \tag{2.11}$$

Označme $e^{x_1} = z_1$ a $e^{x_2} = z_2$. To znamená, že $z_1, z_2 > 0$. Potom môžeme rovnicu (2.11) prepísať do tvaru

$$z_1 - \frac{1}{z_1} = z_2 - \frac{1}{z_2},$$

a ďalej upravovať

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \\ {z_1}^2 z_2 - {z_2}^2 z_1 &= z_2 - z_1 \\ z_1 z_2 (z_1 - z_2) &= -(z_1 - z_2). \end{aligned}$$

Preto, že $z_1, z_2 > 0$, je posledná rovnica splnená práve vtedy, keď $z_1 = z_2$, teda sinh je prostá funkcia.
Ukážeme, že tanh je prostá funkcia. Nech $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sú ľubovoľné čísla, pre ktoré platí $\tanh x_1 = \tanh x_2$, teda $\frac{\sinh x_1}{\cosh x_1} = \frac{\sinh x_2}{\cosh x_2}$. Z rovnice (2.10) vyplýva

$$\cosh x = \sqrt{1 + \sinh^2 x}.$$

Potom, ak platí

$$\frac{\sinh x_1}{\sqrt{1 + \sinh^2 x_1}} = \frac{\sinh x_2}{\sqrt{1 + \sinh^2 x_2}}, \tag{2.12}$$

tak nastáva práve jeden z dvoch prípadov:
(1) $\sinh x_1 \geq 0$ a sučasne $\sinh x_2 \geq 0$,
(2) $\sinh x_1 < 0$ a súčasne $\sinh x_2 < 0$.
Rovnicu (2.12) môžeme (v oboch uvedených prípadoch) ekvivalentne vyjadriť v tvare

$$\frac{\sinh^2 x_1}{1+\sinh^2 x_1} = \frac{\sinh^2 x_2}{1+\sinh^2 x_2}.$$

a ďalej upraviť

$$\frac{\sinh^2 x_1 + 1 - 1}{1+\sinh^2 x_1} = 1 - \frac{1}{1+\sinh^2 x_1} \quad = \quad \frac{\sinh^2 x_2 + 1 - 1}{1+\sinh^2 x_2} = 1 - \frac{1}{1+\sinh^2 x_2}$$

$$1+\sinh^2 x_1 = 1+\sinh^2 x_2,$$

čo, za predpokladu, že platí práve jeden z prípadov **(1)** alebo **(2)** (teda keď $\sinh x_1$ a $\sinh x_2$ majú „rovnaké znamienko"), vedie k jedinému riešeniu $x_1 = x_2$ a to znamená, že tanh je prostá funkcia. Overenie faktu, že coth je prostá funkcia, prenecháme na čitateľa.

Nájdeme inverznú funkciu k sinh. To znamená, že riešime rovnicu

$$\sinh y = x, \quad \text{teda} \quad \frac{e^y - e^{-y}}{2} = x. \tag{2.13}$$

Označme $e^y = z$. Potom $z > 0$. Spravíme substitúciu vo výraze (2.13). Dostaneme

$$z - \frac{1}{z} = 2x$$

a ďalej upravíme

$$z^2 - 2xz - 1 = 0, \quad \text{z toho} \quad \left\{ \begin{array}{l} z_1 = x + \sqrt{x^2+1}, \\ z_2 = x - \sqrt{x^2+1} \end{array} \right\}.$$

$\sqrt{x^2+1} > x$, teda $z_1 > 0$, $z_2 < 0$ a to znamená, že nám vyhovuje len koreň z_1. Spätne dostaneme

$$e^y = x + \sqrt{x^2+1} \quad \Leftrightarrow \quad y = \ln\left(x + \sqrt{x^1+1}\right).$$

Na záver, inverzná funkcia k sinh je $f_1(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^1+1}\right)$ a $D(f_1) = \mathbb{R}$.
Nájdeme inverznú funkciu k tanh. Riešime rovnicu

$$\tanh y = x, \quad \text{teda} \quad \frac{\sinh y}{\cosh y} = x.$$

Využijeme vzťah (2.10) a dostaneme

$$\frac{\sinh y}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = x. \tag{2.14}$$

Označme $z = \sinh y$. Potom $z \geq 0$ práve vtedy, keď $x \geq 0$. Súčasne vieme, že pre obor hodnôt tanh platí $H(\tanh) \subset (-1,1)$, teda aj $x \in (-1,1)$. Rovnicu (2.14) môžeme prepísať do tvaru

$$\frac{z^2+1-1}{1+z^2} = x^2$$

a ďalej upraviť

$$1-x^2 = \frac{1}{1+z^2} \quad \underbrace{\Leftrightarrow}_{x\in(-1,1)} \quad z^2 = \frac{1}{1-x^2} - 1 = \frac{x^2}{1-x^2}.$$

Teraz opäť využijeme fakt, že $z \geq 0$ práve vtedy, keď $x \geq 0$ a dostaneme

$$\sinh y = z = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{a z toho} \quad y = f_1(z),$$

teda

$$\begin{aligned} y &= \ln\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}+1}\right), \\ y &= \ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{(1+x)(1-x)}}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right). \end{aligned}$$

Z toho dostaneme $f_2(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. $\frac{1+x}{1-x} > 0$ práve vtedy, keď $x \in (-1,1)$. Z toho dostaneme $D(f_2) = (-1,1)$.
Odvodenie inverznej funkcie ku coth prenecháme na čitateľa. □

Dôsledok vety 2.4 je $H(\tanh) = (-1,1)$ a $H(\coth) = (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$.

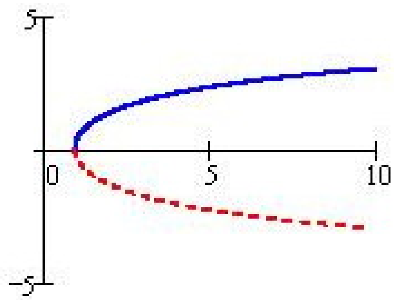
Funkcia cosh nie je prostá a teda nemá inverznú. Napriek tomu, v istom zmysle môžeme inverznú funkciu skonštruovať.

- Keď obmedzíme definičný obor cosh na interval $[0,\infty)$, tak cosh je prostá. Potom *inverzná funkcia* ku cosh je

$$f_4(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \quad D(f_4) = H(\cosh) = [1,\infty).$$

- Keď obmedzíme definičný obor cosh na interval $(-\infty,0]$, tak cosh je opäť prostá. Potom *inverzná funkcia* ku cosh je

$$f_5(x) = \ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right), \quad D(f_5) = H(\cosh) = [1,\infty).$$



Obr. 2.31. Grafy funkcií f_4 a f_5

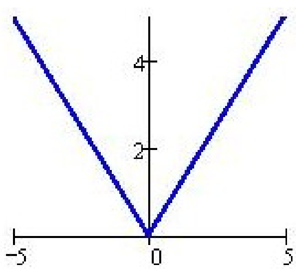
Absolútna hodnota a funkcia signum

Absolútna hodnota je funkcia $|\cdot| : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, definovaná vzťahom

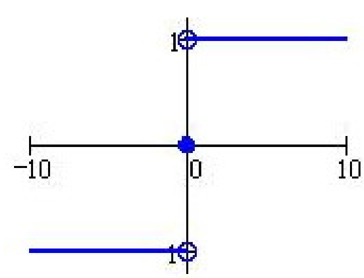
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ak } x \geq 0, \\ -x, & \text{ak } x < 0. \end{cases}$$

Signum (z latinčiny znamienko), ozn. sign, je funkcia $\operatorname{sign} : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$. Nadobúda len 3 hodnoty a je definovaná vzťahom

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & \text{ak } x < 0, \\ 0, & \text{ak } x = 0, \\ 1, & \text{ak } x > 0. \end{cases} \tag{2.15}$$



Obr. 2.32. Absolútna hodnota



Obr. 2.33. Signum

Definícia 2.11 *Elementárnymi funkciami budeme nazývať mocninové, exponenciálne, logaritmické, goniometrické, cyklometrické, absolútnu hodnotu a signum, ako aj všetky funkcie, ktoré z týchto vzniknú ich súčtom, súčinom, rozdielom, podielom a zložením.*

2.2 Limity a spojitosť funkcií

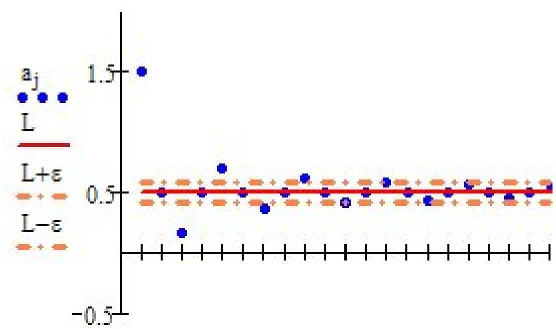
2.2.1 Postupnosti a ich limity

Postupnosť je funkcia z množiny prirodzených čísel $\mathbb{N}$ (obvykle) do množiny reálnych čísel $\mathbb{R}$. Postupnosti označujeme $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Definícia 2.12 *Hovoríme, že postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu L, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tak, že pre všetky $n > n_\varepsilon$ platí*

$$|a_n - L| < \varepsilon.$$

Limitu postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.



Obr. 2.34. Limita postupnosti

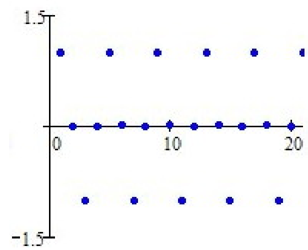
Lema 2.4 (Existencia limity postupnosti). *Nech $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je daná postupnosť. Postupnosť $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ má $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ práve vtedy, keď pre každé $\varepsilon > 0$ existuje číslo $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ také, že pre ľubovoľné $m, n > n_\varepsilon$ platí*

$$|b_m - b_n| < \varepsilon. \tag{2.16}$$

Lema 2.5 (Postačujúca podmienka existencie limity postupnosti). *Nech $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je daná postupnosť. Ak je postupnosť $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ monotónna a ohraničená, tak má limitu.*

Príklad 2.7 Majme danú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ predpisom

$$a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$



Obr. 2.35. Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$

Táto postupnosť nemá limitu, lebo pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_{2n-1} - a_{2n+1}| = 2$, teda nie je splnený vzťah (2.16).

Základné pravidlá pre výpočet limít postupností:
Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ sú dané postupnosti, ktoré majú limity $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$. Potom

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$
3. ak $B \neq 0$, tak $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$
4. pre ľubovoľné $c \in \mathbb{R}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot A$
5. pre ľubovoľné $c \in \mathbb{R}$ (prípustné) platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^c = A^c$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Príklad 2.8 Vypočítajme limitu postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = \frac{3n^3-n^2}{2n^3+1}$.

Riešenie:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 - n^2}{2n^3 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(3 - \frac{1}{n}\right)}{n^3\left(2 + \frac{1}{n^3}\right)}.$$

Aplikovaním pravidiel 5 a 6 dostaneme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$. Z tohto výsledku a pravidla 1 dostaneme $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2 + \frac{1}{n^3}\right) = 0$. Pomocou pravidla 3 a následne pravidiel 5 a 6

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n^3}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \left(3 - \frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(2 + \frac{1}{n^3}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3}{\lim\limits_{n\to\infty} 2} = \frac{3}{2}.$$

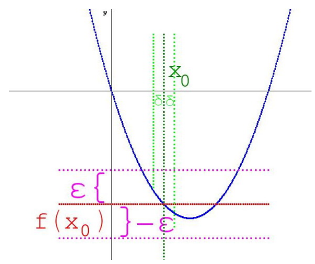
□

2.2.2 Spojitosť funkcií

Definícia 2.13 *Nech f je daná funkcia. Potom hovoríme, že je spojitá v bode $x_0 \in D(f)$, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pre všetky $x \in D(f)$ platí*

$$\textit{ak} \quad |x - x_0| < \delta, \quad \textit{tak} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Voľne povedané, funkcia f je spojitá v bode $x_0 \in D(f)$, ak pre všetky hodnoty $x \in D(f)$, ktoré sú v „dostatočne malom okolí" bodu x_0, sú funkčné hodnoty $f(x)$ „ľubovoľne blízke" hodnote $f(x_0)$.



Obr. 2.36. Spojitosť funkcie

Ak funkcia f nie je spojitá v bode $x_0 \in D(f)$, tak hovoríme, že je *nespojitá.*

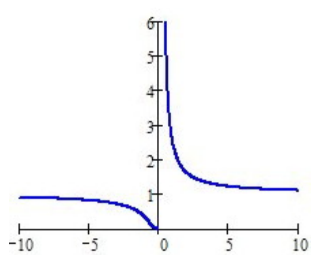
Definícia 2.14 *Nech f je daná funkcia. Potom hovoríme, že f je spojitá na množine $M \subseteq D(f)$, ak je spojitá v každom bode $x \in M$.*

Poznámka 2.4 Ak je funkcia f spojitá na množine $M = D(f)$, tak hovoríme stručne, že je spojitá.
Všetky funkcie z časti 2.1.2, okrem funkcií, vytvorených pomocou funkcie sign, sú spojité.

Príklad 2.9 Nech je funkcia $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ daná predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x}\right), & \text{pre } x \neq 0 \\ 0, & \text{pre } x = 0 \end{cases}$$

Potom f je nespojitá funkcia v bode $x_0 = 0$ (pozri obr. 2.37).



Obr. 2.37. Nespojitá funkcia f

Základné pravidlá:
Nech f, g sú spojité funkcie na množine M a $k \in \mathbb{R}$. Potom

- $f+g$, $f \cdot g$, $k \cdot f$ sú spojité funkcie,
- $\frac{f(x)}{g(x)}$ je spojitá funkcia pre $x \in M$ také, že $g(x) \neq 0$, teda na množine $M \cap D\left(\frac{f}{g}\right)$
- ak pre každé $x \in M$ je $g(x) \in D(f)$, tak zložená funkcia $f(g(x))$ je spojitá na množine M.

2.2.3 Limity funkcií

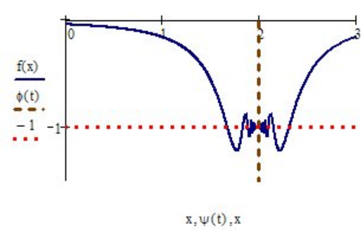
Vlastné limity vo vlastných bodoch

Definícia 2.15 *Hovoríme, že funkcia f má v bode x_0 limitu L, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $x \in D(f)$, $x \neq x_0$, platí*

$$\text{ak} \quad |x - x_0| < \delta, \quad \text{tak} \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Limitu funkcie f označujeme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

K tomu, aby limita funkcie f mohla existovať v bode x_0, nie je nutné, aby bola v bode x_0 definovaná.



Obr. 2.38. Limita funkcie

Poznámka 2.5 Na prvý pohľad sa môže zdať, že sú definície 2.13 a 2.15 identické. Rozdiel je v tom, že keď vyšetrujeme spojitosť, musí byť funkcia f definovaná v bode x_0.

Lema 2.6 *Nech f je spojitá funkcia v bode x_0. Potom existuje $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ a táto limita sa rovná hodnote $f(x_0)$.*

Základné pravidlá na výpočet limity funkcie:
Majme funkcie f a g také, že v bode x_0 majú limity $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_1$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L_2$. Potom platí

(L1) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$

(L2) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2$

(L3) ak $L_2 \neq 0$, tak $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$

(L4) pre ľubovoľné $c \in \mathbb{R}$ platí $\lim\limits_{x \to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot L_1$

(L5) ak g je spojitá v bode L_1, tak

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right) = g(L_1)$$

(L6) ak f je spojitá v bode x_0 a navyše

$$(\exists\, \varepsilon > 0)(\forall\, x \in D(f))(0 < |x - x_0| < \varepsilon \;\Rightarrow\; f(x) \neq f(x_0)), \tag{2.17}$$

tak $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim\limits_{t \to L_1} g(t)$.

Pravidlá (L5) a (L6) hovoria o tom, ako sa dá robiť substitúcia pri výpočte limít. Dôležitosť podmienky (2.17) si ilustrujeme na nasledujúcom príklade.

Príklad 2.10 Majme funkciu $f(x) = 3$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$ a funkciu $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, danú predpisom

$$g(x) = \begin{cases} 5, & \text{ak } x = 3, \\ 1, & \text{ak } x \neq 3. \end{cases}$$

Potom pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí $g(f(x)) = g(3) = 5$, ale $\lim\limits_{t \to 3} g(t) = 1$, lebo $g(t) = 1$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 3$. Teda vidíme, že ak nie je splnená podmienka (2.17), tak môžeme dostať

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) \neq \lim_{t \to L_1} g(t),$$

kde $f(x_0) = L_1$ a funkcia f je spojitá v x_0. □

Príklad 2.11 Vypočítajte $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$.

Riešenie: Výraz $x^2 - 9$ rozložíme a po vykrátení dostaneme funkciu, ktorá je definovaná a spojitá v 3, teda z lemy 2.6 dostaneme výsledok

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x \to 3} (x+3) = 6.$$

□

Príklad 2.12 Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\frac{x^3-8}{x-2}}$.

Riešenie: Funkcia $f(z)=\sqrt{z}$ je spojitá na $D(f)$. To znamená, že môžeme použiť pravidlo (L5) a dostaneme

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x^3-8}{x-2}}=\sqrt{\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}}.$$

Teraz použijeme vzťah (2.7) a po vykrátení dostaneme funkciu, ktorá je definované a spojitá v 2, teda z lemy 2.6 dostaneme výsledok

$$\sqrt{\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}}=\sqrt{\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}}=\sqrt{12}.$$

□

Nevlastné a jednostranné limity

Definícia 2.16 *Hovoríme, že funkcia f má v bode x_0 nevlastnú limitu rovnajúcu sa ∞ (resp. $-\infty$), ak pre každé $K\in\mathbb{R}$ existuje $\delta>0$ tak, že pre všetky $x\in D(f)$, $x\neq x_0$, platí*

$$\text{ak}\quad |x-x_0|<\delta,\quad \text{tak}\quad f(x)>K\quad (\text{resp. } f(x)<K).$$

Definícia 2.17 *Hovoríme, že funkcia f má v bode x_0 limitu sprava (resp. zľava) rovnajúcu sa $L\in\mathbb{R}$, ak pre každé $\varepsilon>0$ existuje $\delta>0$ tak, že pre všetky $x\in D(f)$, $x_0<x<x_0+\delta$ (resp. $x_0>x>x_0-\delta$) platí $|f(x)-L|<\varepsilon$. Limitu sprava označujeme $\lim\limits_{x\to x_{0+}} f(x)=L$ a limitu zľava $\lim\limits_{x\to x_{0-}} f(x)=L$.*

O vzťahu jednostranných limít a obojstrannej limity hovorí nasledujúca lema.

Lema 2.7 *Daná je funkcia f a $x_0\in\mathbb{R}$. Nech existuje $\xi>0$ tak, že pre definičný obor f platí $(x_0-\xi,x_0+\xi)\setminus\{x_0\}\subset D(f)$. Potom existuje limita funkcie f v bode x_0 a rovná sa L práve vtedy, keď existujú limity sprava a zľava funkcie f v x_0 a obe sa rovnajú L.*

Pre jednostranné limity môžeme používať rovnaké pravidlá ako pre obojstranné. Pre nevlastné limity navyše platia pravidlá

(P1) $\lim\limits_{x\to 0_+}\frac{1}{x}=\infty$;

(P2) $\lim\limits_{x\to 0_-}\frac{1}{x}=-\infty$.

Pravidlo (P1) môžeme upraviť do tvaru:

Lema 2.8 *Nech* $x_0 \in \mathbb{R}$ *a* $\xi > 0$. *Nech* f, g *sú funkcie, ktoré sú definované na intervale* $(x_0, x_0 + \xi)$ *a spĺňajú podmienky*

(a1) $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ *a súčasne* $g(x) > 0$ *pre všetky* $x \in (x_0, x_0 + \xi)$,

(a2) *existuje číslo* $0 < K \in \mathbb{R}$ *tak, že pre všetky* $x \in (x_0, x_0 + \xi)$ *platí* $f(x) \geq K$.

Potom

$$\lim_{x \to x_{0+}} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

Ak pre funkciu f *platí podmienka:*

(a2') *existuje číslo* $0 > K \in \mathbb{R}$ *tak, že pre všetky* $x \in (x_0, x_0 + \xi)$ *platí* $f(x) \leq K$,

potom

$$\lim_{x \to x_{0+}} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

Myšlienka dôkazu spočíva v tom, že ak $f(x) \geq K > 0$ pre všetky $x \in (x_0, x_0 + \xi)$, potom platí

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{K}{g(x)}.$$

Aplikáciou pravidla (P1) dostaneme $\lim\limits_{x \to x_{0+}} \frac{K}{g(x)} = \infty$ a vzhľadom na práve uvedenú nerovnosť z toho vyplýva

$$\lim_{x \to x_{0+}} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

□

Poznámka 2.6 **(1)** Podmienka **(a2)**, resp. **(a2')** z lemy 2.8 je splnená vždy, keď platí

$$\lim_{x \to x_{0+}} f(x) = L \neq 0.$$

(2) Lema 2.8 sa dá naformulovať aj pre limity zľava a obojstranné limity. Tieto formulácie prenecháme na čitateľa. Rovnako prenecháme na čitateľa úpravu pravidla (P2).

Príklad 2.13 Vypočítajte $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\cos x}{|x - \pi|}$.

Riešenie: Pre výraz $|x - \pi|$ platia tieto vzťahy:
$\lim\limits_{x \to \pi} |x - \pi| = 0$ a $|x - \pi| > 0$ pre $x \neq \pi$.
Navyše $\lim\limits_{x \to \pi} \cos x = -1$,
teda podľa lemy 2.8 (zmodifikovanej pre obojstrannú limitu) platí

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\cos x}{|x - \pi|} = -\infty.$$

□

Príklad 2.14 Vypočítajte $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+} \frac{\sin x}{\cos x}$ a $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-} \frac{\sin x}{\cos x}$.

Riešenie: Pretože platí $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = 1$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x = 0$ a $\cos x < 0$ pre $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, z lemy 2.8 dostaneme

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \frac{\sin x}{\cos x} = -\infty.$$

Pre $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ je $\cos x > 0$, teda z lemy 2.8 dostaneme

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \frac{\sin x}{\cos x} = \infty.$$

□

Limity v nevlastných bodoch

Ide o limity v bodoch „∞" a „$-\infty$". Zavedieme limitu v bode ∞. Presnú definíciu limity v bode $-\infty$ i definície nevlastných limít v týchto bodoch prenecháme na čitateľa.

Definícia 2.18 *Hovoríme, že funkcia f má v bode ∞ limitu rovnajúcu sa L, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $K \in \mathbb{N}$ tak, že pre všetky $x \in D(f)$, $x > K$, platí $|f(x) - L| < \varepsilon$. Označenie: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$.*

Pre výpočet limít v nevlastných bodoch môžeme používať pravidlá (L1) – (L5) a navyše pravidlo

(NL) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Použitím vzťahu (L5) môžeme pravidlo (NL) zovšeobecniť do tvaru

(NL') $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^r} = 0$, kde $r > 0$ je ľubovoľná konštanta. Ak je výraz x^r definovaný aj pre $x < 0$, tak aj $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^r} = 0$.

Príklad 2.15 (Typ „polynóm/polynóm" v nevlastnom bode) Vypočítajte $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+5}{5x^2+x}$.

Riešenie: Z čitateľa aj menovateľa vyberieme výraz x^n, resp. x^m pred zátvorku, kde n je najväčší exponent z čitateľa a m je najväčší exponent z menovateľa:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 3x + 5}{5x^2 + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1 - 3\frac{x}{x^2} + \frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(5 + \frac{x}{x^2}\right)} = \frac{1 - 0 + 0}{5 + 0} = \frac{1}{5},$$

pričom sme využili pravidlo (NL'). □

Príklad 2.16 Vypočítajte $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-5}}{x-1}$.

Riešenie: Daný príklad môžeme previesť na typ „$\frac{\text{polynóm}}{\text{polynóm}}$", keď „vyberieme" odmocninu pred limitu. Všimnime si, že menovateľ je pre dostatočne veľké x (presnejšie pre $x > 1$) kladný, teda môžeme ho prepísať do tvaru

$$x - 1 = \sqrt{(x-1)^2}$$

a potom na výpočet limity použiť pravidlo (L5) a ďalej postupovať ako v príklade 2.15:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-5}}{x-1} = \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-5}{(x-1)^2}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(1-2\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)}} = \sqrt{\frac{1-0}{1-0+0}} = 1.$$

□

Príklad 2.17 Vypočítajte $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-5}}{x-1}$.

Riešenie: Rozdiel oproti príkladu 2.16 je ten, že menovateľ je záporný pre všetky $x < 0$. Preto ho musíme upraviť nasledujúco:

$$-(x-1) = \sqrt{(x-1)^2} \quad \Rightarrow \quad x-1 = -\sqrt{(x-1)^2}.$$

Teraz môžeme postupovať podobne ako v príklade 2.16.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-5}}{x-1} &= -\sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-5}{(x-1)^2}} = -\sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(1-2\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)}} = \\ &= -\sqrt{\frac{1-0}{1-0+0}} = -1.\end{aligned}$$

□

2.2.4 Číslo e

Veta 2.5 *Funkcia $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ je pre $x > 0$ rastúca a ohraničená.*

Ako dôsledok lemy 2.5 a vety 2.5 dostaneme, že existuje $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ a túto limitu označíme e.

Lema 2.9 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}} = e.$

Limitu $\lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}$ môžeme rozpísať na limitu zľava a limitu sprava. To znamená, že lema 2.9 má nasledujúci dôsledok:

Dôsledok 2.2 $\lim_{z\to 0_+}(1+z)^{\frac{1}{z}} = \lim_{z\to 0_-}(1+z)^{\frac{1}{z}} = e.$

Pridáme ešte jedno pravidlo na výpočet limít:

(E) Nech $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$, $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$, pričom $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}$ alebo $a \in \{\infty, -\infty\}$. Potom, ak existuje hodnota $L_1^{L_2}$, tak
$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = L_1^{L_2}$.

Z lemy 2.9, dôsledku 2.2 a pravidla (E) dostaneme návod ako počítať limity typu „$(1+0)^\infty$". Ilustrujeme si to na príkladoch.

Príklad 2.18 Vypočítajte $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x$.

Riešenie: Označíme $t = \frac{x}{5}$. Potom dostaneme

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{5t}$$

Použijeme pravidlo (L5) a dostaneme

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t\cdot 5} = \left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^5 = e^5.$$

□

Príklad 2.19 Vypočítajte $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$.

Riešenie Označíme $t = \frac{3}{x}$. Potom dostaneme

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{2}} = \lim_{t\to 0_-}(1+t)^{\frac{3}{2t}}$$

Použijeme pravidlo (L5) a dôsledok 2.2 a dostaneme

$$\lim_{t\to 0_-}(1+t)^{\frac{3}{2t}} = \left(\lim_{t\to 0_-}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{2}}.$$ □

Z práve vypočítaného príkladu môžeme urobiť záver:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{2.18}$$

Príklad 2.20 Vypočítajte $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-5}{3x+4}\right)^{\frac{x}{2}}$.

Riešenie:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-5}{3x+4}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x+4}-\frac{9}{3x+4}\right)^{\frac{x}{2}}.$$

Označíme $t=-\frac{3x+4}{9}$. Potom $x=-3t-\frac{4}{3}$ a z toho

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x+4}-\frac{9}{3x+4}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t\frac{-3t-\frac{4}{3}}{2t}}.$$

$\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{-3t-\frac{4}{3}}{2t}=-\frac{3}{2}$. Zo vzťahu (2.18) a pravidla (E) dostaneme

$$\lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t\frac{-3t-\frac{4}{3}}{2t}}=e^{-\frac{3}{2}}.$$

□

2.2.5 Asymptoty

Asymptopty so smernicou

Definícia 2.19 *Hovoríme, že priamka $p:\ y=kx+q$ je asymptotou so smernicou funkcie f v ∞ (resp. v $-\infty$), ak platí*

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx-q)=0\quad \textit{(resp. } \lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx-q)=0.\textit{)} \tag{2.19}$$

Úpravou výrazu (2.19) pre prípad asymptoty v ∞ dostaneme:

$$0=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-kx-q}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-k-\frac{q}{x}\right).$$

Keďže $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{q}{x}=0$ (pravidlo (NL)), dostaneme smernicu asymptoty:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \tag{2.20}$$

a zo vzťahov (2.19) a (2.20) úsek asymptoty:

$$q=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx). \tag{2.21}$$

Asymptota so smernicou existuje, ak obe limity existujú a sú konečné.

Poznámka 2.7 Ak existuje limita $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=c\in\mathbb{R}$, tak priamka $p:y=c$ je asymptotou funkcie f v ∞.

Príklad 2.21 Nájdite asymptoty so smernicou funkcie $f(x)=\frac{x^2-3x}{x+1}$.

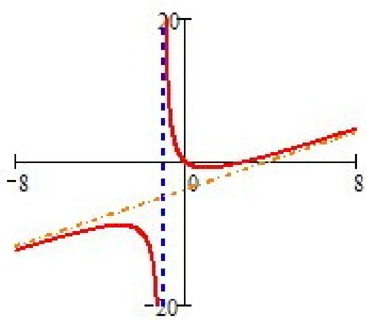
Riešenie $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Zistíme asymptotu so smernicou v $+\infty$. Pre jej smernicu dostaneme (vzťah (2.20))

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-3x}{x+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x}{x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-3\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=1.$$

Pre úsek asymptoty platí (vzťah (2.21))

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3x}{x+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x-x(x+1)}{x+1}= \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{-4x}{x+1}=-4. \end{aligned}$$

Asymptota so smernicou v $+\infty$ má rovnicu $p:\ y=x-4$. Podobne môžeme vypočítať asymptotu so smernicou v $-\infty$. Overte, že jej rovnica je tiež $p:\ y=x-4$.



Obr. 2.39. Asymptoty funkcie $f=\frac{x^2-3x}{x+1}$

□

Príklad 2.22 Nájdite asymptoty so smernicou hyperboly $4x^2-y^2=1$.

Riešenie: Daná hyperbola sa dá vyjadriť pomocou dvoch 2 funkcií (pre $y\geq 0$ a pre $y\leq 0$) $f_1(x)=\sqrt{4x^2-1}$, $f_2(x)=-\sqrt{4x^2-1}$. Definičné obory týchto funkcií sú $D(f_1)=$ $=D(f_2)=\mathbb{R}\setminus\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Asymptoty budeme hľadať len pre funkciu f_1. Výpočet asymptôt pre funkciu f_2 prenecháme na čitateľa.

Na určenie smernice asymptoty v „$+\infty$" pre funkciu f_1 aplikujeme vzťah (2.20) a dostaneme

$$k_1=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2-1}}{x}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-1}{x^2}}=\sqrt{4}=2.$$

Pre úsek tejto asymptoty (vzťah (2.21)) platí

$$q_1=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-1}-2x\right).$$

Výraz rozšírime tak, aby sme dostali rozdiel štvorcov:

$$\begin{aligned} q_1 &= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2-1}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2-1}+2x\right)}{\sqrt{4x^2-1}+2x} = \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2-1-4x^2}{\sqrt{4x^2-1}+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{x\left(\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}+2\right)} = 0. \end{aligned}$$

Rovnica asymptoty so smernicou v ∞ pre funkciu f_1 je $p_1:\ y = 2x$.

Vypočítame asymptotu so smernicou pre f_1 v $-\infty$. Pre jej smernicu platí

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2-1}}{x}.$$

Hodnoty x „v okolí" $-\infty$ sú záporné, teda $x = -\sqrt{x^2}$. Z toho dostaneme

$$k_2 = -\sqrt{\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2-1}{x^2}} = -\sqrt{4} = -2.$$

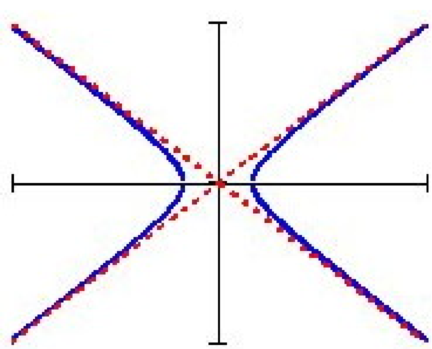
Pre úsek asymptoty dostaneme

$$q_2 = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2-1}+2x\right).$$

Výraz rozšírime tak, aby sme dostali rozdiel štvorcov. Potom

$$\begin{aligned} q_2 &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2-1}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2-1}-2x\right)}{\sqrt{4x^2-1}-2x} = \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2-1-4x^2}{\sqrt{4x^2-1}-2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{-x\left(\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}+2\right)} = 0. \end{aligned}$$

Rovnica asymptoty so smernicou v $-\infty$ pre funkciu f_1 je $p_2:\ y = -2x$.
Ukážte, že pre funkciu f_2 má asymptota v $+\infty$ rovnicu $y = -2x$ a v $-\infty$ rovnicu $y = 2x$.



Obr. 2.40. Hyperboly $4x^2 - y^2 = 1$ a jej asymptoty

□

Asymptoty bez smernice

Funkcia f má v bode x_0 *asymptotu bez smernice*, ak aspoň jedna z jednostranných limít funkcie f v x_0 je nevlastná. Asymptota bez smernice má v tomto prípade rovnicu

$$x = x_0. \tag{2.22}$$

Poznámka 2.8 Ako dôsledok lemy 2.6 dostaneme, že ak je funkcia f spojitá v bode x_0, tak v x_0 nemá asymptotu bez smernice.

Príklad 2.23 Nájdite asymptoty bez smernice funkcie $f(x) = \frac{x+3}{x-5}$.

Riešenie: Jediný bod, v ktorom funkcia f môže mať asymptotu bez smernice, je $x_0 = 5$. Zistíme limitu sprava a zľava v tomto bode. Z lemy 2.8 dostaneme

$$\lim_{x\to 5_+} \frac{x+3}{x-5} = \infty \qquad \lim_{x\to 5_-} \frac{x+3}{x-5} = -\infty$$

Teda asymptota bez smernice má rovnicu $x = 5$. Na samotné overenie faktu, či priamka $x = 5$ je asymptotou bez smernice funkcie f, stačí, že limita sprava je nevlastná. Teda limitu zľava sme počítať nemuseli. Napriek tomu, lepšie je vypočítať obe jednostranné limity, aby sme si mohli vytvoriť lepšiu predstavu o tom ako graf funkcie vyzerá. □

Príklad 2.24 Nájdite asymptoty (so smernicou aj bez smernice) funkcie $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+4}}{x-2}$.

Riešenie: Pre definičný obor funkcie f platí $D(f) = R \setminus \{2\}$. Najprv zistíme asymptoty so smernicou.
Pre smernicu asymptoty v $+\infty$ dostaneme

$$\begin{aligned} k_1 &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{4x^2+4}}{x-2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+4}}{x^2-2x} = \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+4}{(x^2-2x)^2}} = \\ &= \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(4+\frac{4}{x^2}\right)}{x^4\left(1-\frac{2}{x}\right)^2}} = 0, \end{aligned}$$

pričom pri poslednej úprave sme použili pravidlo (NL'). Pre úsek asymptoty v $+\infty$ dostaneme

$$q_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+4}}{x-2} = \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+4}{(x-2x)^2}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(4+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)^2}} = \sqrt{4} = 2$$

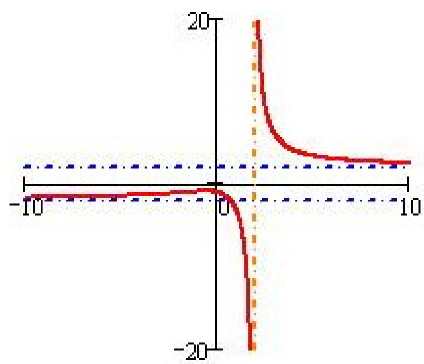
(opäť sme využili pravidlo (NL')). Asymptota so smernicou v ∞ má rovnicu $p_1 : y_1 = 2$.

Výpočet asymptoty so smernicou v $-\infty$ prenecháme na čitateľa. Jej rovnica je $p_2 : y_2 = -2$.

Určíme asymptoty bez smernice. Funkcia f je spojitá v každom bode $D(f)$, teda 2 je jediný bod, v ktorom môže existovať asymptota bez smernice danej funkcie f. Vypočítame limitu sprava a zľava pre $x_0 = 2$:

$$\lim_{x\to 2_+} \frac{\sqrt{4x^2+4}}{x-2} = \sqrt{\lim_{x\to 2_+} \frac{4x^2+4}{(x-2)^2}} = \infty,$$
$$\lim_{x\to 2_-} \frac{\sqrt{4x^2+4}}{x-2} = -\sqrt{\lim_{x\to 2_-} \frac{4x^2+4}{(x-2)^2}} = -\infty.$$

Na výpočet oboch jednostranných limít sme použili lemu 2.8.



Obr. 2.41. Asymptoty funkcie $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+4}}{x-2}$

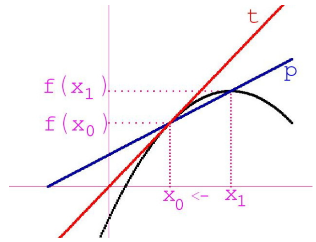
□

2.3 Derivácie

2.3.1 Geometrická interpretácia a definícia

Máme danú funkciu f a potrebujeme nájsť jej dotyčnicu, keď dotykový bod T má súradnice $T = (x_0, f(x_0))$. Dotyčnicu si vyjadríme v smernicovom tvare. Smernicu k_p priamky p si môžeme vyjadriť vzťahom $k_p = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$, kde $A = (x_1, f(x_1))$ je bod na grafe funkcie, ktorý sme si zvolili ľubovoľne (pozri orázok 2.42). Potom smernicu k_t hľadanej dotyčnice vypočítame ako limitu

$$k_t = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{2.23}$$



Obr. 2.42. Funkcia f, jej sečnica p a dotyčnica t

Definícia 2.20 *Hovoríme, že funkcia f má v $x_0 \in D(f)$ deriváciu rovnú k_t, ak je limita* (2.23) *vlastná. Deriváciu v bode x_0 označujeme $f'(x_0)$ alebo $\frac{df}{dx}(x_0)$.*

- Funkcie, ktoré majú deriváciu pre všetky $x \in M \subset \mathbb{R}$, kde $M \neq \emptyset$, sa volajú *hladké na množine M.*

Bezprostredne z definície derivácie vyplýva nasledujúca lema

Lema 2.10 *Nech f je ľubovoľná funkcia, ktorá má pre $x_0 \in \mathbb{R}$ deriváciu. Potom je funkcia f spojitá v x_0.*

Príklad 2.25 Nájdite rovnicu dotyčnice k funkcii $f(x) = x^2$, ak dotykový bod T má x-ovú súradnicu $x_0 = 2$.

Riešenie: Najprv vypočítame y-ovú súradnicu bodu T:

$$y_0 = f(2) = 4.$$

Dotykový bod má súradnice $T = (2, 4)$.
Vypočítame smernicu dotyčnice k_t:

$$k_t = f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2^2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4.$$

Dotyčnica t má rovnicu t: $y - 4 = 4(x - 2)$. □

Namiesto dotyčnice môžeme niekedy potrebovať rovnicu normály. Odvodíme si ako môžeme z rovnice dotyčnice určiť rovnicu normály. Normála n je kolmá na dotyčnicu t a prechádza dotykovým bodom T. Z toho dostaneme (pozri odsek o skalárnom súčine vektorov), že keď je všeobecná rovnica dotyčnice $t: \ 0 = k_t x - y + q_t$, tak všeobecná rovnica normály má tvar

$$n: \ 0 = -x - k_t y + q_n.$$

Z toho ďalej dostaneme (za predpokladu, že $k_t \neq 0$)

$$0 = -\frac{1}{k_t}x - y + \frac{q_n}{k_t}.$$

Odvodili sme dôležitý vzťah medzi smernicou dotyčnice (k_t) a smernicou normály (k_n):

$$k_n \cdot k_t = -1. \tag{2.24}$$

Tento vzťah sa dá naformulovať vseobecnejšie:

Lema 2.11 *Nech p a q sú priamky, ktorých smernice sú k_p a k_q. Potom priamky p a q sú na seba kolmé práve vtedy, keď $k_p \cdot k_q = -1$.*

Príklad 2.26 Nájdite rovnicu dotyčnice a normály k funkcii $f(x) = x^3$, ak dotykový bod T má x-ovú súradnicu $x_0 = 1$.

Riešenie: Vypočítame y-ovú súradnicu T: $y_0 = f(1) = 1$, teda $T = [1, 1]$.
Vypočítame smernicu dotyčnice k_t:

$$k_t = f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1^3}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = 3.$$

(Pri úprave sme použili vzorec pre rozdiel n-tých mocnín.) Dotyčnica t má rovnicu t: $y - 1 = 3(x - 1)$.

Vypočítame rovnicu normály. V smernicovom tvare je rovnica normály

$$n: \quad y - y_0 = k_n(x - x_0) = -\frac{1}{k_t}(x - x_0)$$

Teda hľadaná rovnica normály je $n: \ y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1)$ □

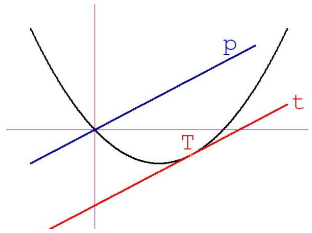
Príklad 2.27 Nájdite rovnicu dotyčnice k funkcii $f(x) = |x|$, ak dotykový bod má súradnice $T = (0, 0)$.

Riešenie: Potrebujeme vypočítať deriáciu funkcie f pre $x_0 = 0$, teda limitu (2.23). Zvlášť vypočítame limitu sprava a limitu zľava.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0_+} \frac{|x| - 0}{x - 0} &= \lim_{x\to 0_+} \frac{x}{x} = 1, \\
\lim_{x\to 0_-} \frac{|x| - 0}{x - 0} &= \lim_{x\to 0_-} \frac{-x}{x} = -1.
\end{aligned}$$

To znamená, že $|x|$ nemá pre $x = 0$ deriváciu, teda neexistuje ani dotyčnica v bode T. (Graf funkcie $f(x) = |x|$ je v bode $(0, 0)$ „zlomený",teda funkcia f tam nie je hladká.) □

Príklad 2.28 Nájdite rovnicu dotyčnice k funkcii $f(x) = x^2 - 2x$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p: \ y = x$.



Obr. 2.43. Graf funkie f, priamka p a hľadaná dotyčnica $t||p$.

Riešenie: Rovnobežné priamky majú rovnaké smernice, teda

$$k_t = k_p = 1.$$

Poznáme smernicu dotyčnice, ale nepoznáme dotykový bod T. Označme súradnice dotykového bodu $T = (x_0, y_0)$. To znamená, že hľadáme x_0, v ktorom $f'(x_0) = 1$.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{x^2 - 2x - (x_0^2 - 2x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x^2 - x_0^2) - 2(x - x_0)}{x - x_0} =$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0 - 2)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} (x + x_0 - 2) = 2x_0 - 2.$$

Dostali sme rovnicu $2x_0 - 2 = 1$ a z toho $x_0 = \frac{3}{2}$.
Dosadíme x_0 do funkcie f a dostaneme y_0:

$$y_0 = f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\frac{3}{2} = -\frac{3}{4}.$$

Dotykový bod má súradnice $T = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right)$.
Rovnica dotyčnice je $t: \ y + \frac{3}{4} = x - \frac{3}{2}$. □

2.3.2 Základné vzorce na derivovanie

Základné pravidlá

Bezprostredne z pravidiel pre výpočet limity (L1) a (L4) vyplýva

Lema 2.12 *Nech f, g sú funkcie, ktoré majú v $x_0 \in \mathbb{R}$ deriváciu a nech $c \in \mathbb{R}$ je ľubovoľná konštanta. Potom platí*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0), \tag{2.25}$$
$$(cf)'(x_0) = c \cdot f'(x_0). \tag{2.26}$$

Príklad 2.29 Zderivujte funkciu $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geq 2)$ v bode $x_0 \in \mathbb{R}$.

Riešenie: Potrebujeme vypočítať limitu $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0}$. Použijeme vzťah (2.7):

$$\lim_{x\to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x - x_0)\left(x^{n-1}x_0^0 + x^{n-2}x_0 + \cdots + x^0 x_0^{n-1}\right)}{x - x_0} = \sum_{i=0}^{n-1} x_0^{n-1-i} x_0^i,$$

a z toho $f'(x_0) = n x_0^{n-1}$. Pri výpočte sme využili spojitosť funkcie x^n v x_0. □

Dostali sme jednoduchý vzorec (ktorý platí všeobecnejšie). Podobné vzorce sa dajú odvodiť aj pre iné elementárne funkcie. Uvedieme tabuľku s deriváciami elementárnych funkcií. Niektoré vzorce neskôr odvodíme.

Tabuľka 2.1. Derivácie elementárnych funkcií

f	f'	f	f'	f	f'
c	0	e^x	e^x	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$x^n,\ n \in \mathbb{R}$	$n \cdot x^{n-1}$	$a^x,\ a > 0$	$a^x \cdot \ln a$	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$	$\arcsin x,\ x \in (-1, 1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sinh x$	$\cosh x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\arccos x,\ x \in (-1, 1)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$		
$\operatorname{cotg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{arccotg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$		

Lema 2.13 *Nech f, g sú funkcie, ktoré majú v $x_0 \in \mathbb{R}$ deriváciu. Potom platí*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0), \tag{2.27}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \tag{2.28}$$

Dôkaz: Odvodíme si vzťah (2.27). Využijeme vzťahy (L1)-(L4) na výpočet limít a lemu 2.10:

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) + (-f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x)) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x\to x_0} g(x) \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0) \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \\
&= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).
\end{aligned}$$

Vzťah pre deriváciu podielu (2.28) odvodzovať nebudeme. Chýbajú nám k tomu technické prostriedky. □

Príklad 2.30 Ukážte, že platí $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Riešenie: $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Môžeme použiť vzťah (2.28) a vzorce na deriváciu funkcií sin a cos z tabuľky 2.1 a dostaneme

$$\begin{aligned}(\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos' x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\overbrace{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}^{=1}}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.\end{aligned}$$

□

Príklad 2.31 Zderivujte $f_1(x) = \ln x + 3x^5$, $f_2(x) = \ln x \cdot \arccos x - 2^x$, $f_3(x) = x^3 + 3^x$.

Riešenie:

$$\begin{aligned}(f_1(x))' &= \underbrace{\left(\ln x + 3x^5\right)'}_{\text{vzťahy (2.25) a (2.26)}} = \overbrace{\ln' x + 3(x^5)'}^{\text{tabuľka 2.1}} = \frac{1}{x} + 3 \cdot 5x^4 = \frac{1}{x} + 15x^4, \\ (f_2(x))' &= \underbrace{(\ln x \cdot \arccos x - 2^x)'}_{\text{vzťahy (2.25) a (2.26)}} = \overbrace{(\ln x \cdot \arccos x)'}^{\text{vzťah (2.27)}} - (2^x)' = \\ &= \underbrace{\ln' x \cdot \arccos x + \ln x \cdot \arccos' x - (2^x)'}_{\text{tabuľka 2.1}} = \frac{\arccos x}{x} - \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} - 2^x \cdot \ln 2 \\ (f_3(x))' &= \overbrace{\left(x^3 + 3^x\right)'}^{\text{vzťah (2.25)}} = \underbrace{(x^3)' + (3^x)'}_{\text{tabuľka 2.1}} = 3x^2 + 3^x \ln 3.\end{aligned}$$

□

Príklad 2.32 Zderivujte $g(x) = \operatorname{arctg}(2x - \pi)$.

Riešenie: Deriváciu označíme $\frac{dg}{dx}(x)$ (definícia 2.20). Potom dostaneme $\frac{dg}{dx}(x) = \frac{d\ \operatorname{arctg}(2x-\pi)}{dx}$. Považujme na chvíľu tento výraz za zlomok. Potom ho môžeme rozšíriť a dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{d\ \operatorname{arctg}(2x-\pi)}{dx} &= \underbrace{\frac{d\ \operatorname{arctg}(2x-\pi)}{d(2x-\pi)}}_{\text{substitúcia } z = 2x - \pi} \frac{d(2x-\pi)}{dx} = \frac{d\ \operatorname{arctg}(z)}{dz} \underbrace{\frac{d(2x-\pi)}{dx}}_{=2} = \\ &= 2\frac{1}{1+z^2} = \frac{2}{1+(2x-\pi)^2}.\end{aligned}$$

Dostali sme výsledok $\frac{dg}{dx}(x) = \frac{2}{1+(2x-\pi)^2}$. □

Tento výsledok sa dá takto zovšeobecniť:

Lema 2.14 *Nech $g(x) = kx + q$, $k \neq 0$ a f nech je funkcia, ktorá je hladká na intervale (a, b). Potom má funkcia $h(x) = f(g(x))$ deriváciu na intervale $\left(\frac{a-q}{k}, \frac{b-q}{k}\right)$ a platí*[2]

$$(h(x))' = k \cdot f'(kx + q).$$

Túto časť zakončíme dôležitou vlastnosťou hladkých funkcií.

Lema 2.15 *Nech f je hladká funkcia na intervale (a, b). Potom $f'(x_0) = 0$ pre každé $x_0 \in (a, b)$ práve vtedy, keď f je konštantná funkcia na (a, b).*

Dôsledok 2.3 *Nech f, g sú hladké funkcie na intervale (a, b). Potom $f'(x_0) - g'(x_0) = 0$ pre každé $x_0 \in (a, b)$ práve vtedy, keď existuje $c \in \mathbb{R}$ také, že $f(x_0) - g(x_0) = c$ pre každé $x_0 \in (a, b)$.*

Podstatným predpokladom v dôsledku 2.3 je, že existujú derivácie funkcií f a g v každom bode intervalu (a, b), ako to ilustruje nasledujúci príklad.

Príklad 2.33 Nech $f(x) = \operatorname{sign}(x)$ (pozri vzťah (2.15)). Potom má funkcia f deriváciu na intervaloch $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ a platí

$$f'(x) = 0 \quad \text{pre } x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty),$$

ale funkcia f nie je konštantná.

Derivácia zloženej a inverznej funkcie

O derivácii zloženej funkcie, keď vnútorná zložka je ľubovoľná hladká funkcia, hovorí tzv. reťazové pravidlo.

Veta 2.6 (Reťazové pravidlo). *Nech f, g sú hladké funkcie na svojich definičných oboroch a nech $D(f) \supseteq H(g)$. Potom má funkcia $h(x) = f(g(x))$ deriváciu v každom bode $x \in D(g)$ a platí*

$$(h(x))' = (g(x))' \cdot f'(g(x)).$$

[2] Výrazom $(f(g(x)))'$ označujeme deriváciu výrazu $f(g(x))$ podľa premennej x. Výrazom $f'(kx+q)$ budeme označovať funkciu, ktorá vznikne tak, že formálne použijeme funkciu f' z tabuľky 2.1 a za argument dosadíme $g(x)$. Napríklad, $(\operatorname{arctg}(2x-\pi))' = \frac{2}{1+(2x-\pi)^2}$, zatiaľčo $\operatorname{arctg}'(2x-\pi) = \frac{1}{1+(2x-\pi)^2}$.

Príklad 2.34 Pomocou reťazového pravidla zderivujte, pre prípustné hodnoty premennej x, funkcie $f_1(x) = \sqrt{\sin x}$, $f_2(x) = \operatorname{cotg}^2(x)$, $f_3(x) = \sin(\arcsin x^4)$, $f_4(x) = \ln\left(\frac{\cos(x^2)}{\cos^2 x}\right)$, $f_5(x) = e^{\sinh x} + \log_5\left(\operatorname{tgh}\left(\frac{x+1}{x-5}\right)\right)$.

Riešenie: Keď derivujeme zloženú funkciu, potrebujeme si ju najprv rozložiť na jednotlivé zložky. Potom budeme mať istotu, že reťazové pravidlo použijeme korektne.

1. Funkcia f_1: vnútorná zložka je $z(x) = \sin x$, vonkajšia je $u(z) = \sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}}$. Preto platí
$$(f_1(x))' = (\sin x)' \cdot \left(z^{\frac{1}{2}}\right)' = \cos x \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}}\right)}_{z=\sin x} = \frac{1}{2}\cos x \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$$

2. Funkcia f_2: vnútorná zložka je $z(x) = \operatorname{cotg} x$, vonkajšia $u(z) = z^2$. Z toho dostaneme
$$(f_2(x))' = (\operatorname{cotg} x)' \cdot (z^2)' = \frac{-1}{\sin^2 x} 2z = \frac{-2 \operatorname{cotg} x}{\sin^2 x}.$$

3. Funkcia f_3 sa skladá z troch zložiek: prvá (vnútorná) je $z(x) = x^4$, druhá $u(z) = \arcsin z$ a tretia (vonkajšia) je $v(u) = \sin u$. Reťazové pravidlo prispôsobíme:
$$\begin{aligned}(f_3(x))' &= (z(x))' \cdot \arcsin' z \cdot \sin' u = 4x^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \cdot \cos u = \\ &= 4x^3 \frac{1}{\sqrt{1-(x^4)^2}} \cos(\arcsin x^4) = \frac{4x^3}{\sqrt{1-x^8}} \cos(\arcsin x^4).\end{aligned}$$

4. Funkcia f_4 sa skladá z vonkajšej zložky $v = \ln u$ a vnútornej zložky $u = \frac{\cos(x^2)}{\cos^2 x}$, pričom čitateľ aj menovateľ sú zložené funkcie. Zderivujeme funkciu $g_1(x) = \cos(x^2)$ a $g_2(x) = \cos^2 x$. Funkcia g_1 má vonkajšiu zložku $h_1(z) = \cos(z)$ a vnútornú zložku $z(x) = x^2$. Funkcia g_2 má vonkajšiu zložku $h_2(w) = w^2$ a vnútornú zložku $w(x) = \cos x$. Aplikáciou reťazového pravidla dostaneme
$$\begin{aligned}(g_1(x))' &= (z(x))' h_1'(z) = 2x \cdot \left(-\sin(x^2)\right) = -2x\sin(x^2), \\ (g_2(x))' &= (w(x))' h_2'(w) = -\sin x \cdot 2\cos x = -2\sin x \cos x = -\sin(2x).\end{aligned}$$
Teraz máme všetko pripravené na derivovanie funkcie f_4:
$$\begin{aligned}(f_4(x))' &= (u(x))' \cdot \ln'(u) = \frac{(g_1(x))' g_2(x) - g_1(x)(g_2(x))'}{g_2^2(x)} \cdot \frac{1}{u} = \\ &= \frac{-2x\sin(x^2)\cos^2 x - \cos(x^2)(-\sin(2x))}{(\cos^2 x)^2} \cdot \frac{\cos^2 x}{\cos(x^2)} = \\ &= \frac{-2x\sin(x^2)\cos^2 x + \cos(x^2)\sin(2x)}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos(x^2)}.\end{aligned}$$

5. Funkcia f_5 je súčtom dvoch funkcií, obe sú zložené. Funkcia $s_1(x) = e^{\sinh x}$ má vnútornú zložku $z(x) = \sinh x$ a vonkajšiu zložku funkciu $t(z) = e^z$. Vnútorná zložka funkcie $s_2(x) = \log_5\left(\operatorname{tgh}\left(\frac{x-1}{x+5}\right)\right)$ je $w(x) = \frac{x+1}{x-5}$, ďalšia (druhá) zložka je $u(w) = \operatorname{tgh} w = \frac{\sinh w}{\cosh w}$ a vonkajšiu zložku má $v(u) = \log_5 u$. Z toho dostaneme

$$\begin{aligned}(f_5(x))' &= (s_1(x))' + (s_2(x))' = \sinh' x \cdot \frac{d\,e^z}{d\,z} + \left(\frac{x-1}{x+5}\right)' \cdot \operatorname{tgh}{}' w \cdot \log_5' u = \\ &= \cosh x \cdot e^z + \frac{1(x+5)-(x-1)\cdot 1}{(x+5)^2}\left(\frac{\sinh w}{\cosh w}\right)' \cdot \frac{1}{u \ln 5} =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \cosh x \cdot e^{\sinh x} + \\ &+ \frac{6}{(x+5)^2} \cdot \frac{\overbrace{\cosh w \cdot \cosh w - \sinh w \sinh w}^{=1 \text{ vzťah } (2.10)}}{\cosh^2 w} \cdot \frac{\cosh w}{\ln 5 \sinh w} = \\ &= \cosh x \cdot e^{\sinh x} + \frac{6}{(x+5)^2} \cdot \frac{1}{\cosh w \sinh w \ln 5} = \\ &= \cosh x \cdot e^{\sinh x} + \frac{6}{(x+5)^2} \cdot \frac{1}{\cosh\left(\frac{x+1}{x-5}\right) \sinh\left(\frac{x+1}{x-5}\right) \ln 5}.\end{aligned}$$

□

Poznámka 2.9 Pozorný čitateľ si isto všimol, že pri derivovaní funkcie f_5 sme odvodili vzorec pre deriváciu tgh

$$(\operatorname{tgh} x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}. \tag{2.29}$$

Príklad 2.35 Overte, že platí $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Riešenie: Na odvodenie derivácie funkcie $f(x) = \ln x$ použijeme vzťah (2.8), teda $x = \exp(\ln x)$. Obe strany rovnice zderivujeme a dostaneme

$$\exp(\ln x) = x \quad \Rightarrow \quad (\exp(\ln x))' = x'.$$

Použitím reťazového pravidla dostaneme

$$\begin{aligned}(\ln x)' \cdot \underbrace{(\exp(\ln x))'}_{=\exp(\ln x)} &= 1 \\ (\ln x)' &= \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x} \quad \text{podľa vzťahu (2.8).}\end{aligned}$$

□

Postup z príkladu 2.35 môžeme zovšeobecniť do tvaru

Veta 2.7 *Nech je funkcia f hladká na $D(f)$. Ďalej nech existuje k nej inverzná funkcia f^{-1}, ktorá je tiež hladká na $D(f^{-1})$. Potom platí*

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

Príklad 2.36 Overte vzorec $\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ pre $x \in (-1, 1)$.

Riešenie: Inverzná funkcia k arccos je cos, keď zúžime definičný obor funkcie cos na interval $[0, \pi]$. Použijeme vetu 2.7 a dostaneme

$$(\arccos x)' = \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = \frac{1}{-\sin(\arccos x)}.$$

Obor hodnôt $H(\arccos) = [0, \pi]$, z toho vyplýva $\sin(\arccos x) \geq 0$ a pre $x \in (-1, 1)$ je $\sin(\arccos x) > 0$. Potom $\sin(\arccos x) = \sqrt{\sin^2(\arccos x)}$ a ďalšou úpravou dostaneme (pozri vzťahy pre goniometrické funkcie)

$$\arccos' x = -\frac{1}{\sin(\arccos x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = -\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

□

2.3.3 Logaritmické derivovanie

Príklad 2.37 Zderivujte funkciu $f(x) = x^x$ pre $x > 0$.

Riešenie: Aby sme mohli funkciu f zderivovať, musíme si ju upraviť (nemáme vytvorený aparát na derivovanie funkcií, ktoré majú premennú v základe aj v exponente). Celý výraz zlogaritmujeme

$$\ln(f(x)) = \ln\left(x^x\right) = x \ln x$$

a rovnicu zderivujeme a upravíme

$$\begin{aligned} \underbrace{(\ln(f(x)))'}_{\text{reťazové pravidlo}} &= (x \ln x)' \\ f'(x)\underbrace{\frac{1}{f(x)}}_{=\frac{1}{x^x}} &= 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 \\ (f(x))' = x^x \left(\ln x + 1\right). \end{aligned}$$

□

Postup, popísaný v príklade 2.37, sa volá *logaritmické derivovanie.* Všeobecnejší tvar logaritmického derivovania je vyjadrený nasledujúcimi vzťahmi (predpokladáme, že $f(x) > 0$ pre $x \in D(f)$)

$$\begin{aligned} h(x) &= (f(x))^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad \ln(h(x)) = g(x)\cdot\ln(f(x)) \\ (\ln(h(x)))' = \frac{h'(x)}{h(x)} &= (g(x)\cdot\ln(f(x)))' \\ \left((f(x))^{g(x)}\right)' &= (f(x))^{g(x)}\left(g(x)\cdot\ln(f(x))\right)'. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Príklad 2.38 Zderivujte $f_1(x) = x^{\operatorname{tg} x}$ pre $x > 0$, $f_2(x) = (\sin x)^{\ln x}$ pre $x \in (0,\pi)$, $f_3(x) = (\sqrt{x})^{\operatorname{arctg} x}$ pre $x > 0$.

Riešenie: Zlogaritmujeme f_1

$$\ln(f_1(x)) = \operatorname{tg} x \cdot \ln x \quad \Rightarrow \quad f_1'(x)\frac{1}{f_1(x)} = (\operatorname{tg} x\cdot \ln x)'.$$

Z toho vyjde

$$f_1'(x) = x^{\operatorname{tg} x}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\ln x + \frac{1}{x}\operatorname{tg} x\right) = x^{\operatorname{tg} x}\left(\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x}\right).$$

Pre funkciu f_2 dostaneme

$$\ln(f_2(x)) = \ln x\ln(\sin x) \quad \Rightarrow \quad f_2'(x) = \underbrace{(\sin x)^{\ln x}(\ln x\ln(\sin x))'}_{\text{logaritmické derivovanie}}.$$

Ďalšou úpravou $\left((\ln(\sin x))' = \cos x\frac{1}{\sin x}\right)$ dostaneme

$$f_2'(x) = (\sin x)^{\ln x}\left(\frac{1}{x}\ln(\sin x) + \ln x\cos x\frac{1}{\sin x}\right) = (\sin x)^{\ln x}\left(\frac{\ln(\sin x)}{x} + \ln x\operatorname{cotg} x\right).$$

Zderivujeme f_3:

$$\ln(f_3(x)) = \operatorname{arctg} x\ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\ln x \quad \Rightarrow \quad f_3'(x) = \overbrace{\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}\right)^{\operatorname{arctg} x}(\operatorname{arctg} x\ln x)'}^{\text{vzťah (2.26)}}.$$

Z toho

$$f_3'(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x}\right)^{\operatorname{arctg} x}\left(\frac{1}{1+x^2}\ln x + \frac{1}{x}\operatorname{arctg} x\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x}\right)^{\operatorname{arctg} x}\left(\frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right).$$

□

2.3.4 Derivácie vyšších rádov

Derivácia funkcie f je funkcia, definovaná pre tie $x \in D(f)$, v ktorých má f deriváciu. Takto vzniknutá funkcia f' sa dá znovu (aspoň v niektorých prípadoch) derivovať. Dostaneme deriváciu druhého rádu (alebo druhú deriváciu). V tomto procese môžeme, podľa potreby, pokračovať. Vo všeobecnosti takto dostaneme n-tú deriváciu.

Označenie:

- Druhú deriváciu funkcie f v bode x_0 označujeme $f''(x_0)$ alebo $\frac{d^2f}{dx^2}(x_0)$, prípadne $f^{(2)}(x_0)$.
- Tretiu deriváciu funkcie f v bode x_0 označujeme $f'''(x_0)$ alebo $\frac{d^3f}{dx^3}(x_0)$, prípadne $f^{(3)}(x_0)$.
- Všeobecne, n-tú deriváciu funkcie f v bode x_0 označujeme $\frac{d^nf}{dx^n}(x_0)$, prípadne $f^{(n)}(x_0)$.

Príklad 2.39 Vypočítajte prvé tri derivácie funkcie $f(x) = \operatorname{tg} x$.

Riešenie: $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \cos^{-2} x$. Pomocou reťazového pravidla dostaneme

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \left(\cos^{-2} x\right)' = -2\cos^{-3} x \cdot (-\sin x) = 2\frac{\sin x}{\cos^3 x}, \\
f'''(x) &= \left(2\frac{\sin x}{\cos^3 x}\right)' = 2\frac{\cos x \cdot \cos^3 x - \sin x \cdot (-\sin x) \cdot (3\cos^2 x)}{\cos^6 x} = \\
&= 2\frac{\cos^2 x + 3\sin^2 x}{\cos^4 x}.
\end{aligned}$$

□

Príklad 2.40 Vypočítajte prvé tri derivácie funkcie $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Riešenie: $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}$. Dostali sme zloženú funkciu

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \left((1+x^2)^{-1}\right)' = -2x(1+x^2)^{-2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \\
f'''(x) &= \left(-2\frac{x}{(1+x^2)^2}\right)' = -2\frac{(1+x^2)^2 - x \cdot 2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = \\
&= -2\frac{1+x^2-4x^2(1+x^2)^3}{(1+x^2)^3}.
\end{aligned}$$

□

2.3.5 Aplikácie

Príklad 2.41 Nájdite dotyčnicu k funkcii $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, keď je dotyčnica rovnobežná s priamkou $p : y = 0$.

Riešenie: Potrebujeme nájsť dotykový bod $T = (x_0, y_0)$. Vieme, že priamka p má smernicu $k_p = 0$. Z toho dostaneme, že $k_t = 0 = f'(x_0)$. Zderivujeme f:

$$f'(x) = \frac{(\ln x)'x - x'\ln x}{x^2} = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Nájdeme hodnotu x_0 tak, aby platilo $f'(x_0) = 0$. Dostaneme rovnicu

$$\frac{1 - \ln x_0}{x_0^2} = 0 \quad \text{a z toho} \quad \ln x_0 = 1.$$

Riešenie je $x_0 = e$. Vypočítame y_0:

$$y_0 = f(x_0) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$$

Rovnica dotyčnice je $t: \ y - \frac{1}{e} = 0$. □

Príklad 2.42 Nájdite dotyčnicu a normálu k funkcii $f(x) = x \cdot \ln x$ v bode, v ktorom je normála rovnobežná s priamkou $p : y = -\frac{1}{2}x + 3$.

Riešenie: Vieme, že $k_p = k_n = -\frac{1}{2}$. Zo vzťahu (2.24) dostaneme $k_t = 2$. Potrebujeme nájsť bod $T = (x_0, y_0)$ tak, aby platilo $f'(x_0) = 2$. Zderivujeme f

$$f'(x) = (x \cdot \ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

a dostaneme rovnicu

$$f'(x_0) = 2 = \ln x_0 + 1 \quad \text{a z toho} \quad \ln x_0 = 1.$$

Riešenie je $x_0 = e$. Vypočítame y_0:

$$y_0 = f(x_0) = e \cdot \ln e = e$$

Dotykový bod je $T = (e, e)$. Rovnice dotyčnice t a normály n sú

$$\begin{aligned} t: \ y - e &= 2(x - e), \\ n: \ y - e &= -\frac{1}{2}(x - e). \end{aligned}$$

□

Príklad 2.43 Sú dané funkcie $f(x) = e^x \sin x$ a $g(x) = -e^x \sin x$. Zistite, aký uhol zvierajú grafy týchto funkcií[3] v bode $A = (0, ?)$.

Riešenie: Najprv overíme, že $f(0) = g(0)$.

$$f\,(0) = e^0 \sin\,(0) = 0, \qquad g\,(0) = -e^0 \sin\,(0) = 0.$$

Súčasne sme zistili y-ovú súradnicu bodu $A = (0, 0)$. Vypočítame dotyčnice k funkciám f a g v bode A. Smernice týchto dotyčníc sú

$$\begin{aligned} (f(x))' &= e^x \sin x + e^x \cos x, &\quad \text{z toho} &\quad f'(0) = 1, \\ (g(x))' &= -e^x \sin x - e^x \cos x, &\quad \text{z toho} &\quad f'(0) = -1. \end{aligned}$$

Rovnice dotyčníc:

$$\begin{aligned} t_f : &\qquad y = x, \\ t_g : &\qquad y = -x. \end{aligned}$$

Z rovníc dotyčníc dostaneme normálové vektory $n_f = (1, -1)$, $n_g = (1, 1)$. Tieto vektory sú na seba kolmé (overte), teda aj dotyčnice t_f a t_g sú na seba kolmé.

Záver: Grafy funkcií f a g sú v bode A na seba kolmé. □

Z fyzikálneho hľadiska, keď $S(t_0)$ predstavuje dráhu, ktorú prejde teleso do času t_0, tak

$$\begin{aligned} v(t_0) &= S'(t_0) & & \qquad \text{predstavuje rýchlosť telesa v čase } t_0, \\ a(t_0) &= v'(t_0) &= S''(t_0) & \qquad \text{predstavuje zrýchlenie telesa v čase } t_0. \end{aligned}$$

Všeobecnejšie, keď $f(t_0)$ predstavuje hodnotu fyzikálnej veličiny v čase t_0, tak $f'(t_0)$ predstavuje rýchlosť, akou sa táto veličina v čase t_0 mení.

Príklad 2.44 Pohyb telesa je daný funkciou $S(t) = 6t^2 - t^3$ [km]. V čase $t_0 = 0$ [h] sa teleso nachádza v bode A. Zistite, v ktorých okamihoch teleso zastane a kedy bude mať nulové zrýchlenie. Pre tieto okamihy vypočítajte vzdialenosť telesa od bodu A.

Riešenie: Potrebujeme určiť prvé dve derivácie funkcie S.

$$\begin{aligned} S'(t) &= 12t - 3t^2 \ [\mathrm{km\,h^{-1}}], \\ S''(t) &= 12 - 6t \ [\mathrm{km\,h^{-2}}]. \end{aligned}$$

[3] Uhol medzi grafmi funkcií je definovaný ako uhol medzi ich dotyčnicami.

Teleso zastane v v časoch t_0 takých, že $S'(t_0) = 0$ a nulové zrýchlenie bude mať v okamihoch t_1 takých že $S''(t_1) = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= 12t_0 - 3t_0^2, \quad \text{z toho } t_{0_1} = 0\,\text{h},\ t_{0_2} = 4\,\text{h}, \\ 0 &= 12 - 6t_1, \quad \text{z toho } t_1 = 2\,\text{h}. \end{aligned}$$

Vypočítame vzdialenosti od bodu A v časoch $t_{0_2} = 4\,\text{h}$ a $t_1 = 2\,\text{h}$

$$S(4) = (6 \cdot 4^2 - 4^3)\,\text{km} = 32\,\text{km}, \qquad S(2) = (6 \cdot 2^2 - 2^3)\,\text{km} = 16\,\text{km}$$

Teleso stojí v čase $t_0 = 0\,\text{h}$ a v čase $t_0 = 4\,\text{h}$ a nachádza sa vo vzdialenosti 32 km od bodu A. Nulové zrýchlenie má v čase $t_1 = 2\,\text{h}$ a nachádza sa vo vzdialenosti 16 km od bodu A.

$\square$

Príklad 2.45 Z bodu A štartujú naraz cyklista a motorkár. Cyklista sa pohybuje na sever, motorkár na západ. Funkcie S_C a S_M predstavujú polohu cyklistu a motorkára v čase $t\,[\text{s}]$ (pre $t > 0$). Napíšte funkciu, vyjadrujúcu rýchlosť, akou sa cyklista a motorkár od seba vzďaľujú, ak

$$\begin{aligned} S_C(t) &= t(1 + \operatorname{arctg} t)\,[\text{m}], \\ S_M(t) &= t^2(1 + \ln(t+1))\,[\text{m}]. \end{aligned}$$

Riešenie: Dráhy cyklistu a motorkára sú na seba kolmé. Z toho dostaneme funkciu, vyjadrujúcu ich vzdialenosť v čase t

$$S(t) = \sqrt{S_C^2(t) + S_M^2(t)} = \sqrt{t^2(1 + \operatorname{arctg} t)^2 + t^4(1 + \ln(t+1))^2}\,[\text{m}].$$

Rýchlosť, akou sa od seba vzďaľujú, je daná deriváciou funkcie s, teda

$$\begin{aligned} S'(t) &= \frac{1}{2}\,\frac{(t^2(1 + \operatorname{arctg} t)^2 + t^4(1 + \ln(t+1))^2)'}{\sqrt{t^2(1 + \operatorname{arctg} t)^2 + t^4(1 + \ln(t+1))^2}} = \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{2t(1 + \operatorname{arctg} t)^2 + t^2 \cdot 2(1 + \operatorname{arctg} t) \cdot \frac{1}{1+t^2}}{\sqrt{t^2(1 + \operatorname{arctg} t)^2 + t^4(1 + \ln(t+1))^2)}} + \\ &+ \frac{1}{2}\,\frac{4t^3(1 + \ln(t+1))^2 + t^4 2(1 + \ln(t+1)) \cdot \frac{1}{t+1}}{\sqrt{t^2(1 + \operatorname{arctg} t)^2 + t^4(1 + \ln(t+1))^2)}} = \\ &= \frac{(1 + \operatorname{arctg} t)^2 + t\frac{1 + \operatorname{arctg} t}{1+t^2} + 2t^2(1 + \ln(t+1))^2 + t^3\frac{1 + \ln(t+1)}{t+1}}{\sqrt{(1 + \operatorname{arctg} t)^2 + t^2(1 + \ln(t+1))^2}}\,[\text{ms}^{-1}]. \end{aligned}$$

$\square$

Príklad 2.46 Majme rádioaktívnu látku, ktorá v čase $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ pozostáva z q atómov. Funkcia, ktorá popisuje počet atómov tejto látky v čase t, je $f(t) = q \cdot e^{-0{,}001t}$. Nájdite rýchlosť rozpadu látky v čase t a okamih t_0, v ktorom sa počet atómov zredukuje na polovicu (polčas rozpadu).

Riešenie: Označme rýchlosť rozpadu atómov v. Potom

$$v(t) = f'(t) = -0,001qe^{-0{,}001t}\,[\mathrm{s}^{-1}].$$

Záporná hodnota funkcie v znamená, že rýchlosť rozpadu sa znižuje. Nájdime polčas rozpadu tejto látky. Potrebujeme vyriešiť rovnicu

$$q \cdot e^{-0{,}001t_0} = \frac{1}{2}q. \tag{2.31}$$

Bezprostredne z tejto rovnice dostaneme, že polčas rozpadu nezávisí od počtu atómov, ktoré boli v látke v čase $t = 0\,\mathrm{s}$. Rovnicu (2.31) zlogaritmujeme a dostaneme

$$-0,001t_0 = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

a z toho $t_0 = \frac{\ln 2}{0{,}001} \doteq 693,15\,\mathrm{s}$. □

2.4 Extrémy, konvexnosť a konkávnosť

2.4.1 Monotónnosť a lokálne extrémy

Bezprostredne z definície derivácie vyplýva nasledujúca veta.

Veta 2.8 *Nech f je hladká funkcia na intervale (a, b). Potom platí:*
(a) *Ak pre každé $x \in (a, b)$ je $f'(x) > 0$, tak f je na (a, b) rýdzo rastúca.*
(b) *Ak pre každé $x \in (a, b)$ je $f'(x) < 0$, tak f je na (a, b) rýdzo klesajúca.*

Ako dôsledok tejto vety dostaneme:

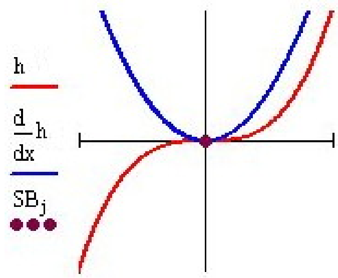
Dôsledok 2.4 *Nech funkcia f je hladká na intervale (a, b). Potom, ak f má lokálny extrém v bode $(x_0, f(x_0))$ pre $x_0 \in (a, b)$, tak $f'(x_0) = 0$.*

Z tohto dôsledku vyplýva, že keď potrebujeme nájsť lokálne extrémy, tak musíme nájsť hodnoty $x_0 \in D(f)$, v ktorých buď $f'(x_0) = 0$ alebo derivácia $f'(x_0)$ neexistuje. Preto zavedieme nasledujúci pojem.

Definícia 2.21 *Nech f je daná funkcia. Potom $(x_0, f(x_0))$ je stacionárny bod funkcie f, kde $x_0 \in D(f)$, ak $f'(x_0) = 0$ alebo derivácia $f'(x_0)$ neexistuje.*

Na nasledujúcich obrázkoch sú znázornené rôzne prípady funkcií, ich derivácií a stacionárnych bodov.

Obr. 2.44. Grafy funkcií f a g, ich derivácií a stacionárne body



Obr. 2.45. Graf funkcie h, graf jej derivácie a stacionárny bod

Na obrázkoch 2.44 sú funkcie f a g, ktoré majú v stacionárnych bodoch lokálne extrémy. Funkcia f je hladká, funkcia g nemá derivácie v stacionárnych bodoch. Na obrázku 2.45 je hladká funkcia h, ktorá má jeden stacionárny bod, ale nemá v ňom lokálny extrém.

Kritérium 2.1 (na overovanie extrémov). *Nech x_0 je stacionárny bod funkcie f a nech existuje $\xi > 0$ tak, že, f má deriváciu na množine $(x_0 - \xi, x_0) \cup (x_0, x_0 + \xi)$. Potom platí*

- *Ak pre $x \in (x_0 - \xi, x_0)$ je $f'(x) < 0$ a pre $x \in (x_0, x_0 + \xi)$ je $f'(x) > 0$, tak funkcia f má lokálne minimum v $(x_0, f(x_0))$.*
- *Ak pre $x \in (x_0 - \xi, x_0)$ je $f'(x) > 0$ a pre $x \in (x_0, x_0 + \xi)$ je $f'(x) < 0$, tak funkcia f má lokálne maximum v $(x_0, f(x_0))$.*
- *Ak pre všetky $x \in (x_0 - \xi, x_0 + \xi)$, $x \neq x_0$, je $f'(x) > 0$ alebo pre všetky $x \neq x_0$, $x \in (x_0 - \xi, x_0 + \xi)$, je $f'(x) < 0$, tak funkcia f nemá v $(x_0, f(x_0))$ lokálny extrém.*

Pre hľadanie intervalov monotónnosti budeme potrebovať nasledujúce tvrdenie.

Lema 2.16 *Nech f je funkcia, ktorá je spojitá na intervale (a, b) a nech neexistuje hodnota x^*, pre ktorú platí $f(x^*) = 0$. Potom, ak pre ľubovoľne zvolené $x_1 \in (a, b)$ platí $f(x_1) > 0$ (resp. $f(x_1) < 0$), tak pre každé $x \in (a, b)$ platí $f(x) > 0$ (resp. $f(x) < 0$).*

Príklad 2.47 Nájdite intervaly monotónnosti a stacionárne body funkcií $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = x \cdot \ln(3x)$, $f_3(x) = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$. Zistite, v ktorých stacionárnych bodoch majú dané funkcie lokálne minimá a lokálne maximá.

Riešenie: Najprv potrebujeme nájsť definičné obory vyšetrovaných funkcí. Potom nájdeme ich stacionárne body a zistíme intervaly, na ktorých majú tieto funkcie kladné derivácie a na ktorých záporné (aplikujeme lemu 2.16) a následne z vety 2.8 dostaneme intervaly monotónnosti. Pomocou kritéria 2.1 zistíme lokálne extrémy funkcií.

- $D(f_1) = \mathbb{R}$. $(f_1(x))' = 3x^2$. Nájdeme stacionárne body.

  $$3x_0^2 = 0, \quad \text{z toho} \quad x_0 = 0.$$

  $f_1(x_0) = 0$. Funkcia f_1 má jediný stacionárny bod $D = (0, 0)$. Vyšetríme dva intervaly,

  $$(-\infty, 0) \quad \text{a} \quad (0, \infty).$$

  Z každého intervalu vyberieme jeden bod a zistíme hodnotu f_1' v tomto bode.

  $$\begin{aligned} x_1 &= -1, & f_1'(-1) &= 3(-1)^2 = 3 > 0, & &\text{teda na } (-\infty, 0) \text{ je } f_1 \textit{ rýdzo rastúca}, \\ x_2 &= 1, & f_3'(1) &= 3 > 0, & &\text{teda na } (0, \infty) \text{ je } f_1 \textit{ rýdzo rastúca}. \end{aligned}$$

  Podľa kritéria 2.1 funkcia f_1 nemá lokálne extrémy. Môžeme spraviť záver, že f_1 je rastúca na celom definičnom obore.

- $D(f_2) = (0, \infty)$.

  $$(f_2(x))' = \ln(3x) + x\frac{1}{3x}3 = \ln(3x) + 1.$$

  Nájdeme stacionárne body

  $$\ln(3x_0) + 1 = 0, \quad \text{z toho} \quad \underbrace{3x_0 = e^{-1}}_{\text{prečo?}}.$$

  $x_0 = \frac{1}{3e}$, $f_2(x_0) = \frac{1}{3e} \ln \frac{1}{3e} = -\frac{\ln(3e)}{3e}$. Funkcia f_2 má jediný stacionárny bod $C = \left(\frac{1}{3e}, -\frac{\ln(3e)}{3e}\right)$. Podľa lemy 2.16 vyšetríme dva intervaly,

  $$\left(0, \frac{1}{3e}\right) \quad \text{a} \quad \left(\frac{1}{3e}, \infty\right).$$

Zvolíme $x_1 \in \left(0, \frac{1}{3e}\right)$ a $x_2 \in \left(\frac{1}{3e}, \infty\right)$, zistíme hodnoty $f_2'(x_1)$ a $f_2'(x_2)$ a následne dostaneme intervaly monotónnosti.

$$x_1 = \frac{1}{6e}, \quad f_2'\left(\frac{1}{6e}\right) = \ln\frac{1}{2e} + 1 < 0, \quad \text{z toho } f_2 \text{ je na } \left(0, \tfrac{1}{3e}\right) \textit{ rýdzo klesajúca,}$$
$$x_2 = 1, \quad f_2'(1) = \ln 3 + 1 > 0, \quad \text{z toho } f_2 \text{ je na } \left(\tfrac{1}{3e}, \infty\right) \textit{ rýdzo rastúca.}$$

Z kritéria 2.1 dostaneme, že funkcia f_2 má v bode C lokálne minimum.

- $D(f_3) = \mathbb{R}$,

$$(f_3(x))' = e^{-\frac{x^2}{2}} + x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-x) = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(1 - x^2\right).$$

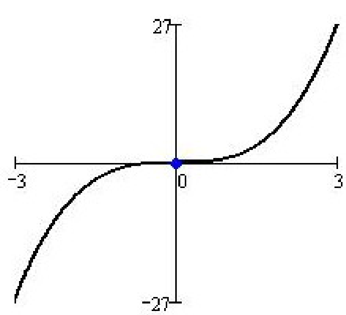
Nájdeme stacionárne body, teda riešime rovnicu

$$e^{-\frac{x_0^2}{2}}\left(1 - x_0^2\right) = 0.$$

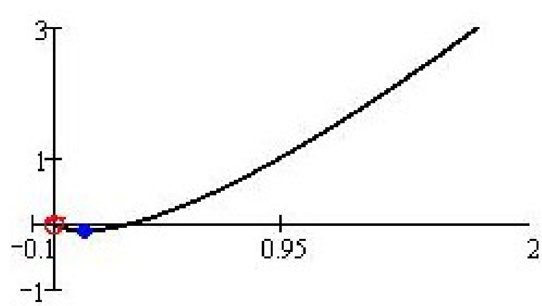
Z toho $1 - x_0^2 = 0$, teda $|x_0| = 1$. Rovnica má dva korene $x_{0,1} = -1$ a $x_{0,2} = 1$. Funkčné hodnoty sú $f_3(x_{0,1}) = f_3(x_{0,2}) = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Funkcia f_3 má dva stacionárne body $A = \left(-1, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ a $B = \left(1, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.
Podľa lemy 2.16 budeme vyšetrovať tri intervaly,
$(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$,
na ktorých môžeme aplikovať vetu 2.8. Zvolíme $x_1 < -1$, $x_2 \in (-1, 1)$, $x_3 > 1$ a zistíme hodnoty $f_3'(x_1)$, $f_3'(x_2)$, $f_13'(x_3)$.

$$x_1 = -2, \quad f_3'(-2) = e^{-2}(1-4) < 0, \quad \text{teda na } (-\infty, -1) \text{ je } f_3 \textit{ rýdzo klesajúca,}$$
$$x_2 = 0, \quad f_3'(0) = e^0 = 1 > 0, \quad \text{z toho na } (-1, 1) \text{ je } f_3 \textit{ rýdzo rastúca,}$$
$$x_3 = 2, \quad f_3'(2) = e^{-2}(1-4) < 0, \quad \text{z toho na } (1, \infty) \text{ je } f_3 \textit{ rýdzo klesajúca.}$$

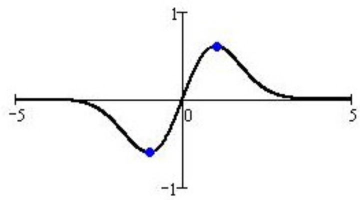
Podľa kritéria 2.1 má funkcia f_3 lokálne minimum v bode A a lokálne maximum v bode B.



Obr. 2.46. Graf funkcie $f_1(x) = x^3$



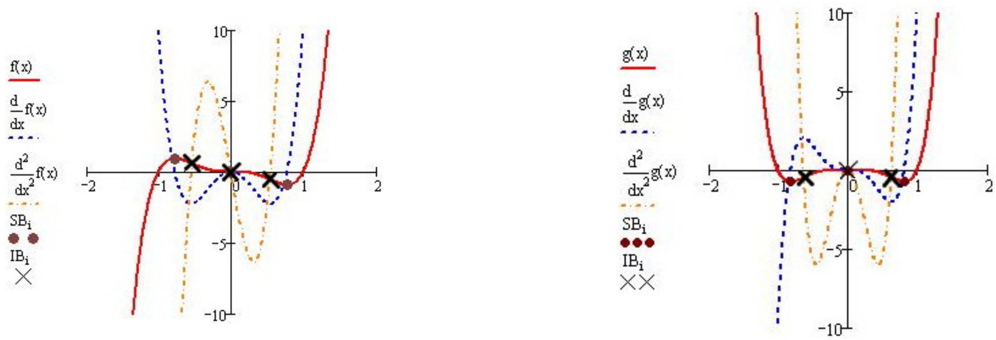
Obr. 2.47. Graf funkcie $f_2(x) = x \cdot \ln 3x$



Obr. 2.48. Graf funkcie $f_3(x) = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

$\square$

Ďalšia možnosť ako nájsť lokálne extrémy funkcie f, je založená na druhej derivácii tejto funkcie. Ilustrujeme si to na obrázku.



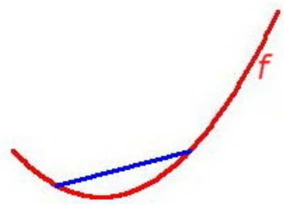
Obr. 2.49. Grafy funkcií, ich prvých a druhých derivácií, stacionárne body a body, kde je druhá derivácia nulová

Kritérium 2.2 (na overovanie extrémov). *Nech $(x_0, f(x_0))$ je stacionárny bod funkcie f. Predpokladajme, že funkcia f je hladká a rovnako f' je hladká.*

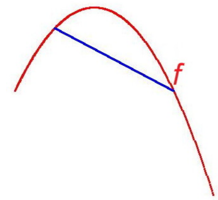
- *Ak platí $f''(x_0) < 0$, tak funkcia f má v $(x_0, f(x_0))$ lokálne maximum.*
- *Ak platí $f''(x_0) > 0$, tak funkcia f má v $(x_0, f(x_0))$ lokálne minimum.*

Vyšetrovanie stacionárnych bodov pomocou kritéria 2.2 spojíme s vyšetrovaním konvexnosti a konkávnosti. Poznamenajme len, že v kritériu 2.2 sú dva prípady: $f''(x_0) > 0$ a $f''(x_0) < 0$. Existuje, samozrejme, aj tretia možnosť, že $f''(x_0) = 0$. V tomto prípade, ako je to ilustrované na obrázku 2.49, nevieme spraviť záver pomocou kritéria 2.2 ohľadne existencie lokálnych extrémov.

2.4.2 Konvexnosť a konkávnosť



Obr. 2.50. Konvexná funkcia f



Obr. 2.51. Konkávna funkcia f

Definícia 2.22 *Majme danú funkciu f a interval $[a, b] \subset D(f)$. Potom*

- *ak pre všetky $t \in [0, 1]$ a všetky $x_1, x_2 \in [a, b]$ platí*
  $$t \cdot f(x_1) + (1-t) \cdot f(x_2) \geq f\left(t \cdot x_1 + (1-t) \cdot x_2\right),$$
  tak funkcia f je na intervale (a, b) konvexná[4].
- *ak pre všetky $t \in [0, 1]$ a všetky $x_1, x_2 \in [a, b]$ platí*
  $$t \cdot f(x_1) + (1-t) \cdot f(x_2) \leq f\left(t \cdot x_1 + (1-t) \cdot x_2\right),$$
  tak funkcia f je na intervale (a, b) konkávna[5].

Definícia 2.23 *Majme danú funkciu f. Nech pre $x_0 \in D(f)$ existuje $\xi > 0$, pre ktoré je funkcia f na intervale $(x_0 - \xi, x_0)$ konvexná a na intervale $(x_0, x_0 + \xi)$ konkávna (alebo na intervale $(x_0 - \xi, x_0)$ konkávna a na intervale $(x_0, x_0 + \xi)$ konvexná). Potom sa bod $(x_0, f(x_0))$ volá inflexný.*

Veta 2.9 *Nech f je daná funkcia, ktorá má druhú deriváciu na intervale (a, b). Potom*

- *Ak pre všetky $x \in (a, b)$ je $f''(x) > 0$, tak f je konvexná na intervale (a, b).*
- *Ak pre všetky $x \in (a, b)$ je $f''(x) < 0$, tak f je konkávna na intervale (a, b).*

Priamym dôsledkom vety 2.9 je kritérium na hľadanie inflexných bodov.

Kritérium 2.3 (na hľadanie inflexných bodov). *Nech f je daná funkcia, ktorá má na intervale (a, b) spojitú druhú deriváciu. Nech $x_0 \in (a, b)$ je jediný bod, pre ktorý je $f''(x_0) = 0$. Potom, ak existujú x_1, $x_2 \in (a, b)$ pre ktoré je $f''(x_1) > 0$ a $f''(x_2) < 0$, tak $(x_0, f(x_0))$ je inflexný bod funkcie f.*

[4] Úsečka z obrázku 2.50 leží nad grafom funkcie f.
[5] Úsečka z obrázku 2.51 leží pod grafom funkcie f.

Poznámka 2.10 Môže sa stať, že $f''(x) = 0$ pre všetky $x \in (a, b)$. V tomto prípade kritérium 2.3 nemôžeme použiť. Tento prípad nastane len ak $f(x) = kx + q$ pre $x \in (a, b)$. Takáto funkcia je konvexná aj konkávna zároveň.

Príklad 2.48 Nájdite lokálne extrémy, intervaly monotónnosti, inflexné body a intervaly konvexnosti a konkávnosti funkcie $f(x) = \frac{1}{x^3-x}$.

Riešenie: Definičný obor funkcie f je $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{3x^2-1}{(x^3-x)^2}, \\ f''(x) &= -\frac{6x(x^3-x)^2 - (3x^2-1)\cdot 2 \cdot (x^3-x)(3x^2-1)}{(x^3-x)^4} = \frac{12x^4+2}{x^3(x^2-1)^3}. \end{aligned}$$

Určíme stacionárne body funkcie f a hodnoty $x_1, x_2 \in D(f)$ také, že $f''(x_2) = 0$. Budeme riešiť rovnice

$$-\frac{3x_1^2-1}{(x_1^3-x_1)^2} = 0, \tag{2.32}$$

$$\frac{12x^4+2}{x^3(x^2-1)^3} = 0. \tag{2.33}$$

Rovnica (2.32) má korene $x_{11} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ a $x_{12} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, rovnica (2.33) nemá korene. To znamená, že funkcia f má dva stacionárne body a nemá žiadne inflexné body. Zistíme hodnoty f v x_{11} a x_{12}:

$$f(x_{11}) = \frac{1}{-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad f(x_{12}) = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Na určenie lokálnych extrémov použijeme kritérium 2.2:

$$f''(x_{11}) = \frac{12\frac{9}{81}+2}{-\frac{\sqrt{3}^3}{27}\left(\frac{3}{9}-1\right)^3} > 0, \quad f''(x_{12}) = \frac{12\frac{9}{81}+2}{\frac{\sqrt{3}^3}{27}\left(\frac{3}{9}-1\right)^3} < 0.$$

Bod $A = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ je lokálnym minimom funkcie f a bod $B = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ je lokálnym maximom funkcie f.
Na určenie intervalov monotónnosti potrebujeme vyšetriť 6 intervalov (veta 2.8 a lema 2.16):

$$(-\infty, -1), \left(-1, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right), \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right), (1, \infty).$$

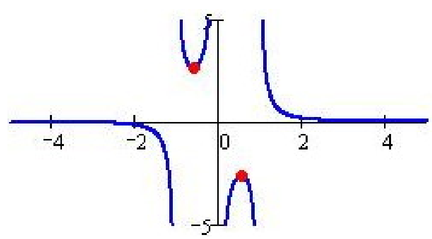
Postupne prejdeme jednotlivé intervaly.

$$
\begin{array}{rcl}
(-\infty,\,-1): & f'(-2) = -\frac{11}{36} & f \text{ je } \textit{rýdzo klesajúca,} \\
\left(-1,\,-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right): & f'(-0,7) = -\frac{0{,}47}{0{,}021609} & f \text{ je } \textit{rýdzo klesajúca,} \\
\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\,0\right): & f'(-0,5) = \frac{16}{9} & f \text{ je } \textit{rýdzo rastúca,} \\
\left(0,\,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right): & f'(0,5) = -\frac{16}{9} & f \text{ je } \textit{rýdzo klesajúca,} \\
\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\,1\right): & f'(0,7) = \frac{0{,}47}{0{,}021609} & f \text{ je } \textit{rýdzo rastúca,} \\
(1,\infty): & f'(2) = \frac{11}{36} & f \text{ je } \textit{rýdzo rastúca.}
\end{array}
$$

Na určenie intervalov konvexnosti a konkávnosti potrebujeme vyšetriť 4 intervaly: $(-\infty,-1)$, $(-1,\,0)$, $(0,\,1)$, $(1,\infty)$.
Postupne prejdeme jednotlivé intervaly.

$$
\begin{array}{rcl}
(-\infty,\,-1): & f''(-2) = -\frac{97}{108} & f \text{ je } \textit{konkávna,} \\
(-1,\,0): & f''(-0,5) = \frac{1408}{27} & f \text{ je } \textit{konvexná,} \\
(0,\,1): & f''(0,5) = -\frac{1408}{27} & f \text{ je } \textit{konkávna,} \\
(1,\,\infty): & f''(2) = \frac{97}{108} & f \text{ je } \textit{konvexná.}
\end{array}
$$

Funkcia f mení konvexnosť na konkávnosť v pre $x \in \{-1,0,1\}$. Tieto tri hodnoty ležia mimo definičného oboru. Preto f nemá žiadne inflexné body.



Obr. 2.52. Graf funkcie f a jej stacionárne body

□

Príklad 2.49 Nájdite lokálne extrémy, intervaly monotónnosti, inflexné body a intervaly konvexnosti a konkávnosti funkcie $f(x) = 5(x^6 - x^4)$.

Riešenie: $D(f) = \mathbb{R}$. Vypočítame prvú a druhú deriváciu:

$$f'(x) = 30x^5 - 20x^3, \quad f''(x) = 150x^4 - 60x^2.$$

Určíme hodnoty $x_1, x_2 \in D(f)$ také, že $f'(x_1) = 0$ a $f''(x_2) = 0$. Budeme riešiť rovnice

$$\begin{aligned} 30x_1^5 - 20x_1^3 &= 10x_1^3(3x_1^2 - 2) = 0, && (2.34)\\ 150x_2^4 - 60x_2^2 &= 30x_2^2(5x_2^2 - 2) = 0. && (2.35) \end{aligned}$$

Rovnica (2.34) má korene $x_{11} = -\sqrt{\frac{2}{3}}$, $x_{12} = 0$, $x_{13} = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Rovnica (2.35) má korene $x_{21} = -\sqrt{25}$, $x_{22} = 0$, $x_{23} = \sqrt{25}$. Funkcia f má tri stacionárne body. Zistíme funkčné hodnoty v x_{11}, x_{12}, x_{13}:

$$f(x_{11}) = -\frac{400}{729}, \quad f(x - 13) = 0, \quad f(x_{13}) = -\frac{400}{729}.$$

Použijeme kritérium 2.2 na overenie lokálnych extrémov:

$$f''(x_{11}) = \frac{80}{27} > 0, \quad f''(x_{12}) = 0, \quad f(x_{13}) = \frac{80}{27} > 0.$$

Zistili sme, že bod $A = \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{400}{729}\right)$ a bod $C = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{400}{729}\right)$ sú lokálne minimá funkcie f. Pre bod $B = (0, 0)$ nemôžeme použiť kritérium 2.2. Vyšetríme intervaly monotónnosti. Máme tri stacionárne body, funkcia f je definovaná na celej reálnej osi, teda musíme preveriť 4 intervaly

$$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right), \quad \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right), \left(0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right), \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \infty\right).$$

Postupne dosadíme do f' z každého intervalu:

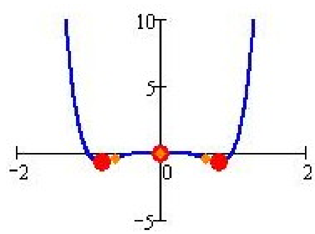
$$\begin{aligned} \left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) &: \quad f'(-1) = -10 && \text{funkcia } f \text{ je } \textit{rýdzo klesajúca,}\\ \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right) &: \quad f'(-0,5) = \tfrac{25}{16} && \text{funkcia } f \text{ je } \textit{rýdzo rastúca,}\\ \left(0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) &: \quad f'(0,5) = -\tfrac{25}{16} && \text{funkcia } f \text{ je } \textit{rýdzo klesajúca,}\\ \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \infty\right) &: \quad f'(1) = 10 && \text{funkcia } f \text{ je } \textit{rýdzo rastúca.} \end{aligned}$$

Zistili sme súčasne, že bod $B = (0, 0)$ je lokálnym maximom funkcie f.
Vyšetríme intervaly konvexnosti a konkávnosti. Opäť budeme vyšetrovať 4 intervaly: $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}, 0\right)$, $\left(0, \sqrt{\frac{2}{5}}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{2}{5}}, \infty\right)$.

Postupným dosadením do f'' z každého intervalu dostaneme:

$$\begin{aligned}
\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{5}}\right): &\qquad f''(-1) = 90 &&\text{funkcia } f \text{ je } \textit{konvexná},\\
\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}, 0\right): &\quad f''(-0,5) = -\tfrac{45}{8} &&\text{funkcia } f \text{ je } \textit{konkávna},\\
\left(0, \sqrt{\frac{2}{5}}\right): &\quad f''(0,5) = -\tfrac{45}{8} &&\text{funkcia } f \text{ je } \textit{konkávna},\\
\left(\sqrt{\frac{2}{5}}, \infty\right): &\qquad f''(1) = 90 &&\text{funkcia } f \text{ je } \textit{konvexná}.
\end{aligned}$$

Funkcia je konkávna v intervaloch $\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}, 0\right)$ aj $\left(0, \sqrt{\frac{2}{5}}\right)$. To znamená, že bod $(0,0)$ nie je inflexným bodom funkcie f. Funkcia f má dva inflexné body. Zistíme ešte hodnoty funkcie pre x_{21} a x_{23}. Dostaneme $f(x_{21}) = -\frac{12}{25}$, $f(x_{23}) = -\frac{12}{25}$.



Obr. 2.53. Graf funkcie f, jej stacionárne a inflexné body

□

Kritérium 2.3 je obdobou kritéria 2.1. Keď si tieto dve kritériá zhrnieme, z prvej derivácie zistíme intervaly monotónnosti (a z nich dostaneme lokálne extrémy) a z druhej derivácie zistíme intervaly konvexnosti a konkávnosti (a z nich dostaneme inflexné body). Existuje ešte jeden spôsob, ako môžeme určiť, či v stacionárnom bode, kde sa aj druhá derivácia rovná nule, má funkcia lokálny extrém, alebo je to inflexný bod. Tento spôsob je založený na počítaní vyšších derivácií a je opísaný v nasledujúcom kritériu.

Kritérium 2.4 (na hľadanie lokálnych extrémov a inflexných bodov). *Nech f je daná funkcia a nech pre $x_0 \in D(f)$ platí*

$$0 = f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0)$$

a $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Potom

- *Ak n je párne číslo, tak bod $(x_0, f(x_0))$ je lokálnym extrémom funkcie f:*
  ak $f^{(n)}(x_0) > 0$, tak v x_0 má funkcia f lokálne minimum,
  ak $f^{(n)}(x_0) < 0$, tak v x_0 má funkcia f lokálne maximum.

- *Ak $n > 1$ je nepárne číslo, tak $(x_0, f(x_0))$ je inflexný bod funkcie f.*

Príklad 2.50 Nájdite lokálne extrémy a inflexné body funkcií $f_1(x) = x^5$, $f_2(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$, $f_3(x) = 5x^5 - 5x^3$.

Riešenie:

- $D(f_1) = \mathbb{R}$, $f_1'(x) = 5x^4$. Z toho dostaneme, že jediný stacionárny bod funkcie f_1 je $A = (0, 0)$. Použijeme kritérium 2.4 na overenie, či má funkcia lokálny extrém v tomto bode.

$$\begin{aligned} f_1''(x) &= 20x^3, & f''(0) &= 0, \\ f_1'''(x) &= 60x^2, & f_1'''(0) &= 0, \\ f_1^{(4)}(x) &= 120x, & f_1^{(4)}(0) &= 0, \\ f_1^{(5)}(x) &= 120, & f_1^{(5)}(0) &> 0. \end{aligned}$$

  Podľa kritéria 2.4 je A inflexným bodom f_1. Lokálne extrémy táto funkcia nemá. Súčasne $x_0 = 0$ je jediné riešenie rovnice $f_1''(x_0) = 0$. Z toho vyplýva, že A je jediný stacionárny bod funkcie f_1.

- Keď chceme zistiť definičný obor f_2, potrebujeme vyriešiť nerovnicu

$$x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 > 0.$$

  Vidíme, že riešením je celá reálna os, teda $D(f_2) = \mathbb{R}$. Nájdeme stacionárne body:

$$f_2'(x) = \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2}.$$

  Rovnica $\frac{2x_0+2}{x_0^2+2x_0+2} = 0$ má jediné riešenie $x_0 = -1$. $f(-1) = \ln(1) = 0$. Jediným stacionárnym bodom funkcie f_2 je $B = (-1, 0)$. Overíme, či má funkcia v tomto bode lokálny extrém.

$$f_2''(x) = \frac{2(x^2 + 2x + 2) - (2x + 2)(2x + 2)}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{-2x^2 - 4x}{(x^2 + 2x + 2)^2}.$$

  $f''(-1) = 2 > 0$. Podľa kritéria 2.2 má funkcia f_2 v bode B lokálne minimum. Nájdeme inflexné body. Potrebujeme nulové body druhej derivácie:

$$\frac{-2x_1^2 - 4x_1}{(x_1^2 + 2x_1 + 2)^2} = 0,$$

  z toho $x_{11} = -2$, $x_{12} = 0$. Podľa kritéria 2.3 vyšetríme tri intervaly:

$$(-\infty, -2), \quad (-2, 0), \quad (0, \infty).$$

  Vyberieme z každého intervalu jednu hodnotu a dosadíme do f_2''. (Interval $(-2, 0)$ sme už vyšetrili pri hľadaní lokálnych extrémov.)

$$\begin{aligned} (-\infty, -2): &\quad f_2''(-3) = \tfrac{-6}{25} < 0 & &\text{funkcia } f_2 \text{ je } \textit{konkávna}, \\ (-2, 0): &\quad f_2''(-1) = 2 > 0 & &\text{funkcia } f_2 \text{ je } \textit{konvexná}, \\ (0, \infty): &\quad f_2''(1) = \tfrac{-6}{25} < 0 & &\text{funkcia } f_2 \text{ je } \textit{konkávna}. \end{aligned}$$

Potrebujeme ešte funkčné hodnoty pre x_{12} a x_{22}:

$$f_2(-2) = \ln 2, \quad f_2(0) = \ln 2.$$

Funkcia f_2 má dva inflexné body $(-2, \ln 2)$ a $(0, \ln 2)$.

- $D(f_3) = \mathbb{R}$. Zistíme stacionárne body:

$$f_3'(x) = 25x^4 - 15x^2 = 5x^2(5x^2 - 3).$$

Rovnica $5x_0^2(5x_0^2 - 3) = 0$ má tri korene $x_{01} = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x_{02} = 0$, $x_{13} = \sqrt{\frac{3}{5}}$. Funkčné hodnoty sú $f_3(x_{01}) = \frac{6\sqrt{3}}{5\sqrt{5}}$, $f_3(x_{02}) = 0$, $f_3(x_{03}) = -\frac{6\sqrt{3}}{5\sqrt{5}}$. Stacionárne body funkcie f_3 sú $C = \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, \frac{6\sqrt{3}}{5\sqrt{5}}\right)$, $D = (0,0)$, $E = \left(\sqrt{\frac{3}{5}}, -\frac{6\sqrt{3}}{5\sqrt{5}}\right)$. Použijeme kritérium 2.2. $f_3''(x) = 100x^3 - 30x = 10x(10x^2 - 3)$.

$$\begin{aligned} f_3''(x_{01}) = -30\sqrt{\frac{3}{5}} < 0 &\qquad \text{v } C \text{ má } f_3 \textit{ lokálne maximum,} \\ f_3''(0) = 0 &\qquad \text{nevieme rozhodnúť,či je v } D \text{ lokálny extrém,} \\ f_3''(x_{03}) = 30\sqrt{\frac{3}{5}} < 0 &\qquad \text{v } E \text{ má } f_3 \textit{ lokálne minimum.} \end{aligned}$$

Na bod D použijeme kritérium 2.4:

$$f_3'''(x) = 300x^2 - 30, \quad f_3'''(0) = -30 < 0, \quad D \text{ je inflexný bod funkcie } f_3.$$

Zistíme, či existujú ďalšie inflexné body. Riešime rovnicu

$$10x_1(10x_1^2 - 3) = 0.$$

Rovnica má tri korene: $x_{11} = -\sqrt{\frac{3}{10}}$, $x_{12} = 0$, $x_{13} = \sqrt{\frac{3}{10}}$. Zistíme funkčné hodnoty:

$$f_3\left(-\sqrt{\frac{3}{10}}\right) = -\frac{21\sqrt{3}}{20\sqrt{10}}, \quad f_3\left(\sqrt{\frac{3}{10}}\right) = \frac{21\sqrt{3}}{20\sqrt{10}}.$$

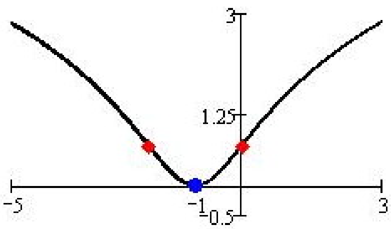
Podľa kritéria 2.3 vyšetríme štyri intervaly:

$$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{10}}\right), \quad \left(-\sqrt{\frac{3}{10}}, 0\right), \quad \left(0, \sqrt{\frac{3}{10}}\right), \quad \left(\sqrt{\frac{3}{10}}, \infty\right).$$

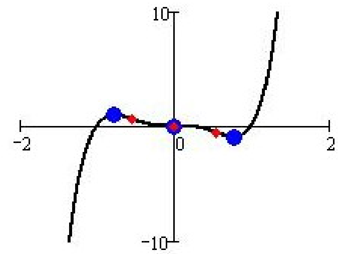
Z každého intervalu vyberieme jednu hodnotuu a dosadíme do f_3''.

$$\begin{aligned} \left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{10}}\right): &\quad f_3''(-1) = -70, &&\text{funkcia } f_3 \text{ je } \textit{konkávna,} \\ \left(-\sqrt{\frac{3}{10}}, 0\right): &\quad f_3''(-0,5) = \tfrac{5}{2} > 0, &&\text{funkcia } f_3 \text{ je } \textit{konvexná,} \\ \left(0, \sqrt{\frac{3}{10}}\right): &\quad f_3''(0,5) = -\tfrac{5}{2} < 0, &&\text{funkcia } f_3 \text{ je } \textit{konkávna,} \\ \left(\sqrt{\frac{3}{10}}, \infty\right): &\quad f_3''(1) = 70, &&\text{funkcia } f_3 \text{ je } \textit{konvexná.} \end{aligned}$$

Funkcia f_3 má tri inflexné body: $\left(-\sqrt{\frac{3}{10}}, -\frac{21\sqrt{3}}{20\sqrt{10}}\right)$, $(0,0)$, $\left(\sqrt{\frac{3}{10}}, \frac{21\sqrt{3}}{20\sqrt{10}}\right)$.



Obr. 2.54. Graf funkcie f_2



Obr. 2.55. Graf funkcie f_3

Graf funkcie f_1 je na obr. 2.14. □

2.4.3 Globálne extrémy

Globálne extrémy funkcií sa v praktických aplikáciách spájajú s riešením optimalizačnej úlohy (teda keď potrebujeme buď maximalizovať zisk, alebo minimalizovať stratu).

Veta 2.10 *Nech $[a,b]$ je daný interval a nech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Potom f nadobúda najväčšiu aj najmenšiu hodnotu.*

Poznámka 2.11 Ak navyše $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je hladká na intervale (a,b), tak najväčšia a najmenšia hodnota, ktorú na intervale $[a,b]$ funkcia nadobudne, sa dosahuje buď v stacionárnych bodoch, alebo v krajných bodoch intervalu $[a,b]$. Z toho dostaneme postup pri hľadaní globálnych extrémov.

Postup pri hľadaní globálnych extrémov na intervale $[a,b]$:

1. Nájdeme stacionárne body $(x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$ funkcie f, pre ktoré je $x_1, \dots, x_n \in (a,b)$
2. Vypočítame hodnoty $f(a)$ a $f(b)$.
3. Porovnáme $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)$.

Príklad 2.51 Nájdite najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ na intervale $[-2,2]$.

Riešenie: Nájdeme stacionárne body. $f'(x) = 6x^2 - 6x$, z toho rovnica $6(x_0^2 - x_0) = 0$ má korene $x_{01} = 0,\ x_{02} = 1$. $0, 1 \in [-2,2]$. Potrebujeme hodnoty $f(x_{01})$ a $f(x_{02})$:

$$f(x_{01}) = 0, \quad f(x_{02}) = -1.$$

Zistíme hodnoty $f(-2)$ a $f(2)$:

$$f(-2) = -28, \quad f(2) = 4.$$

Najväčšia hodnota je 4 a dosahuje sa v $x = 2$, najmenšia hodnota je -28, dosahuje sa v bode $x = -2$. □

Príklad 2.52 Nájdite najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie $f(x) = x^2 - 4x + 1$ na intervale $[0, 3]$.

Riešenie: Nájdeme stacionárne body. $f'(x) = 2x - 4$, z toho rovnica $2x_0 - 4 = 0$ má jediný koreň $x_0 = 2 \in [0, 3]$. $f(2) = -3$, $f(0) = 1$, $f(3) = -2$. Najväčšia hodnota je 1 a dosahuje sa pre $x = 0$, najmenšia hodnota je -3, dosahuje sa v bode $x = 2$. □

Veta 2.11 *Nech f je hladká funkcia na intervale (a, b) a nech má jediný stacionárny bod A. Potom ak má lokálny extrém v bode A, tak tam má aj globálny extrém.*

Príklad 2.53 Kruhový valec má objem $16\pi\,\mathrm{cm}^3$. Aké musí mať rozmery, aby mal minimálny povrch?

Riešenie: Potrebujeme nájsť polomer r a výšku v valca. Povrch valca je: $S = 2\pi r^2 + 2\pi r v$. Poznáme

$$V = 164\pi = \pi r^2 v, \quad \text{z toho} \quad v = \frac{16}{r^2}.$$

Potrebujeme zistiť, pre akú hodnotu r nadobúda funkcia

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{16}{r^2} = 2\pi r^2 + \frac{32\pi}{r}$$

svoje minimum, pričom $r \in (0, \infty)$ (polomer valca je kladný, iné obmedzenie nemáme). Nájdeme stacionárne body.

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{32\pi}{r^2} = 4\pi \frac{r^3 - 8}{r^2}.$$

Rovnica $4\pi \frac{r_0^3 - 8}{r_0^2} = 0$ má jediný koreň $r_0 = 2\,\mathrm{cm}$. $S(2) = 24\pi\,\mathrm{cm}^3$. Funkcia S má jediný stacionárny bod. Overíme, či má v tomto bode lokálne minimum.

$$S''(r) = 4\pi \frac{3r^2 \cdot r^2 - 2r(r^3 - 8)}{r^4} = 4\pi \frac{r^3 + 16}{r^3}, \quad S''(r_0) = 12\pi > 0.$$

Bod $(2, 24\pi)$ je lokálnym minimom, teda podľa vety 2.11 má funkcia S v tomto bode globálne minimum. Výška valca: je $v_0 = 4\,\mathrm{cm}$.
Záver: optimálne rozmery valca sú: výška $4\,\mathrm{cm}$ a polomer $2\,\mathrm{cm}$. □

Príklad 2.54 Skladové priestory majú tvar kvádra s objemom $500\,\mathrm{m}^3$. Dĺžka má byť dvojnásobkom šírky, $1\,\mathrm{m}^2$ strechy je $3\times$ drahší ako $1\,\mathrm{m}^2$ bočnej steny. Aké musia byť rozmery skladu, aby bola stavba najlacnejšia?

Riešenie: Označme x dĺžku, y šírku a z výšku skladu. Potom cena stavby je:

$$C(x,y,z) = 3xy + 2(xz + yz).$$

Vieme, že $x = 2y$ a poznáme objem

$$V = 500 = xyz = 2y^2 z.$$

Z toho $z = \frac{250}{y^2}$. Dostaneme optimalizačnú funkciu

$$\mathcal{C}(y) = 6y^2 + \frac{1500}{y} = \frac{6y^3 + 1500}{y},$$

pričom $y \in (0, \infty)$. Nájdeme stacionárne body funkcie $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}'(y) &= \frac{18y^3 - (6y^3 + 1500)}{y^2} = \frac{12y^3 - 1500}{y^2}, \\ 0 &= \frac{12y_0^3 - 1500}{y_0^2} = 12\frac{y_0^3 - 125}{y_0^2}. \end{aligned}$$

Rovnica má jediné riešenie $y_0 = 5\,\mathrm{m}$. Overíme, že C má v bode $(5, C(5))$ lokálne minimum:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}''(y) &= 12\frac{3y^4 - 2y(y^3 - 125)}{y^4} = 12\frac{y^3 + 250}{y^3}, \\ \mathcal{C}''(y_0) &= 12\frac{125 + 250}{125} = 36 > 0. \end{aligned}$$

Šírka $5\,\mathrm{m}$ je optimálna. Určíme ešte zvyšné rozmery. Optimálna dĺžka je $x_0 = 2y_0$, teda $10\,\mathrm{m}$ a výška je $z_0 = \frac{250}{y_0^2} = 10\,\mathrm{m}$. □

2.5 Diferenciály a Taylorov polynóm

Taylorov polynóm slúži na približný výpočet hodnôt funkcií. Má aplikácie, napr. pri približnom výpočte integrálov, diferenciálnych rovníc a pod.

2.5.1 Diferenciály funkcie

Predpokladajme, že máme danú funkciu f, ktorá má na intervale (a, b) n derivácií a nech $x_0 \in (a, b)$ je daný bod. Našou úlohou bude aproximovať (teda približne určiť) hodnoty funkcie f pomocou polynómu n-tého stupňa.

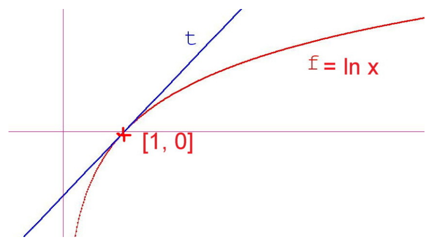
- Polynóm prvého stupňa, ktorý v okolí bodu $A = (x_0, f(x_0))$ najlepšie vystihuje funkciu f, je dotyčnica s dotykovým bodom A. Dotyčnica aproximuje v malom okolí bodu A dostatočne presne funkciu f, teda môžeme písať

$$f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Výraz

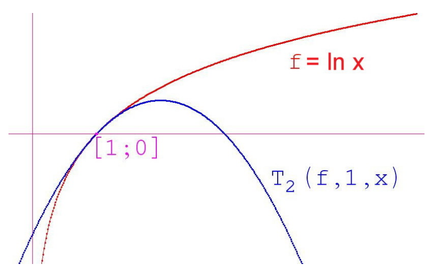
$$df(x_0, x) = f'(x_0)(x - x_0) \tag{2.36}$$

nazveme *prvým diferenciálom funkcie f v x_0*.



Obr. 2.56. Graf funkcie f a jej dotyčnica v bode A

- Dotyčnica má s funkciou spoločný bod A a „smer" ($k = f'(x_0)$). Budeme hľadať polynóm druhého stupňa $P_2(x) = c_2(x - x_0)^2 + c_1(x - x_0) + f(x_0)$, ktorý má s funkciou f spoločný bod A a hodnoty prvých dvoch derivácií $f'(x_0)$, $f''(x_0)$.



Obr. 2.57. Aproximácia parabolou P_2

Postupným derivovaním dostaneme

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2c_2(x - x_0) + c_1, \quad \text{z toho} \quad c_1 = f'(x_0), \\ f''(x) &= 2c_2, \quad \text{z toho} \quad c_2 = \frac{f''(x_0)}{2}. \end{aligned}$$

Hľadaný polynóm druhého stupňa má tvar

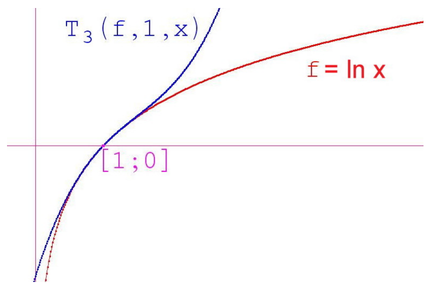
$$P_2(x) = \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Výraz

$$d^2 f(x_0, x) = f''(x_0)(x - x_0)^2$$

nazveme *druhým diferenciálom funkcie* f *v* x_0.

- Hľadáme polynóm tretieho stupňa $P_3(x) = c_3(x - x_0)^3 + c_2(x - x_0)^2 + c_1(x - x_0) + f(x_0)$, ktorý má s funkciou f spoločný bod A a hodnoty prvých troch derivácií $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $f'''(x_0)$.



Obr. 2.58. Aproximácia polynómom 3. stupňa P_3

Postupným derivovaním dostaneme

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3c_3(x - x_0)^2 + 2c_2(x - x_0) + c_1, \quad \text{z toho} \quad c_1 = f'(x_0), \\ f''(x) &= 3 \cdot 2 \cdot c_3(x - x_0) + 2c_2, \quad \text{z toho} \quad c_2 = \frac{f''(x_0)}{2}, \\ f'''(x) &= 3 \cdot 2 \cdot c_3, \quad \text{z toho} \quad c_3 = \frac{f'''(x_0)}{3 \cdot 2}. \end{aligned}$$

Výsledný polynóm má tvar

$$\begin{aligned} P_3(x) &= \frac{f'''(x_0)}{3 \cdot 2}(x - x_0)^3 + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = \\ &= \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f(x_0)}{0!}(x - x_0)^0. \end{aligned}$$

Výraz

$$d^3 f(x_0, x) = f^(3)(x_0)(x - x_0)^3$$

nazveme *tretím diferenciálom funkcie* f *v* x_0.

Všeobecne, výraz

$$d^{(n)} f(x_0, x) = f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \tag{2.37}$$

nazveme *diferenciálom* n*-tého rádu funkcie* f *v* x_0 (alebo n-tým diferenciálom funkcie f v x_0).

Derivácia nultého rádu funkcie f v x_0 sa označuje $f^{(0)}(x_0)$ a definuje $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$. Nultý diferenciál je potom

$$d^{(0)}f(x_0, x) = f^{(0)}(x_0)(x_0 - x)^0 = f(x_0).$$

2.5.2 Lagrangeova veta o strednej hodnote a Taylorov rozvoj

Definícia 2.24 (Taylorov rozvoj). *Nech f je funkcia, ktorá má na intervale (a, b) n derivácií. Nech $x_0 \in (a, b)$ je pevne zvolený bod. Potom označíme*

$$T_n(f, x_0, x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i \tag{2.38}$$

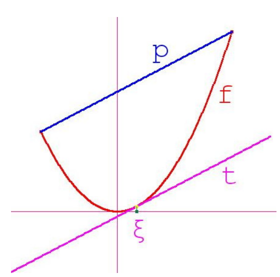
a polynóm $T_n(f, x_0, x)$ nazveme Taylorovym polynómom (rozvojom) *n-tého stupňa funkcie f okolo x_0.* (Stručnejšie hovoríme, že $T_n(f, x_0, x)$ je n-tý Taylorov polynóm.)

Taylorov polynóm n-tého stupňa funkcie f môžeme vyjadriť pomocou diferenciálov

$$T_n(f, x_0, x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{d^{(i)}f(x_0, x)}{i!}.$$

Veta 2.12 (Lagrangeova o strednej hodnote). *Nech f je hladká funkcia na intervale (a, b) a spojitá na $[a, b]$. Potom existuje také $\xi \in (a, b)$, pre ktoré platí*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Obr. 2.59. Funkcia f a jej dotyčnica v bode $T = (\xi, f(\xi))$

Nasledujúca veta je zovšeobecnením predchádzajúcej Lagrangeovej vety o strednej hodnote a hovorí o tom, akej chyby sa dopustíme, keď hodnotu $f(x)$ aproximujeme hodnotou $T_n(f, x_0, x)$. S Lagrangeovou vetou o strednej hodnote sa stretneme ešte v kapitole o integráloch.

Veta 2.13 *Nech f je funkcia, ktorá má na intervale (a,b) všetky derivácie až po rád $n+1$. Nech $x_0 \in (a,b)$ je pevne zvolený bod. Potom pre ľubovoľné $x \in (a,b)$ existuje $\xi_x \in (x_0,x)$ (resp. $\xi_x \in (x,x_0)$) tak, že*

$$f(x) - T_n(f,x_0,x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Hodnotu $\varepsilon = |f(x) - T_n(f,x_0,x)|$ nazveme *chybou odhadu* pri aproximácii $f(x)$ hodnotou $T_n(f,x_0,x)$.

Príklad 2.55 Potrebujeme odhadnúť hodnotu $\cos(0,25)$, pričom chyba odhadu má byť $\varepsilon \le 0,01$. Funkciu rozvinieme v bode $x_0 = 0$.[6] Pomocou vety 2.13 treba zistiť minimálny potrebný stupeň Taylorovho rozvoja. Keď spravíme niekoľko derivácií, dostaneme

$$\cos'(0) = 0,\ \cos''(0) = -1,\ \cos'''(0) = 0,\ \cos^{(4)}(0) = 1\ldots$$

Označme ε absolútnu hodnotu chyby. Potom na odhad chyby ε potrebujeme odhadnúť $|f^{(n+1)}(\xi)|$. Musíme si uvedomiť, že ξ nepoznáme, ale vieme, že $\xi \in (0;0,25)$.

$$|\cos^{(n+1)}(\xi)| = \begin{cases} |\sin(\xi)| & \text{ak } n+1 \text{ je nepárne číslo,} \\ |\cos(\xi)| & \text{ak } n+1 \text{ je párne číslo,} \end{cases}$$

teda $|\cos^{(n+1)}(\xi)| \le 1$. Dostávame $\varepsilon \le \frac{0,25^{n+1}}{(n+1)!} \le 0,01$ Položme $n = 2$. Potom $0,25^3 = \frac{1}{64}$, $3! = 6$, z toho $\frac{0,25^3}{3!} = \frac{1}{6\cdot 64} \le \frac{1}{100}$.
Na dosiahnutie potrebnej presnosti stačí Taylorov polynóm 2. stupňa $T_2(\cos;0;x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$. Keď za x dosadíme $0,25$, dostaneme

$$\cos(0,25) \doteq 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32} \doteq 0,97.$$

Príklad 2.56 Nájdite piaty Taylorov polynóm funkcie $f(x) = e^x$ v bode $x_0 = 0$. Odhadnite chybu, ktorej sa dopustíte, ak číslo $e = f(1)$ odhadnete hodnotou $T_5(e^x,0,1)$.

Riešenie: Vypočítame derivácie

$$(e^x)' = (e^x)'' = (e^x)''' = (e^x)^{(4)} = (e^x)^{(5)} = e^x.$$

$e^0 = 1$. Z toho dostaneme

$$T_5(e^x,0,x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5.$$

[6] x_0 volíme vždy tak, aby sme vedeli vypočítať príslušnú funkčnú hodnotu aj hodnotu prvých n derivácií.

Dosadíme $x = 1$ a dostaneme

$$e \doteq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = \frac{326}{120} \doteq 2,7167.$$

Odhadneme chybu ε. Vieme, že $\varepsilon = \frac{\exp^{(6)}(\xi)}{6!}(1-0)^6 = \frac{e^\xi}{6!}$, kde $\xi \in (0,1)$. Hodnotu ξ nepoznáme, ale vieme, že exp je rastúca funkcia. To znamená $1 < e^\xi < e$. Číslo e odhadujeme (teda ho nepoznáme), ale môžeme spraviť horný odhad $e < 3$. Z toho dostaneme odhad chyby

$$\varepsilon \le \frac{3}{6!} = \frac{1}{240} \doteq 0,0042.$$

□

Príklad 2.57 Rozvojom funkcie ln v bode $x_0 = 1$ odhadnite hodnotu $\ln 5$, pričom pre chybu odhadu ε má platiť $\varepsilon \le 0,02$.

Riešenie: Nájdeme formulu pre Taylorov rozvoj n-tého stupňa funkcie ln.

$$\begin{aligned}
\ln' x &= \frac{1}{x} = x^{-1},\\
\ln'' x &= -x^{-2},\\
\ln''' x &= 2x^{-3},\\
\ln^{(4)} x &= -2 \cdot 3x^{-4} = -3!x^{-4},\\
&\vdots\\
\ln^{(n)} x &= (-1)^{n+1}(n-1)!x^{-n}.
\end{aligned}$$

Z toho $\ln^{(n)}(1) = (-1)^{n+1}(n-1)!$ a $\ln^{(0)} 1 = \ln 1 = 0$. Dosadením do vzťahu (2.38) dostaneme

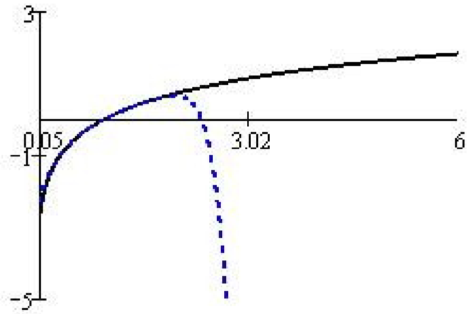
$$T_n(\ln, 1, x) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+1} \frac{(i-1)!}{i!}(x-1)^i = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{(x-1)^i}{i}. \tag{2.39}$$

Dosadíme $x = 5$

$$T_n(\ln, 1, 5) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{4^i}{i}$$

a chybu môžeme odhadnúť hodnotou

$$\varepsilon \le \frac{n!(\xi-1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(\xi-1)^{n+1}}{n+1},$$



Obr. 2.60. Funkcia ln a jej 8. Taylorov polynóm

kde $\xi \in (1;5)$. Nevieme nájsť n tak, aby sme mohli zaručiť, že $\varepsilon \leq 0,01$. Úlohu musíme riešiť inak. Vieme, že pre ľubovoľné $x > 0$ platí $\ln x = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$. Namiesto toho, aby sme odhadli priamo hodnotu $\ln 5$, budeme odhadovať $\ln\left(\frac{1}{5}\right)$. Dosadením do (2.39) dostaneme

$$T_n\left(\ln, 1, \frac{1}{5}\right) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{(-0,8)^i}{i} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{0,8^i}{i}.$$

Odhad chyby je

$$\bar{\varepsilon} \leq \frac{|\bar{\xi}-1|^{n+1}}{(n+1)},$$

kde $\bar{\xi} \in \left(\frac{1}{5}, 1\right)$. Pre n máme nerovnicu

$$\bar{\varepsilon} \leq \frac{|0,8|^{n+1}}{(n+1)} \leq 0,02.$$

Pre $n = 7$ je $\bar{\varepsilon} \leq 0,021 > 0,02$, pre $n = 8$ je $\bar{\varepsilon} \leq 0,021 > 0,015 < 0,02$. Na odhad hodnoty $\ln\left(\frac{1}{5}\right)$ s presnosťou $0,02$ potrebujeme Taylorov rozvoj aspoň 8. stupňa. Z toho dostaneme

$$\ln 5 = -\ln\left(\frac{1}{5}\right) \doteq \sum_{i=1}^{8}\frac{0,8^i}{i}.$$

□

Pre Taylorov rozvoj funkcií platí nasledujúci užitočný vzťah, ktorý vyplýva bezprostredne zo vzorcov (2.25) a (2.26).

Veta 2.14 *Nech $T_n(f, x_0, x)$ a $T_n(g, x_0, x)$ sú Taylorove rovoje n-tého stupňa funkcií f a g v x_0. Označme ε_f a ε_g absolútne hodnoty chýb, ktorých sa dopúšťame, keď odhadujeme hodnotu $f(x)$, respektíve $g(x)$ pomocou n-tých Taylorovych polynómov. Potom pre ľubovoľné c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ platí*

$$T_n(c_1 f + c_2 g, x_0, x) = c_1 T_n(f, x_0, x) + c_2 T_n(g, x_0, x)$$

a pre absoútnu hodnotu chyby $\bar{\varepsilon}$ odhadu hodnoty $c_1 f(x) + c_2 g(x)$ platí

$$\bar{\varepsilon} \le c_1 \varepsilon_f + c_2 \varepsilon_g.$$

Príklad 2.58 Určte $T_4\left(\ln\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-x}\right), 0, x\right)$.

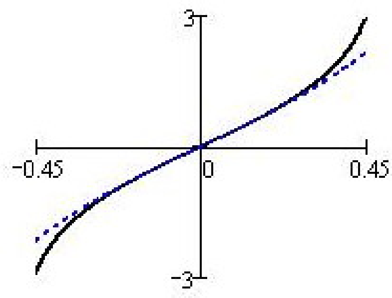
Riešenie: $\ln\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-x}\right) = \ln\left(x+\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}-x\right)$ pre $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (overte!). Môžeme použiť vetu 2.14. Vypočítame prvé 4 derivácie

$$\begin{aligned}
\left(\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)' &= \frac{1}{x+\frac{1}{2}}, \quad \left(\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)'|_{x=0} = 2,\\
\left(\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)'' &= -\left(x+\frac{1}{2}\right)^{-2}, \quad \left(\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)''|_{x=0} = -2^2,\\
\left(\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)''' &= 2!\left(x+\frac{1}{2}\right)^{-3}, \quad \left(\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)'''|_{x=0} = 2!2^3,\\
\left(\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^{(4)} &= -3!\left(x+\frac{1}{2}\right)^{-4}, \quad \left(\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^{(4)}|_{x=0} = -3!2^4,\\
\left(\ln\left(\frac{1}{2}-x\right)\right)' &= \frac{-1}{\frac{1}{2}-x} = \frac{1}{x-\frac{1}{2}}, \quad \left(\ln\left(\frac{1}{2}-x\right)\right)'|_{x=0} = -2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\ln\left(\frac{1}{2}-x\right)\right)'' &= -\left(x-\frac{1}{2}\right)^{-2}, \quad \left(\ln\left(\frac{1}{2}-x\right)\right)''|_{x=0} = -(-2)^2,\\
\left(\ln\left(\frac{1}{2}-x\right)\right)''' &= 2\left(x-\frac{1}{2}\right)^{-3}, \quad \left(\ln\left(\frac{1}{2}-x\right)\right)'''|_{x=0} = 2!(-2)^3,\\
\left(\ln\left(\frac{1}{2}-x\right)\right)^{(4)} &= -3!\left(x-\frac{1}{2}\right)^{-4}, \quad \left(\ln\left(\frac{1}{2}-x\right)\right)^{(4)}|_{x=0} = -3!(-2)^4.
\end{aligned}$$

Z toho dostaneme

$$\begin{aligned}
T_4\left(\ln\left(x+\frac{1}{2}\right), 0, x\right) &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) + 2x - \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{2!2^3}{3!}x^3 - \frac{3!2^4}{4!}x^4,\\
T_4\left(\ln\left(\frac{1}{2}-x\right), 0, x\right) &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 2x - \frac{(-2)^2}{2!}x^2 + \frac{2!(-2)^3}{3!}x^3 - \frac{3!(-2)^4}{4!}x^4
\end{aligned}$$



Obr. 2.61. Funkcia $f(x) = \ln\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-x}\right)$ a jej 4. Taylorov polynóm

a podľa vety 2.14 vyjde

$$T_4\left(\ln\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-x}\right), 0, x\right) = 4x + \frac{16}{3}x^3.$$

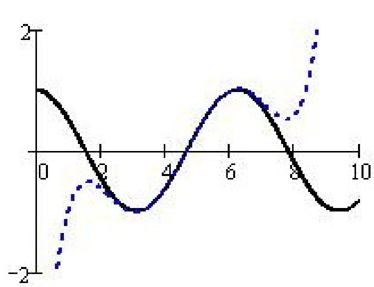
□

Príklad 2.59 Napíšte 5. Taylorov polynóm funkcie cos v bode $x_0 = \frac{3}{2}\pi$.

Riešenie: Vypočítame prvých 5 derivácií funkcie cos a ich hodnoty v $x_0 = \frac{3}{2}\pi$.

$$\begin{aligned}
\cos' x &= -\sin x \Big|_{x_0=\frac{3}{2}\pi} = -\sin\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = 1,\\
\cos'' x &= -\cos x \Big|_{x_0=\frac{3}{2}\pi} = -\cos\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = 0,\\
\cos''' x &= \sin x \Big|_{x_0=\frac{3}{2}\pi} = \sin\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = -1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos^{(4)} x &= \cos x \Big|_{x_0=\frac{3}{2}\pi} = \cos\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = 0 = \cos^{(0)}\left(\tfrac{3}{2}\pi\right),\\
\cos^{(5)} x &= -\sin x \Big|_{x_0=\frac{3}{2}\pi} = -\sin\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = 1.
\end{aligned}$$



Obr. 2.62. Graf funkcie cos a jej 5. Taylorov polynóm

Z toho

$$T_5\left(\cos, \frac{3}{2}\pi, x\right) = \left(x - \frac{3}{2}\pi\right) - \frac{1}{3!}\left(x - \frac{3}{2}\pi\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(x - \frac{3}{2}\pi\right)^5.$$

□

2.6 L'Hospitalovo pravidlo

Nech $a \in \mathbb{R}$ je pevne zvolená hodnota a $\delta > 0$. Majme funkcie f a g, ktoré sú hladké na intervale $(a-\delta, a+\delta)$ a predpokladajme, že $f(a) = g(a) = 0$ a $g'(a) \neq 0$. Potom

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)-0}{x-a}}{\frac{g(x)-0}{x-a}} = \frac{\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-0}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a} \frac{g(x)-0}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \tag{2.40}$$

Toto je myšlienka L'Hospitalovho pravidla. Všeobecnejšie platí:

Veta 2.15 (L'Hospitalovo pravidlo). *Nech $a \in \mathbb{R}$ je pevne zvolená hodnota, $\delta > 0$. Nech f a g sú dané funkcie, definované a hladké na intervaloch $(a-\delta, a)$ a $(a, a+\delta)$. Predpokladajme, že existujú limity $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g'(x)$ a nech je splnená jedna z nasledujúcich podmienok*

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$,
2. $\left|\lim\limits_{x\to a} f(x)\right| = \left|\lim\limits_{x\to a} g(x)\right| = \infty$,
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$, $\left|\lim\limits_{x\to a} g(x)\right| = \infty$, *kde $c \in \mathbb{R}$ je ľubovoľná konštanta.*

Potom platí

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Poznámka 2.12 L'Hospitalovo pravidlo môžeme použiť aj niekoľkokrát za sebou a platí aj pre jednostranné limity a limity v nevlastných bodoch.

Niektoré možnosti využitia L'Hospitalovho pravidla si ilustrujeme na nasledujúcich príkladoch.

Príklad 2.60 Vypočítajte limitu sprava $\lim\limits_{x\to 0_+} x \cdot \ln^2 x$.

Riešenie: Počítame limitu typu $0 \cdot \infty$. Bezprostredne nemôžeme použiť L'Hospitalovo pravidlo. Výraz $x \cdot \ln^2 x$ si musíme upraviť na podiel typu $\frac{0}{0}$ alebo typu $\frac{\infty}{\infty}$. Spravíme postupne obe úpravy.

- $\lim\limits_{x\to 0_+} x \cdot \ln^2 x = \underbrace{\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}}}_{\text{typ } \frac{\infty}{\infty}}$. Po tejto úprave môžeme použiť L'Hospitalovo pravidlo.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0_+} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0_+} \frac{\left(\ln^2 x\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0_+} \frac{\frac{2\ln x}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -2 \underbrace{\lim_{x\to 0_+} \frac{\ln x}{x^{-1}}}_{\text{typ } \frac{\infty}{\infty}} = \\
&= -2 \lim_{x\to 0_+} \frac{(\ln x)'}{\left(x^{-1}\right)'} = -2 \lim_{x\to 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = 0.
\end{aligned}$$

- Výraz $\lim\limits_{x\to 0_+} x \cdot \ln^2 x$ upravíme na typ $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0_+} x \cdot \ln^2 x = \lim_{x\to 0_+} \frac{x}{\ln^{-2} x} = \lim_{x\to 0_+} \frac{x'}{\left(\ln^{-2} x\right)'} = \lim_{x\to 0_+} \frac{1}{-2\ln^{-3}(x) \cdot \frac{1}{x}} = -3 \lim_{x\to 0_+} x \cdot \ln^3 x.$$

Vidíme, že použitím L'Hopitalovho pravidla sme si výraz skomplikovali. Táto úprava nebola vhodná na výpočet limity. □

Príklad 2.61 Nájdite asymptoty funkcie $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x$.

Riešenie: $D(f) = R$ a funkcia f je spojitá. To znamená, že nemá asymptoty bez smernice.

Určíme asymptoty so smernicou v $+\infty$. Pre smernicu asymptoty (ak existuje) platí

$$k_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{x \cdot \operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Pre úsek asymptoty platí

$$\begin{aligned}
q_1 &= \lim_{x\to\infty} \left(x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}x\right) = \lim_{x\to\infty} x \left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}\right) = \qquad (2.41) \\
&= \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}}_{\text{typ } \frac{0}{0}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-x^{-2}} = -\underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2}}_{\text{typ } \frac{\infty}{\infty}} = \\
&= -\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2x} = -1.
\end{aligned}$$

Limita v rovnici (2.41) je typu $\infty \cdot 0$. Potrebujeme ju upraviť na typ $\frac{0}{0}$ alebo $\frac{\infty}{\infty}$.
Rovnica asymptoty so smernicou v $+\infty$ je $y = \frac{\pi}{2}x - 1$.

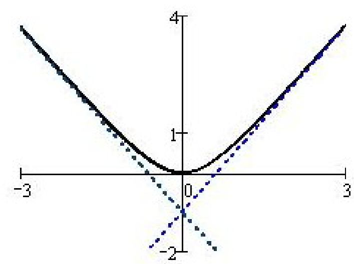
Určíme asymptoty so smernicou v $-\infty$.

$k_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x\cdot \operatorname{arctg} x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\dfrac{\pi}{2}.$

Pre úsek asymptoty platí

$$\begin{aligned} q_2 &= \lim_{x\to-\infty}\left(x\cdot\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}x\right) = \lim_{x\to-\infty} x\left(\operatorname{arctg} x+\frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{\operatorname{arctg} x+\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}}_{\text{typ } \frac{0}{0}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-x^{-2}} = -\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{1+x^2}}_{\text{typ } \frac{\infty}{\infty}} = \\ &= -\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2x} = -1. \end{aligned}$$

Rovnica asymptoty so smernicou v $-\infty$ je $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$.



Obr. 2.63. Graf funkcie $f(x) = x\cdot\operatorname{arctg} x$ a jej asymptoty

□

Príklad 2.62 Nájdite asymptoty funkcie $f(x) = x^2\exp\left(\frac{1}{x}\right)$.

Riešenie: $D(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Asymptota bez smernice môže existovať pre $a = 0$.

$$\underbrace{\lim_{x\to0_-}\exp\left(\frac{1}{x}\right)}_{=e^{-\infty}} = 0.$$

Z toho

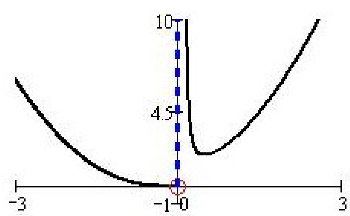
$$\begin{aligned} \lim_{x\to0_-} x^2\exp\left(\frac{1}{x}\right) &= 0. \\ \underbrace{\lim_{x\to0_+} x^2\exp\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{typ } 0\cdot\infty} &= \lim_{x\to0_+}\frac{\exp\left(\frac{1}{x}\right)}{x^{-2}} = \lim_{x\to0_+}\frac{\left(\exp\left(\frac{1}{x}\right)\right)'}{(x^{-2})'} = \lim_{x\to0_+}\frac{-x^{-2}\exp\left(\frac{1}{x}\right)}{-2x^{-3}} = \\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to0_+}\frac{\exp\left(\frac{1}{x}\right)}{x^{-1}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to0_+}\frac{\left(\exp\left(\frac{1}{x}\right)\right)'}{(x^{-1})'} = \frac{1}{2}\lim_{x\to0_+}\frac{-x^{-2}\exp\left(\frac{1}{x}\right)}{-x^{-2}} = \\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to0_+}\exp\left(\frac{1}{x}\right) = \infty. \end{aligned}$$

Rovnica *asymptoty bez smernice* je $x_0 = 0$.
Overíme existenciu asymptôt so smernicou.

$$k_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \exp\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to\infty} x \exp\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\lim_{x\to\infty} x\right) \underbrace{\left(\exp\left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\right)\right)}_{e^0=1} = \infty,$$

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 \exp\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to-\infty} x \exp\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\lim_{x\to-\infty} x\right) \underbrace{\left(\exp\left(\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\right)\right)}_{e^0=1} = -\infty.$$

Funkcia f nemá asymptoty so smernicou. (Aké pravidlá sme využili pri úprave oboch limít?)



Obr. 2.64. Graf funkcie $f(x) = x^2 \cdot \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ a jej asymptota bez smernice

$\square$

2.7 Krivky dané parametricky a ich derivácie

Parametricky daná krivka v rovine (v trojrozmernom priestore) je zadaná dvojicou (trojicou) funkcií

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (z = \chi(t)), \tag{2.42}$$

kde $t \in \mathcal{I}$ ($\mathcal{I}$ je daný interval)[7]. My sa budeme zaoberať len krivkami v rovine. V špeciálnom prípade dvojica $x(t) = \varphi(t),\ y(t) = \psi(t)$ definuje funkciu. Konkrétne, ak pre všetky $t_1,\ t_2 \in \mathcal{I}$ platí

$$\varphi(t_1) = \varphi(t_2) \quad \Rightarrow \quad \psi(t_1) = \psi(t_2).$$

Pri krivke (rovnako ako aj pri funkcii) môžeme určiť jej smer, teda prvú deriváciu a zakrivenie (konvexnosť - konkávnosť), dané druhou deriváciou (a v prípade potreby aj derivácie vyšších rádov).

[7]Parametrické vyjadrenie krivky v súvislosti s pohybujúcim sa hmotným bodom môžeme interpretovať ako jeho súradnice v čase t.

Prvá derivácia (podľa x) sa počíta takto:

$$y_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{2.43}$$

Deriváciou tohto vzťahu dostaneme *druhú deriváciu*:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy_1}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^2}}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}. \tag{2.44}$$

Ak potrebujeme limitu $\tilde{y}(x)$ pre $x \to x_0$, musíme nájsť t_0 také, že $\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t) = x_0$. Hodnota t_0 môže byť aj nevlastná, teda $\pm\infty$. Potom

$$\lim_{x\to x_0}\tilde{y}(x) = \lim_{t\to t_0}\psi(t).$$

Z toho dostaneme *asymptoty so smernicou* (v ∞):
Nech existuje t_0 také, že $\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t) = \infty$. Potom priamka $y = kx + q$ je asymptota so smernicou, ak

$$k = \lim_{t\to t_0}\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}, \tag{2.45}$$
$$q = \lim_{t\to t_0}(\psi(t) - k\varphi(t)) \tag{2.46}$$

sú vlastné limity.

Pre *asymptotu bez smernice* potrebujeme nájsť t_0 také, že $\lim\limits_{t\to t_0}\psi(t) = \infty$ (prípadne $\lim\limits_{t\to t_0}\psi(t) = -\infty$) a súčasne

$$\lim_{t\to t_0}\varphi(t) = x_0. \tag{2.47}$$

Potom asymptota bez smernice má rovnicu $x = x_0$.

Príklad 2.63 Nájdite dotyčnicu ku krivke

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= 2(1+\cos t)\cos t, \\ \psi(t) &= 2(1+\cos t)\sin t, \end{aligned} \qquad t \in \mathbb{R},$$

pre hodnotu parametra $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

Riešenie: Nájdeme dotykový bod $T = (\varphi(t_0),\ \psi(t_0))$. Z toho $T = (\sqrt{2}+1, \sqrt{2}+1)$. Pomocou vzťahu (2.43) nájdeme smernicu dotyčnice:

$$k = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)} = \frac{-2\sin t_0 \cdot \sin t_0 + 2(1+\cos t_0)\cos t_0}{-2\sin t_0 \cdot \cos t_0 - 2(1+\cos t_0)\sin t_0} =$$

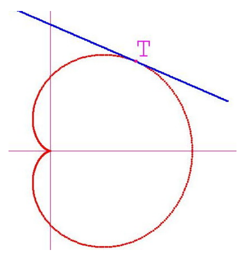
$$= \frac{-2\frac{1}{2} + 2\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{-2\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}+1}.$$

Rovnica dotyčnice je $y - \psi(t_0) = k \cdot (x - \varphi(t_0))$, teda

$$y - \sqrt{2} - 1 = -\frac{1}{\sqrt{2}+1}(x - \sqrt{2} - 1)$$

alebo po úprave

$$y = -\frac{x}{\sqrt{2}+1} + \sqrt{2} + 2.$$



Obr. 2.65. Krivka (kardioida) a jej dotyčnica v bode T

□

Príklad 2.64 Vyšetrite intervaly monotónnosti, lokálne extrémy a intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexné body krivky

$$\begin{array}{rcl} \varphi(t) & = & t - \sin t, \\ \psi(t) & = & 1 - \cos t, \end{array} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Riešenie: Najprv určíme oblasť, v ktorej sa krivka nachádza. Pre parameter t platí $t \in \mathbb{R}$. Všimnime si, že funkcia $x(t) = \varphi(t)$ je rýdzo rastúca:

$$\varphi'(t) = 1 - \cos t \geq 0.$$

To znamená, že dvojica $x(t) = \varphi(t)$, $y(t) = \psi(t)$ definuje funkciu $f(x) = \psi\left(\varphi^{-1}(t)\right)$, pre ktorú je $H(\varphi) = \mathbb{R} = D(f)$, $H(\psi) = [0, 2] = H(f)$.

Vyšetríme monotónnosť funkcie $y = f(x)$. Jej stacionárne body sú tie, kde 1. derivácia buď neexistuje, alebo sa rovná 0, to znamená, že stacionárne body dostaneme riešením rovníc:

$$\begin{array}{rl} \varphi'(t) = 0 & \quad \text{(body, kde 1. derivácia neexistuje)} \\ \psi'(t) = 0 \text{ a súčasne } \varphi'(t) \neq 0 & \quad \text{(body, kde je 1. derivácia nulová).} \end{array}$$

$\psi'(t) = \sin t$, z toho $\psi'(t) = 0$ pre $t = k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$ a $\varphi'(t) = 1 - \cos t$, z toho $\varphi'(t) = 0$ pre $t = 2k\pi$, $t \in \mathbb{Z}$.

Ak $t = 2k\pi$, tak $\frac{dy}{dx}$ neexistuje, ak $t = (2k+1)\pi$, $\frac{dy}{dx} = 0$. Z toho dostaneme intervaly monotónnosti:

$$\begin{aligned} t \in (2k\pi,\ (2k+1)\pi): \quad & \tfrac{dy}{dx} = \tfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \tfrac{\sin t}{1-\cos t} > 0, \quad \text{funkcia } f \text{ je } \textit{rýdzo rastúca}, \\ t \in ((2k-1)\pi,\ 2k\pi): \quad & \tfrac{dy}{dx} = \tfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \tfrac{\sin t}{1-\cos t} < 0, \quad \text{funkcia } f \text{ je } \textit{rýdzo klesajúca.} \end{aligned}$$

Funkcia f nadobúda *lokálne maximá* v bodoch $(\varphi((2k+1)\pi), \psi((2k+1)\pi))$ a *lokálne minimá* v bodoch $(\varphi(2k\pi), \psi(2k\pi))$.

Vyšetríme intervaly konvexnosti a konkávnosti. Inflexné body môžu byť tie, kde 2. derivácia buď neexistuje, alebo sa rovná 0, teda potrebujeme riešiť rovnice:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) = 0 \qquad & \text{(body, kde 2. derivácia neexistuje)} \\ \psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t) = 0 \text{ a súčasne } \varphi'(t) \neq 0 \qquad & \text{(body, kde je 2. derivácia nulová).} \end{aligned}$$

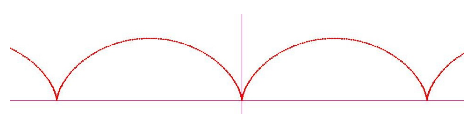
$\varphi'(t) = 0$ pre $t = 2k\pi$. Pre $t \neq 2k\pi$ dostaneme

$$\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t) = \cos t(1-\cos t) - \sin t \cdot \sin t = \cos t - 1,$$

z toho

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\cos t - 1}{(1-\cos t)^3} = -\frac{1}{(1-\cos t)^2} < 0.$$

Krivka je *konkávna* pre $t \in (2k\pi,\ 2(k+1)\pi)$, inflexné body nemá. Túto krivku voláme cykloida.



Obr. 2.66. Graf cykloidy

□

Príklad 2.65 Vyšetrite intervaly monotónnosti a intervaly konvexnosti a konkávnosti krivky

$$\varphi(t) = \cos^3 t, \psi(t) = \sin^3 t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Riešenie: $H(\varphi) = [-1,1], H(\psi) = [-1,1]$, teda krivka leží v štvorci $[-1,1] \times [-1,1]$. Vyšetríme monotónnosť.

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= -3\cos^2 t \cdot \sin t \\ \psi'(t) &= 3\sin^2 t \cdot \cos t \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3\sin^2 t \cdot \cos t}{-3\cos^2 t \cdot \sin t} = -\operatorname{tg} t$$

pre t také, že $\varphi'(t) \neq 0$, teda $t \notin \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi\right\}$. Z toho dostaneme stacionárne body

$$\begin{gathered} t=0:\ A=(1,0), \quad t=\tfrac{\pi}{2}:\ B=(0,1), \\ t=\pi:\ C=(-1,0), \quad t=\tfrac{3}{2}\pi:\ D=(0,-1), \quad t=2\pi:\ A=(1,0). \end{gathered}$$

Intervaly monotónnosti sú

$$\begin{aligned} t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) &: \ \tfrac{dy}{dx} < 0, \ \text{krivka je \textit{rýdzo klesajúca} na spojnici } AB, \\ t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) &: \ \tfrac{dy}{dx} > 0, \ \text{krivka je \textit{rýdzo rastúca} na spojnici } BC, \\ t \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right) &: \ \tfrac{dy}{dx} < 0, \ \text{krivka je \textit{rýdzo klesajúca} na spojnici } CD, \\ t \in \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right) &: \ \tfrac{dy}{dx} > 0, \ \text{krivka je \textit{rýdzo rastúca} na spojnici } AD. \end{aligned}$$

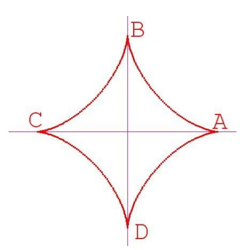
Vyšetríme intervaly konvexnosti a konkávnosti. 2. deriváciu počítame len pre $t \notin \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi\right\}$.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}}{\varphi'(t)} = \frac{-\operatorname{tg}' t}{-3\cos^2 t \cdot \sin t} = \frac{1}{3\cos^4 t \cdot \sin t}.$$

Intervaly konvexnosti a konkávnosti sú:

$$\begin{aligned} t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) &: \ \tfrac{d^2y}{dx^2} > 0, \ \text{krivka je \textit{konvexná} na spojnici } AB, \\ t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) &: \ \tfrac{d^2y}{dx^2} > 0, \ \text{krivka je \textit{konvexná} na spojnici } BC, \\ t \in \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right) &: \ \tfrac{d^2y}{dx^2} < 0, \ \text{krivka je \textit{konkávna} na spojnici } CD, \\ t \in \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right) &: \ \tfrac{dy}{dx} < 0, \ \text{krivka je \textit{konkávna} na spojnici } DA. \end{aligned}$$

Túto krivku voláme hviezdica alebo asteroida.



Obr. 2.67. Graf hviezdice (asteroidy)

□

Príklad 2.66 Nájdite asymptoty krivky

$$\varphi(t) = \frac{3t}{t^3+1},\ \psi(t) = \frac{3t^2}{t^3+1}.$$

Riešenie: Krivka je definovaná pre $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Najprv nájdeme hodnoty t_0 také, že $\psi(t) \to \pm\infty$ alebo $\varphi(t) \to \pm\infty$ pre $t \to t_0$. Funkcie ψ a φ sú spojité. To znamená, že stačí počítať (jednostranné) limity len pre $t_0 \in \{-1, \infty, -\infty\}$.

$$\lim_{t\to -1_+} \frac{3t^2}{t^3+1} = \infty, \quad \lim_{t\to -1_-} \frac{3t^2}{t^3+1} = -\infty.$$

(Overte výsledky podľa pravidiel (P1) a (P2).)

$$\lim_{t\to -1_+} \frac{3t}{t^3+1} = -\infty, \quad \lim_{t\to -1_-} \frac{3t}{t^3+1} = \infty.$$

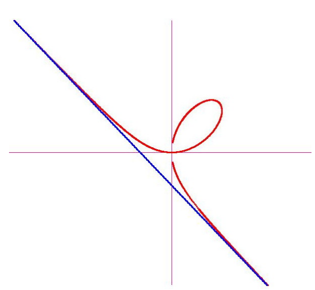
Pre limity $t \to \pm\infty$ dostaneme:

$$\lim_{t\to -\infty} \frac{3t^2}{t^3+1} = 0, \quad \lim_{t\to -\infty} \frac{3t}{t^3+1} = 0, \quad \lim_{t\to \infty} \frac{3t^2}{t^3+1} = 0, \quad \lim_{t\to \infty} \frac{3t}{t^3+1} = 0.$$

(Overte výsledky podľa L'Hospitalovej vety.) Z výsledkov vyplýva, že krivka nemá asymptoty bez smernice. Asymptoty so smernicou:

$$\begin{aligned}
k_1 &= \lim_{t\to -1_-} \frac{\frac{3t^2}{t^3+1}}{\frac{3t}{t^3+1}} = \lim_{t\to -1_-} t = -1,\\
q_1 &= \lim_{t\to -1_-} \left(\frac{3t^2}{t^3+1} + \frac{3t}{t^3+1}\right) = \lim_{t\to -1_-} \frac{3t^2+3t}{t^3+1} = \lim_{t\to -1_-} \frac{6t+3}{3t^2} = -1,\\
k_2 &= \lim_{t\to -1_+} \frac{\frac{3t^2}{t^3+1}}{\frac{3t}{t^3+1}} = \lim_{t\to -1_+} t = -1,\\
q_2 &= \lim_{t\to -1_+} \left(\frac{3t^2}{t^3+1} + \frac{3t}{t^3+1}\right) = \lim_{t\to -1_+} \frac{3t^2+3t}{t^3+1} = \lim_{t\to -1_+} \frac{6t+3}{3t^2} = -1.
\end{aligned}$$

Krivka má *asymptotu so smernicou* v „$-\infty$" aj v „∞" s rovnicou $y = -x - 1$.



Obr. 2.68. Krivka (Descartov list) a jej asymptota

□

2.8 Cvičenia

Cvičenie 2.1 Zistite definičné obory funkcií f_i a zistite, či sú prosté. Ak sú prosté, nájdite f_i^{-1} a ich definičné obory.

$f_1(x) = \frac{x+3}{2x-5}$, $f_2(x) = \frac{x^3-3}{2+x^3}$, $f_3(x) = \frac{\ln(3x)}{\ln(x^3)}$, $f_4(x) = 2^{\frac{2}{x+5}}$, $f_5(x) = 2^{\operatorname{arctg} x}$,
$f_6(x) = \log \frac{1}{x+5}$, $f_7(x) = e^{\frac{2x}{x+2}}$, $f_8(x) = \ln\left(\frac{2x}{3-x}\right)$, $f_9(x) = \frac{1+e^x}{2+3e^x}$, $f_{10}(x) = \ln(e^x)$.

Cvičenie 2.2 Načrtnite grafy funkcií g_i a zistite ich definičné obory.

$g_1(x) = 2 + \cos(3x)$, $g_2(x) = \sin(\arcsin x)$, $g_3(x) = 2\arcsin(x-1) + \pi$,
$g_4(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$, $g_5(x) = \sin(x+\pi)$, $g_6(x) = 2 - 3^{x+1}$,
$g_7(x) = 2\cos(x-\pi)$, $g_8(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$, $g_9(x) = \frac{2x-1}{x+4}$,
$g_{10}(x) = \log_3\left(\frac{1}{x+5}\right)$.

Cvičenie 2.3 Overte rovnosť funkcií

(a) $(\sin(\arcsin x),\ \arcsin(\sin x),\ x)$, **(b)** $\left(|x|,\ \sqrt{x^2},\ (\sqrt{x})^2\right)$,
(c) $\left(-\sin x,\ \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$, **(d)** $(-\ln x,\ \log_{\frac{1}{e}} x)$.

Cvičenie 2.4 Vypočítajte nasledujúce limity

(a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-6x+9}{x-3}$, **(b)** $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2x^3-3x-10}{x^2-4}$, **(c)** $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^4-3x^2-3x+4}{x-1}$,
(d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}{x}$, **(e)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x-5} - x\right)$, **(f)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x-5}}{5x-10}$,
(g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^4-x^3+x+5}{3x^4-x^2}$, **(h)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3-x}{x^5+1}$, **(i)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-x}{x^3}$,
(j) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x-5}{x^2-10x+25}$, **(k)** $\lim\limits_{x\to 0_+} \frac{x-5}{x^2-5x}$, **(l)** $\lim\limits_{x\to 0_-} \frac{x-5}{x^2-5x}$,
(m) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-3x+5}{x-10} - x\right)$, **(n)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{\sqrt{x^4-3x^3+5}}{x-1} - x\right)$, **(o)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{\sqrt{x^4-3x^3+5}}{x-1} - x\right)$
(p) $\lim\limits_{x\to 5_+} \frac{x+10}{x-5}$, **(q)** $\lim\limits_{x\to 0_+} \frac{|x-4|}{x}$, **(r)** $\lim\limits_{x\to 0_-} \frac{|x-4|}{x^3}$.

Cvičenie 2.5 Pomocou základných pravidiel zderivujte funkcie:

$f_1(x) = \sqrt{x^3}$ $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $f_3(x) = \cos x \cdot \operatorname{tg} x$
$f_4(x) = (x^2+x)^2$ $f_5(x) = \ln(3x)$ $f_6(x) = \frac{e^x}{\sqrt[3]{x}}$
$f_7(x) = 4^x + x^4$ $f_8(x) = \log_3 x^2$ $f_9(x) = \sin(2x)$
$f_{10}(x) = \cosh x + \cos x$ $f_{11}(x) = x^2 \cdot e^x$ $f_{12}(x) = x \cdot e^{2x}$
$f_{13}(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x$ $f_{14}(x) = \frac{\arcsin x}{\arccos x}$ $f_{15}(x) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arccotg} x$

Cvičenie 2.6 Vypočítajte derivácie zložených funkcií:

$$
\begin{array}{lll}
g_1(x) = e^{x^2} & g_2(x) = (e^x)^2 & g_3(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \\
g_4(x) = \sqrt{x^3 \sqrt[3]{x\sqrt{x^5}}} & g_5(x) = \arcsin(\sin x) & g_6(x) = e^{\ln x} \\
g_7(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) & g_8(x) = x^2 \sin 5x & g_9(x) = \ln^2 x \\
g_{10}(x) = \ln x^2 & g_{11}(x) = \ln(\ln(\ln x)) & g_{12}(x) = \sin x^2 \\
g_{13}(x) = \sin^2 x & g_{14}(x) = \ln(9 - x^2) & g_{15}(x) = \ln \frac{x+3}{3-x} \\
g_{16}(x) = \sqrt{1 + x^2} & g_{17}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} & g_{18}(x) = \sqrt{\frac{x+1}{1-x}} \\
g_{19}(x) = \ln \cos x & g_{20}(x) = \arccos^3(5x) & g_{21}(x) = \operatorname{arctg}(2x)
\end{array}
$$

Cvičenie 2.7 Odvoďte vzorec pre $\operatorname{cotgh}' x$ ($\operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$).

Cvičenie 2.8 Ukážte, že $\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)' = 0$.

Cvičenie 2.9 Pomocou logaritmického derivovania vypočítajte deivácie:

$$
\begin{array}{lll}
h_1(x) = x^{1-x} & h_2(x) = x^{\sin x} & h_3(x) = x^{\frac{1}{\ln x}} \\
h_4(x) = (\sin x)^{\cos x} & h_5(x) = x^{\arcsin x} & h_6(x) = x^{x^2} \\
h_7(x) = x^{e^x} & h_8(x) = (x^2 + 3)^{2x} & h_9(x) = \left(\frac{2}{x}\right)^x
\end{array}
$$

Cvičenie 2.10 Vypočítajte derivácie:

$$
\begin{array}{lll}
s_1(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) & s_2(x) = 3 \sin x + \sin 3x & s_3(x) = x \cdot e^{x^2} \\
s_4(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + 2 \operatorname{arctg} x & s_5(x) = e^{5x} + e^{x^5} & s_6(x) = \ln(\sin x) \\
s_7(x) = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x & s_8(x) = \frac{1}{\ln(x+5)} & s_9(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} \\
s_{10}(x) = \ln^4 x & s_{11}(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1} & s_{12}(x) = e^{\frac{x}{\ln x}} \\
s_{13}(x) = \ln(\operatorname{arccotg} x) & s_{14}(x) = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) & s_{15}(x) = \sqrt{\ln x^2} \\
s_{16}(x) = (\ln x)^x & s_{17}(x) = \operatorname{tg}(\arccos x) & s_{18}(x) = \frac{x}{\operatorname{tg} e^x} \\
s_{19}(x) = \operatorname{arctg}^3 \sqrt{x} & s_{20}(x) = \arccos 4x - 57 & s_{21}(x) = e^{\sin x}
\end{array}
$$

Cvičenie 2.11 Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie f v dotykovom bode T:

$$
\begin{array}{ll}
f_1(x) = \sqrt{x}, \quad T = (5, ?); & f_2(x) = \ln(x + 1), \quad T = (0, ?) \\
f_3(x) = e^{-x} \cos x, \quad T = (0, ?); & f_4(x) = \frac{2x-5}{3x-4}, \quad T = (1, ?) \\
f_5(x) = \ln(\sin x), \quad T = \left(\frac{\pi}{2}, ?\right); & f_6(x) = \operatorname{tg} x, \quad T = (0, ?) \\
f_7(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x+6}}, \quad T = (3, ?); & f_8(x) = \frac{12}{x}, \quad T = (3, ?)
\end{array}
$$

Cvičenie 2.12 Nájdite dotyčnicu a normálu ku grafu funkcie f, v bode, kde je dotyčnica rovnobežná s priamkou p:

$$\begin{array}{lll}
f_1(x) = \frac{x+1}{x+6}, & p: \; y = 5x & \\
f_2(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 3, & p: \; y = x + 5 & \\
f_3(x) = x^2 - 2x + 5, & p: \; 3x - y + 2 = 0 & \\
f_4(x) = \ln x, & p: \; 2x - y + 1 = 0 & \\
f_5(x) = 2 \operatorname{tg}(x), & p: \; 2x - y + 1 = 0 & (x \in [0, \pi/2]) \\
f_6(x) = e^x, & p: \; y = x + 3 &
\end{array}$$

Cvičenie 2.13 Nájdite dotyčnicu a normálu ku grafu funkcie f, v bode, kde je normála rovnobežná s priamkou p:

$$\begin{array}{ll}
f_1(x) = x \ln x, & p: \; 3x - 3y + 1 = 0 \\
f_2(x) = x^2 + 3x - 1, & p: \; y = -\frac{1}{2}x + 3 \\
f_3(x) = \frac{x+1}{x-1}, & p: \; y = 2x
\end{array}$$

Cvičenie 2.14 Nájdite rovnicu dotyčnice k funkcii f, ktorá je rovnobežná s osou x:

$$\begin{array}{lll}
f_1(x) = e^{-x^2}, & f_2(x) = \frac{\ln x}{x}, & f_3(x) = x - \operatorname{arctg}(2x) \\
f_4(x) = x \cdot \ln x, & f_5(x) = x^3 - 3x, & f_6(x) = x \cdot e^{-x^2}
\end{array}$$

Cvičenie 2.15 V nasledujúcich funkciách zistite ich definičné obory, intervaly monotónnosti, lokálne extrémy, intervaly konvexnosti a konkávnosti a inflexné body.

$$\begin{array}{lll}
f_1(x) = \ln \frac{x+1}{1-x} & f_2(x) = e^{-2x^2} & f_3(x) = x \cdot e^{-3x^2} \\
f_4(x) = e^{\frac{1}{x}} & f_5(x) = \ln(9 - x^2) & f_6(x) = \arccos(\cos x), \; x \in [0, 2\pi] \\
f_7(x) = \ln(x^2 + 4x + 5) & f_8(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) & f_9(x) = x \cdot \ln x \\
f_{10}(x) = \frac{\ln x}{x} & f_{11}(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}} & f_{12}(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \\
f_{13}(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x & f_{14}(x) = x - 4 \operatorname{arctg} x & f_{15}(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) \\
f_{16}(x) = \arcsin \frac{1+x}{1-x} & f_{17}(x) = \arcsin \frac{1}{x} & f_{18}(x) = \ln(\sin x)
\end{array}$$

Cvičenie 2.16 Kartón tvaru obdĺžnika má rozmery 60 cm × 28 cm. Z rohov vystrihneme štvorce a zo zvyšku spravíme krabicu. Aká veľká musí byť strana vystrihnutých štvorcov, aby bol objem krabice maximálny?

Cvičenie 2.17 Drôt o dĺžke 10 cm treba rozdeliť na dve časti. Prvú zahneme do štvorca a druhú do kruhu. Na ktorom mieste treba spraviť rez, aby súčet obsahov štvorca a kruhu bol najmenší?

Cvičenie 2.18 Z guľatiny guľového prierezu priemeru d treba vyrezať trám s obdĺžnikovým prierezom, ktorého výška je h a šírka b. Aké musia byť rozmery trámu, aby jeho pevnosť v ohybe bola najväčšia? (Pevnosť v ohybe je úmerná odporovému momentu prierezu trámu $W = \frac{1}{6}bh^2$).

Cvičenie 2.19 Do kružnice s polomerom r vpíšte rovnoramenný trojuholník najväčšieho obsahu. Aké má mať rozmery?

Cvičenie 2.20 Do gule s polomerom r vpíšte rotačný kužeľ, ktorý má najväčší objem.

Cvičenie 2.21 Do rotačného kužeľa s polomerom r vpíšte valec, ktorý má najväčší objem. Aký musí byť polomer vpísaného valca?

Cvičenie 2.22 Na parabole $y = 4x - x^2$ nájdite bod, ktorý je najbližšie k bodu $A = (-2, 4)$.

Cvičenie 2.23 Kruhový valec má objem $V = 54\pi$. Aké musia byť jeho rozmery, aby mal najmenší povrch?

Cvičenie 2.24 Muž v loďke je vzdialený 3 km od pobrežia v bode C. Chce sa dostať do miesta A na pobreží, ktoré je od neho vzdialené 5 km. Vie veslovať rýchlosťou 3 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ a kráčať rýchlosťou 6 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Zistite, kde sa musí vylodiť, aby sa do miesta A dostal v najkratšom čase.

Cvičenie 2.25 Loď, plaviaca sa rovnomerne rýchlosťou v (v $\frac{\text{km}}{\text{h}}$), spotrebuje za hodinu $0,3 + 0,0002v^3$ nafty (v m^3). Akou rýchlosťou sa má plaviť, aby na danej dráhe s spotrebovala čo najmenej nafty?

Cvičenie 2.26 Odhadnite hodnotu $\ln(1,1)$ pomocou Taylorovho rozvoja funkcie ln pre $x_0 = 1$ s chybou $\varepsilon \leq 0,001$. Aký najmenší stupeň polynómu treba voliť?

Cvičenie 2.27 Odhadnite hodnotu $\operatorname{arctg}(0,2)$ pomocou $T_4(\operatorname{arctg}, 0, x)$. Aký je odhad chyby?

Cvičenie 2.28 Určte $T_4\left(\sin 3x, \frac{\pi}{2}, x\right)$, $T_3\left(\operatorname{tg} 2x, 0, x\right)$, $T_4(e^{2x}, 0, x)$, $T_4(\sinh, 0, x)$, $T_5(\ln(x+3), -2, x)$.

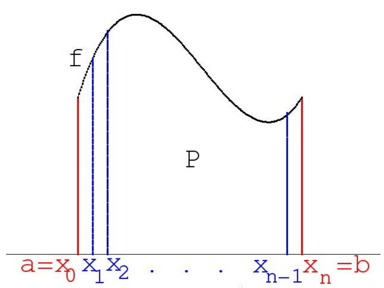
Cvičenie 2.29 V nasledujúcich funkciách zistite ich definičné obory a asymptoty.

$$
\begin{array}{lll}
f_1(x) = \frac{x+3}{1-x} & f_2(x) = \frac{x^3}{x^2-1} & f_3(x) = \frac{\ln x}{x} \\
f_4(x) = \ln(9-x^2) & f_5(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & f_6(x) = \arcsin \frac{1+x}{1-x} \\
f_7(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}} & f_8(x) = x \cdot \ln x & f_9(x) = x e^{\frac{1}{x}}.
\end{array}
$$

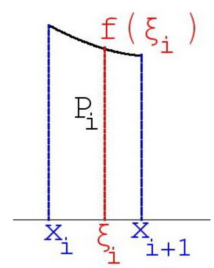
Kapitola 3

Integrály

Na intervale $[a, b]$ máme danú spojitú funkciu f (pre jednoduchosť budeme uvažovať len spojité funkcie). Predpokladáme, že pre všetky $x \in [a, b]$ je $f(x) \geq 0$. Našou úlohou je vypočítať obsah oblasti P, ktorá je zhora ohraničená funkciou f, zdola osou o_x, zľava priamkou $x = a$ a sprava priamkou $x = b$ (pozri obr. 3.1).



Obr. 3.1. Vertikálne delenie oblasti P



Obr. 3.2. Jeden dielik oblasti P

Oblasť P rozdelíme vertikálne na n častí. Jeden dielik je znázornený na obrázku 3.2. Označme F takú funkciu, že $F'(x) = f(x)$. Potom Podľa Lagrangeovej vety o strednej hodnote pre každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ existuje také $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, pre ktoré je

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Označme $\Delta_i = (x_i - x_{i-1})$. Keď hodnoty $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ volíme tak, že vzdialenosť Δ_i je „dostatočne malá", tak pre obsah oblasti P_i dostaneme

$$P_i \doteq f(\xi_i) \cdot \Delta_i = F(x_i) - F(x_{i-1}).$$

Z toho

$$P \cdot \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) = \Delta_i \doteq \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})) = F(b) - F(a) \tag{3.1}$$

Presnú hodnotu P dostaneme ako limitu súčtu $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta_i$ pre $n \to \infty$, keď hodnoty x_i budeme voliť tak, aby platilo $\Delta_i \to 0$. Namiesto Δ_i píšeme dx (ide o 1. diferenciál premennej x, teda funkcie $g(x) = x$) a namiesto znaku $\sum\limits_{i=1}^{n}$ používame označenie $\int\limits_a^b$. Limitný vzťah potom zapisujeme v tvare

$$P = \int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{3.2}$$

a voláme ho *Newtonova-Leibnitzova formula.*

Z uvedeného príkladu vidno, že dôležitú úlohu budú hrať funkcie F, ktorých derivácie poznáme.

3.1 Neurčité integrály

3.1.1 Základné vzťahy

Definícia 3.1 *Majme na intervale (a, b) danú funkciu f. Predpokladajme, že existuje funkcia F, ktorá je hladká na intervale (a, b) a pre každé $x \in (a, b)$ platí $F'(x) = f(x)$. Potom funkciu F nazveme primitívnou k f alebo neurčitým integrálom z f na intervale (a, b) a označujeme*

$$F(x) = \int f(x)\,dx.$$

Bezprostredne z lemy 2.12 a dôsledku 2.3 dostaneme nasledujúcu lemu.

Lema 3.1
(a) *Nech f a g sú ľubovoľné funkcie, ku ktorým existujú príslušné primitívne funkcie F a G a nech $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sú ľubovoľné konštanty. Potom platí*

$$\int (c_1 f(x) + c_2 g(x))dx = c_1 F(x) + c_2 G(x). \tag{3.3}$$

(b) *Nech f je ľubovoľná funkcia a nech k nej existujú dve primitívne funkcie, F_1 a F_2 na intervale (a, b). Potom existuje konštanta $c \in \mathbb{R}$ tak, že platí*

$$F_1(x) = F_2(x) + c. \tag{3.4}$$

Ako špeciálny prípad vzťahu (3.3) dostaneme

$$\int c \cdot f(x)\,dx = c \int f(x)\,dx. \tag{3.5}$$

Primitívne funkcie (na rozdiel od derivácií) nie sú dané jednoznačne. Napriek tomu, ako ukazuje vzťah (3.4), stačí nám ku každej funkcii f nájsť jednu z nich a ľubovoľnú ďalšiu primitívnu funkciu získame pričítaním vhodnej konštanty c. Poznamenajme ešte, že primitívna funkcia je spojitá.

Uvedieme tabuľku integrálov niektorých funkcií. Väčšinu zo vzorcov, uvedených v tejto tabuľke, dostaneme z tabuľky 2.1. Vzorce platia pre x z definičného oboru príslušnej funkcie f.

Tabuľka 3.1. Integrály niektorých funkcií

f	$\int f\,dx$	f	$\int f\,dx$	f	$\int f\,dx$
0	c	e^x	e^x	$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|$
$x^n,\ n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$a^x,\ a > 0$	$\frac{a^x}{\ln a}$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln\|f(x)\|$
$\sin x$	$-\cos x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\begin{cases} \arcsin x \\ -\arccos x \end{cases}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\begin{cases} \operatorname{arctg} x \\ -\operatorname{arccotg} x \end{cases}$
$\cos x$	$\sin x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$		
$\sinh x$	$\cosh x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$		
$\cosh x$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{cotg} x$		

Príklad 3.1 Vypočítajte $\int \operatorname{tg} x\,dx$.

Riešenie: V tabuľke 3.1 nie je priamo uvedené ako treba integrovať funkciu tg. Napriek tomu, odpoveď tam nájdeme. Môžeme písať

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx,$$

pri poslednej úprave sme použili vzťah (3.3). Teraz stačí využiť vzťah $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|$ z tabuľky 3.1 a dostaneme výsledok

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos(x)|. \qquad \square$$

Pozorný čitateľ si určite všimol, že v tabuľke integrálov nie sú uvedené integrály všetkých elementárnych funkcií. Ukážeme si základné metódy, pomocou ktorých budeme vedieť integrovať aj také elementárne funkcie, ktoré v tabuľke uvedené nie sú[1]. Existujú dve základné metódy na výpočet integrálov – *metóda per partes* a *substitučná metóda*. Samostatnú pozornosť budeme venovať racionálnym funkciám, ktoré budeme integrovať pomocou rozkladu týchto funkcií na parciálne zlomky.

[1]Existujú aj také elementárne funkcie, ku ktorým primitívnu funkciu nevieme vyjadriť v tvare nejakej elementárnej funkcie.

- *Metóda per partes* je založená na vzorci na deriváciu súčinu funkcií u a v. Integráciou oboch strán dostaneme

$$u(x)\cdot v(x) = \int (u(x)\cdot v(x))'\,dx = \int u(x)\cdot v'(x)\,dx + \int u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

a z toho

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx. \tag{3.6}$$

- *Substitučná metóda* má dve základné možnosti využitia, v oboch integrujeme zloženú funkciu $h(x) = f(g(x))$.

  - V prvom prípade integrujeme súčin $\int f(g(x))g'(x)\,dx$. Spravíme substitúciu $t = g(x)$ (to znamená, že premennú x sme nahradili premennou t), pričom platí $\frac{dt}{dx} = g'(x)$. Z toho si môžeme vyjadriť 1. diferenciál premennej t: $dt = g'(x)\,dx$. Úpravou dostaneme

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt. \tag{3.7}$$

    Keď nájdeme primitívnu funkciu k f, spravíme spätnú substitúciu (vrátime sa k premennej x).

  - V druhom prípade integrujeme $\int f(g(x))\,dx$. Budeme predpokladať, že existuje inverzná funkcia g^{-1}. Opäť spravíme substitúciu $t = g(x)$. Teraz vyjadríme $x = g^{-1}(t)$ a 1. diferenciál premennej x: $dx = \left(g^{-1}\right)'(t)\,dt$. Z toho vyplýva vzťah

$$\int f(g(x))\,dx = \int f(t)\left(g^{-1}\right)'(t)\,dt. \tag{3.8}$$

    Keď integrál na pravej strane vypočítame, spravíme spätnú substitúciu.

Ako špeciálny prípad vzorca (3.8) dostaneme (pre $a \neq 0$)

$$\underbrace{\int f(ax+b)\,dx}_{t=ax+b \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = \frac{t-b}{a} \\ dx = \frac{dt}{a} \end{cases}} = \int \frac{f(t)}{a}\,dt = \frac{1}{a}\int f(t)\,dt.$$

Ak $\int f(x)\,dx = F(x)$, tak dostaneme vzorec

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b). \tag{3.9}$$

Príklad 3.2 Odvoďte vzorce

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right), \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right), \tag{3.10}$$

kde $a > 0$.

Riešenie: Využitím vzťahu (3.7) dostaneme

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \underbrace{\int \frac{dx}{a^2\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}}_{t=\frac{x}{a},\ dt=\frac{dx}{a}} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \underbrace{\int \frac{dx}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}}_{t=\frac{x}{a},\ dt=\frac{dx}{a}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right).$$

□

Príklad 3.3 Vypočítajte $\int \cos^2 x\, dx$.

Riešenie: Zo vzorca pre $\cos 2x$ dostaneme $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$. Z toho, využitím vzťahu (3.9), dostaneme

$$\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2x}{2} = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}. \tag{3.11}$$

□

Príklad 3.4 Vypočítajte $\int \ln x\, dx$.

Riešenie: Integrál budeme počítať metódou per partes

$$\int \ln x\, dx = \underbrace{\int 1\cdot \ln x\, dx}_{\substack{u'=1, \quad u=x \\ v=\ln x, \quad v'=\frac{1}{x}}} = \underbrace{x\cdot\ln x - \int \overbrace{x\cdot\frac{1}{x}}^{=1}\, dx}_{\text{vzorec (3.6)}} = x\cdot\ln x - x.$$

Pomocou metódy per partes sme previedli integrál z $\ln x$ na integrál z funkcie $1 = x^0$, čo je funkcia z tabuľky 3.1. □

Príklad 3.5 Vypočítajte $\int \arcsin x\, dx$.

Riešenie: Budeme postupovať rovnako ako v príklade 3.4, teda v prvom kroku použijeme metódu per partes na súčin $1 \cdot \arcsin x$.

$$\begin{aligned}
\int \arcsin x\, dx &= \underbrace{\int 1 \cdot \arcsin x\, dx}_{\substack{u' = 1, \qquad u = x \\ v = \arcsin x, \quad v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}} = x \cdot \arcsin x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \\
&= x \cdot \arcsin x + \frac{1}{2} \underbrace{\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx}_{t=1-x^2 \;\Rightarrow\; dt=-2x\, dx} = x \cdot \arcsin x + \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \\
&= x \cdot \arcsin x + \sqrt{t} = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2}.
\end{aligned}$$

Integrál funkcie $\arcsin x$ sme pomocou per partes a substitúcie $t = 1 - x^2$ previedli na tabuľkový integrál funkcie $t^{-\frac{1}{2}}$. □

3.1.2 Integrovanie racionálnych funkcií

Najprv uvedieme vetu, ktorú budeme potrebovať pri integrovaní racionálnych funkcií.

Veta 3.1 *Nech Q_1 a Q_2 sú polynómy stupňa nanajvýš m. Označme*

$$Q_1(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, \qquad Q_2(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i.$$

Nasledujúce vlastnosti sú ekvivalentné:

- $Q_1(x) = Q_2(x)$,
- $a_i = b_i$ *pre* $i \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}$,
- $Q_1(x_i) = Q_2(x_i)$ *pre* $i \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}$, *kde* $\{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ *sú ľubovoľne zvolené reálne čísla také, že* $x_{i_1} \neq x_{i_2}$, *ak* $i_1 \neq i_2$.

Táto veta nám umožňuje overiť zhodu dvoch polynómov pomocou zhody koeficientov a_i a b_i, ale aj overením rovnosti $Q_1(x_i) = Q_2(x_i)$ pre $m+1$ rôznych čísel x_i.

Majme $R(x) = \frac{P_2(x)}{P_1(x)}$, kde P_1 a P_2 sú polynómy, ktorých stupne sú n_1 a n_2. Potom $\int R(x)\, dx$ počítame pomocou rozkladu funkcie R na parciálne zlomky.

Postup:

1. Ak je $n_2 \geq n_1$, vyjadríme podiel polynómov $P_2(x) : P_1(x) = P_3(x) + \frac{\tilde{P}_2(x)}{P_1(x)}$. P_3 je polynóm stupňa $n_2 - n_1$ a $\tilde{P}_2$ je polynóm menšieho stupňa ako n_1.

2. Racionálnu funkciu $\frac{\tilde{P}_2}{P_1}$ rozložíme na parciálne zlomky. Rozlíšime dva prípady (pozri dôsledok 2.1):

   - Polynóm P_1 má n_1 reálnych koreňov (vrátane násobnosti). Potom $P_1(x) = a_{n_1}\prod_{i=1}^{m}(x-x_i)^{k_i}$, kde x_i sú korene, $x_i \neq x_j$ pre $i \neq j$, k_i je násobnosť koreňa x_i a a_{n_1} je koeficient polynómu P_1 pri x^{n_1}. V tomto prípade rozložíme $\frac{\tilde{P}_2}{P_1}$ na súčet

$$\frac{\tilde{P}_2(x)}{P_1(x)} = \frac{1}{a_{n_1}}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{C_{i,j}}{(x-x_i)^j}. \tag{3.12}$$

   - Polynóm P_1 má menej ako n_1 reálnych koreňov (vrátane násobnosti). Potom existuje polynóm Q stupňa r, ktorý nemá žiadne reálne korene a platí

$$P_1(x) = a_{n_1}Q(x)\prod_{i=1}^{m}(x-x_i)^{k_i}.$$

   Potom polynóm Q vieme rozložiť do tvaru

$$Q(x) = \prod_{I=1}^{l}\prod_{J=1}^{r_i}\left((x-\delta_I)^2+\varepsilon_I^2\right)^J,$$

   kde δ_I a ε_I sú konštatnty. Racionálnu funkciu $\frac{\tilde{P}_2}{P_1}$ rozložíme do tvaru

$$\frac{\tilde{P}_2(x)}{P_1(x)} = \frac{1}{a_{n_1}}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{C_{i,j}}{(x-x_i)^j}+\sum_{I=1}^{l}\sum_{J=1}^{r_i}\frac{D_{I,J}x+E_{I,J}}{\left((x-\delta_I)^2+\varepsilon_I^2\right)^J}\right), \tag{3.13}$$

   kde $D_{I,J}$, $E_{I,J}$ sú konštatnty.

Odvodíme vzorec pre $\int \frac{cx+d}{(x-a)^2+b^2}\,dx$:

$$\int \frac{cx+d}{(x-a)^2+b^2}\,dx = \frac{c}{2}\underbrace{\int\frac{2(x-a)}{(x-a)^2+b^2}\,dx}_{\text{vzorec } \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx}+\underbrace{\int\frac{ac+d}{(x-a)^2+b^2}\,dx}_{\text{vzorec (3.10)}}.$$

Z toho dostaneme

$$\int \frac{cx+d}{(x-a)^2+b^2}\,dx = \frac{c}{2}\ln\left((x-a)^2+b^2\right)+\frac{ac+d}{b}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-a}{b}\right). \tag{3.14}$$

Pre úplnosť uvedieme aj vzorec pre $\int \frac{cx+d}{((x-a)^2+b^2)^m}\,dx$, kde $m>1$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{cx+d}{((x-a)^2+b)^m}\,dx &= \frac{c}{2}\underbrace{\int \frac{2(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^m}\,dx}_{\text{subst.}\left\{\begin{array}{l} t=(x-a)^2+b^2 \\ dt=2(x-a)\,dx\end{array}\right.} + \int \frac{ac+d}{((x-a)^2+b^2)^m}\,dx = \\
&= -\frac{c}{2(m-1)\left((x-a)^2+b^2\right)^{m-1}} + \\
&+ \int \frac{ac+d}{((x-a)^2+b^2)^m}\,dx, \qquad (3.15)\\
\int \frac{1}{((x-a)^2+b^2)^m}\,dx &= \frac{x-a}{2(m-1)b^2}\frac{1}{((x-a)^2+b^2)^{m-1}} + \\
&+ \frac{2m-3}{2(m-1)b^2}\int \frac{1}{((x-a)^2+b^2)^{m-1}}\,dx. \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

Príklad 3.6 Vypočítajte $\int \frac{6x^2-2x-2}{x^3-x}\,dx$.

Riešenie: $P_1(x)=x^3-x=x(x-1)(x+1)$, teda existujú tri rôzne korene $-1,0,1$. Funkcia $R(x)=\frac{6x^2-2x-2}{x^3-x}$ sa dá rozložiť do tvaru

$$R(x)=\frac{C_1}{x+1}+\frac{C_2}{x}+\frac{C_3}{x-1}.$$

Koeficienty C_1, C_2, C_3 určíme tak, že parciálne zlomky sčítame a čitateľ súčtu sa musí zhodovať s čitateľom funkcie R:

$$\frac{C_1}{x+1}+\frac{C_2}{x}+\frac{C_3}{x-1}=\frac{C_1x(x-1)+C_2(x+1)(x-1)+C_3x(x+1)}{(x+1)x(x-1)},$$

z toho

$$C_1x(x-1)+C_2(x+1)(x-1)+C_3x(x+1)=6x^2-2x-2. \qquad (3.17)$$

Porovnávame polynómy druhého stupňa. Stačí, keď dosadíme 3 rôzne hodnoty za x do rovnice (3.17). Dosadíme korene polynómu P_1:

$$\left.\begin{array}{ll} x=-1: & 2C_1=6+2-2 \\ x=0: & -C_2=-2 \\ x=1: & 2C_3=6-2-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} C_1=3 \\ C_2=2 \\ C_3=1. \end{array}$$

Teraz máme všetko pripravené na výpočet $\int R(x)\,dx$:

$$\int \frac{6x^2-2x-2}{x^3-x}\,dx=\int \frac{3}{x+1}\,dx+\int \frac{2}{x}\,dx+\int \frac{1}{x-1}\,dx=3\ln|x+1|+2\ln|x|+\ln|x-1|.$$

□

Príklad 3.7 Vypočítajte $\int \frac{-2x^3+6x+23}{(x-1)^2(x+2)^3}\,dx$.

Riešenie: Polynóm $P_1(x) = (x-1)^2(x+2)^3$ má korene $x_1 = 1$ a $x_2 = -2$, pričom x_1 je dvojnásobný koreň a x_2 je trojnásobný. V tomto prípade môžeme funkciu $R(x) = \frac{-2x^3+6x+23}{(x-1)^2(x+2)^3}$ rozložiť do tvaru:

$$R(x) = \frac{C_{1,1}}{x-1} + \frac{C_{1,2}}{(x-1)^2} + \frac{C_{2,1}}{x+2} + \frac{C_{2,2}}{(x+2)^2} + \frac{C_{2,3}}{(x+2)^3}. \tag{3.18}$$

Parciálne zlomky sčítame a čitateľ súčtu porovnáme s čitateľom funkcie R.

$$\begin{aligned} -2x^3+6x+23 &= C_{1,1}(x-1)(x+2)^3 + C_{1,2}(x+2)^3 + C_{2,1}(x-1)^2(x+2)^2 + \\ &+ C_{2,2}(x-1)^2(x+2) + C_{2,3}(x-1)^2. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Máme 5 neznámych koeficientov, teda potrebujeme 5 rovníc. Podobne ako v príklade 3.6, aj teraz využijeme korene x_1, x_2. Okrem nich dosadíme ešte tri ďalšie hodnoty za x (volíme ich ľubovoľne, v našom prípade sme zvolili hodnoty 0, -1, 2):

$$\left.\begin{aligned} x=1:&\quad -2+6+23 = 27C_{1,2} \\ x=-2:&\quad 16-12+23 = 9C_{2,3} \\ x=0:&\quad 23 = -8C_{1,1}+8C_{1,2}+4C_{2,1}+2C_{2,2}+C_{2,3} \\ x=-1:&\quad 2-6+23 = -2C_{1,1}+C_{1,2}+4C2,1+4C_{2,2}+4C_{2,3} \\ x=2:&\quad -16+12+23 = 64C_{1,1}+64C_{1,2}+16C_{2,1}+4C_{2,2}+C_{2,3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} C_{1,2}=1 \\ C_{2,3}=3 \end{array}$$

Dva koeficienty poznáme, keď ich využijeme, dostaneme sústavu rovníc

$$\left.\begin{aligned} -8C_{1,1}+8+4C_{2,1}+2C_{2,2}+3 &= 23 \\ -2C_{1,1}+1+4C2,1+4C_{2,2}+12 &= 19 \\ 64C_{1,1}+64+16C_{2,1}+4C_{2,2}+3 &= 19 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} -8C_{1,1}+4C_{2,1}+2C_{2,2} &= 12, \\ -2C_{1,1}+4C2,1+4C_{2,2} &= 6, \\ 64C_{1,1}+16C_{2,1}+4C_{2,2} &= -48. \end{aligned}$$

Podrobný výpočet sústavy rovníc necháme na čitateľa. Výsledok je $C_{1,1} = -1$, $C_{2,1} = 1$, $C_{2,2} = 0$. Koeficienty dosadíme do (3.18) a zintegrujeme:

$$\begin{aligned} \int \frac{-2x^3+6x+23}{(x-1)^2(x+2)^3}\,dx &= \int \frac{-1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{1}{x+2}\,dx + \int \frac{3}{(x+2)^3}\,dx = \\ &= -\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \ln|x+2| - \frac{3}{2}\frac{1}{(x+2)^2}. \end{aligned}$$

□

Príklad 3.8 Vypočítajte $\int \frac{x^4-x^3+2x^2-21x}{(x^2+2x+5)(x-2)}\,dx$.

Riešenie: V čitateli je polynóm 4. stupňa, v menovateli 3. stupňa. Najprv potrebujeme vydeliť čitateľ menovateľom:

$$\begin{aligned} (x^2+2x+5)(x-2) &= x^3+x-10, \\ (x^4-x^3+2x^2-21x) : (x^3+x-10) &= x-1+\frac{x^2-10x-10}{x^3+x-10}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Racionálnu funkciu $\tilde{R}(x) = \frac{x^2-10x-10}{x^3+x-10} = \frac{x^2-10x-10}{(x^2+2x+5)(x-2)}$ potrebujeme rozložiť na parciálne zlomky. Kvadratická funkcia $K(x) = x^2 + 2x + 5$ nemá reálne korene, to znamená, že rozklad budeme hľadať v tvare

$$\tilde{R}(x) = \frac{C}{x-2} + \frac{Dx+E}{x^2+2x+5}. \tag{3.21}$$

Z toho dostaneme rovnicu

$$x^2 - 10x - 10 = C(x^2 + 2x + 5) + D(x^2 - 2x) + E(x - 2).$$

Z tejto rovnice určíme hodnoty C, D, E porovnaním koeficientov polynómov z pravej a ľavej strany. Dostaneme sústavu rovníc

$$\left.\begin{array}{lrcrcrcr} x^2: & C & + & D & & & = & 1 \\ x^1: & 2C & - & 2D & + & E & = & -10 \\ x^0: & 5C & & & - & 2E & = & -10 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} C = -2 \\ D = 3 \\ E = 0 \end{array}$$

Výsledok dosadíme do (3.21). Po dosadení z (3.20) dostaneme

$$\int \frac{x^4 - x^3 + 2x^2 - 21x}{(x^2+2x+5)(x-2)}\,dx = \int (x-1)\,dx - 2\int \frac{1}{x-2}\,dx + 3\int \frac{x}{x^2+2x+5}\,dx.$$

Zo vzťahu (3.14) dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2+2x+5}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^2+2^2}\,dx = \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right). \end{aligned}$$

Výsledok:

$$\int \frac{x^4 - x^3 + 2x^2 - 21x}{(x^2+2x+5)(x-2)}\,dx = \frac{x^2}{2} - x - 2\ln|x-2| + \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

□

3.1.3 Metóda per partes

V tejto časti si ukážme, ako môžeme niektoré typy funkcií integrovať metódou per partes. P_n bude označovať polynóm n-tého stupňa.

Prvá skupina integrálov typu $\int P_n(x) \cdot f(x)\,dx$

Funkcia f je cyklometrická funkcia, prípadne logaritmus. Teda f patrí do skupiny funkcií, ktorá sa po zderivovaní mení na racionálnu funkciu, prípadne na výraz s odmocninou (arcsin, arccos). V tomto prípade je vhodné polynóm integrovať a funkciu f derivovať.

Príklad 3.9 Vypočítajte $\int x \cdot \operatorname{arctg}(3x)\,dx$

Riešenie:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\int x \cdot \operatorname{arctg} x\,dx}_{\substack{u' = x, \quad u = \frac{x^2}{2} \\ v = \operatorname{arctg} x, \quad v' = \frac{1}{1+x^2}}} &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \\
&= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}\,dx = \\
&= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \frac{1}{1+(x)^2}\,dx\right) = \\
&= \frac{1}{2}(x^2 \operatorname{arctg} x - x + \operatorname{arctg} x).
\end{aligned}$$

□

Príklad 3.10 Vypočítajte $\int x^2 \cdot \ln 5x\,dx$

Riešenie:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\int x^2 \cdot \ln 5x\,dx}_{\substack{u' = x^2, \quad u = \frac{x^3}{3} \\ v = \ln 5x, \quad v' = \frac{1}{x}}} &= \frac{x^3}{3}\ln 5x - \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^3}{3}\ln 5x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx = \\
&= \frac{x^3}{3}\ln 5x - \frac{x^3}{9}.
\end{aligned}$$

□

Príklad 3.11 Vypočítajte $\int x \cdot \arcsin 3x\,dx$ a $\int x^2 \cdot \arcsin 3x\,dx$.

Riešenie:

$$\underbrace{\int x \cdot \arcsin 3x\,dx}_{\substack{u' = x, \quad u = \frac{x^2}{2} \\ v = \arcsin 3x, \quad v' = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}}} = \frac{x^2}{2}\arcsin 3x - \int \frac{x^2}{2}\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx, \tag{3.22}$$

$$\underbrace{\int x^2 \cdot \arcsin 3x\,dx}_{\substack{u' = x^2, \quad u = \frac{x^3}{3} \\ v = \arcsin 3x, \quad v' = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}}} = \frac{x^3}{3}\arcsin 3x - \int \frac{x^3}{3}\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx. \tag{3.23}$$

V oboch prípadoch sme sa pomocou metódy per partes „zbavili" funckie arcsin. Oba integrály treba ďalej riešiť vhodnou substitúciou. K tejto úlohe sa vrátime v časti venovanej substitúciám. □

Druhá skupina integrálov typu $\int P_n(x) \cdot f(x)\, dx$

Funkcia $f \in \{a^x,\ \sin,\ \cos,\ \sinh,\ \cosh\}$. V tomto prípade patrí f do skupiny funkcií, ktorých derivácia aj integrál sa, až na multiplikatívnu konštantu, zhodujú. V takomto prípade budeme derivovať polynóm P_n a integrovať funkciu f. Stupeň polynómu deriváciou znížime o 1. Po n-násobnej aplikácii metódy per partes dostaneme integrál tabuľkovej funkcie.

Príklad 3.12 Vypočítajte $\int x^2 \cdot 5^x\, dx$.

Riešenie:

$$
\begin{aligned}
\underbrace{\int x^2 \cdot 5^x\, dx}_{\substack{u = x^2, \quad u' = 2x \\ v' = 5^x, \quad v = \frac{5^x}{\ln 5}}} &= x^2 \frac{5^x}{\ln 5} - \int 2x \frac{5^x}{\ln 5}\, dx = x^2 \frac{5^x}{\ln 5} - \underbrace{\frac{2}{\ln 5} \int x 5^x\, dx}_{\substack{u = x, \quad u' = 1 \\ v' = 5^x, \quad v = \frac{5^x}{\ln 5}}} = \\
&= x^2 \frac{5^x}{\ln 5} - \frac{2}{\ln 5} \left(x \frac{5^x}{\ln 5} - \int \frac{5^x}{\ln 5}\, dx \right) = \\
&= x^2 \frac{5^x}{\ln 5} - 2x \frac{5^x}{\ln^2 5} + 2 \frac{\cdot 5^x}{\ln^3 5}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Príklad 3.13 Vypočítajte $\int (x+2) \cos 5x\, dx$.

Riešenie:

$$
\begin{aligned}
\underbrace{\int (x+2) \cos 5x\, dx}_{\substack{u = x + 2, \quad u' = 1 \\ v' = \cos 5x, \quad v = \frac{1}{5} \sin 5x}} &= (x+2) \frac{1}{5} \sin 5x - \int \frac{1}{5} \sin 5x\, dx = \\
&= \frac{(x+2)}{5} \sin 5x + \frac{1}{25} \cos 5x. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Integrály počítané ako rovnice

Tento postup si ukážeme na modelovom prípade, keď dvojnásobné použitie metódy per partes vedie k rovnici, v ktorej neznámou je počítaný integrál.

Potrebujeme integrovať súčin $\int f(x) \cdot g(x)\, dx$, pričom pre funkcie f, g platí, že ich druhé derivácie aj dva razy integrované funkcie f a g dajú opäť funkcie f a g, prenásobené multiplikatívnou konštantou. Použijeme dvakrát per partes a dostaneme rovnicu, z ktorej daný integrál vypočítame. Formálne sa tento postup dá vyjadriť nasledujúco (označíme $G(x) = \int g(x)\,dx$):

$$\underbrace{\int f(x)\cdot g(x)\,dx}_{\substack{u=f(x),\quad u'=f'(x)\\ v'=g(x),\quad v=G(x)}} = f(x)G(x) - \underbrace{\int f'(x)G(x)\,dx}_{\substack{u=f'(x),\quad u'=f''(x)=c_1f(x)\\ v'=G(x),\quad v=\int G(x)\,dx=c_2g(x)}} = $$

$$= f(x)G(x) - f'(x)c_2g(x) + c_1c_2\int f(x)g(x)\,dx. \tag{3.24}$$

Z rovnice (3.24) vyjadríme náš integrál:

$$\int f(x)g(x)\,dx = \frac{1}{1-c_1c_2}\left(f(x)G(x) - c_2f'(x)g(x)\right). \tag{3.25}$$

Príklad 3.14 Vypočítajte $\int e^x \cos 7x\,dx$.

Riešenie:

$$\underbrace{\int e^x\cos 7x\,dx}_{\substack{u=e^x,\qquad u'=e^x\\ v'=\cos 7x,\quad v=\frac{1}{7}\sin 7x}} = e^x\frac{1}{7}\sin 7x - \underbrace{\frac{1}{7}\int e^x\sin 7x\,dx}_{\substack{u=e^x,\qquad u'=e^x\\ v'=\sin 7x,\quad v=-\frac{1}{7}\cos 7x}} =$$

$$= \frac{1}{7}e^x\sin 7x - \frac{1}{7}\left(-e^x\frac{1}{7}\cos 7x + \frac{1}{7}\int e^x\cos 7x\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{7}e^x\sin 7x + \frac{1}{49}e^x\cos 7x - \frac{1}{49}\int e^x\cos 7x\,dx.$$

Po úprave dostaneme rovnicu

$$\int e^x\cos 7x\,dx = \frac{1}{49}\left(7e^x\sin 7x + e^x\cos 7x\right) - \frac{1}{49}\int e^x\cos 7x\,dx$$

a z nej vyjadríme neznámy integrál

$$\left(1+\frac{1}{49}\right)\int e^x\cos 7x\,dx = \frac{1}{49}\left(7e^x\sin 7x + e^x\cos 7x\right).$$

Z toho výsledný vzťah je

$$\int e^x\cos 7x\,dx = \frac{1}{50}\left(7e^x\sin 7x + e^x\cos 7x\right). \qquad \square$$

Príklad 3.15 Vypočítajte $\int \sin 3x\cos 5x\,dx$.

Riešenie:

$$\underbrace{\int \sin 3x \cos 5x \, dx}_{\substack{u = \sin 3x, \quad u' = 3\cos 3x \\ v' = \cos 5x, \quad v = \frac{1}{5}\sin 5x}} = \sin 3x \frac{\sin 5x}{5} - \underbrace{\frac{3}{5}\int \cos 3x \sin 5x \, dx}_{\substack{u = \cos 3x, \quad u' = -3\sin 3x \\ v' = \sin 5x, \quad v = -\frac{1}{5}\cos 5x}} =$$

$$= \sin 3x \frac{\sin 5x}{5} - \frac{3}{5}\left(-\cos 3x \frac{\cos 5x}{5} - \frac{3}{5}\int \sin 3x \cos 5x \, dx\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\sin 3x \sin 5x + \frac{3}{25}\cos 3x \cos 5x + \frac{9}{25}\int \sin 3x \cos 5x \, dx.$$

Z toho po úprave budeme mať rovnicu

$$\left(1 - \frac{9}{25}\right)\int \sin 3x \cos 5x \, dx = \frac{1}{25}\left(5\sin 3x \sin 5x + 3\cos 3x \cos 5x\right).$$

Výsledok je

$$\int \sin 3x \cos 5x \, dx = \frac{1}{16}\left(5\sin 3x \sin 5x + 3\cos 3x \cos 5x\right).$$

□

Príklad 3.16 Vypočítajte $\int \cos^2 x \, dx$.

Riešenie: Túto úlohu sme už riešili v príklade 3.3. Teraz si ukážeme, ako môžeme takýto integrál vypočítať pomocou metódy per partes. Využijeme zápis v tvare súčinu $\cos^2 x = \cos x \cdot \cos x$.

$$\underbrace{\int \cos x \cdot \cos x \, dx}_{\substack{u = \cos x, \quad u' = -\sin x \\ v' = \cos x, \quad v = \sin x}} = \cos x \cdot \sin x + \underbrace{\int \sin^2 x \, dx}_{= \int (1 - \cos^2 x)\, dx} =$$

$$= \cos x \cdot \sin x + x - \int \cos^2 x \, dx. \tag{3.26}$$

Na oboch stranách rovnice (3.26) máme rovnaký neznámy integrál. Z toho

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}(\cos x \cdot \sin x + x).$$

Keď použijeme vzorec pre $\sin 2x$, vidíme, že sa výsledok z príkladu 3.3 zhoduje s výsledkom dosiahnutým pomocou per partes. □

3.1.4 Substitučná metóda

V tejto časti bude $R(f(\cdot), g(\cdot))$ označovať racionálnu funkciu, kde premenné budú hodnoty funkcií f a g.

Integrály typu $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ a $\int R(\sinh x, \cosh x)\,dx$

Integrál z racionálnej funkcie, kde premenné sú $\sin x$ a $\cos x$ môžeme substitúciou

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 2\operatorname{arctg} t. \tag{3.27}$$

zmeniť na integrál z racionálnej funkcie premennej x. Z rovnice (1) a vzťahov pre dvojnásobný uhol môžeme odvodiť

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \tag{3.28}$$

$$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}. \tag{3.29}$$

Podobne postupujeme pri integrovaní racionálnej funkcie $R(\sinh, \cosh)$. Bezprostredne z definície funkcií sinh a cosh dostaneme vzorce pre dvojnásobný argument

$$\sinh 2x = 2\sinh x \cdot \cosh x, \tag{3.30}$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x. \tag{3.31}$$

Použitím substitúcie

$$t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \underbrace{2\operatorname{tgh}^{-1} t = \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)}_{\text{veta } 2.4} \tag{3.32}$$

zmeníme integrál z racionálnej funkcie $R(\sinh, \cosh)$ na integrál z racionálnej funkcie premennej x. Pomocou vzorcov (3.30), (3.31) a rovnice (2.10) dostaneme

$$\cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad \sinh x = \frac{2t}{1-t^2}, \tag{3.33}$$

$$dx = \frac{2\,dt}{1-t^2}. \tag{3.34}$$

Príklad 3.17 Vypočítajte $\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx$.

Riešenie: Použijeme substitúciu (3.27). Aplikáciou vzorcov (3.28) a (3.29) dostaneme

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2} = 2\int \frac{dt}{1+t^2+2t} = 2\int \frac{dt}{(t+1)^2} = $$
$$= \frac{-2}{t+1} = \frac{-2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}. \qquad \square$$

Príklad 3.18 Vypočítajte $\int \frac{1}{\cosh x - 1}\,dx$.

Riešenie: Použijeme substitúciu (3.32). Aplikáciou vzorcov (3.33) a (3.34) dostaneme

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\cosh x - 1} &= \int \frac{1}{\frac{1+t^2}{1-t^2}-1} \cdot \frac{2\,dt}{1-t^2} = 2\int \frac{dt}{2t^2} = -t^{-1} \\ &= -\frac{1}{\operatorname{tgh} \frac{x}{2}} = -\operatorname{cotgh} \frac{x}{2}.\end{aligned}$$

□

Substitúcie (3.27) a (3.32) sú univerzálne. To znamená, že pomocou nich dokážeme vypočítať ľubovoľný integrál typu $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ a $\int R(\sinh x, \cosh x)\,dx$. Ak sa dá upraviť funkcia $R(\sin x, \cos x)$ do tvaru $R(\sin x) \cdot \cos x$ prípadne $R(\cos x) \cdot \sin x$, dá sa použiť substitúcia

$$\begin{array}{lll} t = \sin x, \quad dt = \cos x\,dx & \multirow{2}{*}{ak počítame} & \int R(\sin x) \cdot \cos x\,dx, \\ t = \cos x, \quad dt = -\sin x\,dx & & \int R(\cos x) \cdot \sin x\,dx. \end{array} \tag{3.35}$$

Obdobné substitúcie môžeme použiť aj v prípade integrálov z hyperbolických funkcií $R(\sinh x) \cdot \cosh x$ a $R(\cosh x) \cdot \sinh x$. Tieto prenecháme na čitateľa.

Príklad 3.19 Vypočítajte $\int \frac{\cos x \cdot \sin^2 x}{\sin^2 x - 3\sin x - 4}\,dx$.

Riešenie: Použijeme substitúciu (3.28). Naša funkcia sa dá napísať v tvare $R(\sin x) \cdot \cos x$ a to znamená, že môžeme použiť substitúciu $t = \sin x$. Potom dostaneme

$$\underbrace{\int \frac{\cos x \cdot \sin^2 x}{\sin^2 x - 3\sin x - 4}\,dx}_{\substack{t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx}} = \int \frac{t^2\,dt}{t^2 - 3t - 4} = \int 1\,dt + \int \frac{3t+4}{(t-4)(t+1)}\,dt \tag{3.36}$$

$\frac{3t+4}{(t-4)(t+1)}$ rozložíme na parciálne zlomky:

$$\frac{3t+4}{(t-4)(t+1)} = \frac{A}{t-4} + \frac{B}{t+1}, \tag{3.37}$$

z toho

$$3t + 4 = A(t+1) + B(t-4).$$

Dosadíme $t = -1$ a $t = 4$:

$$\begin{aligned} t = -1: \quad 1 = -5B \quad &\Rightarrow \quad B = -\frac{1}{5}, \\ t = 4: \quad 16 = 5A \quad &\Rightarrow \quad A = \frac{16}{5}. \end{aligned}$$

Zo vzťahov (3.36) a (3.37) dostaneme

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x \cdot \sin^2 x}{\sin^2 x - 3\sin x - 4}\, dx &= t + \frac{16}{5}\ln|t-4| - \frac{1}{5}\ln|t+1| = \\ &= \sin x + \frac{16}{5}\ln(4-\sin x) - \frac{1}{5}\ln(\sin x + 1). \qquad \square\end{aligned}$$

Príklad 3.20 Vypočítajte $\int \cos^4 x \sin^3 x\, dx$.

Riešenie: Funkciu $\cos^4 x \sin^3 x$ si môžeme upraviť do tvaru

$$\cos^4 x\, \underbrace{(1-\cos^2 x)}_{=\sin^2 x} \sin x.$$

Použijeme substitúciu $t = \cos x$, $dt = -\sin x\, dx$. Potom

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x \sin^3 x\, dx &= \int \cos^4 x(1-\cos^2 x)\sin x\, dx = -\int t^4(1-t^2)\, dt = \int (t^6 - t^4)\, dt = \\ &= \frac{1}{7}t^7 - \frac{1}{5}t^5 = \frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{1}{5}\cos^5 x. \qquad \square\end{aligned}$$

Integrovanie výrazov s odmocninami

Budeme uvažovať integrály typu

- $\int f(\sqrt{x})\, dx$,
- $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})\, dx$,
- $\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2})\, dx$,
- $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})\, dx$.

$\int f(\sqrt{x})\, dx$ môžeme substitúciou upraviť na tvar

$$\underbrace{\int f(\sqrt{x})\, dx}_{\substack{x = t^2 \\ dx = 2t\, dt}} = 2\int t \cdot f(t)\, dt.$$

Pri integrovaní zvyšných troch typov funkcií máme niekoľko možností výpočtu (transformácie). Ukážeme si goniometrické a hyperbolické substitúcie. Uvedené substitúcie sú volené tak, aby sme sa „zbavili odmocnín", a tak daný integrál previedli na typ, s ktorým si už vieme poradiť.

$$\underbrace{\int R_1(x, \sqrt{a^2 - x^2})\, dx}_{\substack{x = a \sin t \\ dx = a \cos t\, dt}} = \int R_2(\sin t, \cos t)\, dt, \tag{3.38}$$

$$\underbrace{\int R_1(x, \sqrt{a^2 - x^2})\, dx}_{\substack{x = a \ \mathrm{tgh}\, t \\ dx = \frac{a}{\cosh^2 t}\, dt}} = \int R_2(\sinh t, \cosh t)\, dt, \tag{3.39}$$

$$\underbrace{\int R_1(x, \sqrt{a^2 + x^2})\, dx}_{\substack{x = a \ \mathrm{tg}\, t \\ dx = \frac{a}{\cos^2 t}\, dt}} = \int R_2(\sin t, \cos t)\, dt, \tag{3.40}$$

$$\underbrace{\int R_1(x, \sqrt{a^2 + x^2})\, dx}_{\substack{x = a \sinh t \\ dx = a \cosh t\, dt}} = \int R_2(\sinh t, \cosh t)\, dt, \tag{3.41}$$

$$\underbrace{\int R_1(x, \sqrt{x^2 - a^2})\, dx}_{\substack{x = \frac{a}{\cos t} \\ dx = a \frac{\sin t}{\cos^2 t}\, dt}} = \int R_2(\sin t, \cos t)\, dt, \tag{3.42}$$

$$\underbrace{\int R_1(x, \sqrt{x^2 - a^2})\, dx}_{\substack{x = a \cosh t \\ dx = \sinh t\, dt}} = \int R_2(\sinh t, \cosh t)\, dt, \tag{3.43}$$

kde R_2 je vo všeobecnosti iná racionálna funkcia ako pôvodná R_1.

Príklad 3.21 Vypočítajte $\int \mathrm{arctg}\, \sqrt{x}\, dx$.

Riešenie: Použijeme substitúciu $x = t^2$:

$$\underbrace{\int \mathrm{arctg}\, \sqrt{x}\, dx}_{\substack{x = t^2 \\ dx = 2t\, dt}} = \underbrace{\int 2t\ \mathrm{arctg}\, t\, dt}_{\substack{u' = 2t, \quad u = t^2 \\ v = \mathrm{arctg}\, t, \quad v' = \frac{1}{1+t^2}}} = t^2\ \mathrm{arctg}\, t - \int \frac{t^2}{1+t^2}\, dt =$$

$$= t^2 \operatorname{arctg} t - \int \left(\frac{t^2+1}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2} \right) dt = t^2 \operatorname{arctg} t - t + \operatorname{arctg} t$$
$$= (x+1) \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x}. \qquad \square$$

Príklad 3.22 Vypočítajte $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$, kde $a > 0$.

Riešenie:

$$\underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}}_{\substack{x = a\sinh t \\ dx = a\cosh t\, dt}} = \int \frac{a\cosh t}{\underbrace{\sqrt{a^2+a^2\sinh^2 t}}_{=a\cosh t}} dt = \int dt = t = \underbrace{\sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)}_{\text{veta } 2.4} =$$
$$= \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} \right). \qquad \square$$

Príklad 3.23 Vypočítajte $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx$, kde $a > 0$.

Riešenie: Použijeme substitúciu $x = a\cos t$:

$$\underbrace{\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx}_{\substack{x = a\cos t \\ dx = -a\sin t\, dt}} = -\int \frac{a^3\cos^2 t \sin t}{\sqrt{a^2 - a^2\cos^2 t}} dt = \underbrace{-a^2 \int \cos^2 t\, dt}_{\text{príklad } 3.16} = -\frac{a^2}{2}(t + \sin t \cos t) =$$
$$= -\frac{a^2}{2}\left(\arccos\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{a}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \right). \tag{3.44}$$

Pri poslednej úprave sme využili vzťah $\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t}$ za predpokladu, že $\sin t \geq 0$.
$\square$

Teraz sa vrátime k príkladu 3.11.

Príklad 3.24 (Dokončenie príkladu 3.11). Zistili sme (pozri (3.22)), že

$$\int x \cdot \arcsin 3x\, dx = \frac{x^2}{2} \arcsin 3x - \frac{1}{2} \int \frac{3x^2}{\sqrt{1-9x^2}} dx. \tag{3.45}$$

Tento medzivýsledok ešte upravíme a použijeme vzťah (3.44):

$$\underbrace{\int \frac{3x^2}{\sqrt{1-9x^2}} dx}_{\substack{t = 3x \\ dt = 3\, dx}} = \frac{1}{9} \int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\frac{1}{18}\left(\arccos t + t\sqrt{1-t^2} \right) =$$
$$= -\frac{1}{18}\left(\arccos 3x + 3x\sqrt{1-9x^2} \right).$$

Po dosadení do (3.45) dostaneme

$$\int x \cdot \arcsin 3x\, dx = \frac{x^2}{2} \arcsin 3x + \frac{1}{36}\left(\arccos 3x + 3x\sqrt{1-9x^2}\right).$$

Druhý medzivýsledok (pozri (3.23)) je:

$$\int x^2 \cdot \arcsin 3x\, dx = \frac{x^3}{3} \arcsin 3x - \int \frac{x^3}{\sqrt{1-9x^2}}\, dx. \tag{3.46}$$

Všimnime si, že v $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-9x^2}}\, dx$ je v čitateli x v nepárnej mocnine. Nie je nutné použiť jednu zo substitúcií (3.38) alebo (3.39). Budeme postupovať iným spôsobom:

$$\underbrace{\int \frac{x^3}{\sqrt{1-9x^2}}\, dx}_{\left.\begin{array}{r} 1-9x^2 = t^2 \\ -18x\, dx = 2t\, dt \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} x^2 = \frac{1-t^2}{9} \\ x\, dx = -\frac{1}{9} t\, dt \end{array}} = -\frac{1}{81}\int \frac{(1-t^2)t\, dt}{t} = -\frac{1}{81}\left(t - \frac{t^3}{3}\right) =$$

$$= -\frac{1}{81}\left(\sqrt{1-9x^2} - \frac{1}{3}\sqrt{(1-9x^2)^3}\right). \qquad \square$$

3.2 Určité integrály

3.2.1 Základné vzťahy

Vrátime sa k Newtonovej-Leibnitzovej formule. Táto nám definuje určitý integrál. Presná definícia znie takto:

Definícia 3.2 *Nech f je funkcia, definovaná a ohraničená na intervale $[a, b]$, ku ktorej existuje primitívna funkcia F. Potom*

$$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \tag{3.47}$$

nazveme určitým integrálom cez interval $[a, b]$ (alebo od a po b) *z funkcie f.*

Výpočet určitého intgrálu je naznačený vzťahom (3.47). Nájdeme primitívnu funkciu F (teda vypočítame neurčitý integrál) k funkcii f a dosadíme hranice.

Poznámka 3.1 Ohraničenosť (alebo konečnosť) a definovanosť funkcie f v každom bode intervalu $[a, b]$ je nutnou podmienkou existencie určitého integrálu $\int_a^b f(x)\, dx$.

Základné vlastnosti určitého integrálu sú zhrnuté v nasledujúcej leme.

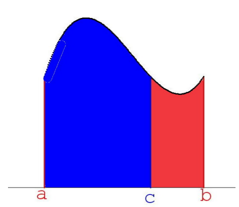
Lema 3.2 *Nech existuje* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *pre* $a < b$, *resp.* $\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx$ *pre* $\alpha > 0$. *Potom platí:*

- $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *je daný jednoznačne,*[2]
- $\int\limits_b^a f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$,
- $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$ *pre ľubovoľné c také, že oba určité integrály na pravej strane rovnice existujú,*
- *ak* $f(x) \geq 0$ *pre všetky* $x \in [a,b]$, *tak* $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geq 0$.
- $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int\limits_0^a f(x)\,dx, & \textit{ak } f \textit{ je párna funkcia,} \\ 0, & \textit{ak } f \textit{ je nepárna funkcia.} \end{cases}$

Myšlienka dôkazu K jednoznačnosti určitého integrálu si stačí uvedomiť ako funguje Newtonova-Leibnitzova formula. Zvoľme ľubovoľnú primitívnu funkciu $\int f\,dx = F(x)+c$. Potom dostaneme

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = (F(b)+c) - (F(a)+c) = F(b) - F(a).$$

V úvode tejto kapitoly, pri odvodzovaní Newtonovej-Leibnitzovej formuly sme ukázali, že je to limita „akýchsi súčtov" (pozri (3.1)). Z toho vyplývajú zvyšné tri vzťahy. Na ilustráciu tretieho vzťahu, deleniu oblastiy P na $P_1 = \int\limits_a^c f(x)\,dx$ a $P_2 = \int\limits_c^b f(x)\,dx$ uvádzame obrázok 3.3.



Obr. 3.3. Obsah oblasti $P = P_1 + P_2$

$\square$

Príklad 3.25 Vypočítajte $\int\limits_1^e x^2 \cdot \ln x\,dx$.

[2]Neurčitých integrálov z f, teda primitívnych funkcií k f, je nekonečne veľa (pozri vzťah (3.4)).

Riešenie: Vypočítame neurčitý integrál:

$$\underbrace{\int x^2 \cdot \ln x \, dx}_{\substack{u' = x^2, \quad u = \frac{x^3}{3} \\ v = \ln x, \quad v' = \frac{1}{x}}} = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int \underbrace{x^3 \frac{1}{x}}_{=x^2} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c.$$

Dosadíme hranice:

$$\int_1^e x^2 \cdot \ln x \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c\right]_1^e = \left(\frac{e^3}{3} \ln e - \frac{e^3}{9} + c\right) - \left(\frac{1^3}{3} \ln 1 - \frac{1^3}{9} + c\right) = $$
$$= \frac{2e^3 + 1}{9}. \qquad \square$$

Príklad 3.26 Vypočítajte $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos^2 x \, dx$.

Riešenie: Vypočítame neurčitý integrál:

$$\underbrace{\int \sin x \cdot \cos^2 x \, dx}_{\substack{t = \cos x \\ dt = -\sin x \, dx}} = -\int t^2 \, dt = -\frac{t^3}{3} + c = -\frac{\cos^3 x}{3} + c.$$

Dosadíme hranice:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos^2 x \, dx = \left[-\frac{\cos^3 x}{3} + c\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\frac{\cos^3 \left(\frac{\pi}{2}\right)}{3} + c\right) - \left(-\frac{\cos^3 0}{3} + c\right) = \frac{1}{3}. \qquad \square$$

Pri výpočte určitého integrálu môžeme vždy najprv nájsť primitívnu funkciu a potom dosadiť hranice, tak, ako sme to spravili v predchádzajúcich dvoch príkladoch. Keď používame pri integrovaní substitúciu, prípadne per partes, výpočet určitého integrálu môžeme urýchliť:

- *Substitúcie v určitom integráli:*

$$\underbrace{\int_a^b g(f(x)) \cdot f'(x) \, dx}_{\substack{t = f(x), \quad dt = f'(x) \, dx \\ t_1 = f(a), \quad t_2 = f(b)}} = \int_{t_1}^{t_2} g(t) \, dt = [G(t)]_{t_1}^{t_2} = G(t_2) - G(t_1).$$

Pri použití substitúcie sa po nájdení primitívnej funkcie nemusíme vrátiť k pôvodnej premennej x, ale stačí, keď prepočítame hranice ($a \to t_1,\ b \to t_2$) a dosadíme ich do funkcie G premennej t.

- *Per partes v určitom integráli:*

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x)\, dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x)\, dx.$$

Príklad 3.27 Vypočítajte $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \cdot \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3}\, dx$.

Riešenie:

$$\underbrace{\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \cdot \sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\, dx}_{\substack{t = e^x - 1, \quad dt = e^x\, dx \\ t_1 = e^0 - 1 \quad t_2 = e^{\ln 5} - 1 \\ = 0, \qquad\quad = 4}} = \underbrace{\int_0^4 \frac{\sqrt{t}}{t+4}\, dt}_{\substack{z^2 = t, \quad dt = 2z\, dz \\ z_1 = 0, \quad z_2 = 2}} = \int_0^2 \frac{z \cdot 2z\, dz}{z^2+4} =$$

$$= 2\int_0^2 \left(\frac{z^2+4}{z^2+4} - \frac{4}{z^2+4} \right) dz = 2\left[z - 4\frac{1}{2}\ \operatorname{arctg}\left(\frac{z}{2}\right) \right]_0^2 =$$

$$= 2\left((2 - 2\ \operatorname{arctg} 1) - (0 - 2\ \operatorname{arctg} 0)\right) = 4 - \pi.$$

□

Príklad 3.28 Vypočítajte $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos(2x)\, dx$.

Riešenie:

$$\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos(2x)\, dx}_{\substack{u = \sin x, \quad u' = \cos x \\ v' = \cos(2x), \quad v = \frac{\sin(2x)}{2}}} = \left[\sin x \frac{\sin(2x)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \frac{\sin(2x)}{2}\, dx}_{\substack{u = \cos x, \quad u' = -\sin x \\ v' = \frac{\sin(2x)}{2}, \quad v = -\frac{\cos(2x)}{4}}} =$$

$$= \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{\sin \pi}{2} - \sin 0\, \frac{\sin 0}{2}}_{=0} - \left(\left[-\cos x \cdot \frac{\cos(2x)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \frac{\cos(2x)}{4}\, dx \right),$$

z toho

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos(2x)\, dx = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{\cos \pi}{4} - \cos 0 \cdot \frac{\cos 0}{4} = -\frac{1}{4}.$$

Hľadané riešenie je $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos(2x)\, dx = -\frac{1}{3}$. □

Príklad 3.29 Vypočítajte $\int\limits_0^1 \arcsin x\, dx$.

Riešenie: Použijeme metódu per partes:

$$\underbrace{\int\limits_0^1 \arcsin x\, dx}_{} = [x \arcsin x]_{-1}^{1} - \underbrace{\int\limits_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx}_{1 \notin D(f)}.$$

$$\begin{aligned} u' &= 1, & u &= x \\ v &= \arcsin x, & v' &= \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Vidíme, že metóda per partes nie je vhodná (prečo?).

Použijeme substitúciu $\left\{ \begin{array}{rl} x = \sin t \ (t = \arcsin x), & dx = \cos t\, dt \\ t_1 = \arcsin(0) = 0, & t_2 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}$:

$$\int\limits_0^1 \arcsin x\, dx = \underbrace{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t\, dt}_{} = [t \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, dt =$$

$$\begin{aligned} u &= t, & u' &= 1 \\ v' &= \cos t, & v &= \sin t \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Metóda per partes viedla k problémom, s ktorými sme si nevedeli poradiť (funkcia nebola definovaná na hornej hranici). Pomocou vhodnej substitúcie sme tieto problémy obišli. □

Príklad 3.30 Vypočítajte $\int\limits_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}}\, dx$.

Riešenie:

$$\underbrace{\int\limits_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}}\, dx}_{} = -\int\limits_{-1}^1 e^t\, dt = -\left[e^t\right]_{-1}^{1} = -\left(e^1 - e^{-1}\right) = \frac{1}{e} - e.$$

$$\begin{aligned} t &= \tfrac{1}{x}, & dt &= -\tfrac{1}{x^2}\, dx \\ t_1 &= -1, & t_2 &= 1 \end{aligned}$$

Integrovali sme nezápornú funkciu ($f(x) = \frac{1}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}} \geq 0$), ale výsledok je záporný. To je v spore s lemou 3.2. Problém je v tom, že $0 \notin D(f)$. To znamená, že daný integrál nevieme počítať. □

V nasledujúcej časti si ukážeme, ako môžeme počítať integrály (aspoň v niektorých prípadoch), keď je funkcia neohraničená, prípadne nedefinovaná v niektorom bode.

3.2.2 Nevlastné integrály

Definícia 3.3 *Majme daný interval* $[a,b]$ *a funkciu* f *takú, že pre každé* $c \in [a,b)$ *existuje určitý integrál* $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ *a* $\lim\limits_{x\to b_-} f(x) = \pm\infty$ (resp. pre každé $c \in (a,b]$ existuje určitý integrál $\int\limits_c^b f(x)\,dx$ a $\lim\limits_{x\to a_+} f(x) = \pm\infty$). *Potom, ak existuje limita*

$$\lim_{c\to b_-} \int_a^c f(x)\,dx = L_b \quad (\text{resp.} \lim_{c\to a_+} \int_c^b f(x)\,dx = L_a),$$

tak túto limitu nazveme nevlastným integrálom funkcie f *na* $[a,b]$ *a označíme ju* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Poznámka 3.2 Podobne, ako sme definovali nevlastný integrál $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, keď je funkcia f neohraničená v jednom z krajných bodov intervalu $[a,b]$, zavádzame nevlastný integrál

$$\int_a^\infty f(x)\,fx = \lim_{c\to\infty} \int_a^c f(x)\,dx, \tag{3.48}$$

ak limita na pravej strane rovnice (3.48) existuje.

Hodnotu b (resp. a) z definície 3.3 nazvyme „*problémovou*" pri výpočte určitého integrálu $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Potom nutnou podmienkou na to, aby sme mohli počítať nevlastný integrál $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ je, aby na intervale $[a,b]$ bola nanajvýš jedna problémová hodnota a tá musí ležať na hranici intervalu $[a,b]$.

Vráťme sa k príkladu 3.30.

Príklad 3.31 (Pokračovanie príkladu 3.30). Pre funkciu $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ je na intervale $[-1,1]$ problémovou hodnotou 0. Teda táto hodnota je jediná, ale neleží na hranici intervalu $[-1,1]$. Preto musíme rozdeliť náš integrál na dva:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\,dx.$$

Každý z integrálov na pravej strane rovnosti má jedinú problémovú hodnotu. To znamená, že môžeme počítať tieto nevlastné integrály.

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\, dx = \lim_{c\to 0_-} \underbrace{\int_{-1}^{c} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\, dx}_{\substack{t=\frac{1}{x},\quad dt=-\frac{1}{x^2}\,dx \\ t_1=-1,\quad t_2=\frac{1}{c}}} = -\lim_{c\to 0_-} \int_{-1}^{\frac{1}{c}} e^t\, dt =$$

$$= -\lim_{c\to 0_-} \left[e^t\right]_{-1}^{\frac{1}{c}} = -\lim_{c\to 0_-} (\underbrace{e^{\frac{1}{c}}}_{\to 0} - e^{-1}) = \frac{1}{e},$$

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\, dx = \lim_{c\to 0_+} \underbrace{\int_{c}^{1} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\, dx}_{\substack{t=\frac{1}{x},\quad dt=-\frac{1}{x^2}\,dx \\ t_1=\frac{1}{c},\quad t_2=1}} = -\lim_{c\to 0_+} \int_{\frac{1}{c}}^{1} e^t\, dt =$$

$$= -\lim_{c\to 0_+} (e - \underbrace{e^{\frac{1}{c}}}_{\to\infty}) = \infty.$$

Môžeme spraviť záver, že $\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\, dx = \infty$. □

Príklad 3.32 Vypočítajte $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

Riešenie: Funkcia $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$ nie je definovaná pre $x = e$, teda budeme počítať nevlastný integrál.

$$\int_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \lim_{c\to e_-} \underbrace{\int_{1}^{c} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}}_{\substack{t=\ln x,\quad dt=\frac{1}{x}\,dx \\ t_1=\ln 1=0,\quad t_2=\ln c}} = \lim_{c\to e_-} \int_{0}^{\ln c} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \lim_{c\to e_-} \left[\arcsin t\right]_0^{\ln c} = \left[\arcsin t\right]_0^1 = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}.$$ □

Príklad 3.33 Vypočítajte $\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, dx$.

Riešenie: Funkcia $f(x) = \frac{1}{x}$ nie je definovaná pre $x = 0$. Integrál rozdelíme na dva:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{s\to 0_-} \int_{-1}^{s} \frac{1}{x}\,dx + \lim_{z\to 0_+} \int_{z}^{1} \frac{1}{x}\,dx =$$
$$= \lim_{s\to 0_-} [\ln|x|]_{-1}^{s} + \lim_{z\to 0_+} [\ln x]_{z}^{1} = \lim_{s\to 0_-} \ln|s| - \ln 1 + \ln 1 - \lim_{z\to 0_+} \ln z = -\infty + \infty.$$

Hodnotu „$-\infty + \infty$" nevieme určiť, teda daný integrál neexistuje. □

Poznámka 3.3 Funkcia $f(x) = \frac{1}{x}$ je nepárna. Podľa lemy 3.2 by hodnota $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx$ mala byť rovná 0. V predpoklade tejto lemy je, že počítaný integrál existuje. Tento predpoklad nie je splnený. Preto sme dostali iný výsledok.

Príklad 3.34 Vypočítajte $\int_{1}^{\infty} e^{-x}\,dx$.

Riešenie: Funkcia $f(x) = e^{-x}$ je na intervale $[1, \infty)$ definovaná aj ohraničená. Pre ľubovoľné $a > 1$ platí

$$\int_{1}^{a} e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_{1}^{a} = e^{-1} - e^{-a}.$$

Z toho dostaneme

$$\int_{1}^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_{1}^{a} e^{-x}\,dx = \lim_{a\to\infty} (e^{-1} - e^{-a}) = e^{-1}.$$

□

3.2.3 Určitý integrál ako funkcia hornej hranice

V niektorých prípadoch sa môže vyskytnúť premenná aj v hornej (prípadne dolnej) hranici. Potom dostaneme funkciu

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,dt,$$

kde a je daná konštanta. Použitím Newtonovej-Leibnitzovej formuly zistíme, že F je tá primitívna funkcia, pre ktorú platí $F(a) = 0$. Funkciu F môžeme derivovať a dostaneme

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_{a}^{x} f(t)\,dt = f(x). \tag{3.49}$$

Príklad 3.35 Vypočítajte $\frac{d}{dx}\int\limits_0^{3x} \sin t\,dt$, $\frac{d}{dx}\int\limits_{\pi}^{\sqrt{x}} \operatorname{tg} t\,dt$, $\frac{d}{dx}\int\limits_x^3 \ln t\,dt$.

Riešenie: $\int\limits_0^{3x} \sin t\,dt = -\cos(3x) + 1$. Z toho dostaneme

$$\frac{d}{dx}\int\limits_0^{3x} \sin t\,dt = 3\sin(3x).$$

$\int\limits_{\pi}^{\sqrt{x}} \operatorname{tg} t\,dt = -\ln|\cos\sqrt{x}| - \ln|\cos\pi|$. Z toho

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{\pi}^{\sqrt{x}} \operatorname{tg} t\,dt = \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

$\int\limits_x^3 \ln t\,dt = 3(\ln 3 - 1) - x(\ln x - 1)$. Z toho

$$\frac{d}{dx}\int\limits_x^3 \ln t\,dt = -\ln x.$$

Podrobnejšie výpočty derivácií prenecháme na čitateľa. □

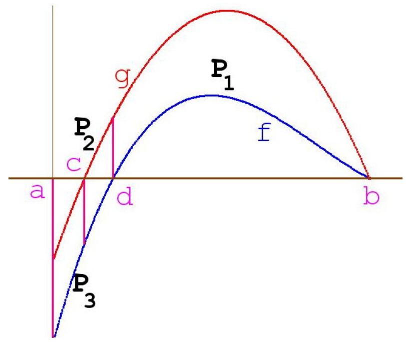
3.3 Geometrické aplikácie určitých integrálov

3.3.1 Obsah rovinnej oblasti

Explicitne dané hranice oblasti

Na intervale $[a, b]$ nech sú dané funkcie f a g také, že $g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in [a, b]$. Tieto funkcie ohraničujú rovinnú oblasť P, ktorú rozdelíme na tri časti, pozri obr. 3.4. Potom obsah oblasti P môžeme počítať ako súčet $P = P_1 + P_2 + P_3$ a z toho, čo sme sa už dozvedeli o integráloch, si ľahko odvodíme, že obsahy jednotlivých oblastí počítame takto:

$$P_1 = \int\limits_d^b (g(x) - f(x))\,dx,$$



Obr. 3.4. Oblasť P a jej delenie na tri časti

$$P_2 = \int_c^d g(x)\,dx + \int_c^d (-f(x))\,dx,$$

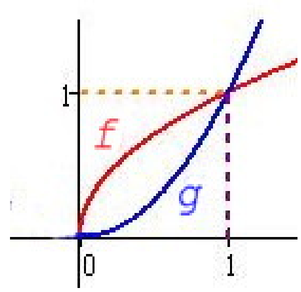
$$P_3 = \int_a^c (-f(x) - (-g(x)))\ dx.$$

Z toho dostaneme základný vzorec pre výpočet obsahu rovinnej oblasti:

$$P = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx. \tag{3.50}$$

Príklad 3.36 Vypočítajte obsah oblasti, ktorá je ohraničená funkciami $g(x) = x^2$ a $f(x) = \sqrt{x}$.

Riešenie: Potrebujeme nájsť body, v ktorých sa dané funkcie pretínajú, teda riešime rovnicu $x^2 = \sqrt{x}$. Z toho $x = \begin{cases} 0, \\ 1. \end{cases}$



Obr. 3.5. Oblasť, ohraničená funkciami f a g

Pre $x \in [0,1]$ platí $\sqrt{x} \geq x^2$. Preto

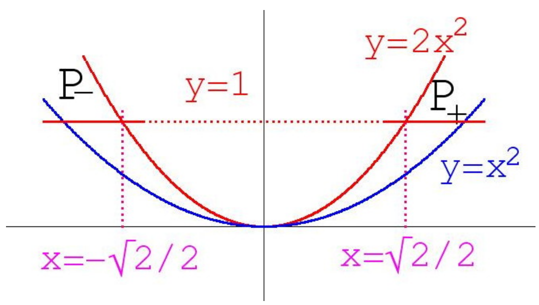
$$P = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)\, dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{1}{3}.$$

$\square$

Príklad 3.37 Vypočítajte obsah oblasti, ktorá je ohraničená krivkami $y = 2x^2$, $y = x^2$ a $y = 1$.

Riešenie: Najprv určíme body, v ktorých sa dané krivky prenikajú.

1. $y = 2x^2$ a $y = 1$: riešime rovnicu $2x^2 = 1$. Z toho $|x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. $y = x^2$ a $y = 1$. To znamená $x^2 = 1$, teda $|x| = 1$.
3. x^2 a $2x^2$: z toho $2x^2 = x^2$. Riešenie je $x = 0$.



Obr. 3.6. Oblasť P a jej časti P_- a P_+

Oblasť P rozdelíme na P_+ a P_- (podľa toho, či leží v polrovine $x \geq 0$ alebo $x \leq 0$). Tieto dve časti sú rovnako veľké, to znamená $P = 2P_+$. P_+ opäť rozdelíme na P_1 a P_2. Obe časti sú zdola ohraničené funkciou $y = x^2$. P_1 je zhora ohraničená funkciou $y = 2x^2$ a P_2 je zhora ohraničená funkciou $y = 1$. Z toho

$$\begin{aligned}
P_1 &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(2x^2 - x^2\right)\, dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{8}}{8\cdot 3} = \frac{\sqrt{2}}{12},\\
P_2 &= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \left(1 - x^2\right)\, dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{12}\right) = \\
&= \frac{2}{3} + \frac{5}{12}\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Výsledok je

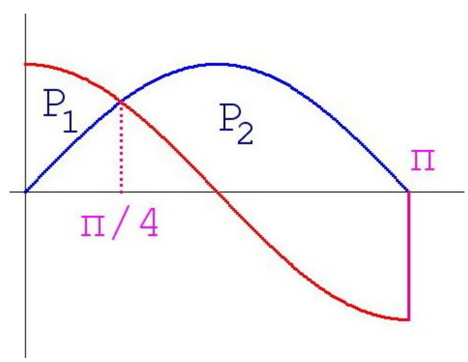
$$P = 2(P_1 + P_2) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{2}{3} + \frac{5}{12}\sqrt{2}\right) = \frac{4}{3} + \sqrt{2}. \qquad \square$$

Príklad 3.38 Vypočítajte obsah oblasti, ktorá je ohraničená krivkami
$f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x,\ x = 0$ a $x = \pi$.

Riešenie: Oblasť budeme počítať ako súčet $P = P_1 + P_2$ (pozri obr. 3.7). Na intervale $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ je $\cos x \geq \sin x$, na intervale $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ platí $\sin x \geq \cos x$.

$$P_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\, dx = [\sin x - (-\cos x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1,$$

$$P_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin x - \cos x)\, dx = [-\cos x - \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = 1 + \sqrt{2}.$$



Obr. 3.7. Oblasť P a jej časti P_1 a P_2

Z toho dostaneme $P = P_1 + P_2 = 2\sqrt{2}$.

Výsledok porovnajte s integrálom $\int\limits_0^{\pi} (\sin x - \cos x)\, dx = [-\cos x - \sin x]_0^{\pi} = 2.$ $\square$

Parametricky dané hranice oblasti

Zopakujme si z úvodu podkapitoly o parametrických krivkách, že rovinné krivky sú zadané dvojicou funkcií $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$, kde $t \in [t_1, t_2]$ je daný interval. Keď potrebujeme odvodiť vzorec pre výpočet obsahu oblasti, ktorej hranica je daná parametricky, vo vzorci

(3.50) spravíme substitúciu $x = \varphi(t)$ (a $dx = \varphi'(t)\,dt$), pričom vieme, že $y = f(\varphi(t)) = \psi(t)$. Z toho dostaneme vzťah

$$P = \left| \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \cdot \varphi'(t)\,dt \right|. \tag{3.51}$$

Príklad 3.39 Vypočítajte obsah oblasti, ktorá je ohraničená cykloidou $\varphi(t) = t - \sin t$, $\psi(t) = 1 - \cos t$ a osou x pre $t \in [0, 2\pi]$.

Riešenie: Derivácia φ je $\varphi'(t) = 1 - \cos t$. Dosadíme do (3.51) a dostaneme

$$\begin{aligned} P &= \left| \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\,dt \right| = \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\,dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2} \right) dt = \left[\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t \right]_0^{2\pi} = 3\pi. \end{aligned}$$

□

Príklad 3.40 Vypočítajte obsah oblasti, ohraničenej elipsou s poloosami dĺžky a, b.

Riešenie: Parametrické vyjadrenie elipsy je $\varphi(t) = a\cos t$, $\psi(t) = b\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Z toho $\varphi'(t) = -a\sin t$.

$$\begin{aligned} P &= \left| \int_0^{2\pi} ab\sin t \cdot \sin t\,dt \right| = ab \int_0^{2\pi} \sin^2 t\,dt = ab \int_0^{2\pi} (1-\cos^2 t)\,dt = \\ &= ab \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = ab \left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t \right]_0^{2\pi} = ab\pi. \end{aligned}$$

□

3.3.2 Objemy rotačných telies

Explicitne dané hranice rotačnej oblasti

Majme danú plochu P, ktorá rotuje okolo osi x a vytvára rotačné teleso (pozri obr. 3.8). Keď si „rozrežeme" teleso na plátky hrúbky dx tak, aby sme mohli zanedbať zaoblenie povrchu telesa, dostaneme jeden element objemu, ktorého veľkosť je

$$dV = \underbrace{\pi f^2(x)}_{\text{obsah}} \underbrace{dx}_{\text{hrúbka}}.$$

Z toho vzorec na objem telesa je

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx. \tag{3.52}$$

Obr. 3.8. Rotačné teleso a plocha, ktorá ho vytvára

Príklad 3.41 Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou plochy, ohraničenej krivkami $y = x^2$ a $y = 1 - x^2$ okolo osi x.

Riešenie: Vypočítame prienik kriviek:

$$x^2 = 1 - x^2 \quad \Rightarrow \quad |x| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

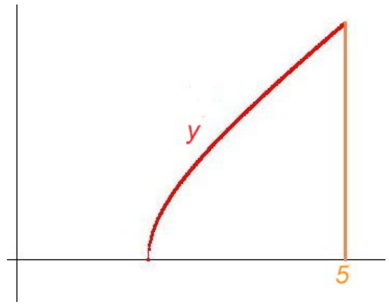
Objem vypočítame ako $V = V_1 - V_2$, kde V_1 je objem telesa, ktoré vzniklo rotáciou plochy ohraničenej funkciou $y = 1 - x^2$ a V_2 je objem telesa, ktoré vzniklo rotáciou plochy ohraničenej funkciou $y = x^2$. Aplikáciou vzorca (3.52) dostaneme

$$\begin{aligned} V &= V_1 - V_2 = \pi \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left((1-x^2)^2 - (x^2)^2\right) dx = \pi \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(1 - 2x^2 + x^4 - x^4\right) dx = \\ &= \pi \left[x - \frac{2}{3}x^3\right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\right) - \pi \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\right) = \\ &= 2\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3}\left(\frac{2\sqrt{2}}{8}\right)\right) = \frac{2\pi\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

□

Príklad 3.42 Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou plochy, ohraničenej krivkou $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ a priamkou $x = 5$, okolo osi x.

Riešenie: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ je hyperbola, ktorej jeden vrchol má súradnice $(2, 0)$. To znamená, že integrovať budeme na intervale $[2, 5]$. Rotujúca plocha je zhora ohraničená funkciou $y = \sqrt{\frac{9}{4}x^2 - 9}$. Rotuje „horná časť" hyperboly.



Obr. 3.9. Plocha, ohraničená hyperbolou $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ a priamkou $x = 5$

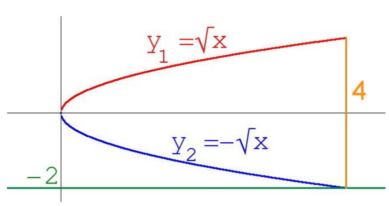
Aplikáciou vzorca (3.52) dostaneme

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_2^5 \left(\frac{9}{4} x^2 - 9 \right) dx = \pi \left[\frac{9}{4} \cdot \frac{x^3}{3} - 9x \right]_2^5 = \\ &= \pi \left(\frac{3}{4} 5^3 - 9 \cdot 5 \right) - \pi \left(\frac{3}{4} 2^3 - 9 \cdot 2 \right) = \frac{243}{4} \pi. \end{aligned}$$

□

Príklad 3.43 Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou plochy, ohraničenej krivkou $y^2 = x$ a priamkou $x = 4$, okolo priamky $y = -2$.

Riešenie: Krivka $y^2 = x$ je parabola s vrcholom $(0, 0)$, ktorej os súmernosti je priamka $y = 0$.



Obr. 3.10. Rotujúca plocha

Príklad prevedieme na predchádzajúce prípady posunutím rotujúcej plochy nahor, pričom táto plocha bude zhora ohraničená funkciou $y_1 = 2 + \sqrt{x}$ a zdola $y_2 = 2 - \sqrt{x}$.

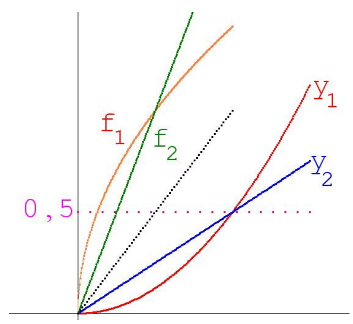
Z toho dostaneme

$$\begin{aligned} V &= V_1 - V_2 = \pi \int_0^4 \left((2+\sqrt{x})^2 - (2-\sqrt{2})^2\right) dx = \\ &= \pi \int_0^4 \left((4+4\sqrt{x}+x) - (4-4\sqrt{x}+x)\right) dx = 8\pi \int_0^4 \sqrt{x}\, dx = 8\pi \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \\ &= \frac{128}{3}\pi. \end{aligned}$$

□

Príklad 3.44 Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou plochy, ohraničenej krivkami $y_1 = \frac{x^2}{2}$ a $y_2 = \frac{|x|}{2}$, okolo osi y.

Riešenie: Prípad prevedieme na predchádzajúce úlohy tak, že namiesto daných funkcií budeme uvažovať funkcie k nim inverzné (pre $x \geq 0$).



Obr. 3.11. Funkcie $y_1,\ y_2$ a k nim inverzné

$y_1 = \frac{x^2}{2}$, k nej inverzná je $f_1(x) = \sqrt{2x}$.
$y_2 = \frac{|x|}{2}$, k nej inverzná je $f_2(x) = 2x$.
Nájdeme prienik funkcií f_1 a f_2:

$$2x = \sqrt{2x} \;\Rightarrow\; x_1 = 0,\; x_2 = \frac{1}{2}.$$

Potom objem bude

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left(2x - (2x)^2\right) dx = \pi \left[\frac{2x^2}{2} - \frac{4x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \pi \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{12}\pi.$$

□

Parametricky dané hranice rotačnej oblasti

Vo vzorci (3.52) spravíme substitúciu $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)\,dt$ a $y = \psi(t)$, $t \in [t_1, t_2]$. Potom dostaneme

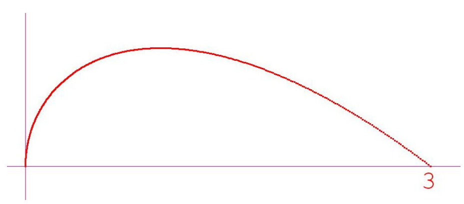
$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} \psi^2(t)|\varphi'(t)|\,dt. \tag{3.53}$$

Abslútna hodnota pri derivácii $\varphi'(t)$ zabezpečuje, že nemusíme rozlišovať „hornú" a „dolnú" hranicu rotujúcej krivky.

Príklad 3.45 Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou okolo osi x plochy, ohraničenej krivkou $\varphi(t) = t^2$, $\psi(t) = t - \frac{1}{3}t^3$ pre $t \in \left[0, \sqrt{3}\right]$.

Riešenie: $\varphi'(t) = 2t$. Dosadíme do (3.53):

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(t - \frac{1}{3}t^3\right)^2 2t\,dt = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(t^2 - \frac{2}{3}t^4 + \frac{1}{9}t^6\right) t\,dt = \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{2}{18}t^6 + \frac{1}{72}t^8\right]_0^{\sqrt{3}} = 2\pi\left(\frac{9}{4} - \frac{2\cdot 27}{18} + \frac{81}{72}\right) = 2\pi\left(\frac{9}{4} - 3 + \frac{9}{8}\right) = \frac{3}{4}\pi. \end{aligned}$$



Obr. 3.12. Rotujúca plocha

□

Príklad 3.46 Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou okolo osi y plochy, ohraničenej krivkou $\varphi(t) = t^2$, $\psi(t) = t - \frac{1}{3}t^3$, $t \in \left[0, \sqrt{3}\right]$ (pozri obr. 3.12) a priamkou $y = 0$.

Riešenie: Vymeníme úlohu osí x a y:

$$\tilde{\varphi}(t) = t - \frac{1}{3}t^3, \quad \tilde{\psi}(t) = t^2, \quad \tilde{\varphi}'(t) = 1 - t^2.$$

Z toho

$$|1 - t^2| = \begin{cases} 1 - t^2 & \text{pre } x \in [0, 1], \\ t^2 - 1 & \text{pre } x \in [1, \sqrt{3}]. \end{cases}$$

Aplikáciou vzorca (3.53) dostaneme:

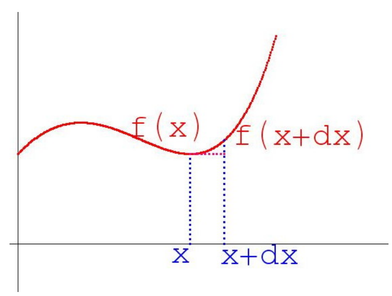
$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^{\sqrt{3}} \left(t^2\right)^2 |1-t^2|\,dt = \pi\int_0^1 t^4(1-t^2)\,dt + \pi\int_1^{\sqrt{3}} t^4(t^2-1)\,dt = \\ &= \pi\int_0^1 (t^4-t^6)\,dt + \pi\int_1^{\sqrt{3}} (t^6-t^4)\,dt = \pi\left[\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{7}t^7\right]_0^1 + \pi\left[\frac{1}{7}t^7-\frac{1}{5}t^5\right]_1^{\sqrt{3}} = \\ &= \pi\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\left(\frac{1}{7}(\sqrt{3})^7-\frac{1}{5}(\sqrt{3})^5\right)-\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{5}\right)\right) = \\ &= \pi\left(\frac{4}{35}+\frac{5\cdot 27\sqrt{3}-7\cdot 9\sqrt{3}}{35}\right) = \pi\frac{4+72\sqrt{3}}{35}. \end{aligned}$$

□

3.3.3 Dĺžka krivky

Explicitne daná funkcia (krivka)

Daná je funkcia f a zaujíma nás dĺžka jej časti, ohraničenej bodmi $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$. Interval $[a, b]$ rozdelíme na časti dĺžky dx tak, aby sme mohli zanedbat' zaoblenie funkcie f na tomto úseku (pozri obr. 3.13). Potom jeden element dĺžky môžeme počítat' za pomoci Pytagorovej vety



Obr. 3.13. Funkcia f a jeden jej úsek dĺžky dx

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{(f(x+dx)-f(x))^2+(dx)^2} = dx\sqrt{\left(\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}\right)^2+1} = \\ &= dx\sqrt{\left(\frac{df}{dx}(x)\right)^2+1}. \end{aligned}$$

Z toho dostaneme vzorec

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{\left(\frac{df}{dx}(x)\right)^2 + 1}\,dx. \tag{3.54}$$

Príklad 3.47 Vypočítajte dĺžku kružnice o polomere $r = 3$.

Riešenie: Rovnica kružnice so stredom $S = (0,0)$ a polomerom $r = 3$ je $x^2 + y^2 = 9$. Horná polkružnica je funkcia $y = \sqrt{9 - x^2}$. Z toho

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2}}.$$

Stačí nám počítať dĺžku polkružnice, označme ju $\hat{l}$. Potom zo vzorca (3.54) dostaneme

$$\hat{l} = \int\limits_{-3}^{3} \sqrt{1 + \frac{x^2}{9 - x^2}}\,dx = \int\limits_{-3}^{3} \frac{3}{\sqrt{9 - x^2}}\,dx.$$

Dostali sme nevlastný integrál. Preto musíme rozdeliť tento integrál na dva:

$$\begin{aligned} \hat{l} &= \int\limits_{-3}^{0} \frac{3}{\sqrt{9 - x^2}}\,dx + \int\limits_{0}^{3} \frac{3}{\sqrt{9 - x^2}}\,dx = \left[3\arcsin\tfrac{x}{3}\right]_{-3}^{0} + \left[3\arcsin\tfrac{x}{3}\right]_{0}^{3} = \\ &= \left(0 + 3\frac{\pi}{2}\right) + \left(3\frac{\pi}{2} - 0\right) = 3\pi. \end{aligned}$$

Z toho dostaneme dĺžku kružnice $l = 6\pi$. □

Príklad 3.48 Vypočítajte dĺžku logaritmickej krivky $f(x) = \ln x$ pre $x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}]$.

Riešenie: $f'(x) = \frac{1}{x}$, po dosadení do (3.54) dostaneme

$$\begin{aligned} l &= \int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\,dx = \int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\,dx = \underbrace{\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\frac{x}{x}\,dx}_{\substack{1+x^2 = t^2, \quad 2x\,dx = 2t\,dt \\ t_1^2 = 4, t_1 = 2, \quad t_2^2 = 9, t_2 = 3}} = \\ &= \int\limits_2^3 \frac{t \cdot t\,dt}{t^2 - 1} = \int\limits_2^3 \frac{t^2 - 1 + 1}{t^2 - 1}\,dt = \int\limits_2^3 \left(1 + \frac{1}{(t-1)(t+1)}\right)dt. \end{aligned}$$

Rozkladom na parciálne zlomky dostaneme

$$\frac{1}{t^2 - 1} = \frac{A}{t - 1} + \frac{B}{1 + t} \quad \Rightarrow \quad 1 = A(t+1) + B(t-1).$$

Pre $t = 1$ dostaneme $A = \frac{1}{2}$, pre $t = -1$ vyjde $B = -\frac{1}{2}$. Potom

$$\begin{aligned} l &= \int_2^3 \left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t+1}\right) dt = \left[t + \frac{1}{2}\ln(t-1) - \frac{1}{2}\ln(t+1)\right]_2^3 = \\ &= \left[t + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\right]_2^3 = \left(3 + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}\right) - \left(2 + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}\right) = 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

□

Parametricky daná funkcia (krivka)

Vo vzorci (3.54) spravíme subsitúciu $x = \varphi(t),\ f(x) = \psi(t)$ a $\frac{df}{dx}(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, $t \in [t_1, t_2]$. Potom

$$l = \int_{t_1}^{t_2} |\varphi'(t)| \sqrt{\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2 + 1}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{d\psi}{dt}(t)\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt}(t)\right)^2}\, dt. \tag{3.55}$$

Príklad 3.49 Vypočítajte dĺžku hviezdice $\varphi(t) = \cos^3 t,\ \psi(t) = \sin^3 t$ pre $t \in [0, 2\pi]$.

Riešenie: $\varphi'(t) = -3\cos^2 t \cdot \sin t,\ \psi'(t) = 3\sin^2 t \cdot \cos t$. Z toho dostaneme

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{9\cos^4 t \cdot \sin^2 t + 9\cos^2 t \cdot \sin^4 t}\, dt = 3\int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t \cdot \sin^2 t \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}\, dt = \\ &= 3\int_0^{2\pi} |\cos t \cdot \sin t|\, dt = 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \sin t\, dt = 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2t}{2}\, dt = \\ &= 12\left[-\frac{\cos 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 3(-\cos\pi + \cos 0) = 6. \end{aligned}$$

□

Príklad 3.50 Vypočítajte dĺžku cykloidy $\varphi(t) = t - \sin t$, $\psi(t) = 1 - \cos t$ pre $t \in [0, 2\pi]$.

Riešenie: $\varphi'(t) = 1 - \cos t$, $\psi'(t) = \sin t$. Z toho

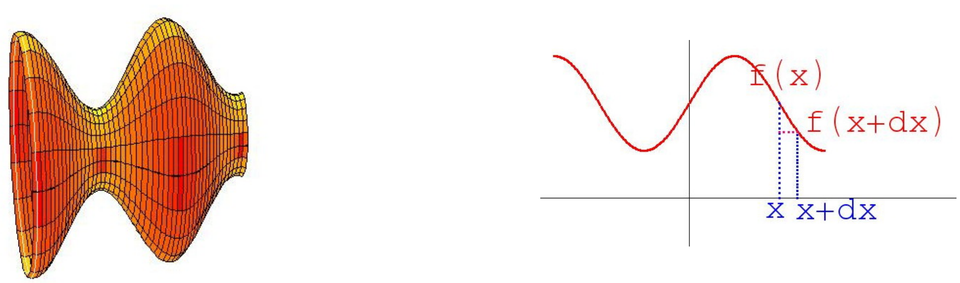
$$\begin{aligned}
l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\, dt = \\
&= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos\left(2\frac{t}{2}\right)}\, dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \left(\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)}\, dt = \\
&= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\, dt = 2\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right)\, dt = 2\left[-2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = \\
&= 4(-\cos\pi + \cos 0) = 8.
\end{aligned}$$

□

3.3.4 Obsah rotačnej plochy

Explicitne dané hranice rotačnej plochy

Daná je krivka (funkcia f), ktorá rotuje okolo osi x (obr. 3.14) a vytvára rotačnú plochu. Plochu rozdelíme na „rovnobežné časti", kolmé na os x, ktorých hrúbka je dx. Zaoblenie krivky na jednotlivých častiach plochy zanedbáme.



Obr. 3.14. Rotačná plocha a krivka, ktorá ho vytvára

Obsah jedného dielika (elementu plochy) je

$$dS = \underbrace{2\pi|f(x)|}_{\text{obvod}} \underbrace{\sqrt{(f(x+dx) - f(x))^2 + (dx)^2}}_{\text{šírka plochy}} = 2\pi|f(x)| \cdot \sqrt{\left(\frac{df}{dx}(x)\right)^2 + 1}\, dx.$$

Z toho dostaneme

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{\left(\frac{df}{dx}(x)\right)^2 + 1}\, dx. \tag{3.56}$$

Príklad 3.51 Vypočítajte obsah plochy, ktorá vznikne rotáciou krivky $y = \frac{x^3}{3}$ okolo osi x, $x \in [0,1]$.

Riešenie: $y' = x^2$. Dosadíme do vzorca (3.56):

$$S = \underbrace{2\pi \int_0^1 \frac{x^3}{3}\sqrt{1+x^4}\,dx}_{\substack{1+x^4=t, \quad 4x^3\,dx = dt \\ t_1 = 1, \quad t_2 = 2}} = \frac{2\pi}{3}\cdot\frac{1}{4}\int_1^2 \sqrt{t}\,dt = \frac{\pi}{6}\left[\frac{2}{3}\cdot t^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{\pi}{9}(2^{\frac{3}{2}}-1) = \frac{\pi}{9}(2\sqrt{2}-1). \qquad \square$$

Príklad 3.52 Vypočítajte obsah plochy, ktorá vznikne rotáciou krivky $y = \cosh x$ okolo osi x, $x \in [0,1]$.

Riešenie: $y' = \sinh x$. Dosadením do vzorca (3.56) dostaneme:

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^1 \cosh x \overbrace{\sqrt{\sinh^2 x + 1}}^{=\sqrt{\cosh^2 x}}\,dx = \underbrace{2\pi\int_0^1 \cosh^2 x\,dx}_{\substack{u=\cosh x, \quad u' = \sinh x \\ v' = \sinh x, \quad v = \sinh x}} = \\ &= 2\pi\left(\underbrace{[\cosh x\cdot\sinh x]_0^1}_{=\frac{1}{2}\sinh 2x} - \int_0^1 \sinh^2 x\,dx\right) = \\ &= \pi\underbrace{[\sinh 2x]_0^1}_{=\sinh 2} - 2\pi\int_0^1 (\cosh^x - 1)\,dx = \sinh 2x + 2\pi[x]_0^1 - 2\pi\int_0^1 \cosh^2 x\,dx. \end{aligned}$$

Z toho dostaneme

$$S = 2\pi\int_0^1 \cosh^2 x\,dx = \frac{1}{2}(\sinh 2 + 2\pi). \qquad \square$$

Parametricky dané hranice rotačnej plochy

Vo vzorci (3.56) spravíme substitúciu $x = \varphi(t)$ $(dx = \varphi'(t)\,dt)$, $y = \psi(t)$, $t \in [t_1, t_2]$. Rovnakými úpravami, aké sme použili pri vzorci na dĺžku parametricky danej krivky, dostaneme:

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |\psi(t)| \sqrt{\left(\frac{d\psi}{dt}(t)\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt}(t)\right)^2}\, dt. \tag{3.57}$$

Príklad 3.53 Vypočítajte obsah plochy, ktorá vznikne rotáciou krivky $\varphi(t) = e^t \cdot \sin t$, $\psi(t) = e^t \cdot \cos t$ okolo osi x, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

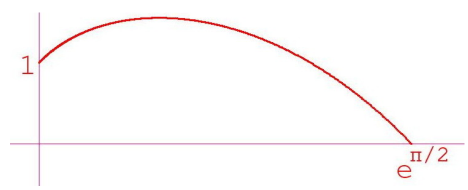
Riešenie: Vypočítame derivácie

$$\varphi'(t) = e^t \cdot \sin t + e^t \cos t, \quad \psi'(t) = e^t \cdot \cos t - e^t \cdot \sin t.$$

Z toho dostaneme

$$\sqrt{\left(\frac{d\psi}{dt}(t)\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt}(t)\right)^2} = \sqrt{e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 + e^{2t}(\cos t - \sin t)^2} =$$

$$= e^t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 2\cos t \cdot \sin t + \cos^2 t + \sin^2 t - 2\cos t \cdot \sin t} = \sqrt{2} \cdot e^t. \tag{3.58}$$



Obr. 3.15. Krivka, vytvárajúca rotačnú plochu

Dosadíme (3.58) do (3.57):

$$S = \underbrace{2\pi\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t} \cdot \cos t\, dt}_{\substack{u = e^{2t}, \quad u' = 2e^{2t} \\ v' = \cos t, \quad v = \sin t}} = 2\pi\sqrt{2} \left[e^{2t} \sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\pi\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2e^{2t} \cdot \sin t\, dt =$$

$$= 2\pi\sqrt{2} \cdot e^{\pi} - \underbrace{4\pi\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t} \cdot \sin t\, dt}_{\substack{u = e^{2t}, \quad u' = 2e^{2t} \\ v' = \sin t, \quad v = -\cos t}} =$$

$$= 2\pi\sqrt{2} \cdot e^{\pi} - 4\pi\sqrt{2} \left(\underbrace{\left[-e^{2t} \cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=1} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-2e^{2t} \cdot \cos t)\, dt \right).$$

Na oboch stranách rovnice je rovnaký integrál. Z toho
$S = 2\pi\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t}\cdot\cos t\,dt = \frac{2}{5}\pi\sqrt{2}\cdot(e^{\pi}-2).$ □

Príklad 3.54 Vypočítajte obsah plochy, ktorá vznikne rotovaním časti hviezdice $\varphi(t)=\cos^3 t,\ \psi(t)=\sin^3 t$ okolo osi x, $t\in[0,\pi]$.

Riešenie: $\varphi'(t) = -3\cos^2 t\cdot\sin t, \psi'(t) = 3\sin^2 t\cdot\cos t$. Z toho

$$\sqrt{\left(\frac{d\psi}{dt}(t)\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dt}(t)\right)^2} = \sqrt{9\sin^2 t\cos^4 t+9\sin^4 t\cdot\cos^2 t} = 3|\sin t\cdot\cos t|.$$

Vzhľadom na symetriu hviezdice je $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin^3 t(\sin t\cdot\cos t)\,dt = \int\limits_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} 3\sin^3 t(\sin t\cdot\cos t)\,dt$. Preto

$$\begin{aligned} S &= 4\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin^3 t(\sin t\cdot\cos t)\,dt = \underbrace{12\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cdot\cos t\,dt}_{\substack{\sin t = u, \quad \cos t\,dt = du\\ u_1=0, \quad u_2=1}} = \\ &= 12\pi\int\limits_0^1 u^4\,du = 12\pi\left[\frac{u^5}{5}\right]_0^1 = \frac{12}{5}\pi. \end{aligned}$$

□

3.4 Fyzikálne aplikácie určitých integrálov: hmotnosť, statický moment a ťažisko hmotnej tyče

Funkcia f, definovaná na intervale $[0,a]$, predstavuje (jednorozmernú) hustotu tyče dĺžky a. Potom

$$m = \int\limits_0^a f(x)\,dx, \tag{3.59}$$

$$M = \int\limits_0^a x\cdot f(x)\,dx, \tag{3.60}$$

$$T = \frac{M}{m} \tag{3.61}$$

predstavujú postupne hmotnosť, statický moment a ťažisko tyče.

Príklad 3.55 Nech $f(x) = \cosh x$ [kg m^{-1}], pre $x \in [0,1]$ predstavuje hustotu tyče dĺžky 1 m. Vypočítajte jej hmotnosť, statický moment a ťažisko.

Riešenie: Pri výpočte budeme potrebovať hodnoty funkcií sinh a cosh. Bezprostredne z definície dostaneme

$$\sinh 0 = 0, \quad \sinh 1 = \frac{e^2-1}{2e}, \quad \cosh 0 = 1, \quad \cosh 1 = \frac{e^2+1}{2e}.$$

Podľa vzorca (3.59) je hmotnosť tyče rovná

$$m = \int_0^1 \cosh x \, dx = [\sinh x]_0^1 = \sinh 1 = \frac{e^2-1}{2e} \,[\mathrm{kg}]. \tag{3.62}$$

Pre jej statický moment platí

$$\begin{aligned} M &= \underbrace{\int_0^1 x \cdot \cosh x \, dx}_{\substack{u = x, \quad u' = 1 \\ v' = coshx, \quad v = \sinh x}} = [x \cdot \sinh x]_0^1 - \int_0^1 \sinh x \, dx = \\ &= \sinh 1 - [\cosh x]_0^1 = \frac{e^2-1}{2e} - \frac{e^2+1}{2e} + 1 = 1 - e^{-1} \,[\mathrm{kg\,m}]. \end{aligned} \tag{3.63}$$

Zo vzťahov (3.62) a (3.63) dostaneme súradnicu ťažiska:

$$T = \frac{1-e^{-1}}{\frac{e^2-1}{2e}} = \frac{\frac{e-1}{e}}{\frac{e^2-1}{2e}} = 2\frac{e-1}{e^2-1} \,[\mathrm{m}].$$

□

3.5 Cvičenia

Cvičenie 3.1 Vypočítajte substitučnou metódou:

(a) $\int x^2 \cdot \sin(5x^3)\,dx$, **(b)** $\int e^{5x}\,dx$, **(c)** $\int \frac{3^x}{\sqrt{1-9^x}}\,dx$,
(d) $\int \frac{1}{(2x+3)^4}\,dx$, **(e)** $\int \sqrt[8]{2x+7}\,dx$, **(f)** $\int \frac{x^5}{\sqrt[3]{10-x^6}}\,dx$,
(g) $\int \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$, **(h)** $\int \frac{\ln^4 x}{x}\,dx$, **(i)** $\int e^x \cdot \operatorname{cotg}(e^x)\,dx$,
(j) $\int \frac{1}{\sin x}\,dx$, **(k)** $\int \frac{x^2}{\sin x^3}\,dx$, **(l)** $\int \operatorname{cotg}(2x+1)\,dx$,
(m) $\int \frac{3x^2}{\cos^2(x^3-1)}\,dx$, **(n)** $\int x \cdot \operatorname{tg}(1-x^2)\,dx$, **(o)** $\int \frac{\ln(\operatorname{arctg} x)}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}\,dx$,
(p) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$, **(q)** $\int x \cdot \ln(3+x^2)\,dx$, **(r)** $\int \cos x \cdot \sin x\,dx$,
(s) $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\,dx$, **(t)** $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^5 x}}\,dx$, **(u)** $\int \frac{\cos x}{25+\sin^2 x}\,dx$.

Cvičenie 3.2 Vypočítajte metódou per partes (+substit.):

(a) $\int \ln x^2\,dx$, **(b)** $\int \operatorname{arctg} x\,dx$, **(c)** $\int x \ln x\,dx$,
(d) $\int x \cdot \operatorname{arctg} x\,dx$, **(e)** $\int x \ln^2 x\,dx$, **(f)** $\int \ln(1+x^2)\,dx$,
(g) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$, **(h)** $\int \cos(\ln x)\,dx$, **(i)** $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx$,
(j) $\int e^x \cdot \cos 2x\,dx$, **(k)** $\int \arccos x\,dx$, **(l)** $\int \sin x \cdot \cos(3x)\,dx$,
(m) $\int \sqrt{x} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x}\,dx$, **(n)** $\int \sinh^2 x\,dx$, **(o)** $\int \sinh 3x \cdot \cosh 2x\,dx$.

Cvičenie 3.3 Vypočítajte rozkladom na parciálne zlomky:

(a) $\int \frac{1}{3x^2-11x+6}\,dx$, **(b)** $\int \frac{1}{(x-1)x^2}\,dx$, **(c)** $\int \frac{3x^2+30x-120}{(x-2)(x+2)(x-5)}\,dx$,
(d) $\int \frac{x^2-2x+3}{(x+2)(x^2-6x+10)}\,dx$, **(e)** $\int \frac{3x-4}{(x-2)(x-1)^3}\,dx$, **(f)** $\int \frac{dx}{2(x+4)\left(x-\frac{3}{2}\right)}\,dx$,
(g) $\int \frac{9x^4+3x^3-23x^2+x}{9(x-1)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)}\,dx$, **(h)** $\int \frac{2x^3-16x^2+23x-1}{(x-1)(x-2)(x-5)}\,dx$, **(i)** $\int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}\,dx$,
(j) $\int \frac{x-1}{(x+1)(x+2)^2}\,dx$, **(k)** $\int \frac{2x^2+5x+4}{(1+4x^2)(x-3)}\,dx$, **(l)** $\int \frac{x^3+5x^2-2x+5}{x(1+x^2)}\,dx$.

Cvičenie 3.4 Vypočítajte integrály:

(a) $\int \sin^2 x\,dx$, **(b)** $\int \frac{x}{x+\sqrt{x}}\,dx$, **(c)** $\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$, **(d)** $\int \sin x \cdot \cos^5 x\,dx$,
(e) $\int \operatorname{cotg}^2 x\,dx$, **(f)** $\int x^2 \cos x\,dx$, **(g)** $\int \operatorname{tgh} x\,dx$, **(h)** $\int x \cdot e^{-x^2}\,dx$,
(i) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$, **(j)** $\int \frac{e^x}{e^{2x}+4}\,dx$, **(k)** $\int \frac{1}{\cos x}\,dx$, **(l)** $\int \frac{1}{\sin x \cos x}\,dx$,
(m) $\int x^2 \cdot \ln x\,dx$, **(n)** $\int x^2 \operatorname{arctg} x\,dx$, **(o)** $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$, **(p)** $\int \frac{\ln^4 x}{x}\,dx$,
(q) $\int e^{\cos x} \sin x\,dx$, **(r)** $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$.

Cvičenie 3.5 Vypočítajte určité integrály:

(a) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$, **(b)** $\int_{-1}^1 e^x\,dx$, **(c)** $\int_0^1 (e^x+1)^3 e^{2x}\,dx$,
(d) $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$, **(e)** $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}\,dx$, **(f)** $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x\cdot\sqrt{1-(\ln x)^2}}\,dx$,

(g) $\int\limits_0^{\pi} \cos x\, dx$, (h) $\int\limits_0^{\pi} \cos^2 \frac{\varphi}{2}\, d\varphi$, (i) $\int\limits_0^{\ln 2} x \cdot \cosh x\, dx$,

(j) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x\, dx$, (k) $\int\limits_3^{7} \frac{x}{x^2-4}\, dx$, (l) $\int\limits_0^{1} \sqrt{1+x}\, dx$,

(m) $\int\limits_0^{1} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\, dx$, (n) $\int\limits_0^{4} \frac{\sqrt{x}}{x+1}\, dx$, (o) $\int\limits_{-1}^{1} \arccos x\, dx$,

(p) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin x\, dx$, (q) $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x \cdot \sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\, dx$, (r) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \sin^2 x\, dx$,

(s) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{3\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}}\, dx$, (t) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x \cdot \operatorname{arctg} x\, dx$, (u) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi}{6-5\cos\varphi+\cos^2\varphi}\, d\varphi$,

(v) $\int\limits_0^{1} x \cdot e^{-x}\, dx$, (w) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin x\, dx$, (x) $\int\limits_1^{e} \ln x\, dx$,

(y) $\int\limits_1^{2} x \cdot \ln x\, dx$, (z) $\int\limits_0^{1} x^3 \cdot e^{2x}\, dx$.

Cvičenie 3.6 V nasledujúcich úlohách vypočítajte obsah plochy, ohraničenej danými krivkami:

(a) $y = 6x, \quad y = 0, \quad y = 4 - 2x$, **(b)** $y = x^2 - 2x, \quad y = x$,
(c) $x + y = 2, \quad y = -x^2 + 4x - 2$, **(d)** $y = x^2, \quad y^2 = x$,
(e) $y = x^2 - x - 6,\ y = -x^2 + 5x + 14$, **(f)** $y = \frac{x^2}{4}, \quad y = 2\sqrt{x}$,
(g) $y = 2x^2, \quad y = x^2, \quad y = 1$, **(h)** $y = x^3, \quad y = 4x$,
(i) $y = 2x^3, \quad y^2 = 4x$, **(j)** $xy = 4, \quad x + y = 5$,
(k) $y = e^x, \quad y = e^{-x}, \quad x = \ln 2$, **(l)** $x = 0, \quad x = \frac{1}{2}, \quad y = 0, \quad y = xe^{-2x}$,
(m) $y = \ln x, \quad y = \ln^2 x$,
(n) $y = \frac{1}{a} \cosh\left(\frac{x}{a}\right), \quad x = 0, \quad y = 0, \quad x = a$,
(o) $x = \frac{\pi}{2}, \quad x = \pi, \quad y = 0, \quad y = x\cos\left(\frac{x}{3}\right)$,
(p) $y = x, \quad y = x + \sin^2 x, \quad x = 0, \quad x = \pi$,
(q) $y = e^{-x} \sin x,\ y = 0$ pre $x \in [0, \pi]$,
(r) $y = x^2 - 6x + 8$ a jej dotyčnice v bodoch $A = (1, 3), \quad B = (4, 0)$,
(s) os x a $y = x^3 + 3x^2 - 5x + 4$ pre $x \in [0, 6]$,
(t) $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1, \quad y = x - 1, \quad y = 2x - 2$ pre $x \geq 1$,
(u) $y^2 = x, \quad x \cdot y = 8$, polpriamka $x = 8,\ y \leq 1$.

Cvičenie 3.7 V nasledujúcich úlohách vypočítajte obsah plochy, ohraničenej krivkou, danou parametrickými rovnicami:

(a) $x = 3t^2,\ y = 3t - t^3,\ t \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, **(b)** $x = 2t - t^2, \quad y = 2t^2 - t^3$ pre $t \in [0, 2]$,
(c) $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$ pre $a > 0, \quad t \in [0, 2\pi]$,
(d) $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t, \quad a > 0$.

Cvičenie 3.8 Vypočítajte objem rotačného kužeľa s polomerom podstavy $r = 3\,\text{cm}$ a výškou $h = 2\,\text{cm}$.

Cvičenie 3.9 Vypočítajte objem rotačného elipsoidu s dĺžkami poloosí $a = 3$ a $b = c = 2$.

Cvičenie 3.10 V nasledujúcich úlohách vypočítajte objemy telies, ktoré vznikli rotáciou elementárnej oblasti, určenej danými krivkami, okolo osi x:

(a) $y = x^2,\ y^2 = x$,
(b) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ x = k$ pre $k > a$,
(c) $y = \frac{2x}{\pi},\ y = \sin x$ pre $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,
(d) $x = 0,\ x = \frac{1}{4},\ y = 0,\ y = a\cos 2\pi x$,
(e) $3x - 4y + 5 = 0,\ y = -x^2 + \frac{7}{4}x + \frac{5}{4}$,
(f) $x = t^2,\ y = t - \frac{t^3}{3}$ pre $0 \le t \le \sqrt{3}$,
(g) $y = 1 - x^2,\ y = x^2$,
(h) $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t$ pre $t \in [0, 2\pi]$.

Cvičenie 3.11 V nasledujúcich úlohách vypočítajte objemy telies, ktoré vznikli rotáciou elementárnej oblasti, určenej danými krivkami, okolo osi y:
(a) $x = 0, \quad y^2 + x - 4 = 0$, **(b)** $y = \frac{x^2}{2}, \quad y = \frac{x}{2}$,
(c) $y = e^{-x},\ x = 0, y = a$ pre $a > 1$.

Cvičenie 3.12 V nasledujúcich úlohách vypočítajte objemy telies, ktoré vznikli rotáciou elementárnej oblasti, určenej danými krivkami:
(a) $y^2 = x,\ x = 4$ okolo priamky $y = -2$,
(b) $y = 4 - x^2,\ y = 0$ okolo priamky $x = 3$,
(c) $x = (t - \sin t), \quad y = (1 - \cos t)$ pre $t \in [\pi, 2\pi]$, okolo priamky $x = \pi$.

Cvičenie 3.13 Vypočítajte dĺžku krivky:
(a) $y = \cosh x$ pre $x \in [0, 1]$, **(b)** $y = \ln x$ pre $x \in \left[\sqrt{8}, \sqrt{15}\right]$.

Cvičenie 3.14 V nasledujúcich úlohách vypočítajte dĺžku krivky danej parametricky:
(a) $x = a(\cos t + t\sin t),\ y = a(\sin t - t\cos t)$ pre $a > 0,\ t \in [0, 2\pi]$,
(b) $x = \cos t, \quad y = \sin t$ pre $t \in [0, \pi]$,
(c) $x = 2t\cos t + (t^2 - 2)\sin t,\ y = 2t\sin t - (t^2 - 2)\cos t$ pre $t \in [0, \pi]$.

Cvičenie 3.15 Vypočítajte povrch gule s polomerom r.

Cvičenie 3.16 V nasledujúcich úlohách vypočítajte obsahy rotačných plôch, ktoré vznikli rotáciou danej krivky okolo osi x:
(a) $y = x^3$ pre $-\frac{2}{3} \le x \le \frac{2}{3}$,
(b) $y = e^{-x}$ pre $0 \le x \le 1$,
(c) $y^2 = 4ax$ pre $0 \le x \le 3a,\ a > 0$.

Cvičenie 3.17 V nasledujúcich úlohách vypočítajte obsahy rotačných plôch, ktoré vznikli rotáciou danej parametrickej krivky okolo osi x:
(a) $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$ pre $t \in [0, 2\pi]$ a $a > 0$,
(b) $x = e^{2t}\sin t,\ y = e^{2t}\cos t$ pre $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$,
(c) $x = a\sin 2t, \quad y = 2a\sin^2 t$ pre $a > 0,\ t \in [0, \pi]$.

Cvičenie 3.18 Hustota tyče je daná funkciou $\rho(x) = -x(x-2)$ $\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}\right]$ pre $x \in [0,2]$. Vypočítajte jej hmotnosť, statický moment a polohu ťažiska.

Cvičenie 3.19 Hustota tyče je daná funkciou $\rho(x) = e^{-x}$ $\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}\right]$ pre $x \in [0,1]$. Vypočítajte jej hmotnosť a polohu ťažiska.

Kapitola 4

Obyčajné diferenciálne rovnice

4.1 Úvod

4.1.1 Komplexné čísla

Spôsoby vyjadrenia komplexných čísel

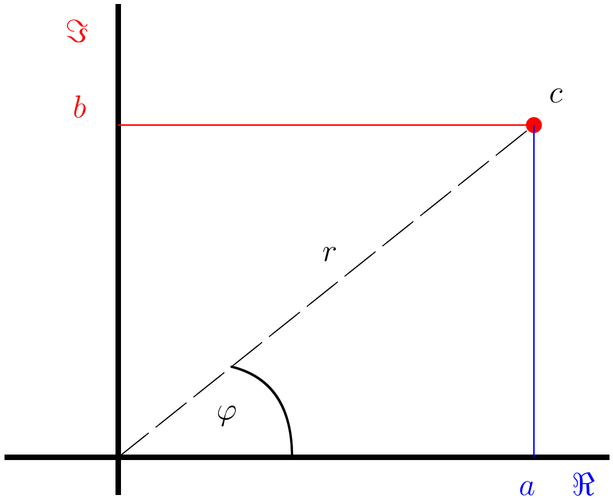
Množinu všetkých komplexných čísel označíme $\mathbb{C}$. Graficky si komplexné čísla môžeme predstaviť ako body v rovine, teda sú to vektory $c = (a, b)$, kde a sa volá *reálna časť čísla* c a b sa volá *imaginárna časť čísla* c. Reálna a imaginárna časť sa označujú postupne $\Re(c) = a$ a $\Im(c) = b$. **Treba si uvedomiť, že reálna aj imaginárna časť komplexného čísla sú reálne čísla.** Komplexné číslo $(0, 1)$ sa volá *imaginárna jednotka* a označuje sa $\imath$. Reálne číslo a v množine $\mathbb{C}$ zodpovedá vektoru $(a, 0)$. V našich úvahách nebudeme robiť rozdiely medzi číslom $a \in \mathbb{R}$ a $(a, 0) \in \mathbb{C}$. Rovnako číslo $(0, b) \in \mathbb{C}$ budeme označovať $\imath b$. Pri tomto označení môžeme komplexné číslo $c = (a, b)$ vyjadriť v tvare

$$c = a + \imath b. \tag{4.1}$$

Vyjadrenie komplexného čísla $c = (a, b)$ v tvare (4.1) voláme *algebrický tvar* komplexného čísla c.

Číslo $\imath$ môžeme vyjadriť ako jeden z komplexných koreňov rovnice $x^2 = -1$. Z toho bezprostredne vyplýva

$$\imath^2 = -1, \quad \imath^3 = -\imath, \quad \imath^4 = 1, \quad \imath^5 = \imath, \ldots \quad \text{(zvykne sa písať aj } \imath = \sqrt{-1}.\text{)}$$



Obr. 4.1. Grafické vyjadrenie komplexného čísla c

Z obrázka 4.1 je zrejmé, že platí vzťah

$$c = a + \imath b = r \cdot (\cos(\varphi) + \imath \sin(\varphi)). \tag{4.2}$$

Vyjadrenie na pravej strany rovnice (4.2) sa volá *goniometrický tvar* komplexného čísla c. Hodnota $r = |c|$ sa volá *absolútna hodnota* komplexného čísla c a hodnota φ sa volá *amplitúda* komplexného čísla c. Ak $|c| = 1$, tak číslo c voláme *komplexná jednotka*.

Pripomeňme si Taylorov polynóm pre funkcie cos, sin, e^t:

$$\begin{aligned}
T_{2n}(\cos, 0, x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, && (4.3)\\
T_{2n}(\sin, 0, x) &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, && (4.4)\\
T_{2n}(e^t, 0, t) &= 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^{2n}}{(2n)!}. && (4.5)
\end{aligned}$$

Dosaďme $t = \imath \cdot x$ do (4.5):

$$T_{2n}(e^{\imath x}, 0, t) = 1 + \imath \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \imath \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \imath \frac{x^5}{5!} + \cdots + \imath^{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \tag{4.6}$$

Z toho, porovnaním vzťahov (4.3), (4.4) a (4.6) dostaneme

$$e^{\imath x} = \cos x + \imath \sin x.$$

Vo všeobecnosti pre ľubovoľné komplexné číslo $\alpha + \imath \varphi$ platí vzťah

$$e^{\alpha + \imath \varphi} = e^{\alpha}(\cos \varphi + \imath \sin \varphi), \tag{4.7}$$

kde $e^{\alpha} = r$ je absolútna hodnota komplexného čísla. Vyjadrenie na ľavej strane rovnice (4.7) voláme *exponenciálny tvar* komplexného čísla. Pre reálnu a imaginárnu časť komplexného čísla s absolútnou hodnotou $r = e^{\alpha}$ a amplitúdou φ platí

$$\begin{aligned} \Re(r(\cos\varphi + \imath\sin\varphi)) &= \Re\left(e^{\alpha+\imath\varphi}\right) = e^{\alpha}\cos\varphi, \\ \Im(r(\cos\varphi + \imath\sin\varphi)) &= \Im\left(e^{\alpha+\imath\varphi}\right) = e^{\alpha}\sin\varphi. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Aritmetika komplexných čísel

- *Súčet komplexných čísel:*

  $$(a_1 + \imath\, b_1) + (a_2 + \imath\, b_2) = (a_1 + a_2) + \imath(b_1 + b_2).$$

- *Súčin komplexných čísel:*

  $$\begin{aligned} (a_1 + \imath\, b_1)\cdot(a_2 + \imath\, b_2) &= (a_1a_2 - b_1b_2) + \imath(a_1b_2 + a_2b_1), \\ e^{\alpha_1+\imath t\varphi_1}\cdot e^{\alpha_2+\imath\varphi_2} &= e^{(\alpha_1+\alpha_2)+\imath(\varphi_1+\varphi_2)}, \\ &= e^{\alpha_1}\cdot e^{\alpha_2}\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \imath\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right). \end{aligned}$$

  Posledné vyjadrenie súčinu znamená, že násobíme absolútne hodnoty a sčítavame amplitúdy komplexných čísel.

- *Umocňovanie komplexných čísel:*

  $$\left(e^{\alpha+\imath\varphi}\right)^n = e^{n\cdot\alpha+\imath n\cdot\varphi} = (e^{\alpha})^n\cdot\left(\cos(n\,\varphi) + \imath\sin(n\,\varphi)\right).$$

  Keď umocňujeme komplexné číslo na n-tú ($n \in \mathbb{R}$), tak umocňujeme absolútnu hodnotu a pôvodnú amplitúdu φ násobíme.

Komplexne združené čísla a korene polynómov

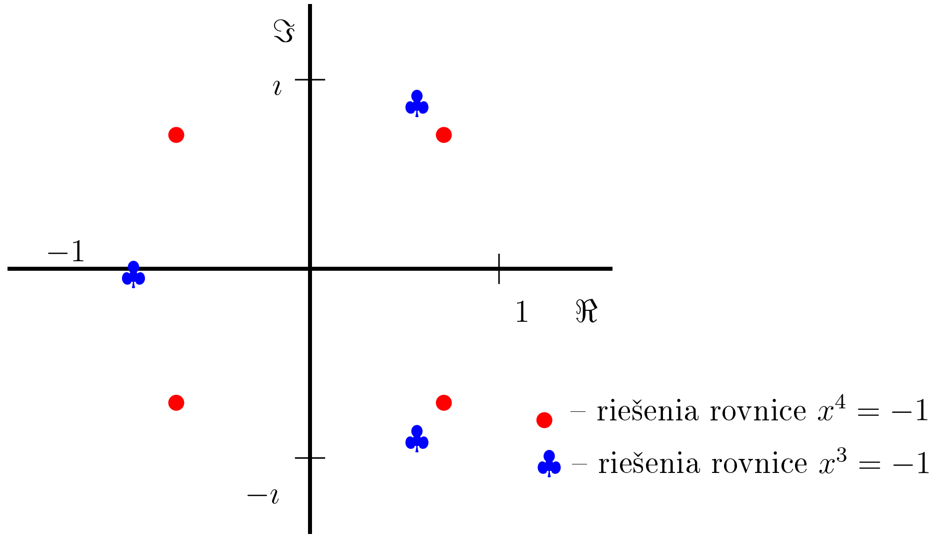
Lema 4.1 *Majme komplexné čísla $c_1 = a_1 + \imath\, b_1$ a $c_2 = a_2 + \imath\, b_2$ a predpokladajme, že aspoň jedno z čísel b_1, b_2 sa nerovná 0. Potom platí*

$$c_1 + c_2 \in \mathbb{R} \quad \text{a súčasne} \quad c_1\cdot c_2 \in \mathbb{R} \quad \text{práve vtedy, keď} a_1 = a_2 \quad \text{a súčasne} \quad b_1 = -b_2.$$

Pre $c = a + \imath\, b$ označíme $\bar{c} = a - \imath\, b$. Číslo $\bar{c}$ sa nazýva *komplexne združené s číslom c.*

Vieme, že polynóm n-tého stupňa môže mať menej ako n reálnych koreňov. Pre komplexné korene polynómu platí veta:

Veta 4.1 *Nech P_n je ľubovoľný polynóm n-tého stupňa s reálnymi koeficientami. Potom*
(a) *P_n má n komplexných koreňov (vrátane násobnosti),*
(b) *ak c s $\Im(c) \neq 0$ je koreňom polynómu P_n, tak aj $\bar{c}$ je koreňom polynómu P_n.*



Obr. 4.2. Grafické vyjadrenie riešení rovníc $x^4 = -1$ a $x^3 = -1$

Zo vzt'ahu pre umocňovanie komplexných čísel dostaneme hodnoty amplitúd jednotlivých riešení:
Pre rovnicu $x^4 = -1$: $\quad 4\varphi = \pi + 2k\pi$, z toho
$\varphi_1 = \frac{\pi}{4},\ \varphi_2 = \frac{3}{4}\pi,\ \varphi_3 = \frac{5}{4}\pi,\ \varphi_4 = \frac{7}{4}\pi.$
Pre rovnicu $x^3 = -1$: $\quad 3\varphi = \pi + 2k\pi$, z toho
$\varphi_1 = \frac{\pi}{3},\ \varphi_2 = \pi,\ \varphi_3 = \frac{5}{3}\pi.$

4.1.2 Základné pojmy teórie diferenciálnych rovníc

Obyčajná diferenciálna rovnica n-tého rádu je rovnica, v ktorej vystupuje premenná x, neznáma funkcia y (funkcia premennej x) a jej derivácie až po deriváciu n-tého rádu. Symbolicky si diferenciálnu rovnicu n-tého rádu môžeme vyjadrit' takto:

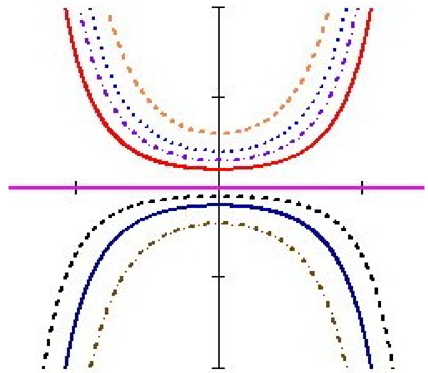
$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

kde f je známa funkcia.

Vezmime si diferenciálnu rovnicu 1. rádu

$$x \cdot y' - x^2(y-1) = x^2. \tag{4.9}$$

Jej riešením je funkcia $y = k \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$, kde $k \in \mathbb{R}$ je l'ubovol'ná konštanta. Hovoríme o *všeobecnom riešení diferenciálnej rovnice*, lebo zahŕňa všetky riešenia diferenciálnej rovnice (4.9). Vidíme, že daná diferenciálna rovnica nemá jednoznačné riešenie. Jej riešenia pre niektoré hodnoty konštanty k si zobrazíme graficky.



Obr. 4.3. Riešenia diferenciálnej rovnice (4.9)

Jednotlivé grafické riešenia (krivky na obrázku 4.3) sa volajú *integrálne krivky*. Všetky integrálne krivky v danom prípade vyplnia celú rovinu $\mathbb{R}^2$. (Vo všeobecnosti, integrálne krivky nemusia vyplniť celú rovinu $\mathbb{R}^2$, ale len nejakú jej podmnožinu – oblasť.) Súčasne každým bodom roviny $\mathbb{R}^2$ prechádza práve jedna integrálna krivka. To znamená, že keď si zvolíme konkrétny bod, ktorým má integrálna krivka prechádzať, dostaneme už jednoznačné riešenie. Tento bod sa volá *začiatočná podmienka* a má tvar $y(x_0) = y_0$.[1] V tomto prípade sme si zvolili bod $B = (x_0, y_0)$. Pri riešení konkrétnej úlohy voľba začiatočnej podmienky vždy vyplýva z fyzikálnej podstaty (vieme, v akom stave sa nachádza náš systém v čase x_0). Riešenie, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku, sa volá *partikulárne*.

Všeobecne o riešiteľnosti (istého typu) diferenciálnej rovnice prvého rádu hovorí nasledujúca veta:

Veta 4.2 *Majme diferenciálnu rovnicu $y' = f(x, y)$, kde f je spojitá funkcia, definovaná na oblasti $\Omega = (x_0 - a, x_0 + a) \times (y_0 - b, y_0 + b)$ pre $a, b > 0$, pre ktorú existujú konštanty K, $L \in \mathbb{R}$ také, že*

- $|f(x, y)| \leq K$ *pre ľubovoľné* $(x, y) \in \Omega$,
- $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ *pre ľubovoľné* (x, y_1), $(x, y_2) \in \Omega$.

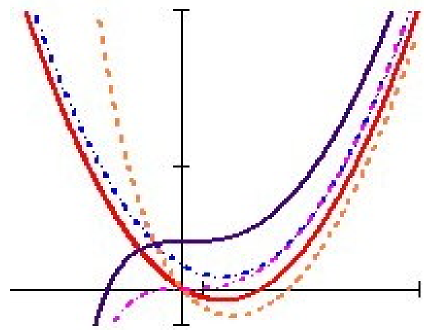
Potom má diferenciálna rovnica $y' = f(x, y)$ jediné partikulárne riešenie y, ktoré prechádza bodom $B = (x_0, y_0)$ (teda spĺňa začiatočnú podmienku $y(x_0) = y_0$) a je definované na intervale $(x_0 - c, x_0 + c)$, kde $c = \min\{a, \frac{b}{K}\}$.

Pri diferenciálnych rovniciach druhého rádu (a vyšších) sa budeme zaoberať len špeciálnym typom – lineárnymi diferenciálnymi rovnicami. Ako príklad takejto rovnice uvažujme

[1] Ak interpretujeme os x ako čas, tak x_0 je začiatočný čas. Preto hovoríme o začiatočnej podmienke.

$$y'' + y' = x. \tag{4.10}$$

Jej všeobecným riešením je $y = c_1\, e^{-x} + c_2 + \frac{1}{2}x^2 - x$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.



Obr. 4.4. Integrálne diferenciálnej rovnice (4.10)

Každým bodom roviny $\mathbb{R}^2$ prechádza nekonečne veľa integrálnych kriviek. Každá z integrálnych kriviek, prechádzajúcich ľubovoľne zvoleným bodom B, má v tomto bode inú smernicu dotyčnice (teda inú deriváciu). Potrebujeme mať dve začiatočné podmienky k tomu, aby sme vedeli jednoznačne určiť partikulárne riešenie rovnice (4.10). Začiatočné podmienky budú mať tvar

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1. \tag{4.11}$$

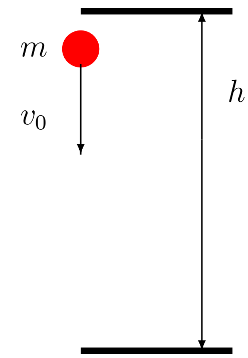
Všeobecne, keď budeme riešiť rovnicu n-tého rádu, budeme potrebovať n začiatočných podmienok (t. j. hodnotu funkcie y a jej derivácií až po $(n-1)$–rád pre $x = x_0$), aby sme vedeli jednoznačne určiť riešenie rovnice.

Okrem úloh so začiatočnými podmienkami sú aj úlohy s *okrajovými* podmienkami. Vtedy poznáme, ako sa správa fyzikálny systém (napríklad nosník) na svojich okrajoch, teda pre $x = a$ a $x = b$. V takomto prípade máme pri rovniciach druhého rádu v každom okrajovom bode predpísanú jednu podmienku. Okrajovými úlohami sa zaoberať nebudeme.

4.1.3 Motivačné príklady

Príklad 4.1 (Voľný pád). Teleso o hmotnosti m padá z výšky h so začiatočnou rýchlosťou v_0. Odpor vzduchu je priamo úmerný štvorcu rýchlosti telesa. Napíšte pohybovú rovnicu pre toto teleso a vyjadrite začiatočné podmienky.

Riešenie: Označme $s(t)$ dráhu telesa v čase t.
Potom $s'(t)$ je rýchlosť v čase t
a $s''(t)$ je zrýchlenie v čase t.
Z toho dostaneme pohybovú rovnicu:
$m \cdot s''(t) = -m \cdot g + m(s'(t))^2$.
Začiatočné podmienky sú dané stavom v čase $t_0 = 0$:
$s(0) = h, \quad s'(0) = v_0$.

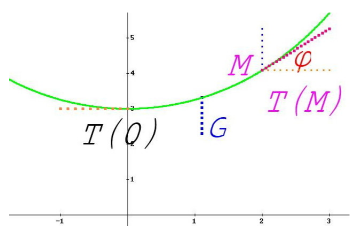


Obr. 4.5. Voľný pád telesa

□

Príklad 4.2 (Reťazovka). Pružné homogénne lano je upevnené na dvoch koncoch. Treba nájsť funkciu, ktorá vyjadruje tvar lana.

Riešenie: Uvažujme časť lana ohraničenú bodmi M_0 a M, kde $M_0 = (0, b)$ je najnižší bod lana.



Obr. 4.6. Lano a sily naň pôsobiace

Na lano pôsobia tri sily:

1. Tiaž úseku M_0M kolmo nadol, $G = g \cdot \rho \cdot s$, ρ je hustota a s dĺžka oblúka M_0M.
2. Sila $T(M)$, ktorou je napínané lano v bode M. Sila pôsobí v smere dotyčnice, s osou x zviera uhol φ.
3. Sila $T(0)$, ktorou je napínané lano v bode M_0. Pôsobí v smere dotyčnice, teda táto sila je rovnobežná s osou x.

Keď silu $T(M)$ rozložíme na horizontálnu a vertikálnu zložku, dostaneme podmienky rovnováhy:

$$T(M) \cdot \cos\varphi = T(0), \quad T(M) \cdot \sin\varphi = g \cdot \rho \cdot s.$$

Z toho úpravou dostaneme

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{g \cdot \rho}{T(0)} s.$$

Nech $y = f(x)$ je hľadaná funkcia. Potom $\operatorname{tg}\varphi = f'(x)$. Označme $\frac{g \cdot \rho}{T(0)} = \frac{1}{a}$, teda $f'(x) = \frac{s}{a}$. Zo vzorca pre dĺžku krivky dostaneme

$$s = \int\limits_0^x \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt \Rightarrow \qquad \underbrace{s' = \sqrt{1 + (f'(x))^2}}_{\text{derivácia int. podľa hornej hranice}} \qquad .$$

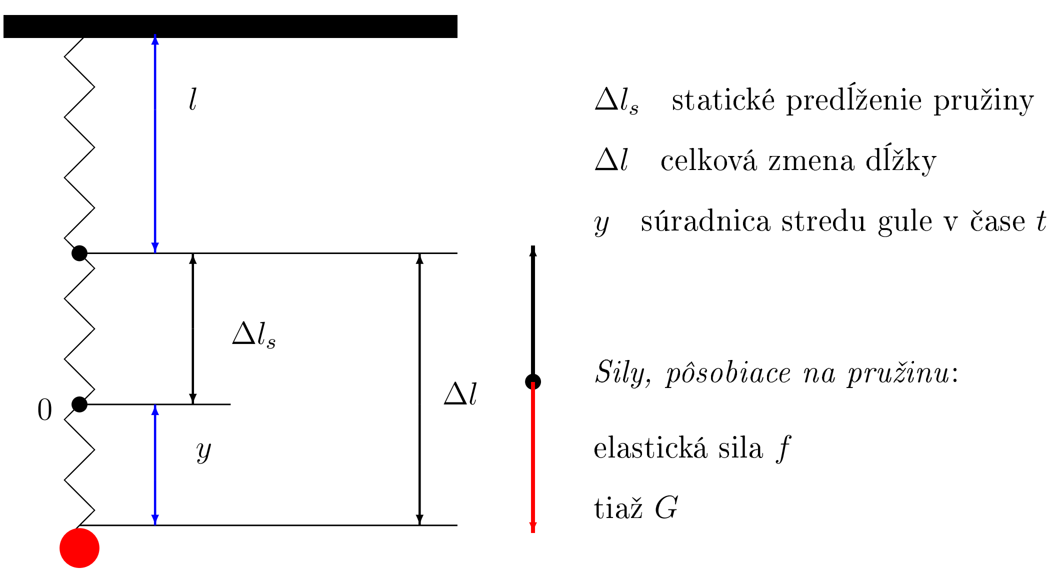
Posledný vzťah môžeme prepísať do diferenciálnej rovnice

$$f''(x) = \frac{1}{a} \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}.$$

Jej riešením je $f(x) = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a} + c_1\right) + c_2$, kde c_1, c_2 sú ľubovoľné konštanty. Funkcia sa volá reťazovka. □

Príklad 4.3 (Jednoduchý harmonický pohyb). Majme guľu o hmotnosti m pripevnenú na vertikálnej špirále, ktorej dĺžka v nedeformovanom stave je l. Guľu ľahko potisneme smerom nadol a pustíme. Hmotnosť špirály a odpor prostredia zanedbáme. Nájdite pohybovú rovnicu pre guľu.

Riešenie: Elastická sila pružiny f je priamo úmerná zmene dĺžky Δl (pozri obr. 4.7), to znamená $\quad f = -k^2 \Delta l$.



Obr. 4.7. Kmitajúca špirála

Pre tiaž gule platí $G = k^2 \cdot \Delta l_s$. Celková sila, pôsobiaca na guľu je

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -k^2\Delta l + k^2\Delta l_s.$$

Pre y platí $y = \Delta l - \Delta l_s$, z toho dostaneme diferenciálnu rovnicu

$$m \cdot y'' = -k^2 \cdot y.$$

Táto rovnica sa nazýva rovnicou harmonického oscilátora. □

Príklad 4.4 (Chladenie telesa). Máme teleso o teplote 70 °C. Teleso ponoríme do chladiaceho roztoku, ktorého teplota je 15 °C. Úlohou je opísať proces chladenia telesa. Je známe, že rýchlosť chladenia je priamo úmerná rozdielu teplôt daného telesa a okolia. Pre jednoduchosť predpokladajme, že chladiaci roztok svoju teplotu nemení. Konštantu úmernosti si označíme τ.

Riešenie: Označme $T(t)$ teplotu telesa v čase t. Potom rýchlosť chladenia je $T'(t) = \tau(t_r - T(t))$, kde t_r označuje teplotu chladiaceho roztoku. Z toho dostaneme diferenciálnu rovnicu

$$T'(t) + \tau \cdot T(t) = 15 \cdot \tau.$$

Začiatočná podmienka vyjadruje teplotu v čase $t_0 = 0$, teda $T(0) = 70$. Ide o lineárnu diferenciálnu rovnicu prvého rádu s pravou stranou. □

Príklad 4.5 (Koncentrácia roztokov). Majme nádobu s objemom 100 l, naplnenú čistou vodou. Do nádoby lejeme roztok soli, ktorého koncentrácia je $0,3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{l}}$ rýchlosťou $2\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{s}}$. Predpokladáme, že roztok sa okamžite dokonale premieša. Z nádoby súčasne vyteká kvapalina rýchlosťou $2\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{s}}$. Aké je množstvo soli v nádobe v čase t?

Riešenie: Označme $A(t)$ množstvo soli v nádrži v čase t, v_1 rýchlosť, ktorou soľ prichádza do nádrže a v_2 rýchlosť, ktorou soľ odchádza z nádrže. Potom pre rýchlosť, akou sa mení koncentrácia roztoku, platí $A'(t) = v_1 - v_2$, kde $v_1 = 0,6\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$ a $v_2 = \frac{2A(t)}{100}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$. Z toho dostaneme diferenciálnu rovnicu

$$A'(t) + \frac{A(t)}{50} = 0,6\,[\mathrm{kg\,s^{-1}}].$$

V čase $t = 0$ v nádrži soľ nebola, z toho dostávame začiatočnú podmienku $A(0) = 0$. Je to lineárna diferenciálna rovnica 1. rádu s pravou stranou. □

4.2 Diferenciálne rovnice prvého rádu

4.2.1 Separované a separovateľné diferenciálne rovnice

Separovaná diferenciálna rovnica má tvar

$$f(y) \cdot y' = g(x), \quad \text{začiatočná podmienka je } y(x_0) = y_0, \tag{4.12}$$

pričom o funkciách f a g predpokladáme, že sú integrovateľné. Jej všeobecným riešením je

$$F(y) = \int f(y)\, dy = \int g(x)\, dx = G(x) + c. \tag{4.13}$$

Je to implicitný tvar riešenia. V prípade, že existuje inverzná funkcia F^{-1}, dostaneme explicitný tvar všeobecného riešenia $y = F^{-1}(G(x)+c)$. Na určenie konštanty c využijeme začiatočnú podmienku, ktorú môžeme dosadiť do (4.13):
$c = F(y_0) - G(x_0)$.

Separovateľná diferenciálna rovnica má tvar

$$g_1(x) \cdot g_2(y) + f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot y' = 0.$$

Separáciou premenných z nej vytvoríme separovanú rovnicu

$$\frac{g_1(x)}{f_1(x)} + \frac{f_2(y)}{g_2(y)} y' = 0.$$

Príklad 4.6 Vyriešte diferenciálnu rovnicu $2y - x^3 \cdot y' = 0$.

Riešenie: Ide o separovateľnú diferenciálnu rovnicu. Začiatočnú podmienku nemáme danú, to znamená, že hľadáme všeobecné riešenie danej rovnice. Odseparujeme premenné:
$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x^3}$, z toho $\int \frac{1}{y}\, dy = \int \frac{2}{x^3}\, dx$, $\ln|y| = -x^{-2} + c$, preto $|y| = e^{-x^{-2}+c}$.
Označíme $k = e^c$. Potom môžeme všeobecné riešenie zapísať v tvare $y = k \cdot e^{-x^{-2}}$. □

Príklad 4.7 Vyriešte diferenciálnu rovnicu $y - y^2 + xy' = 0$ so začiatočnou podmienkou $y(1) = 2$.

Riešenie: Odseparujeme premenné:
$\frac{y'}{y-y^2} = -\frac{1}{x}$, z toho $\int \frac{dy}{y(1-y)} = -\int \frac{dx}{x}$. Výraz $\frac{1}{y(1-y)}$ rozložíme na parciálne zlomky (podrobný výpočet prenecháme na čitateľa) a dostaneme

$$\int \frac{dy}{y(1-y)} = \ln\left|\frac{y}{y-1}\right|.$$

Z toho

$$\ln\left|\frac{y}{y-1}\right| = \ln c - \ln|x| = \ln\left|\frac{c}{x}\right|.$$

Úpravou dostaneme implicitný tvar všeobecného riešenia $\frac{y}{y-1} = \frac{c}{x}$.
Vypočítame konštantu c. Zo začiatočnej podmienky vyplýva, že hľadáme funkciu y (partikulárne riešenie), ktorá spĺňa podmienku $x_0 = 1$, $y_0 = 2$. Dosadíme do všeobecného riešenia a dostaneme $c = 2$. Z toho vyjadríme implicitný tvar partikulárneho riešenia $\frac{y}{y-1} = \frac{2}{x}$. Explicitný tvar partikulárneho riešenia je $y = \frac{2}{2-x}$. □

Príklad 4.8 Vyriešte diferenciálnu rovnicu $1 + y^2 + xyy' = 0$.

Riešenie: Budeme hľadať len všeobecné riešenie danej rovnice. Odseparujeme premenné: $\frac{yy'}{1+y^2} = -\frac{1}{x}$, z toho $\frac{1}{2}\int \frac{2y\,dy}{1+y^2} = -\int \frac{dx}{x}$. Integráciou dostaneme

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \ln\sqrt{1+y^2} = -\ln|x| + \ln c = \ln\left|\frac{c}{x}\right|$$

a z toho

$$\sqrt{1+y^2} = \frac{c}{x} \quad \text{alebo} \quad y^2 = \frac{c^2}{x^2} - 1.$$

Nemáme danú začiatočnú podmienku, preto nevieme, či má byť y kladné alebo záporné. Riešenie rovnice necháme v implicitnom tvare. □

4.2.2 Lineárne diferenciálne rovnice 1. rádu

Lineárna diferenciálna rovnica prvého rádu má tvar

$$p_1(x)\cdot y' + p_2(x)\cdot y = q(x), \quad \text{začiatočná podmienka } y(x_0) = y_0, \tag{4.14}$$

kde p_1, p_2, q sú integrovateľné funkcie premennej x. Rovnicu riešime v dvoch krokoch:

1. krok – *homogénna časť* – pravú stranu rovnice nahradíme 0. Dostaneme separovateľnú rovnicu

$$p_1(x)\cdot y' + p_2(x)\cdot y = 0.$$

Rovnicu vyriešime úpravami ako v príklade 4.6:

$$\int \frac{1}{y}\,dy = -\int \frac{p_2(x)}{p_1(x)}\,dx \quad \text{a z toho} \quad y = k\cdot e^{-\int \frac{p_2(x)}{p_1(x)}\,dx}.$$

2. krok – *variácia konštanty* – konštantu k v riešení z prvého kroku zmeníme na funkciu $k(x)$. Funkciu y zderivujeme:

$$y' = k'(x) \cdot e^{-\int \frac{p_2(x)}{p_1(x)}\,dx} - k(x) \cdot \frac{p_2(x)}{p_1(x)} \cdot e^{-\int \frac{p_2(x)}{p_1(x)}\,dx}.$$

Funkcie y a y' dosadíme do pôvodnej diferenciálnej rovnice (4.14). Po úprave dostaneme separovateľnú diferenciálnu rovnicu, kde neznámou je funkcia k

$$p_1(x) \cdot k'(x) \cdot e^{-\int \frac{p_2(x)}{p_1(x)}\,dx} = q(x).$$

Z toho

$$k'(x) = \frac{q(x)}{p_1(x)} \cdot e^{\int \frac{p_2(x)}{p_1(x)}\,dx} \tag{4.15}$$

Rovnicu (4.15) zintegrujeme a dosadíme funkciu k do riešenia homogénnej časti. Dostaneme všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (4.14).

Nakoniec využijeme začiatočnú podmienku na vyjadrenie partikulárneho riešenia diferenciálnej rovnice (4.14).

Príklad 4.9 Vyriešte diferenciálnu rovnicu $xy' - x^2(y-1) = x^2$.

Riešenie: Rovnicu si najprv upravíme do tvaru rovnice (4.14):
$xy' - x^2(y-1) = x^2$, z toho $xy' - x^2 y = 0$.
Riešime lineárnu diferenciálnu rovnicu s pravou stranou rovnou 0. Separáciou premenných dostaneme

$$\int \frac{dy}{y} = \int x\,dx, \quad \text{po zintegrovaní} \quad \ln|y| = \frac{x^2}{2} + c.$$

Označíme $k = e^c$. Potom $y = k \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$ je všeobecné riešenie danej diferenciálnej rovnice. □

Príklad 4.10 Vyriešte rovnicu $xy' - 2y = x^3 \cos x$ so začiatočnou podmienkou $y(\pi) = 1$.

Riešenie: Riešime lineárnu diferenciálnu rovnicu.
1. krok – homogénna časť. Riešime rovnicu $xy' - 2y = 0$, odtiaľ $\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x}$.

$$\ln|y| = 2\ln|x| + \ln c = \ln(k \cdot x^2) \quad \Rightarrow \quad y = k\,x^2.$$

2. kork – variácia konštanty: $y = k(x) \cdot x^2$. Potom

$$y' = k'(x) \cdot x^2 + 2k(x) \cdot x$$

Do pôvodnej rovnice dosadíme y a y':

$$x\left(k'(x)\cdot x^2 + 2k(x)\cdot x\right) - 2k(x)\cdot x^2 = x^3\cos x.$$

Po úprave

$$k'(x)\cdot x^3 = x^3\cos x \quad \Rightarrow \quad k(x) = \sin x + c.$$

Z toho dostaneme všeobecné riešenie danej diferenciálnej rovnice $y = x^2\sin x + cx^2$. Využijeme začiatočnú podmienku $y(\pi) = 1$:

$$1 = \pi^2\sin(\pi) + c\pi^2 = c\pi^2, \quad c = \frac{1}{\pi^2}.$$

Hľadané partikulárne riešenie je $y = x^2\sin x + \frac{x^2}{\pi^2}$. □

Príklad 4.11 (Dokončenie príkladu 4.4). Budeme riešiť diferenciálnu rovnicu $T'(t)+$ $+\tau\cdot T(t) = 15\cdot\tau$ so začiatočnou podmienkou $T(0) = 70$.

Riešenie: **1. krok** – homogénna časť: $T' + \tau\cdot T = 0$ alebo $\frac{1}{T}\cdot\frac{dT}{dt} = -\tau$.

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{T}\,dT &= -\int\tau\,dt \quad \text{po zintegrovaní} \quad \ln|T| = -\tau\cdot t + \ln k,\\ T &= k\cdot e^{-\tau\cdot t}.\end{aligned}$$

Dostali sme všeobecné riešenie homogénnej časti diferenciálnej rovnice.

$$T'(t) = \left(k(t)\cdot e^{-\tau\cdot t}\right)' = k'(t)\cdot e^{-\tau\cdot t} - k(t)\cdot\tau\cdot e^{-\tau\cdot t}.$$

Dosadením do pôvodnej rovnice dostaneme

$$\begin{aligned}&k'(t)\cdot e^{-\tau\cdot t} - k(t)\cdot\tau\cdot e^{-\tau\cdot t} + k(t)\cdot\tau\cdot e^{-\tau\cdot t} = 15\cdot\tau,\\ &k'(t) = 15\cdot\tau\cdot e^{\tau\cdot t}, \quad \text{po zintegrovaní} \quad k(t) = 15\cdot e^{\tau\cdot t} + c.\end{aligned}$$

Z toho dostaneme všeobecné riešenie danej diferenciálnej rovnice

$$T(t) = \left(15\cdot e^{\tau\cdot t} + c\right)\cdot e^{-\tau\cdot t} = 15 + c\cdot e^{-\tau\cdot t}.$$

Zo začiatočnej podmienky vyplynie

$$70 = 15 + c\cdot e^0 \quad \Rightarrow \quad c = 55.$$

Hľadané partikulárne riešenie je $T(t) = 15 + 55\cdot e^{-\tau\cdot t}$. □

Príklad 4.12 (Dokončenie príkladu 4.5). Budeme riešiť diferenciálnu rovnicu $A'(t)+$ $+\frac{A(t)}{50} = 0,6$ so začiatočnou podmienkou $A(0) = 0$.

Riešenie: **1. krok** – homogénna časť rovnice má tvar

$$A'(t) + \frac{A(t)}{50} = 0, \qquad \text{z toho} \qquad \int \frac{dA}{A} = \frac{-1}{50} \int dt,$$
$$\ln A = \frac{-1}{50} t + \ln k, \qquad \Rightarrow \qquad A = e^{-\frac{t}{50}} \cdot k.$$

2. krok – variácia konštanty:

$$A'(t) = k'(t) \cdot e^{-\frac{t}{50}} - \frac{k(t)}{50} \cdot e^{-\frac{t}{50}},$$

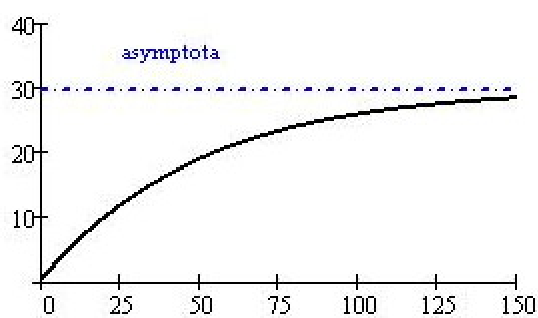
potom, po dosadení do pôvodnej rovnice dostaneme

$$k'(t) \cdot e^{-\frac{t}{50}} - \frac{k(t)}{50} \cdot e^{-\frac{t}{50}} + \frac{k(t)}{50} \cdot e^{-\frac{t}{50}} = k'(t) \cdot e^{-\frac{t}{50}} = 0,6,$$
$$k_1'(t) = 0,6 \cdot e^{\frac{t}{50}}, \quad \text{po zintegrovaní} \quad k_1(t) = 0,6 \cdot 50 \cdot e^{\frac{t}{50}} + c = 30 \cdot e^{\frac{t}{50}} + c.$$

Z toho vyjde všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice

$$A(t) = \left(30 \cdot e^{\frac{t}{50}} + c\right) \cdot e^{-\frac{t}{50}} = 30 + c \cdot e^{-\frac{t}{50}}.$$

Zo začiatočnej podmienky dostaneme $0 = 30 + c \cdot e^0$, z toho $c = -30$. Hľadané partikulárne riešenie je $A = 30 - 30 \cdot e^{-\frac{t}{50}}$.



Obr. 4.8. Časový priebeh nárastu množstva soli v roztoku

□

4.2.3 Homogénne diferenciálne rovnice

Definícia 4.1 *Funkcia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dvoch premenných sa volá homogénna stupňa k, ak pre všetky $x, y, t \in \mathbb{R}$ platí*

$$f(tx, ty) = t^k \cdot f(x, y).$$

Príklad 4.13 Funkcia $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ je homogénna druhého stupňa.
Funkcia $f(x,y)=\sin(x+y)$ nie je homogénna.
Funkcia $f(x,y)=y\cdot\ln\left(\frac{x}{y}\right)$ je homogénna prvého stupňa.

Diferenciálna rovnica sa nazýva *homogénnou*, ak má tvar

$$p(x,y)+q(x,y)\cdot y'=0, \tag{4.16}$$

kde p a q sú homogénne funkcie rovnakého stupňa.

Keď zavedieme substitúciu $y(x)=x\cdot u(x)$ (potom $y'=u+x\cdot u'$), rovnica (4.16) sa zmení na separovateľnú diferenciálnu rovnicu s neznámou funkciou u.

Príklad 4.14 Nájdite všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $(x+y)y'+y=0$.

Riešenie: Funkcie $p(x,y)=y$ aj $q(x,y)=x+y$ sú homogénne prvého stupňa. To znamená, že daná diferenciálna rovnica je homogénna. Zavedieme substitúciu $y=x\cdot u$. Potom vyjde rovnica

$$(x+x\cdot u)(u+x\cdot u')+x\cdot u=0.$$

Jej úpravou dostaneme

$$x\left((1+u)(u+x\cdot u')+u\right)=0.$$

Odseparujeme premenné

$$\begin{aligned} 2u+u^2+x\cdot u'(1+u)=0 \qquad &\Rightarrow \qquad x\cdot u'=-\frac{u(2+u)}{1+u},\\ \int\frac{1+u}{u(2+u)}\,du= \quad -\int\tfrac{dx}{x} \quad &=-\ln|x|+\ln c=\ln\frac{c}{x}, \quad c>0. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Na výpočet integrálu z ľavej strany rovnice použijeme rozklad na parciálne zlomky:

$$\frac{1+u}{u(2+u)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{2+u}\right),$$

to znamená

$$\int\frac{1+u}{u(2+u)}\,du=\frac{1}{2}(\ln|u|+\ln|2+u|)=\ln\sqrt{|u(2+u)|} \tag{4.18}$$

Potom z (4.17) a (4.18) vyplýva

$$\begin{aligned} \ln\sqrt{|u(2+u)|} &= \ln\frac{c}{x},\\ \sqrt{|u(2+u)|} &= \frac{c}{x} \quad \text{alebo} \quad |u(2+u)|=\frac{c^2}{x^2}. \end{aligned}$$

Preznačením konštanty dostaneme $u(2+u) = \frac{k}{x^2}$. Vrátime sa k premennej y. Platí $u = \frac{y}{x}$, teda

$$\frac{y}{x}\left(2+\frac{y}{x}\right) = \frac{k}{x^2}.$$

Po úprave dostaneme implicitný tvar riešenia $y\,(2x+y) = k$. □

Príklad 4.15 Nájdite všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $xy' = y\ln\left(\frac{x}{y}\right)$.

Riešenie: Funkcie $p(x,y) = y\ln\left(\frac{x}{y}\right)$ a $q(x,y) = x$ sú homogénne prvého stupňa, to znamená, že daná diferenciálna rovnica je homogénna. Použijeme substitúciu $y = x\cdot u$. Potom sa diferenciálna rovnica zmení na

$$x(u + x\cdot u') = xu\ln\left(\frac{x}{xu}\right), \quad \text{z toho} \quad u + x\cdot u' = u\ln\frac{1}{u} = -u\ln u.$$

Odseparujeme premenné

$$x\cdot u' = -u(1+\ln u), \qquad \frac{u'}{u(1+\ln u)} = -\frac{1}{x},$$

$$\underbrace{\int\frac{du}{u(1+\ln u)}}_{\substack{t=1+\ln u\\ dt=\frac{du}{u}}} = \int\frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln|1+\ln u| = -\int\frac{dx}{x} = -\ln|x| + \ln c = \ln\frac{c}{x}.$$

Z toho vyplýva $1+\ln u = \frac{c}{x}$, $u = e^{\frac{c}{x}-1}$.
Vrátime sa k premennej y. Spätná substitúcia je $u = \frac{y}{x}$. Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice je $y = x\cdot e^{\frac{c}{x}-1}$. □

4.2.4 Bernoulliho diferenciálne rovnice

Bernoulliho diferenciálna rovnica má tvar

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \quad \alpha > 0. \tag{4.19}$$

Pre $\alpha = 1$ je (4.19) separovateľná (a súčasne lineárna) diferenciálna rovnica.
Pre $\alpha > 0$ je $y = 0$ riešením rovnice (4.19). Ďalšie riešenia pre $\alpha \neq 1$ dostaneme po úprave na tvar

$$y'\,y^{-\alpha} + p(x)y^{1-\alpha} = q(x)$$

substitúciou

$$z(x) = y^{1-\alpha}(x), \quad \frac{dz}{dx} = (1-\alpha)y^{-\alpha}\frac{dy}{dx}. \tag{4.20}$$

Touto substitúciou sa Bernoulliho diferenciálna rovnica pretransformuje na lineárnu

$$\frac{z'}{1-\alpha} + p(x)z = q(x). \tag{4.21}$$

Príklad 4.16 Nájdite všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $y' + xy = xy^3$.

Riešenie: Použijeme substitúciu $z = y^{-2}$. Potom $z' = -2y^{-3}y'$. Z toho dostaneme lineárnu diferenciálnu rovnicu

$$-\frac{1}{2}z' + xz = x. \tag{4.22}$$

1. krok – homogénna časť $-\frac{1}{2}z' + xz = 0$. Odseparovaním premenných dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{z} &= \int 2x\,dx \quad \text{z toho} \quad \ln|z| = x^2 + \ln k, \\ z &= k \cdot e^{x^2}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

2. krok – variácia konštanty.

$$z = k(x)e^{x^2}, \quad z' = k'(x)e^{x^2} + k(x)e^{x^2}(2x).$$

Dosadením do rovnice (4.22) vyjde

$$-\frac{1}{2}\left(k'(x)e^{x^2} + 2xk(x)e^{x^2}\right) + xk(x)e^{x^2} = x, \quad k' = -2xe^{-x^2},$$

$$k = \underbrace{-\int 2xe^{-x^2}\,dx}_{\substack{x^2 = t \\ 2x\,dx = dt}} = -\int e^{-t}dt = e^{-t} + c = e^{-x^2} + c.$$

Dosadením do (4.23) vyjde $z = (e^{-x^2} + c)e^{x^2} = 1 + ce^{x^2}$. Spätne dosadíme $z = y^{-2}$ alebo $y = \frac{1}{\sqrt{z}}$ a dostaneme všeobecné riešenie Bernoulliho diferenciálej rovnice $y = \frac{1}{\sqrt{1+ce^{x^2}}}$. □

Príklad 4.17 Nájdite všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $y' + \frac{xy}{1-x^2} = x\sqrt{y}$.

Riešenie: Substitúciou $z = \sqrt{y}$, $z' = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y'$ pretransformujeme Bernoulliho rovnicu na lineárnu

$$2z' + \frac{x}{1-x^2}z = x. \tag{4.24}$$

1. krok – homogénna časť $\quad 2z' + \frac{x}{1-x^2}z = 0.$

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{z} &= -\frac{1}{2}\int \frac{x}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2-1}dx \\ \ln|z| &= \frac{1}{4}\ln(x^2-1) + \ln k = \ln\left(k\sqrt[4]{x^2-1}\right), \quad \text{z toho} \quad z = k\sqrt[4]{x^2-1}. \end{aligned}$$

2. krok – variácia konštanty:

$$z = k(x)\sqrt[4]{x^2-1}, \quad z' = k'(x)\sqrt[4]{x^2-1} + k(x)\frac{1}{4}(x^2-1)^{-\frac{3}{4}}2x.$$

Dosadením do rovnice (4.24) vyjde

$$2\left(k'(x)\sqrt[4]{x^2-1} + k(x)\frac{1}{2}x(x^2-1)^{-\frac{3}{4}}\right) + \underbrace{\frac{x}{1-x^2}k(x)\sqrt[4]{x^2-1}}_{=-\frac{xk(x)}{(x^2-1)^{\frac{3}{4}}}} = x.$$

Z toho

$$\begin{aligned} k'(x) &= \frac{x}{2\sqrt[4]{x^2-1}}, \\ k &= \underbrace{\int \frac{x}{2\sqrt[4]{x^2-1}}\,dx}_{\substack{x^2-1=t \\ 2x\,dx=dt}} = \int \frac{dt}{4\sqrt[4]{t}} = t^{\frac{3}{4}}\frac{4}{3\cdot 4} + c = \frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{4}} + c. \end{aligned}$$

Dosadíme do všeobecného riešenia homogénnej časti

$$z = \left(\frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{4}} + c\right)\sqrt[4]{x^2-1} = \frac{x^2-1}{3} + c\sqrt[4]{x^2-1}.$$

Spätne dosadíme $z = \sqrt{y}$, teda $y = z^2$ a dostaneme všeobecné riešenie Bernoulliho diferenciálnej rovnice $\quad y = \left(\frac{x^2-1}{3} + c\sqrt[4]{x^2-1}\right)^2.$ □

4.3 Lineárne diferenciálne rovnice s konštantnými koeficientami

4.3.1 Základné pojmy

Nech $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ sú konštanty. Majme dané funkcie $f_1, f_2, \ldots, f_k$ s rovnakým definičným oborom $D \subset \mathbb{R}$. Povieme, že funkcie $f_1, f_2, \ldots, f_k$ sú lineárne nezávislé, ak pre všetky $x \in D$ platí

$$\sum_{i=1}^{k} c_i f_i(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_j = 0 \text{ pre } j \in \{1, 2, \ldots, k\}.$$

Príklad 4.18 Funckie $f_1(x) = 1,\ f_2(x) = x,\ f_3(x) = x^2$ sú lineárne nezávislé.
Funkcie $g_1(x) = e^x,\ g_2(x) = e^{2x},\ g_3(x) = e^{3x}, g_4(x) = e^{4x}$ sú lineárne nezávislé.
Funckie $\sin ax,\ \cos ax,\ \sin bx,\ \cos bx,\ e^{cx}$ pre $a \neq b,\ a, b, c \in \mathbb{R}$, sú lineárne nezávislé.
Funkcie $h_1(x) = x^2 + x,\ h_2(x) = x^2 - x,\ h_3(x) = x$ sú lineárne závislé, lebo

$$h_1(x) - h_2(x) - 2h_3(x) = 0.$$

Majme lineárnu diferenciálnu rovnicu n-tého rádu

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{4.25}$$

kde $a_n \neq 0,\ a_j \in \mathbb{R}$ pre $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Definícia 4.2 *Povieme, že systém funkcií $\mathcal{F}$ je fundamentálny systém riešení diferenciálnej rovnice (4.25), ak sú splnené nasledujúce podmienky:*

1. *$\mathcal{F}$ je lineárne nezávislý systém funkcií,*
2. *funkcia f je riešením diferenciálnej rovnice (4.25) práve vtedy, keď sa dá vyjadriť ako lineárna kombinácia funkcií z $\mathcal{F}$.*

4.3.2 Lineárne diferenciálne rovnice bez pravej strany

Lineárna diferenciálna rovnica n-tého rádu s konštantnými koeficientami má tvar (4.25), kde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0$. Jej riešenie hľadáme v tvare $y = e^{s \cdot x}$:
$a_n s^n e^{s \cdot x} + a_{n-1} s^{n-1} e^{s \cdot x} + \cdots + a_1 s e^{s \cdot x} + a_0 e^{s \cdot x} = e^{s \cdot x} \left(s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0\right) = 0.$

Definícia 4.3 *Polynóm $p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$ sa nazýva charakteristickým polynómom lineárnej diferenciálnej rovnice (4.25).*

Veta 4.3 *Nech s_0 je koreňom charakteristického polynómu lineárnej diferenciálnej rovnice (4.25). Potom $y_1 = e^{s_0 x}$ je riešením diferenciálnej rovnice (4.25).*

Veta 4.4 *Fundamentálny systém $\mathcal{F}$ diferenciálnej rovnice (4.25) má práve n prvkov.*

Táto veta sa dá inak vyjadriť v tvare
Lineárna diferenciálna rovnica n-tého rádu má n lineárne nezávislých riešení.

Vieme, že každý polynóm n-tého stupňa má n koreňov v množine $\mathbb{C}$ (naproti tomu, v množine $\mathbb{R}$ môže mať polynóm n-tého stupňa menej ako n koreňov aj vrátane ich násobnosti). Preto budeme hľadať korene charakteristického polynómu v množine $\mathbb{C}$.

Nasledujúce dve vety hovoria o tom, ako súvisia viacnásobné a komplexné korene charakteristického polynómu s riešeniami diferenciálnej rovnice (4.25) (a s jej fundamentálnym systémom riešení).

Veta 4.5 *Nech s_0 je k-násobný koreň charakteristického polynómu lineárnej diferenciálnej rovnice (4.25). Potom $y_1 = e^{s_0 x}$, $y_2 = x \cdot e^{s_0 x}, \dots, y_k = x^{k-1} e^{s_0 x}$ sú lineárne nezávislé riešenia diferenciálnej rovnice (4.25).*

Veta 4.6 *Ak komplexná funkcia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je riešením diferenciálnej rovnice (4.25), tak $\Re(f)$ aj $\Im(f)$ sú lineárne nezávislé riešenia diferenciálnej rovnice (4.25).*

Podrobne rozoberieme lineárnu diferenciálnu rovnicu 2. rádu

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 = 0 \tag{4.26}$$

s charakteristickým polynómom

$$a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0. \tag{4.27}$$

Všeobecné riešenie tejto diferenciálnej rovnice budeme označovať y_h (homogénna časť). Podľa vety 4.4 obsahuje fundamentálny systém $\mathcal{F}$ rovnice (4.26) 2 funkcie.

- *Charakteristický polynóm (4.27) má 2 rôzne reálne korene*
  Označme korene charakteristického polynómu (4.27) s_1 a s_2. Potom podľa vety 4.3 fundamentálny systém riešení diferenciálnej rovnice (4.26) sa dá vyjadriť v tvare

  $$\mathcal{F} = \{e^{s_1 x}, e^{s_2 x}\}. \tag{4.28}$$

  Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (4.26) má tvar

  $$y_h = c_1 e^{s_1 x} + c_2 e^{s_2 x}. \tag{4.29}$$

- *Charakteristický polynóm (4.27) má 1 dvojnásobný reálny koreň*
  Označme tento koreň s_1. Potom podľa vety 4.5 fundamentálny systém riešení diferenciálnej rovnice (4.26) je nasledujúci:

  $$\mathcal{F} = \{e^{s_1 x}, x e^{s_1 x}\}. \tag{4.30}$$

  Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (4.26) je

  $$y_h = c_1 e^{s_1 x} + c_2 x e^{s_1 x}. \tag{4.31}$$

- *Charakteristický polynóm (4.26) nemá reálne korene*
  Podľa vety 4.1 korene polynómu (4.27) sú komplexne združené čísla $s_1 = \sigma + \imath\varphi$ a $s_2 = \sigma - \imath\varphi$. Funkcie $y_1 = e^{(\sigma+\imath\varphi)x}$ a $y_2 = e^{(\sigma-\imath\varphi)x}$ sú komplexné riešenia diferenciálnej rovnice (4.26). Pre reálnu a imaginárnu časť funckií y_1 a y_2 platí

  $$\Re(y_1) = \Re(y_2) = e^{\sigma x}\cos\varphi x, \quad \Im(y_1) = -\Im(y_2) = e^{\sigma x}\sin\varphi x.$$

  Podľa vety 4.6 sa fundamentálny systém riešení diferenciálnej rovnice (4.26) rovná

  $$\mathcal{F} = \{e^{\sigma x}\cos\varphi x,\ e^{\sigma x}\sin\varphi x\}. \tag{4.32}$$

  Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (4.26) je

  $$y_h = c_1 e^{\sigma x}\cos\varphi x + c_2 e^{\sigma x}\sin\varphi x. \tag{4.33}$$

Príklad 4.19 Nájdite všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $y'' + 3y' - 4y = 0$.

Riešenie: Napíšeme charakteristický polynóm danej diferenciálnej rovnice:

$$s^2 + 3s - 4 = 0, \quad \Rightarrow \quad (s+4)(s-1) = 0.$$

Charakteristický polynóm má dva rôzne reálne korene, $s_1 = 1$, $s_2 = -4$. Fundamentálny systém je $\mathcal{F} = \{e^x,\ e^{-4x}\}$ a všeobecné riešenie je

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-4x}. \qquad \square$$

Príklad 4.20 Nájdite všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $y'' + 4y' = 0$.

Riešenie: Napíšeme charakteristický polynóm danej diferenciálnej rovnice:

$$s^2 + 4s = 0, \quad \Rightarrow \quad (s+4)s = 0.$$

Charakteristický polynóm má dva rôzne reálne korene, $s_1 = 0$, $s_2 = -4$. Fundamentálny systém je $\mathcal{F} = \{1,\ e^{-4x}\}$[2] a všeobecné riešenie je

$$y_h = c_1 + c_2 e^{-4x}. \qquad \square$$

Príklad 4.21 Nájdite všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $y'' - 6y' + 9y = 0$.

[2] $s_1 = 0$ je koreň charakteristického polynómu, to znamená $y_1 = e^0 = 1$ je riešením danej diferenciálnej rovnice.

Riešenie: Napíšeme charakteristický polynóm danej diferenciálnej rovnice:

$$s^2 - 6s + 9 = 0, \quad \Rightarrow \quad (s-3)^2 = 0.$$

Charakteristický polynóm má 1 dvojnásobný reálny koreň $s_1 = 3$. Fundamentálny systém je $\mathcal{F} = \{e^{3x},\, x \cdot e^{3x}\}$ a všeobecné riešenie je

$$y_h = c_1 e^{3x} + c_2 x \cdot e^{3x}. \qquad \square$$

Príklad 4.22 Nájdite všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $y'' + 9y = 0$.

Riešenie: Napíšeme charakteristický polynóm danej diferenciálnej rovnice:

$$s^2 + 9 = 0, \quad \Rightarrow \quad s_{1,2} = \pm\imath 3.$$

Charakteristický polynóm má dva komlexné korene. Fundamentálny systém je $\mathcal{F} = \{\cos 3x,\, \sin 3x\}$ a všeobecné riešenie je

$$y_h = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x. \qquad \square$$

Príklad 4.23 Nájdite všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $y'' - 4y + 13y = 0$.

Riešenie: Napíšeme charakteristický polynóm danej diferenciálnej rovnice:

$$s^2 - 4s + 13 = 0, \quad \Rightarrow \quad s_{1,2} = 2 \pm \imath 3.$$

Charakteristický polynóm má dva komlexné korene. Fundamentálny systém je $\mathcal{F} = \{e^{2x}\cos 3x,\, e^{2x}\sin 3x\}$ a všeobecné riešenie je

$$y_h = c_1 e^{2x}\cos 3x + c_2 e^{2x}\sin 3x. \qquad \square$$

Príklad 4.24 Nájdite riešenie diferenciálnej rovnice $y'' - 6y' + 5y = 0$, spĺňajúce začiatočné podmienky $\quad y(0) = 3,\ y'(0) = 1$.

Riešenie: Napíšeme charakteristický polynóm danej diferenciálnej rovnice:

$$s^2 - 6s + 5 = 0, \quad \Rightarrow \quad (s-5)(s-1) = 0.$$

Charakteristický polynóm má dva rôzne reálne korene. Všeobecné riešenie je

$$y_h = c_1 e^{5x} + c_2 e^{x}.$$

$y_h' = 5c_1 e^{5x} + c_2 e^{x}$. y_h a y_h' dosadíme do začiatočných podmienok:

$$c_1 e^0 + c_2 e^0 = 3, \quad 5c_1 e^0 + c_2 e^0 = 1,$$

z toho dostaneme sústavu lineárnych rovníc

$$\begin{array}{l} c_1 + c_2 = 3 \\ 5c_1 + c_2 = 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} c_1 = -\frac{1}{2}, \\ c_2 = \frac{7}{2}. \end{array}$$

Hľadané partikulárne riešenie je $y = -\frac{1}{2}e^{5x} + \frac{7}{2}e^{x}$. $\square$

Príklad 4.25 Nájdite riešenie diferenciálnej rovnice $y'' - 4y' + 4y = 0$, spĺňajúce začiatočné podmienky $\quad y(1) = 2e^2,\ y'(1) = 0.$

Riešenie: Napíšeme charakteristický polynóm danej diferenciálnej rovnice:

$$s^2 - 4s + 4 = 0, \quad \Rightarrow \quad (s-2)^2 = 0$$

Charakteristický polynóm má 1 dvojnásobný reálny koreň $s_1 = 2$. Všeobecné riešenie je

$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

$y_h' = 2c_1 e^{2x} + c_2 e^{2x} + 2c_2 x e^{2x}$. y_h a y_h' dosadíme do začiatočných podmienok:

$$c_1 e^2 + c_2 e^2 = 2e^2, \quad 2c_1 e^2 + c_2 e^2 + 2c_2 e^2 = 0.$$

Z toho

$$\begin{array}{l} c_1 + c_2 = 2 \\ 2c_1 + 3c_2 = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} c_1 = 6, \\ c_2 = -4. \end{array}$$

Hľadané partikulárne riešenie je $y = 6e^{2x} - 4xe^{2x}$. □

Na ďalších príkladoch si ilustrujeme riešenie lineárnych diferenciálnych rovníc 3. a vyšších rádov.

Príklad 4.26 Nájdite všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

Riešenie: Napíšeme charakteristický polynóm danej diferenciálnej rovnice:

$$s^3 - 3s^2 + 3s - 1 = 0, \quad \Rightarrow \quad (s-1)^3 = 0.$$

Charakteristický polynóm má jeden trojnásobný koreň $s_1 = 1$. Podľa vety 4.5 si fundamentálny systém vyjadríme v tvare $\mathcal{F} = \{e^x,\ x \cdot e^x,\ x^2 e^x\}$ a všeobecné riešenie je

$$y_h = c_1 e^x + c_2 x \cdot e^x + c_3 x^2 e^x.$$ □

Príklad 4.27 Nájdite všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

Riešenie: Napíšeme charakteristický polynóm danej diferenciálnej rovnice:

$$s^3 - 3s^2 3s - 1 = 0, \quad \Rightarrow \quad (s^2+1)^2 = 0.$$

Charakteristický polynóm má dva dvojnásobné komplexné korene $s_1 = \imath$, $s_2 = -\imath$. Podľa viet 4.5 (veta 4.5 sa aplikuje na komlexné korene rovnako ako na reálne) a 4.6 sa fundamentálny systém riešení danej diferenciálnej rovnice rovná $\mathcal{F} = \{\cos x,\ \sin x,\ x\cos x,\ x\sin x\}$ a všeobecné riešenie je

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x \cos x + c_4 x \sin x.$$ □

4.3.3 Lineárne diferenciálne rovnice so špeciálnou pravou stranou

Budeme uvažovať diferenciálnu rovnicu n-tého rádu tvaru

$$\sum_{j=0}^{n} a_j y^{(j)} = f(x), \tag{4.34}$$

kde $a_j \in \mathbb{R}$ sú konštanty a f je daná funkcia. Pre všeobecné riešenie y diferenciálnej rovnice (4.34) platí vzťah

$$y = y_h + y_p,$$

kde y_h je všeobecné riešenie príslušnej homogénnej časti rovnice (4.34) (teda diferenciálnej rovnice (4.25)) a y_p je jedno (ľubovoľné) partikulárne riešenie rovnice (4.34). Budeme predpokladať, že funkcia f (pravá strana rovnice (4.34)) má tvar

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_{m_1}(x)\cos\beta x + Q_{m_2}(x)\sin\beta x\right), \tag{4.35}$$

kde P_{m_1} a Q_{m_2} sú polynómy stupňa m_1, resp. m_2 a α, $\beta \in \mathbb{R}$ sú ľubovoľné konštanty.

Veta 4.7 *Majme diferenciálnu rovnicu (4.34) s pravou stranou rovnou (4.35). Označme $M = \max\{m_1, m_2\}$. Nech $\alpha + \imath\beta$ je k-násobný koreň charakteristického polynómu*[3] *diferenciálnej rovnice (4.25). Potom partikulárne riešenie y_p diferenciálnej rovnice (4.34) má tvar*

$$y_p = x^k e^{\alpha x}\left(\tilde{P}_M(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_M(x)\sin\beta x\right), \tag{4.36}$$

kde $\tilde{P}_M$ a $\tilde{Q}_M$ sú polynómy stupňa M.[4]

Partikulárne riešenie y_p budeme hľadať metódou neurčitých koeficientov. Polynómy $\tilde{P}_M$ a $\tilde{Q}_M$ nahradíme polynómami $\hat{P}_M$ a $\hat{Q}_M$ s „neurčitými koeficientmi". Získame tým návrh partikulárneho riešenia, ktoré označíme y_n. Funkciu y_n dosadíme do rovnice (4.35) a vypočítame koeficienty hľadaných polynómov $\tilde{P}_M$ a $\tilde{Q}_M$. Metódu si podrobne ukážeme na diferenciálnych rovniciach 2. rádu. Rozoberieme si jednotlivé prípady diferenciálnej rovnice

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x), \tag{4.37}$$

kde funkcia f má tvar (4.35). $\mathcal{F}$ bude označovať fundamentálny systém riešení diferenciálnej rovnice (4.27).

- *Nech* $f(x) = P_{m_1} e^{\alpha x}$, to znamená $\beta = 0$. Potom:

[3] $k = 0$, ak $\alpha + \imath\beta$ nie je koreňom charakteristického polynómu.
[4] Koeficienty polynómov $\tilde{P}_M$ a $\tilde{Q}_M$ potrebujeme určiť.

– ak α nie je koreňom charakteristického polynómu (4.27) (inak vyjadrené, ak $e^{\alpha x} \notin \mathcal{F}$), tak návrh partikulárneho riešenia má tvar

$$y_n = \hat{P}_M(x)e^{\alpha x}, \tag{4.38}$$

– ak α je jednoduchým koreňom charakteristického polynómu (4.27) (inak vyjadrené, ak $e^{\alpha x} \in \mathcal{F}$, $xe^{\alpha x} \notin \mathcal{F}$), tak návrh y_n má tvar

$$y_n = x\hat{P}_M(x)e^{\alpha x}, \tag{4.39}$$

– ak α je dvojnásobným koreňom charakteristického polynómu (4.27) (inak vyjadrené, ak $xe^{\alpha x} \in \mathcal{F}$), tak návrh y_n má tvar

$$y_n = x^2\hat{P}_M(x)e^{\alpha x}. \tag{4.40}$$

- Nech $\beta \neq 0$ (α je ľubovoľné) vo vyjadrení funkcie f (4.35). Potom:

  – ak $\alpha + \imath\beta$ nie je koreňom charakteristického polynómu (4.27) (inak vyjadrené, ak $e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x \notin \mathcal{F}$), tak návrh y_n má tvar

$$y_n = e^{\alpha x}\left(\hat{P}_M(x)\cos\beta x + \hat{Q}_M(x)\sin\beta x\right), \tag{4.41}$$

  – ak $\alpha + \imath\beta$ je koreňom charakteristického polynómu (4.27) (inak vyjadrené, ak $e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x \in \mathcal{F}$), tak návrh y_n má tvar

$$y_n = xe^{\alpha x}\left(\hat{P}_M(x)\cos\beta x + \hat{Q}_M(x)\sin\beta x\right). \tag{4.42}$$

Príklad 4.28 Nájdite všeobecné riešenia diferenciálnych rovníc

$$y'' - 8y' + 7y = 14x - 2, \tag{4.43}$$
$$y'' - 8y' + 7y = -e^x, \tag{4.44}$$
$$y'' - 8y' + 7y = (x+1)e^{2x}, \tag{4.45}$$
$$y'' - 8y' + 7y = 14\sin 7x. \tag{4.46}$$

Riešenie: Nájdeme všeobecné riešenie homogénnej časti daných diferenciálnych rovníc $y'' - 8y' + 7y = 0$. Jej charakteristický polynóm je

$$s^2 - 8s + 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad (s-7)(s-1) = 0.$$

Korene charakteristického polynómu sú $s_1 = 7$, $s_2 = 1$. Všeobecné riešenie a fundamentálny systém riešení diferenciálnej rovnice $y'' - 8y' + 7y = 0$ sú

$$y_h = c_1e^{7x} + c_2e^x, \quad \mathcal{F} = \{e^{7x},\, e^x\}.$$

1. Pravá strana diferenciálnej rovnice (4.43) je $f_1(x) = 14x - 2 = (14x - 2)e^{0x}$. Funkcia $e^{0x} \notin \mathcal{F}$ (0 nie je koreň charakteristického polynómu). Partikulárne riešenie navrhneme v tvare

$$y_{n_1} = a_1 x + a_0, \quad (\text{polynóm } \hat{P}_1 = a_1 x + a_0).$$

Vypočítame derivácie y'_{n_1} a y''_{n_1}:

$$y'_{n_1} = a_1, \quad y''_{n_2} = 0,$$

z toho po dosadení do pôvodnej diferenciálnej rovnice (4.43) vyjde
$0 - 8a_1 + 7(a_1 x + a_0) = 14x - 2$.
Porovnaním koeficientov polynómov pri rovnakom stupni premennej x dostaneme sústavu rovníc

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 7a_1 & & & = & 14, \\ -8a_1 & + & 7a_0 & = & -2, \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 2,\ a_0 = 2.$$

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (4.43) je

$$y_v = \underbrace{c_1 e^{7x} + c_2 e^x}_{y_h} + \underbrace{2x + 2}_{y_{p_1}}.$$

2. Pravá strana diferenciálnej rovnice (4.44) je $f_2(x) = -e^x$. Funkcie $e^x \in \mathcal{F}$, $xe^x \notin \mathcal{F}$ ($s_2 = 1$ je jednoduchý koreň charakteristického polynómu). Partikulárne riešenie navrhneme v tvare

$$y_{n_2} = axe^x, \quad (\text{polynóm } \hat{P}_0 = a).$$

Vypočítame derivácie y'_{n_2} a y''_{n_2}:

$$y'_{n_2} = ae^x + axe^x, \quad y''_{n_2} = 2ae^x + axe^x,$$

z toho po dosadení do pôvodnej diferenciálnej rovnice (4.44) vyjde

$$(2ae^x + axe^x) - 8(ae^x + axe^x) + 7axe^x = -e^x \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{6}.$$

Všimnime si, že súčet koeficientov pri funkciách xe^x sa rovná 0. To znamená, že riešenie $a = \frac{1}{6}$ sme získali porovnaním koeficientov pri funkciách e^{3x}. Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (4.44) je

$$y_v = \underbrace{c_1 e^{7x} + c_2 e^x}_{y_h} + \underbrace{\frac{1}{6} e^x}_{y_{p_2}}.$$

3. Pravá strana diferenciálnej rovnice (4.45) je $f_3(x) = (x+1)e^{2x}$. Funkcia $e^{2x} \notin \mathcal{F}$ (2 nie je koreňom charakteristického polynómu), preto návrh partikulárneho riešenia bude

$$y_{n_3} = (a_1x + a_0)e^{2x}, \quad (\text{polynóm } \hat{P}_1 = a_1x + a_0).$$

Dvakrát zderivujeme y_{n_3}

$$y'_{n_3} = a_1e^{2x} + 2(a_1x + a_0)e^{2x}, \quad y''_{n_3} = 4a_1e^{2x} + 4(a_1x + a_0)e^{2x}.$$

Dosadíme do pôvodnej diferenciálnej rovnice (4.45):

$$4(a_1x + a_1 + a_0)e^{2x} - 8(2a_1x + a_1 + 2a_0)e^{2x} + 7(a_1x + a_0)e^{2x} = (x+1)e^{2x}$$

Dostaneme sústavu lineárnych rovníc (porovnaním koeficientov pri rovnakých funkciách premennej x):

$$\begin{array}{ll} e^{2x}x^0: & -4a_1 - 5a_0 = 1, \\ e^{2x}x^1: & \qquad\quad -5a_1 = 1, \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a_1 = -\frac{1}{5} \\ a_0 = \frac{1}{25}. \end{array}$$

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (4.45) je

$$y_v = \underbrace{c_1e^{7x} + c_2e^{x}}_{y_h} \underbrace{- \left(\frac{x}{5} + \frac{1}{25}\right)e^{2x}}_{y_{p_3}}.$$

4. Pravá strana diferenciálnej rovnice (4.46) je $f_4(x) = 14\sin 7x$. Keďže $\sin 7x \notin \mathcal{F}$, $\cos 7x \notin \mathcal{F}$ ($\pm 7\imath$ nie sú korene charakteristického polynómu), návrh partikulárneho riešenia bude

$$y_{n_4} = a\cos 7x + b\sin 7x, \quad (\text{polynómy } \hat{P}_0 = a,\ \hat{Q}_0 = b).$$

Dvakrát zderivujeme y_{n_4}:

$$y'_{n_4} = -7a\sin 7x + 7b\cos 7x, \quad y''_{n_4} = -49a\cos 7x - 49b\sin 7x.$$

Dosadíme do pôvodnej diferenciálnej rovnice (4.46):

$$(-49a\cos 7x - 49b\sin 7x) - 8(-7a\sin 7x + 7b\cos 7x) + 7(a\cos 7x + b\sin 7x) = \sin 7x.$$

Dostaneme sústavu lineárnych rovníc (porovnaním koeficientov pri $\cos 7x$ a $\sin 7x$):

$$\begin{array}{lrcr} \cos 7x: & -42a - 56b & = & 0, \\ \sin 7x: & 56a - 42b & = & 14, \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a = \frac{4}{25} \\ b = -\frac{3}{25}. \end{array}$$

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (4.46) je

$$y_v = \underbrace{c_1e^{7x} + c_2e^{x}}_{y_h} + \underbrace{\left(\frac{4}{25}\cos 7x - \frac{3}{25}\sin 7x\right)}_{y_{p_4}}. \qquad \square$$

Príklad 4.29 Nájdite všeobecné riešenia diferenciálnych rovníc

$$y'' - 6y' + 9y = 6e^{3x}, \tag{4.47}$$
$$y'' - 6y' + 9y = 3x^2 + 7, \tag{4.48}$$
$$y'' - 6y' + 9y = e^{3x} \cos 3x. \tag{4.49}$$

Riešenie: Nájdeme všeobecné riešenie homogénnej časti daných diferenciálnych rovníc $y'' - 6y' + 9y = 0$. Jej charakteristický polynóm je

$$s^2 - 6s + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad (s-3)^2 = 0.$$

Charakteristický polynóm má jeden dvojnásobný koreň $s_1 = 3$. Všeobecné riešenie a fundamentálny systém riešení diferenciálnej rovnice $y'' - 6y' + 9y = 0$ sú

$$y_h = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}, \quad \mathcal{F} = \{e^{3x}, \, xe^{3x}\}.$$

1. Pravá strana diferenciálnej rovnice (4.47) je $f_1(x) = 6e^{3x}$. Porovnaním s fundamentálnym systémom dostaneme $xe^{3x} \in \mathcal{F}$, $x^2 e^{3x} \notin \mathcal{F}$. Partikulárne riešenie navrhneme v tvare

   $$y_{n_1} = ax^2 e^{3x}, \quad (\text{polynóm } \hat{P}_0 = a).$$

   Dvakrát zderivujeme y'_{n_1} a y''_{n_2}:

   $$y'_{n_1} = 2axe^{3x} + 3ax^2 e^{3x}, \quad y''_{n_1} = 2ae^{3x} + 12axe^{3x} + 9ax^2 e^{3x},$$

   z toho dosadením do pôvodnej diferenciálnej rovnice (4.47) dostaneme

   $$(2ae^{3x} + 12axe^{3x} + 9ax^2 e^{3x}) - 6(2axe^{3x} + 3ax^2 e^{3x}) + 9ax^2 e^{3x} = 6e^{3x} \quad \Rightarrow \quad a = 3.$$

   Súčet koeficientov pri funkciách xe^{3x} sa rovná 0. (S niečím podobným sme sa stretli aj pri riešení diferenciálnej rovnice (4.44).) To znamená, že riešenie $a = 3$ sme získali porovnaním koeficientov pri funkciách e^{3x}. Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (4.47) je

   $$y_v = \underbrace{c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}}_{y_h} + \underbrace{3x^2 e^{3x}}_{y_{p_1}}.$$

2. Pravá strana diferenciálnej rovnice (4.48) je $f_2(x) = 3x^2 + 7$. Platí $e^0 \notin \mathcal{F}$ (0 nie je koreňom charakteristického polynómu), preto návrh partikulárneho riešenia bude

   $$y_{n_2} = (a_2 x^2 + a_1 x + a_0)e^{0x}, \quad (\text{polynóm } \hat{P}_2 = a_2 x^2 + a_1 x + a_0).$$

   Dvakrát zderivujeme y_{n_2}

   $$y'_{n_2} = 2a_2 x + a_1, \quad y''_{n_2} = 2a_2.$$

Dosadíme do pôvodnej diferenciálnej rovnice (4.48):

$$2a_2 - 6(2a_2x + a_1) + 9(a_2x^2 + a_1x + a_0) = 3x^2 + 7.$$

Dostaneme sústavu lineárnych rovníc (porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách premennej x):

$$\begin{array}{rrcl} x^0: & 2a_2 - 6a_1 + 9a_0 & = & 7, \\ x^1: & -12a_2 + 9a_1 & = & 0, \\ x^2: & 9a_2 & = & 3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a_2 = \frac{1}{3} \\ a_1 = \frac{4}{9} \\ a_0 = 1. \end{array}$$

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (4.48) je

$$y_v = \underbrace{c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}}_{y_n} + \underbrace{\frac{x^2}{3} - \frac{4}{9}x + 1}_{y_{p2}}.$$

3. Pravá strana diferenciálnej rovnice (4.49) je $f_3(x) = e^{3x}\cos 3x$. Platí $e^{3x}\cos 3x \notin \mathcal{F}$, $e^{3x}\sin 3x \notin \mathcal{F}$ ($3 \pm 3\imath$ nie sú korene charakteristického polynómu), preto návrh partikulárneho riešenia bude

$$y_{n_3} = e^{3x}(a\cos 3x + b\sin 3x), \quad (\text{polynómy } \hat{P}_0 = a,\ \hat{Q}_0 = b).$$

Dvakrát zderivujeme y_{n_3}:

$$\begin{aligned} y'_{n_3} &= 3e^{3x}((a+b)\cos 3x + (b-a)\sin 3x), \\ y''_{n_3} &= 18e^{3x}(-a\sin 3x + b\cos 3x). \end{aligned}$$

Dosadíme do pôvodnej diferenciálnej rovnice (4.49):

$$\begin{aligned} & 18e^{3x}(-a\sin 3x + b\cos 3x) - 18e^{3x}((a+b)\cos 3x + (b-a)\sin 3x) + \\ + \ & 9e^{3x}(a\cos 3x + b\sin 3x) = e^{3x}\cos 3x. \end{aligned}$$

Dostaneme sústavu lineárnych rovníc (porovnaním koeficientov pri rovnakých funkciách premennej x):

$$\begin{array}{rrcl} e^{3x}\cos 3x: & -9a & = & 1, \\ e^{3x}\sin 3x: & -9b & = & 0, \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a = -\frac{1}{9} \\ b = 0. \end{array}$$

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (4.49) je

$$y_v = \underbrace{c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}}_{y_n} \underbrace{-\frac{1}{9}e^{3x}\cos 3x}_{y_{p3}}. \qquad \square$$

Príklad 4.30 Nájdite všeobecné riešenia diferenciálnych rovníc

$$
\begin{aligned}
y'' + 25y &= 10e^{-5x}, && (4.50)\\
y'' + 25y &= 10\sin 5x, && (4.51)\\
y'' + 25y &= e^{x}(\cos 5x + 2\sin 5x). && (4.52)
\end{aligned}
$$

Riešenie: Nájdeme všeobecné riešenie homogénnej časti daných diferenciálnych rovníc $y'' + 25y = 0$. Jej charakteristický polynóm je

$$s^2 + 25 = 0, \quad \text{to znamená, že charakteristický polynóm nemá reálne korene.}$$

Charakteristický polynóm má komplexné korene $s_{1,2} = \pm 5\imath$. Všeobecné riešenie a fundamentálny systém riešení diferenciálnej rovnice $y'' + 25y = 0$ sú

$$y_h = c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x, \quad \mathcal{F} = \{\cos 5x, \sin 5x\}.$$

1. Pravá strana diferenciálnej rovnice (4.50) je $f_1(x) = 10e^{-5x}$. Funkcia $e^{-5x} \notin \mathcal{F}$. Partikulárne riešenie navrhneme v tvare

   $$y_{n_1} = ae^{-5x}, \quad (\text{polynóm } \hat{P}_0 = a).$$

   Dvakrát zderivujeme y'_{n_1} a y''_{n_2}:

   $$y'_{n_1} = -5ae^{-5x}, \quad y''_{n_1} = 25ae^{-5x},$$

   z toho dosadením do pôvodnej diferenciálnej rovnice (4.50) dostaneme

   $$25ae^{-5x} + 25ae^{-5x} = 10e^{-5x} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2}{5}.$$

   Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (4.50) je

   $$y_v = \underbrace{c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x}_{y_n} + \underbrace{\frac{2}{5}e^{-5x}}_{y_{p_1}}.$$

2. Pravá strana diferenciálnej rovnice (4.51) je $f_2(x) = 10\sin 5x$. Keďže $\sin 5x \in \mathcal{F}$, $cos 5x \in \mathcal{F}$ (alebo $\pm 5\imath$ sú korene charakteristického polynómu), preto návrh partikulárneho riešenia bude

   $$y_{n_2} = x(a\cos 5x + b\sin 5x), \quad (\text{polynómy } \hat{P}_0 = a,\, \hat{Q}_0 = b).$$

   Dvakrát zderivujeme y_{n_2}

   $$
   \begin{aligned}
   y'_{n_2} &= a\cos 5x + b\sin 5x + x(-5a\sin 5x + 5b\cos 5x),\\
   y''_{n_2} &= -10a\sin 5x + 10b\cos 5x + x(-25a\cos 5x - 25b\sin 5x).
   \end{aligned}
   $$

Dosadíme do pôvodnej diferenciálnej rovnice (4.51):

$$\begin{aligned} & -10a\sin 5x + 10b\cos 5x + x(-25a\cos 5x - 25b\sin 5x) + \\ + \ & 25x(a\cos 5x + b\sin 5x) = 10\sin 5x. \end{aligned}$$

Dostaneme sústavu lineárnych rovníc (porovnaním koeficientov pri rovnakých funkciách premennej x):

$$\begin{array}{rrcl} \cos 5x: & 10b & = & 0, \\ \sin 5x: & -10a & = & 10, \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 0. \end{array}$$

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (4.51) je

$$y_v = \underbrace{c_1\cos 5x + c_2\sin 5x}_{y_n} \underbrace{-x\cos 5x}_{y_{p_2}}.$$

3. Pravá strana diferenciálnej rovnice (4.52) je $f_3(x) = e^x(\cos 5x + 2\sin 5x)$. Platí $e^x\cos 5x,\ e^x\sin 5x \notin \mathcal{F}$ ($1 \pm 5\imath$ nie sú korene charakteristického polynómu), preto návrh partikulárneho riešenia bude

$$y_{n_3} = e^x(a\cos 5x + b\sin 5x), \quad (\text{polynómy } \hat{P}_0 = a,\ \hat{Q}_0 = b).$$

Dvakrát zderivujeme y_{n_3}:

$$\begin{aligned} y'_{n_3} &= e^x((a + 5b)\cos 5x + (b - 5a)\sin 5x), \\ y''_{n_3} &= e^x((-24a + 10b)\cos 5x + (-10a - 24b)\sin 3x). \end{aligned}$$

Dosadíme do pôvodnej diferenciálnej rovnice (4.52):

$$\begin{aligned} & e^x((-24a + 10b)\cos 5x + (-10a - 24b)\sin 3x) + 25e^x(a\cos 5x + b\sin 5x) = \\ = \ & e^x(\cos 5x + 2\sin 5x). \end{aligned}$$

Dostaneme sústavu lineárnych rovníc (porovnaním koeficientov pri rovnakých funkciách premennej x):

$$\begin{array}{rrcl} e^x\cos 5x: & a + 10b & = & 1, \\ e^x\sin 5x: & -10a + b & = & 2, \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a = -\frac{19}{101} \\ b = \frac{12}{101}. \end{array}$$

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (4.52) je

$$y_v = \underbrace{c_1\cos 5x + c_2\sin 5x}_{y_n} + \underbrace{e^x\left(-\frac{19}{101}\cos 5x + \frac{12}{101}\sin 5x\right)}_{y_{p_3}}. \qquad \square$$

Na ilustráciu vyriešime diferenciálne rovnice štvrtého rádu.

Príklad 4.31 Nájdite všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $y^{(4)} + 2y'' + y = 2\sin x - \cos x$.

Riešenie: Nájdeme všeobecné riešenie homogénnej časti danej diferenciálnej rovnice $y^{(4)}+$ $+2y'' + y = 0$. Jej charakteristický polynóm je

$$s^4 + 2s^2 + 1 = 0, \quad \Rightarrow \quad (s^2+1)^2 = (s+\imath)^2(s-\imath)^2 = 0.$$

Charakteristický polynóm má dva dvojnásobné korene $s_1 = \imath$, $s_2 = -\imath$. Všeobecné riešenie a fundamentálny systém riešení diferenciálnej rovnice $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$ sú

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x \cos x + c_4 x \sin x, \quad \mathcal{F} = \{\cos x,\ \sin x, x\cos x,\ x \sin x\}.$$

Pravá strana diferenciálnej rovnice je $f_1(x) = 2\sin x - \cos x$. Porovnaním s fundamentálnym systémom $\mathcal{F}$ dostaneme návrh partikulárneho riešenia:

$$y_{n_1} = x^2 \left(a\cos x + b \sin x\right).$$

Vypočítame prvé štyri derivácie:

$$\begin{aligned}
y'_{n_1} &= 2x\left(a\cos x + b\sin x\right) + x^2\left(-a\sin x + b\cos x\right),\\
y''_{n_1} &= 2\left(a\cos x + b\sin x\right) + 4x\left(-a\sin x + b\cos x\right) + x^2\left(-a\cos x - b\sin x\right),\\
y'''_{n_1} &= 6\left(-a\sin x + b\cos x\right) + 6x\left(-a\cos x - b\sin x\right) + x^2\left(a\sin x - b\cos x\right),\\
y^{(4)}_{n_1} &= 12\left(-a\cos x - b\sin x\right) + 8x\left(a\sin x - b\cos x\right) + x^2\left(a\cos x + b\sin x\right).
\end{aligned}$$

Dosadíme do diferenciálej rovnice:

$$\begin{aligned}
& 12\left(-a\cos x - b\sin x\right) + 8x\left(a\sin x - b\cos x\right) + x^2\left(a\cos x + b\sin x\right) + \\
+\ & 2\big(2\left(a\cos x + b\sin x\right) + 4x\left(-a\sin x + b\cos x\right) + x^2\left(-a\cos x - b\sin x\right)\big) + \\
+\ & x^2\left(a\cos x + b\sin x\right) = 2\sin x - \cos x.
\end{aligned}$$

Porovnaním koeficientov pri rovnakých funkciách premennej x dostaneme sústavu lineárnych rovníc

$$\begin{array}{rrcr} \cos: & -8a & = & -1 \\ \sin: & -8b & = & 2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a = \frac{1}{8}, \\ b = -\frac{1}{4}. \end{array}$$

Hľadané všeobecné riešenie danej diferenciálnej rovnice je

$$y_v = c_1\cos x + c_2 \sin x + c_3 x\cos x + c_4 x \sin x + \frac{x^2}{8}\cos x - \frac{x^2}{4}\sin x. \qquad \square$$

Vo všeobecnosti, na pravej strane diferenciálnej rovnice môže byť súčet niekoľkých funkcií typu (4.35). Na príklade ukážeme, ako treba postupovať v takomto prípade pri riešení.

Príklad 4.32 Nájdite všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $y'' + 3y' = x^2 - 3x + 8e^{5x}$.

Riešenie: Nájdeme všeobecné riešenie homogénnej časti danej diferenciálnej rovnice $y'' + 3y' = 0$. Jej charakteristický polynóm je

$$s^2 + 3s = 0, \quad \Rightarrow \quad s(s+3) = 0.$$

Charakteristický polynóm má dva reálne korene $s_1 = 0$, $s_2 = -3$. Všeobecné riešenie homogénnej časti a fundamentálny systém riešení diferenciálnej rovnice $y'' + 3y' = 0$ sú

$$y_h = c_1 + c_2 e^{-3x}, \quad \mathcal{F} = \{e^0, e^{-3x}\}.$$

Pravá strana strana diferenciálnej rovnice je súčtom dvoch funkcií typu (4.35):

$$f_1(x) = x^2 - 3x \quad \text{a} \quad f_2(x) = 8e^{5x}.$$

Postupujeme tak, ako keby sme mali dve diferenciálne rovnice, jednu s pravou stranou f_1 a druhú s pravou stranou f_2. Budeme mat' dva návrhy partikulárnych riešení, y_{n_1} a y_{n_2}. Vypočítaním príslušných neurčitých koeficientov z nich získame partikulárne riešenia y_{p_1} a y_{p_2}. Hľadané všeobecné riešenie bude

$$y_v = y_h + y_{p_1} + y_{p_2}.$$

Návrhy partikulárnych riešení sú

$$y_{n_1} = x(a_2x^2 + a_1x + a_0)e^0, \quad y_{n_2} = be^{5x}.$$

Návrhy dvakrát zderivujeme

$$\begin{aligned} y'_{n_1} &= 3a_2x^2 + 2a_1x + a_0, & y'_{n_2} &= 5be^{5x}, \\ y''_{n_1} &= 6a_2x + 2a_1, & y''_{n_2} &= 25be^{5x}. \end{aligned}$$

Dosadíme do pôvodnej diferenciálnej rovnice (oba návrhy môžeme dosadit' odrazu):

$$6a_2x + 2a_1 + 3\left(3a_2x^2 + 2a_1x + a_0\right) + 25be^{5x} + 15be^{5x} = x^2 - 3x + 8e^{5x}.$$

Porovnaním koeficientov pri rovnakých funkciách premennej x zostavíme sústavu lineárnych rovníc:

$$\begin{array}{rlcr} x^2: & 9a_2 & = & 1 \\ x^1: & 6a_2 + 6a_1 & = & -3 \\ x^0: & 2a_1 + 3a_0 & = & 0 \\ e^{5x}: & 40b & = & 8 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a_2 = \frac{1}{9}, \\ a_1 = -\frac{11}{18}, \\ a_0 = \frac{11}{27}, \\ b = \frac{1}{5}. \end{array}$$

Všeobecné riešenie danej diferenciálnej rovnice je

$$y_v = \underbrace{c_1 + c_2e^{-3x}}_{y_h} + \underbrace{\frac{x^3}{9} - \frac{11}{18}x^2 + \frac{11}{27}x}_{y_{p_1}} + \underbrace{\frac{1}{5}e^{5x}}_{y_{p_2}}.$$

□

Príklad 4.33 Nájdite riešenie diferenciálnej rovnice $y'' - 5y' + 6y = 2e^{2x}$, spĺňajúce začiatočné podmienky $y(0) = 2,\ y'(0) = 0$.

Riešenie: Nájdeme všeobecné riešenie homogénnej časti $y''-5y'+6y = 0$. Charakteristický polynóm má tvar

$$s^2 - 5s + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad (s-3)(s-2) = 0.$$

Všeobecné riešenie a fundamentálny systém riešení diferenciálnej rovnice $y''-5y'+6y = 0$ sú

$$y_h = c_1e^{3x} + c_2e^{2x}, \quad \mathcal{F} = \{e^{3x},\ e^{2x}\}.$$

Pravá strana diferenciálnej rovnice je $f(x) = 2e^{2x}$. Porovnaním s fundamentálnym systémom riešení $\mathcal{F}$ dostaneme, že návrh y_n partikulárneho riešenia je

$$y_n = axe^{2x}.$$

Dvakrát zderivujeme y_n:

$$y_n' = a\,e^{2x} + 2ax\,e^{2x}, \quad y_n'' = 4a\,e^{2x} + 4ax\,e^{2x}.$$

Dosadíme do pôvodnej diferenciálnej rovnice:

$$4a\,e^{2x} + 4ax\,e^{2x} - 5\left(a\,e^{2x} + 2ax\,e^{2x}\right) + 6axe^{2x} = 2e^{2x}.$$

Z toho $a = -2$. Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice je

$$y_v = \underbrace{c_1e^{3x} + c_2e^{2x}}_{y_h}\underbrace{-2x\,e^{2x}}_{y_p}. \tag{4.53}$$

Použijeme začiatočné podmienky.

$$y_v' = 3c_1e^{3x} + 2c_2e^{2x} - 2e^{2x} - 4xe^{2x}.$$

Zo začiatočných podmienok dostaneme sústavu lineárnych rovníc

$$\begin{array}{rr} y(0) = 2: & c_1 + c_2 = 2, \\ y'(0) = 0: & 3c_1 + 2c_2 - 2 = 0, \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} c_1 = -2, \\ c_2 = 4. \end{array}$$

Dosadením do (4.53) dostaneme hľadané riešenie, koré spĺňa začiatočné podmienky

$$y = -2e^{3x} + 4e^{2x} - 2x\,e^{2x}.$$

$\square$

4.4 Cvičenia

Cvičenie 4.1 Nájdite všeobecné riešenie separovaných a separovateľných diferenciálnych rovníc
(a) $y' = 10x$, **(b)** $\frac{1}{x} + \frac{y'}{y-y^2}$, **(c)** $(y-1)(y-3) - y' = 0$,
(d) $3y - x^4 y' = 0$, **(e)** $1 + y^2 + xyy' = 0$, **(f)** $y' - xy^2 - y^2 - xy - y = 0$.

Cvičenie 4.2 Nájdite všeobecné riešenie lineárnych diferenciálnych rovníc
(a) $y' = xy + 5x - 2y - 10$, **(b)** $y' + 3y = x$, **(c)** $y' + 2y = e^{2x}$,
(d) $y' + xy = x$, **(e)** $xy' = 2y + x + 1$, **(f)** $xy' + y = x^3$,
(g) $x^2 y' + xy = -1$.

Cvičenie 4.3 Nájdite všeobecné riešenie homogénnych a Bernoulliho diferenciálnych rovníc
(a) $\frac{x+2y}{y} + y' = 0$, **(b)** $\frac{x^2+y^2}{x} + yy' = 0$, **(c)** $\frac{x-y}{x+y} + \frac{x}{x-y} y' = 0$,
(d) $\frac{y}{x-y} + \frac{x}{y} y' = 0$, **(e)** $xy + xy' = y^2 x^2$, **(f)** $y' + 2y = e^{2x} y^3$,
(g) $2x^2 y + y' = x^2 \sqrt{y}$, **(h)** $y' + 2y = e^{-x} y^4$.

Cvičenie 4.4 Nájdite všeobecné riešenie diferenciálnych rovníc prvého rádu
(a) $xy = (3+x)(5+y)y'$, **(b)** $y' = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{y^2+2} - \frac{1}{x(y^2+2)}$,
(c) $-y - a + y' \operatorname{tg} x = 0$, a je konštanta , **(d)** $\sin x \cdot \cos y + y' \operatorname{tg} y \cdot \cos x = 0$,
(e) $-1 + e^{-y}(1 + y') = 0$, **(f)** $e^{x+y} - y' = 0$,
(g) $(1 + e^x) yy' = e^x$, **(h)** $(1 - x^2)y' + x(y-3) = 0$,
(i) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$, **(j)** $y' - xy = x \cdot e^{x^2}$,
(k) $xy' \cdot \ln x - 2y = \ln x$, **(l)** $y' + \frac{y}{x+1} = \sin x$,
(m) $xy' - 2y = x^3 \cos x$, **(n)** $y' \cos x + 2y \sin x = 2 \sin x$.

Cvičenie 4.5 Nájdite partikulárne riešenie diferenciálnych rovníc prvého rádu, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku
(a) $(1 + x^2)y' + y = \operatorname{arctg} x$, začiatočná podmienka $y(0) = 3$.
(b)$y' + \frac{y}{x+1} = e^{2-x}$, začiatočná podmienka $y(2) = 1$.
(c) $(2 + x)y = x(5 + y)y'$, začiatočná podmienka $y(e) = 1$.
(d) $y' - xy = x^2 \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$, začiatočná podmienka $y(1) = \sqrt{e}$.

Cvičenie 4.6 Nájdite všeobecné riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice s konštantnými koeficientami $y'' - 5y' + 6y = f(x)$, keď:
(a) $f(x) = (7 - 12x)e^{-x}$, **(b)** $f(x) = 2e^{3x}$, **(c)** $f(x) = \frac{9}{2} \cos 3x + \frac{7}{2} \sin 3x$,
(d) $f(x) = \frac{21}{2} - 13x + 6x^2$, **(e)** $f(x) = \frac{1}{6} e^{4x}$, **(f)** $f(x) = e^{2x}(\cos x + \sin x)$.

Cvičenie 4.7 Nájdite všeobecné riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice s konštantnými koeficientami $5y'' + 3y' = f(x)$, keď:
(a) $f(x) = 2e^x$, **(b)** $f(x) = 25 - 6x$, **(c)** $f(x) = 2 \cos x + 9 \sin x$,
(d) $f(x) = 3e^{\frac{3}{5}x}$, **(e)** $f(x) = -9 \cos \frac{3}{5}x + 9 \sin \frac{3}{5}x$, **(f)** $f(x) = -e^{-x}(8 \cos x + 5 \sin x)$.

Cvičenie 4.8 Nájdite všeobecné riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice s konštantnými koeficientami $9y'' - 6y' + 1y = f(x)$, keď:
(a) $f(x) = -12 + 2x$, **(b)** $f(x) = 3e^{\frac{x}{3}}$, **(c)** $f(x) = 2\cos\frac{x}{3}$,
(d) $f(x) = 5e^{2x}$, **(e)** $f(x) = -4x\cos x + (3x-5)\sin x$, **(f)** $f(x) = e^{3x}(4x+3)$.

Cvičenie 4.9 Nájdite všeobecné riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice s konštantnými koeficientami $y'' + 9y = f(x)$, keď:
(a) $f(x) = 15x^2 + \frac{1}{3}$, **(b)** $f(x) = 5e^x + 6\sin 3x$, **(c)** $f(x) = e^x(5x^2 + 2x + 1)$,
(d) $f(x) = 36e^{3x}$, **(e)** $f(x) = 6\cos 3x + 2\sin 3x$, **(f)** $f(x) = e^{3x}(17\cos x - 6\sin x)$.

Cvičenie 4.10 Nájdite všeobecné riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice s konštantnými koeficientami $y'' - 6y' + 10y = f(x)$, keď:
(a) $f(x) = 10x - \frac{27}{2}$, **(b)** $f(x) = (2x^2 - 4x + 2)e^{2x}$,
(c) $f(x) = 2e^{3x}\cos x$, **(d)** $f(x) = 5\cos x + 12\sin x$,
(e) $f(x) = (-9x+15)\cos x - (6x-8)\sin x$, **(f)** $f(x) = e^{3x} + 13e^{-2x}$.

Cvičenie 4.11 Nájdite všeobecné riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice s konštantnými koeficientami $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = f(x)$, keď:
(a) $f(x) = -4x^3 + 22x^2 - 30x + 1$, **(b)** $f(x) = 6e^{2x}$, **(c)** $f(x) = 4\cos 2x - 4\sin 2x$.

Cvičenie 4.12 Nájdite všeobecné riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice s konštantnými koeficientami $y^{(4)} + \frac{1}{2}y'' + \frac{1}{16}y = f(x)$ keď:
(a) $f(x) = 9\cos x - 27\sin x$, **(b)** $f(x) = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}$, **(c)** $f(x) = -2\cos\frac{x}{2} + 4\sin\frac{x}{2}$,
(d) $f(x) = \frac{x^3}{4} - \frac{x^2}{2} + 12x - 7$.

Cvičenie 4.13 Nájdite partikulárne riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice, spĺňajúce začiatočné podmienky
(a) $y'' - 4y' + 3y = -2e^x$, začiatočné podmienky $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.
(b) $y'' + 9y = 5\cos 2x - 8\sin x$, začiatočné podmienky $y(\pi) = 2$, $y'(\pi) = -1$.
(c) $y'' - 2y' = -6x^2 + 6x + 4$, začiatočné podmienky $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
(d) $y'' - 2y' + y = -4\cos x + 2\sin x$, začiatočné podmienky $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$.

Kapitola 5

Funkcie viacerých premenných

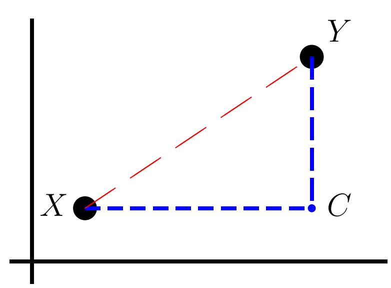
5.1 Základné pojmy a vzťahy

5.1.1 Vzdialenosti a podmnožiny $\mathbb{R}^2$

V $\mathbb{R}^2$ máme niekoľko možností, ako merať vzdialenosti bodov. Uvedieme aspoň niektoré z nich:

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathbb{E}}(X,Y) &= \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}, && \text{euklidovská vzdialenosť}, && (5.1)\\
\rho_M(X,Y) &= \max\{|x_1-y_1|,\ |x_2-y_2|\}, && \text{maximová vzdialenosť}, && (5.2)\\
\rho_{Mh}(X,Y) &= |x_1-y_1|+|x_2-y_2|, && \text{manhatanská vzdialenosť}, && (5.3)
\end{aligned}$$

kde $X=(x_1,x_2)$ a $Y=(y_1,y_2)$ sú ľubovoľné body $\mathbb{R}^2$. Najbežnejšie používaná je euklidovská vzdialenosť.



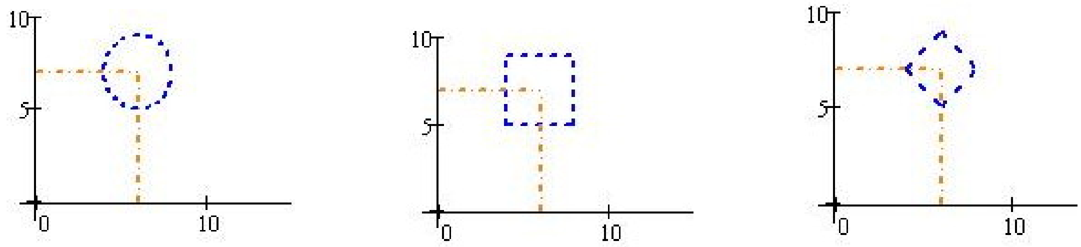
Obr. 5.1. Euklidovská, maximová a manhatanská vzdialenosť bodov X a Y

Vzťahy medzi euklidovskou a maximovou, resp., euklidovskou a manhatanskou vzdialenosťou (pozri obr. 5.1) sú:
$\rho_M(X,Y)=\max\{\rho_{\mathbb{E}}(X,C),\ \rho_{\mathbb{E}}(Y,C)\}$,
$\rho_{Mh}(X,Y)=\rho_{\mathbb{E}}(X,C)+\rho_{\mathbb{E}}(Y,C)$.

Nech $\varepsilon>0$, potom *otvorené kruhové ε-ové okolie* bodu $X=(x_1,x_2)$ je množina

$$O_{\varepsilon,\rho}(X)=\{Z\in\mathbb{R}^2; \rho(X,Z)<\varepsilon\}, \tag{5.4}$$

kde ρ je zvolený spôsob merania vzdialeností.



Obr. 5.2. Otvorené kruhové okolia pri euklidovskej, maximovej a manhatanskej vzdialenosti

Nech ρ je pevne zvolený spôsob merania vzdialeností. Ďalej nech $A \subset \mathbb{R}^2$ je ľubovoľná množina. Potom:

(B1) Bod $X \in A$ nazveme *vnútorným bodom množiny* A, ak existuje $\varepsilon > 0$ také, že $O_{\varepsilon,\rho}(X) \subset A$.

(B2) Bod $X \notin A$ nazveme *vonkajším bodom množiny* A, ak existuje $\varepsilon > 0$ také, že $O_{\varepsilon,\rho}(X) \cap A = \emptyset$.

(B3) Bod X nazveme *hraničným bodom množiny* A, ak pre každé $\varepsilon > 0$ platí $O_{\varepsilon,\rho}(X) \not\subset A$ a súčasne $O_{\varepsilon,\rho}(X) \cap A \neq \emptyset$.

(M1) Množinu $A \subset \mathbb{R}^2$ nazveme *otvorenou*, ak každý bod $X \in A$ je jej vnútorným bodom.

(M2) Množinu $A \subset \mathbb{R}^2$ nazveme *uzavretou*, ak obsahuje všetky svoje hraničné body.

Príklad 5.1

Každé otvorené kruhové okolie ľubovoľného bodu $X \in \mathbb{R}^2$ je otvorená množina.
Množina $(0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$ je otvorená.
Množina $[0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ je uzavretá.
Nech $X \in \mathbb{R}^2$ je pevne zvolený bod. Ďalej nech $A = \{Z \in \mathbb{R}^2; \rho(X,Z) \leq \varepsilon\}$, kde $\varepsilon > 0$ a ρ je euklidovská, maximová, prípadne manhatanské vzdialenosť. Potom A je uzavretá množina.
Označme $X_i = \left(0, \frac{1}{i}\right)$ pre $i \in \mathbb{N}$. Potom bod $(0,0)$ je hraničným bodom množiny $A = \{X_i, i \in \mathbb{N}\}$ a $(0,0) \notin A$. To znamená, že A nie je uzavretá množina. Súčasne, napríklad bod X_1 nie je vnútorným bodom A. To znamená, že A nie je ani otvorená množina.

V ďalšom budeme pracovať len s euklidovskou vzdialenosťou, ktorú označíme ρ.

5.1.2 Funkcie dvoch premenných a ich grafy

Nech $f : D_f \to \mathbb{R}$ je funkcia dvoch premenných, kde $D_f \subset \mathbb{R}^2$ je definičný obor f. Potom *graf funckie* f je dvojrozmerná plocha

$$G(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in D_f\}. \tag{5.5}$$

Definícia 5.1 *Nech $x_0 \in \mathbb{R}$ a $y_0 \in \mathbb{R}$ sú zvolené čísla a $f : D_f \to \mathbb{R}$ je funkcia dvoch premenných. Potom funkcie jednej premennej*

$$f_1(x) = f(x, y_0) \quad \text{a} \quad f_2(y) = f(x_0, y)$$

nazveme parciálnymi funkciami pre $y = y_0$, resp. $x = x_0$.

Definícia 5.2 *Nech $f : D_f \to \mathbb{R}$ je funkcia dvoch premenných a $z_0 \in \mathbb{R}$. Potom krivku $z_0 = f(x, y)$ nazveme vrstevnicou (alebo izočiarou).*

Prienik grafu $G(f)$ funkcie f s rovinou σ sa volá *rez funkcie*.
Grafy parciálnych funkcií aj grafy vrstevníc sú špeciálne rezy.

Keď chceme funkciu f znázorniť graficky, môžeme nakresliť jej rezy. Spravidla sú to grafy parciálnych funkcií, prípadne vrstevnice.

Príklad 5.2 Nájdite definičný obor funkcie $f(x, y) = \arccos(x^2 + 4y^2)$ a nakreslite jej vrstevnice pre $z_0 = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$.

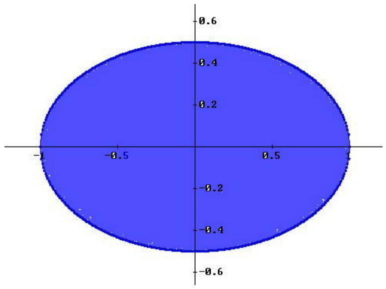
Riešenie: Definičný obor funkcie arccos je $[-1, 1]$. Z toho dostaneme podmienku

$$-1 \le \underbrace{x^2 + 4y^2}_{\ge 0} \le 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 4y^2 \le 1.$$

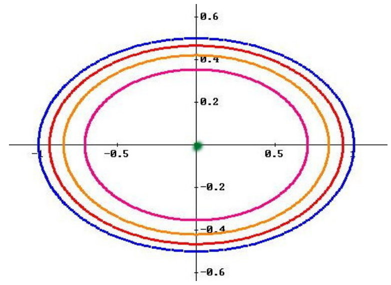
Definičný obor funkcie f je uzavretá množina (elipsa) $D_f = \{(x, y); x^2 + 4y^2 \le 1\}$.

Pre vrstevnice dostaneme rovnice:

$$\begin{array}{lll}
z_0 = 0: & \arccos(x^2 + 4y^2) = 0, & \Rightarrow \quad x^2 + 4y^2 = 1, \\
z_0 = \frac{\pi}{6}: & \arccos(x^2 + 4y^2) = \frac{\pi}{6} & \Rightarrow \quad x^2 + 4y^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\
z_0 = \frac{\pi}{4}: & \arccos(x^2 + 4y^2) = \frac{\pi}{4} & \Rightarrow \quad x^2 + 4y^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\
z_0 = \frac{\pi}{3}: & \arccos(x^2 + 4y^2) = \frac{\pi}{3} & \Rightarrow \quad x^2 + 4y^2 = \frac{1}{2}, \\
z_0 = \frac{\pi}{2}: & \arccos(x^2 + 4y^2) = \frac{\pi}{2} & \Rightarrow \quad x^2 + 4y^2 = 0.
\end{array}$$



Obr. 5.3. Definičný obor funkcie f



Obr. 5.4. Vrstevnice funkcie f

$\square$

Príklad 5.3 Nájdite definičný obor funkcie $f(x,y) = \ln \frac{x}{y}$. Nakreslite jej vrstevnice pre $z_0 \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Nakreslite jej parciálne funkcie pre $x_0 \in \{-2, -1, 2, 5\}$ a $y_0 \in \{-3, -2, 1, 3\}$.

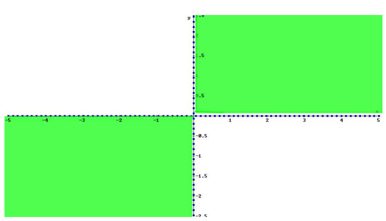
Riešenie: Definičný obor funkcie ln je $(0, \infty)$. Z toho dostaneme podmienku $\frac{x}{y} > 0$. Definičný obor je otvorená množina

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > 0,\ y > 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x < 0,\ y < 0\}.$$

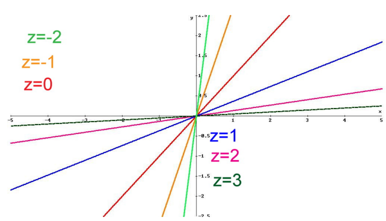
Pre vrstevnice dostaneme rovnicu $z_0 = \ln \frac{x}{y}$, z toho

$$\frac{x}{y} = e^{z_0} \quad \text{alebo} \quad y = x\, e^{-z_0}.$$

Vrstevnice sú priamky so smernicou $k = e^{-z_0}$, ale bez bodu $(0,0)$, ktorý nie je z D_f.



Obr. 5.5. Definičný obor funkcie f

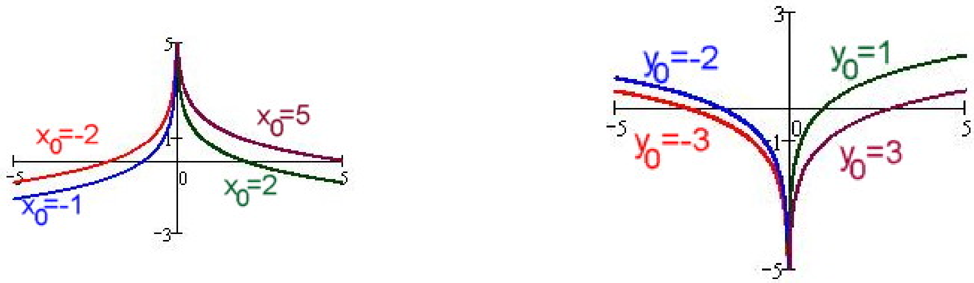


Obr. 5.6. Vrstevnice funkcie f

Pre parciálne funkcie dostaneme rovnice

$$f_2(y) = f(x_0, y) = \begin{cases} \ln x_0 - \ln y, & \text{ak je } x_0 > 0 \text{ a } D(f_2) = (0, \infty), \\ \ln(-x_0) - \ln(-y), & \text{ak je } x_0 < 0 \text{ a } D(f_2) = (-\infty.0), \end{cases}$$

$$f_1(x) = f(x, y_0) = \begin{cases} \ln x - \ln y_0, & \text{ak je } y_0 > 0 \text{ a } D(f_1) = (0, \infty), \\ \ln(-x) - \ln(-y_0), & \text{ak je } y_0 < 0 \text{ a } D(f_1) = (-\infty.0). \end{cases}$$



Obr. 5.7. Grafy parciálnych funkcií

□

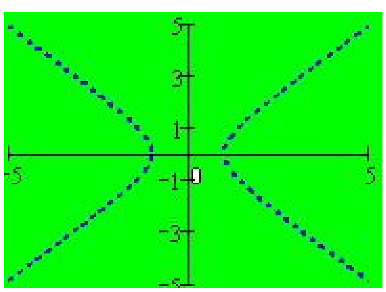
Príklad 5.4 Nájdite definičný obor funkcie $f(x,y)=\frac{x^2}{1-x^2+y^2}$. Nakreslite jej vrstevnice pre $z_0\in\{-3,\,-2,\,0,\,\frac{1}{2},\,1\}$. Nakreslite jej parciálne funkcie pre $x_0\in\{-2,\,-1,\,5\}$ a $y_0\in\{-3,\,-2,\,0\}$.

Riešenie: Definičný obor funkcie f je

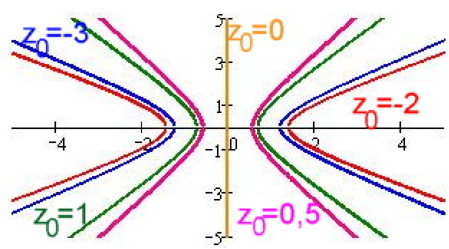
$$D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;x^2-y^2\neq 1\}.$$

D_f je celá rovina $\mathbb{R}^2$ okrem hyperboly $x^2-y^2=1$. Pre vrstevnice funkcie f platí vzťah

$$\begin{array}{lll} z_0\neq 0: \quad z_0=\frac{x^2}{1-x^2+y^2}, & \text{po úprave – hyperbola} & x^2\left(\frac{1}{z_0}+1\right)-y^2=1, \\ z_0=0: \quad 0=\frac{x^2}{1-x^2+y^2}, & \text{po úprave – priamka} & x=0. \end{array}$$



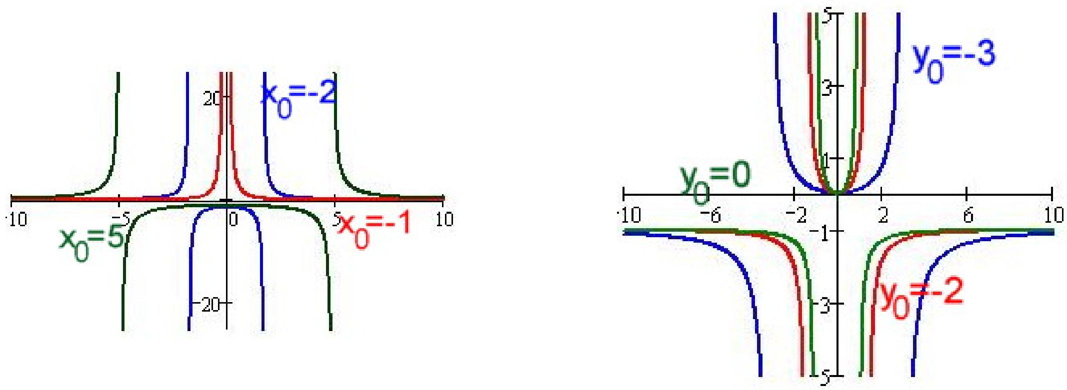
Obr. 5.8. Definičný obor funkcie f



Obr. 5.9. Vrstevnice funkcie f

Pre parciálne funkcie dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} f_2(y)=f(x_0,y) &= \frac{x_0^2}{1-x_0^2+y^2}, \\ & D(f_2)=\begin{cases} \mathbb{R}\setminus\left\{\sqrt{x_0^2-1},\ -\sqrt{x_0^2-1}\right\} & \text{pre } x_0\in[-1,1], \\ \mathbb{R} & \text{pre } x_0\notin[-1,1], \end{cases} \\ f_1(x)=f(x,y_0) &= \frac{x^2}{1-x^2+y_0^2}=-1+\frac{1+y_0^2}{1-x^2+y_0^2}, \\ & D(f_1)=\mathbb{R}\setminus\left\{\sqrt{1+y_0^2},\ -\sqrt{1+y_0^2}\right\}. \end{aligned}$$



Obr. 5.10. Grafy parciálnych funkcií

□

5.1.3 Limity a spojitosť

Nech f je ľubovoľná funkcia dvoch premenných. Keď potrebujeme vyšetriť jej limitné vlastnosti v bode (x_0, y_0), máme niekoľko možností, ako postupovať. Existujú *opakované limity*, keď limitu počítame najprv pre $x \to x_0$ a potom počítame limitu z výsledku pre $y \to y_0$ (prípadne v opačnom poradí). To znamená, že výpočet limity opakujeme. Iná možnosť je, že počítame *násobnú limitu*. Presné definície sú:

Definícia 5.3 *Nech f je ľubovoľná funkcia dvoch premenných a $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Hovoríme, že f má opakovanú limitu pre $x \to x_0$ a $y \to y_0$ rovnajúcu sa $L_{x,y}$, ak*

$$\lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right) = L_{x,y}. \tag{5.6}$$

Hovoríme, že f má opakovanú limitu pre $y \to y_0$ a $x \to x_0$, ktorá sa rovná $L_{y,x}$, ak

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) = L_{y,x}. \tag{5.7}$$

Poznámka 5.1 Pri výpočte opakovanej limity $\lim\limits_{y\to y_0}\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\right)$ počítame najprv limitu z parciálnej funkcie pre hodnoty $y \neq y_0$ z okolia y_0 (to znamená, že s premennou y pracujeme ako s konštantou). Výsledok je funkcia premennej y a z nej vypočítame limitu pre $y \to y_0$.

Príklad 5.5 Vypočítajte opakované limity $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} \frac{x^2}{x^2+y}\right)$ a $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+y}\right)$.

Riešenie: Parciálna funkcia $f_x(y) = \frac{x^2}{x^2+y}$ je pre ľubovoľné $x \neq 0$ spojitou funkciou premennej y. Preto $\lim\limits_{y\to 0} \frac{x^2}{x^2+y} = \frac{x^2}{x^2} = 1$. Potom opakovaná limita je

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2}{x^2+y}\right) = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

Parciálna funkcia $f_y(x) = \frac{x^2}{x^2+y}$ je pre ľubovoľné $y \neq 0$ spojitou funkciou premennej x na intervale $\left(-\sqrt{|y|},\, \sqrt{|y|}\right)$ (ak je $y < 0$, tak pre $x = \pm\sqrt{|y|}$ je $x^2 + y = 0$). Z toho $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+y} = \frac{0}{y} = 0$. Potom opakovaná limita je

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+y}\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

□

Príklad 5.6 Vypočítajte opakované limity $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} x \sin \frac{1}{x+y}\right)$ a $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x+y}\right)$.

Riešenie: Parciálna funkcia $f_x(y) = x \sin \frac{1}{x+y}$ je pre ľubovoľné $x \neq 0$ spojitou funkciou premennej y pre všetky $y \in (-|x|,\, |x|)$ (pre $y = -x$ funkcia nie je definovaná). Preto $\lim\limits_{y\to 0} x \sin \frac{1}{x+y} = x \sin \frac{1}{x}$. Potom opakovaná limita je

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} x \sin \frac{1}{x+y}\right) = \lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x},$$

funkcia sin je ohraničená s $H(\sin) = [-1, 1]$. Z toho dostaneme

$$0 = \lim_{x\to 0} -x \leq \lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} \leq \lim_{x\to 0} x = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Parciálna funkcia $f_y(x) = x \sin \frac{1}{x+y}$ je pre ľubovoľné $y \neq 0$ spojitou funkciou premennej x na intervale $(-|y|,\, |y|)$. Z toho $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x+y} = 0 \sin \frac{1}{y} = 0$. Potom opakovaná limita je

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x+y}\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

□

Hodnota opakovanej limity môže závisieť od poradia, v akom opakovanú limitu počítame (príklad 5.5).

Definícia 5.4 *Nech f je ľubovoľná funkcia dvoch premenných a $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Nech ρ je euklidovská vzdialenosť. Hovoríme, že f má dvojnásobnú limitu v bode (x_0, y_0), ktorá sa rovná L, ak pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pre každý bod $(x, y) \in D_f$, $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, platí*

$$\rho((x, y), (x_0, y_0)) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x, y) - L| < \varepsilon.$$

Dvojnásobnú limitu označujeme

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = L \quad \text{alebo} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L. \tag{5.8}$$

Poznámka 5.2 **(a)** Dvojnásobnú limitu nazývame aj *dvojnou* limitou.
(b) Dvojná limita je obdobou limity pre funkcie jednej premennej (aj vrátane dôsledku na spojitosť funkcie).

Vzťah medzi dvojnou a opakovanými limitami je daný nasledujúcou lemou.

Lema 5.1 *Nech (x_0, y_0) je daný bod. Ďalej nech funkcia dvoch premenných f je definovaná v ε-ovom okolí $O_{\varepsilon,\rho}(x_0, y_0)$ (prípadne s výnimkou bodu (x_0, y_0)) pre vhodne zvolené $\varepsilon > 0$. Potom z existencie dvojnásobnej limity*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

vyplýva

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x,y) = L.$$

Definícia 5.5 *Nech f je ľubovoľná funkcia dvoch premenných a $(x_0, y_0) \in D_f$. Hovoríme, že funkcia f je spojitá v bode (x_0, y_0), ak pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pre každý bod $(x, y) \in D_f$ platí*

$$\rho((x,y),(x_0,y_0)) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon.$$

Definícia spojitosti funkcie dvoch premenných v bode (x_0, y_0) je len modifikáciou definície spojitosti funkcie jednej premennej v danom bode.

Lema 5.2 *Funkcia f je spojitá v $(x_0, y_0) \in D_f$ práve vtedy, keď pre dvojnásobnú limitu v (x_0, y_0) platí*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

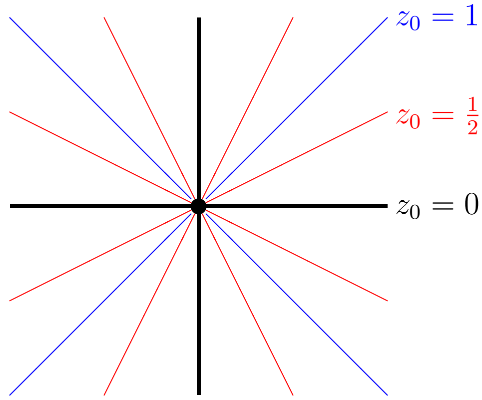
Príklad 5.7 Majme funkciu $f : \mathbb{E}^2 \to [0,1]$, danú predpisom

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x = 0 \text{ alebo } y = 0, \\ \min\left\{ \left|\frac{x}{y}\right|, \ \left|\frac{y}{x}\right| \right\}, & \text{ak } x \neq 0 \text{ a } y \neq 0. \end{cases} \tag{5.9}$$

Vypočítajte obe opakované limity funkcie f v $(0,0)$ a ukážte, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ neexistuje.

Riešenie: Vypočítame obe opakované limity. Parciálne funkcie pre všetky hodnoty $x_0 \in \mathbb{R}$ aj $y_0 \in \mathbb{R}$ sú spojité funkcie. Z toho dostaneme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) &= \lim_{x\to 0} 0 = 0,\\ \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) &= \lim_{y\to 0} 0 = 0.\end{aligned}$$



Obr. 5.11. Vrstevnice funkcie f pre $z_0 = 0, \frac{1}{2}, 1$

Funkcia f nadobúda v ľubovoľnom, okolí bodu $(0,0)$ všetky hodnoty z intervalu $[0,1]$ (pozri obr. 5.11). Z toho vyplýva, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ neexistuje. □

Poznámka 5.3 Funkcia f, daná vzťahom (5.9), je príkladom nespojitej funkcie v bode $(0,0)$, ktorá má v bode $(0,0)$ obe opakované limity a tieto sa rovnajú funkčnej hodnote $f(0,0) = 0$.

Príklad 5.8 Vypočítajte

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to \frac{\pi}{2}}} \frac{1}{x+y-\frac{\pi}{2}} \sin\left(x+y-\frac{\pi}{2}\right). \tag{5.10}$$

Riešenie: Označme $z = x + y - \frac{\pi}{2}$. Potom môžeme dvojnásobnú limitu (5.10) prepísať do tvaru

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to \frac{\pi}{2}}} \frac{1}{x+y-\frac{\pi}{2}} \sin\left(x+y-\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}.$$

Pravá strana uvedenej rovnice je derivácia funkcie sin v 0. Z toho bezprostredne dostaneme výsledok

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

Poznamenajme ešte, že podľa lemy 5.1 existujú aj obe opakované limity a zhodujú sa s dvojnásobnou. □

5.2 Parciálne derivácie a diferencovateľnosť

5.2.1 Parciálne derivácie

Definícia 5.6 *Nech (x_0, y_0) je zvolený bod a f je funkcia dvoch premenných, definovaná v bode (x_0, y_0). Hovoríme, že f má parciálnu deriváciu podľa premennej x, resp. podľa premennej y, ak existuje limita*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = P_{x_0}, \quad \text{resp.} \quad \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = P_{y_0}.$$

Označenie: Parciálnu deriváciu v bode (x_0, y_0) podľa premennej x označujeme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{alebo} \quad f'_x(x_0, y_0), \quad \text{prípadne} \quad \left.\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}. \tag{5.11}$$

Obdobne parciálnu deriváciu v bode (x_0, y_0) podľa premennej y označujeme

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{alebo} \quad f'_y(x_0, y_0), \quad \text{prípadne} \quad \left.\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}. \tag{5.12}$$

Parciálna derivácia funkcie f v (x_0, y_0) je derivácia príslušnej parciálnej funkcie. To znamená, že keď derivujeme podľa premennej x, tak hodnota $y = y_0$ je konštantná.

Príklad 5.9 Majme funkciu $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2x - y^2 + y^3 - 5$. Vypočítajte jej parciálne derivácie podľa premennej x a y v bode $(2, 3)$.

Riešenie:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(2,3) &= \left.\frac{\partial(x^3 - 3xy^2 + 2x - y^2 + y^3 - 5)}{\partial x}\right|_{(2,3)} = \underbrace{(x^3 - 27x + 2x + 13)'}_{\text{dosadené } y_0 = 3}|_{x=2} = \\
&= (3x^2 - 25)\big|_{x=2} = -13, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(2,3) &= \left.\frac{\partial(x^3 - 3xy^2 + 2x - y^2 + y^3 - 5)}{\partial y}\right|_{(2,3)} = \underbrace{(8 - 6y^2 - y^2 + y^3)'}_{\text{dosadené } x_0 = 2}|_{y=3} = \\
&= (-14y + 3y^2)\big|_{y=3} = -15.
\end{aligned}$$

□

Pri funkciách jednej premennej z existencie derivácie funkcie g pre x_0 vyplýva spojitosť funkcie g v x_0 a aj existencia dotyčnice ku g v bode $(x_0, g(x_0))$. Ako uvidíme v nasledujúcich príkladoch, z existencie parciálnych derivácií v (x_0, y_0) funkcie dvoch premenných f nevyplýva existencia dotykovej roviny v bode $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ a dokonca ani spojitosť funkcie f v (x_0, y_0).

Definícia 5.7 *Označme $A = (x_0, y_0)$. Hovoríme, že funkcia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, taká, že $A \in D_f$, má v bode $(A, f(A))$ dotykovú rovinu σ, ak rez funkcie f ľubovoľnou rovinou τ, ktorá prechádza bodom $(A, f(A))$ a je rovnobežná s osou z, má dotyčnicu v bode $(A, f(A))$, ktorá leží v rovine σ.*

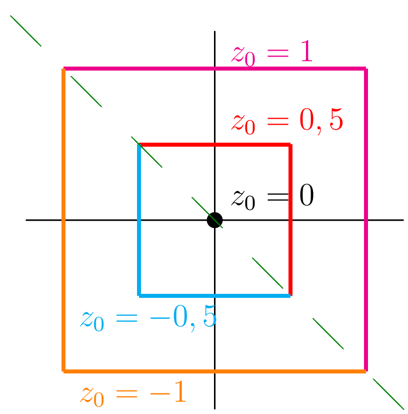
Príklad 5.10 Majme funkciu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, danú predpisom

$$f(x,y) = \begin{cases} x, & \text{ak } |x| \geq |y| \\ y, & \text{ak } |x| < |y| \end{cases}$$

Jej parciálne derivácie v $(0,0)$ sú

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(0,0)} = x'|_{x=0} = 1,$$
$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(0,0)} = y'|_{y=0} = 1.$$

Na obr. 5.12 sú znázornené vrstevnice funckie f. Funkcia je nespojitá pozdĺž osi 2. kvadrantu (zelená čiarkovaná čiara na obr. 5.12) okrem bodu $(0,0)$. Táto funkcia nemá dotykovú rovinu.



Obr. 5.12. Vrstevnice funkcie f pre $z_0 \in \{0;\ 0,5;\ 1;\ -0,5;\ -1\}$

Príklad 5.11 V príklade 5.7 je definovaná funkcia f, ktorá je v $(0,0)$ nespojitá, ale parciálne funkcie pre $x_0 = 0$ aj pre $y_0 = 0$ sú konštantné (pozri obr. 5.11). To znamená, že pre jej parciálne derivácie platí

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(0,0)} = 0, \qquad \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial yx}\right|_{(0,0)} = 0.$$

Funkcia f nemá dotykovú rovinu v bode $(0,0,0)$, lebo je tam nespojitá.

5.2.2 Diferencovateľnosť a dotyková rovina

Ako sme videli v príkladoch 5.10 a 5.11, z existencie parciálnych derivácií v bode (x_0, y_0) nevyplýva existencia dotykovej roviny k funkcii f v bode $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Z tohto dôvodu zavádzame pojem diferencovateľnosti.

Definícia 5.8 *Nech $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) \in \mathbb{R}^n$ je ľubovoľný bod. Hovoríme, že funkcia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je diferencovateľná v bode $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$, ak existuje spojitá funkcia $\omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s vlastnosťou $\omega(\tilde{X}) = 0$ a koeficienty $A_1, A_2, \dots, A_n$ tak, že pre všetky $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ platí*

$$f(X) - f(\tilde{X}) = A_1(x_1 - \tilde{x}_1) + A_2(x_2 - \tilde{x}_2) + \cdots + A_n(x_n - \tilde{x}_n) + \omega(X)\rho(X, \tilde{X}). \quad (5.13)$$

O vzťahu medzi diferencovateľnosťou a existenciou parciálnych derivácií hovorí veta 5.1. Veta 5.2 hovorí o tom, za akých podmienok z existencie parciálnych derivácií vyplýva diferencovateľnosť funkcie.

Veta 5.1 *Nech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je diferencovateľná funkcia v bode $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$. Potom existujú parciálne derivácie v bode X podľa každej premennej a platí*

$$A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\tilde{X}),$$

kde A_i sú koeficienty zo vzťahu (5.13).

Veta 5.2 *Nech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je daná funkcia. Predpokladajme, že má parciálne derivácie v každom bode z okolia bodu X_0 a nech sú tieto parciálne derivácie f'_{x_i} spojité v bode X_0. Potom f je diferencovateľná v bode X_0.*

Dôsledok 5.1 *Nech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je funkcia vytvorená z elementárnych funkcií[1], základných aritmetických operácií (súčet, súčin, rozdiel a podiel) a skladania funkcií, tak f je diferencovateľná v každom bode, v ktorom má funkcia f parciálne derivácie.*

[1]Konkrétne, ak je f zložená z polynómov, mocninových, goniometrických, cyklometrických, exponenciálnych, logaritmických a hyperbolických funkcií, tak je diferencovateľnosť funkcie f ekvivalentná s existenciou parciálnych derivácií.

Z diferencovateľnosti funkcie v bode (x_0, y_0) vyplýva existencia dotykovej roviny. Vzťah medzi diferencovateľnosťou a dotykovou rovinou je opísaný v nasledujúcej vete.

Veta 5.3 *Ak $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je diferencovateľná funkcia v bode $X_0 = (x_0, y_0)$, tak existuje dotyková rovina k f v bode $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, ktorej rovnica je*

$$z = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

a normála k funkcii f, prechádzajúca bodom $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, má parametrické vyjadrenie

$$\begin{aligned} x &= f'_x(x_0, y_0)t + x_0, \\ y &= f'_y(x_0, y_0)t + y_0, \\ z &= -t + f(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Definícia 5.9 *Nech $A = (x_{1,0}, \ldots, x_{n,0})$ a $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je diferencovateľná funkcia. Označme $X = (x_1, \ldots, x_n)$. Potom*

$$d\,f(A, X) = f'_{x_1}(A)(x_1 - x_{1,0}) + \cdots + f'_{x_n}(A)(x_n - x_{n,0})$$

nazveme prvým diferenciálom funkcie f v bode A.

Dotyková rovina σ k funkcii f v bode $(A, f(A))$, pokiaľ existuje, sa dá vyjadriť pomocou vzťahu[2]

$$\sigma : \quad z = f(A) + d\,f(A, X).$$

Príklad 5.12 Nájdite dotykovú rovinu a normálu k funkcii $f(x, y) = x^3 - 2xy + y^2$ v bode $X_0 = (2, -3, ?)$.

Riešenie:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 3x^2 - 2y, \qquad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -2x + 2y.$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ sú spojité funkcie (v každom bode), to znamená, že funkcia f je diferencovateľná v bode $(2, -3)$. Zistíme funkčnú hodnotu $f(2, -3)$ a parciálne derivácie funkcie f v bode $(2, -3)$

$$\begin{aligned} f(2, -3) &= 2^3 - 2 \cdot 2(-3) + (-3)y^2 = 29, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(2, -3) &= (3x^2 - 2y)\big|_{(2,-3)} = 3 \cdot 2^2 - 2(-3) = 18, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(2, -3) &= (-2x + 2y)\big|_{(2,-3)} = -2 \cdot 2 + 2(-3) = -10. \end{aligned}$$

[2] V prípade funkcie n premenných hovoríme o dotykovej nadrovine.

Z toho dotyková rovina má rovnicu

$$\sigma: \quad z = 18(x-2) - 10(y+3) + 29$$

a normála má parametrické vyjadrenie

$$\begin{aligned} n: \quad x &= 18t + 2, \\ y &= -10t - 3, \\ z &= -t + 29. \end{aligned}$$

□

Príklad 5.13 Nájdite dotykovú rovinu a normálu k funkcii $f(x,y) = \sin(x+y) - x\cos(x-y)$ v bode $X_0 = (\pi, 0, ?)$.

Riešenie:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \cos(x+y) - \cos(x-y) + x\sin(x-y), \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \cos(x+y) - x\sin(x-y).$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ sú spojité funkcie (v každom bode), to znamená, že funkcia f je diferencovateľná v bode $(\pi, 0)$. Zistíme funkčnú hodnotu $f(\pi, 0)$ a parciálne derivácie funkcie f v bode $(\pi, 0)$

$$\begin{aligned} f(\pi,0) &= \sin\pi - \pi\cos\pi = \pi, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(\pi,0) &= (\cos(x+y) - \cos(x-y) + x\sin(x-y))|_{(\pi,0)} = \cos\pi - \cos\pi + \pi\sin\pi = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\pi,0) &= (\cos(x+y) - x\sin(x-y))|_{(\pi,0)} = \cos\pi - \pi\sin\pi = -1. \end{aligned}$$

Z toho dotyková rovina má rovnicu

$$\sigma: \quad z = -y + \pi$$

a normála má parametrické vyjadrenie

$$\begin{aligned} n: \quad x &= \pi, \\ y &= -t, \\ z &= -t + \pi. \end{aligned}$$

□

5.2.3 Reťazové pravidlo

Reťazové pravidlo pre funkcie dvoch a viacerých premenných je zovšeobecnením reťazového pravidla pre funkcie jednej premennej. Uvedieme dve podoby reťazového pravidla.

Veta 5.4 *Nech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je diferencovateľná funkcia a $\varphi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$ sú funkcie so spojitými deriváciami. Potom*

$$\frac{d\tilde{f}}{dt}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{d\varphi_i}{dt}(t),$$

kde $\tilde{f}(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$ a do funkcie $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ dosadíme $x_j = \varphi_j(t)$ pre $j = 1, 2, \ldots, n$.

Veta 5.5 *Nech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je diferencovateľná funkcia a $\varphi_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$ sú funkcie so pojitými parciálnymi deriváciami. Potom*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial s}(s, t) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial \varphi_i}{\partial s}(s, t), \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(s, t) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(s, t), \end{aligned}$$

kde $\tilde{f}(s, t) = f(\varphi_1(s, t), \varphi_2(s, t), \ldots, \varphi_n(s, t))$. Do funkcie $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ dosadíme $x_j = \varphi_j(s, t)$ pre $j = 1, 2, \ldots, n$.

Príklad 5.14 Majme funkciu $f(x, y) = \sin(x - y) + \cos(x + y)$. Premenné x, y transformujeme takto:

$$x = \varphi_1(t) = 3 + 2t, \quad y = \varphi_2(t) = t^2.$$

Potom

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t) &= \sin(3 + 2t - t^2) + \cos(3 + 2t + t^2), \\ \frac{d\tilde{f}}{dt}(t) &= \cos(3 + 2t - t^2)(2 - 2t) - \sin(3 + 2t + t^2)(2 + 2t). \end{aligned} \tag{5.14}$$

Využijeme vetu 5.4:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos(x - y) - \sin(x + y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\cos(x - y) - \sin(x + y), \\ &\varphi_1'(t) = 2, \quad \varphi_2'(t) = 2t. \end{aligned}$$

Z toho

$$\begin{aligned} &\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\varphi_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\varphi_2'(t)}_{x=\varphi_1(t), \quad y=\varphi_2(t)} = \\ = \; &\big(\cos(3 + 2t - t^2) - \sin(3 + 2t + t^2)\big)\, 2 + \\ + \; &\big(-\cos(3 + 2t - t^2) - \sin(3 + 2t + t^2)\big)\, 2t. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Vzťahy (5.14) a (5.15) sa po úprave zhodujú.

Príklad 5.15 Majme funkciu $f(x,y,z) = x \cdot e^{y+z} + y \cdot e^{x+z} + z \cdot e^{x+y}$. Premenné x, y, z transformujeme takto:

$$x = \varphi_1(s,t) = s^2 + t^2, \quad y = \varphi_2(s,t) = s^2 - t^2, \quad z = \varphi_3(s,t) = t^2 - s^2.$$

Potom

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(s,t) &= (s^2+t^2) + (s^2-t^2)e^{2t^2} + (t^2-s^2)e^{2s^2}, \\
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial s}(s,t) &= 2s + 2s\cdot e^{2t^2} - 2s \cdot e^{2s^2} + 4s(t^2-s^2)e^{2s^2}, && (5.16)\\
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(s,t) &= 2t - 2t\cdot e^{2t^2} + 4t(s^2-t^2)e^{2t^2} + 2t\cdot e^{2s^2}. && (5.17)
\end{aligned}$$

Využijeme vetu 5.5:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = e^{y+z} + y\cdot e^{x+z} + z \cdot e^{x+y},\\
&\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x\cdot e^{y+z} + e^{x+z} + z \cdot e^{x+y},\\
&\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = x\cdot e^{y+z} + y\cdot e^{x+z} + e^{x+y},\\
&\frac{\partial \varphi_1}{\partial s}(s,t) = 2s, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial s}(s,t) = 2s, \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial s}(s,t) = -2s,\\
&\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(s,t) = 2t, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(s,t) = -2t, \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial t}(s,t) = 2t.
\end{aligned}$$

Z toho

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_1,x_2,x_3)\frac{\partial \varphi_1}{\partial s}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_1,x_2,x_3)\frac{\partial \varphi_1}{\partial s}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_1,x_2,x_3)\frac{\partial \varphi_1}{\partial s}(s,t)}_{x_1=\varphi_1(s,t),\quad x_2=\varphi_2(s,t),\quad x_3=\varphi_3(s,t)} =\\
= &\left(1 + (s^2-t^2)e^{2t^2} + (t^2-s^2)e^{2s^2}\right)2s + \left((s^2+t^2) + e^{2t^2} + (t^2-s^2)e^{2s^2}\right)2s +\\
+ &\left((s^2+t^2) + (s^2-t^2)e^{2t^2} + e^{2s^2}\right)(-2s), && (5.18)\\
&\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_1,x_2,x_3)\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_1,x_2,x_3)\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_1,x_2,x_3)\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(s,t)}_{x_1=\varphi_1(s,t),\quad x_2=\varphi_2(s,t),\quad x_3=\varphi_3(s,t)} =\\
= &\left(1 + (s^2-t^2)e^{2t^2} + (t^2-s^2)e^{2s^2}\right)2t + \left((s^2+t^2) + e^{2t^2} + (t^2-s^2)e^{2s^2}\right)(-2t) +\\
+ &\left((s^2+t^2) + (s^2-t^2)e^{2t^2} + e^{2s^2}\right)2t. && (5.19)
\end{aligned}$$

Po úprave dostaneme rovnosť výrazov (5.16) a (5.18), ako aj výrazov (5.17) a (5.19).

5.2.4 Gradient a derivácia v smere

Príklad 5.16 Majme funkciu $f(x,y) = x^2 - 6xy + 4y^2$. Úlohou je určiť rovnicu normály k vrstevnici $f(x,y) = 4$, ktorá prechádza bodom $A = (0,1)$. Rovnica $f(x,y) = 4$ určuje krivku v rovine $z = 0$ (konkrétne, ide o kvadratickú formu). Krivka $f(x,y) = 4$ definuje funkciu $y = g(x)$, ktorá má spojitú deriváciu a prechádza bodom A. Úlohu vyriešime najprv všeobecne a potom pre konkrétny prípad. Použijeme vetu 5.4 a dostaneme

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot g'(x_0).$$

Z toho $g'(x_0) = -\frac{f'_x(x_0,y_0)}{f'_y(x_0,y_0)}$. Preto má smernica normály hodnotu $k_n = \frac{f'_y(x_0,y_0)}{f'_x(x_0,y_0)}$. Potom má normála rovnicu

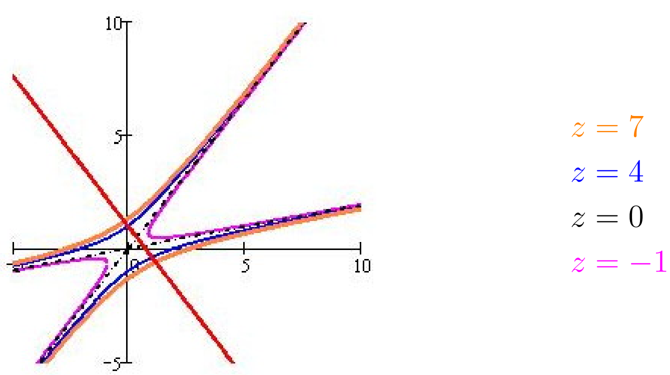
$$n: \quad y - y_0 = \frac{f'_y(x_0,y_0)}{f'_x(x_0,y_0)}(x - x_0).$$

Z toho normálový vektor normály je $\vec{n} = (f'_y(x_0,y_0), -f'_x(x_0,y_0))$ a smerový vektor je $\vec{s} = (f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0))$.

Pre funkciu f dostaneme

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 2x - 6y, & f'_y(x,y) &= -6x + 8y, \\ f'_x(0,1) &= -6, & f'_y(0,1) &= 8. \end{aligned}$$

Rovnica normály je $n: \ y = -\frac{4}{3}x + 1$ a smerový vektor normály je $\vec{s} = (-6, 8)$.



Obr. 5.13. Vrstevnice funkcie f a normála n

Definícia 5.10 *Majme funkciu $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. Gradientom funkcie f v bode A, označenie*[3] *$\nabla f(A)$, nazveme vektor $\nabla f(A) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(A), \frac{\partial f}{\partial x_2}(A), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(A) \right)$.*

[3] ∇ sa číta nabla.

Voľne povedané, gradient je smer, v ktorom funkcia mení najrýchlejšie hodnoty (normálový vektor k vrstevnici). Má významnú úlohu v numerickej matematike pri rôznych optimalizačných úlohách.

Príklad 5.17 Nájdite dotykovú rovinu ku grafu funkcie $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - y^3 + 3xy$, ktorá je rovnobežná s rovinou $\sigma: \ z = -x - 3y - 5$.

Riešenie: Rovnica roviny σ definuje funkciu $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Keď má byť dotyková rovina ku grafu funkcie f rovnobežná s rovinou σ tak normálové vektory týchto rovín sa budú zhodovať (ak budú mať súradnicu z rovnakú). To znamená

$$\nabla z(A) = \nabla f(A),$$

kde $(A, f(A))$ je hľadaný dotykový bod.

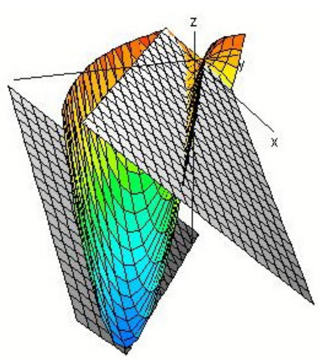
$$f'_x(x,y) = x + 3y, \quad f'_y(x,y) = -3y^2 + 3x.$$

Z toho dostaneme sústavu rovníc

$$\left.\begin{array}{rcl} x + 3y &=& -1, \\ -3y^2 + 3x &=& -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} y_1 = 0, & x_1 = -1, \\ y_2 = -3, & x_2 = 8. \end{array}$$

$f(-1,0) = \frac{1}{2}$, $f(8,-3) = -13$. Sú dva dotykové body $T_1 = (-1, 0, \frac{1}{2})$, $T_2 = (8, -3, -13)$. Rovnice dotykových rovín sú

$$\tau_1: \ z - \frac{1}{2} = -(x+1) - 3y, \quad \tau_2: \ z + 13 = -(x-8) - 3(y+3).$$



Obr. 5.14. Funkcia f a jej dotykové roviny τ_1 a τ_2

□

Príklad 5.18 Majme funkciu $z = f(x,y) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2$ a kolmý kruhový valec s obvodom $x = \cos t$, $y = \sin t$ pre $t \in [0, 2\pi]$. Prienik plášťa valca s funkciou f je krivka, ktorej dotyčnicu potrebujeme zistiť pre $t_0 = \frac{\pi}{4}$, teda dotykový bod je $A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{13}{72}\right)$. Prienik valca s f má parametrické vyjadrenie

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = \frac{1}{4}\cos^2 t + \frac{1}{9}\sin^2 t.$$

Z toho smerový vektor dotyčnice je

$$\begin{aligned} \vec{s} &= \left(\frac{dx}{dt}(t_0), \frac{dy}{dt}(t_0), \frac{dz}{dt}(t_0)\right) = \left(-\sin t_0, \cos t_0, -\frac{1}{4}2\cos t_0 \sin t_0 + \frac{1}{9}2\cos t_0 \sin t_0\right) = \\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{5}{36}\right). \end{aligned}$$

Parametrické vyjadrenie dotyčnice je

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}u, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}u, \quad z = \frac{13}{72} - \frac{5}{36}u.$$

Deriváciu $\frac{dz}{dt}(t_0)$ môžeme počítať aj pomocou reťazového pravidla:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt}(t_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)\frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y_0)\frac{dy}{dt}(t_0) = \frac{1}{2}x_0(-\sin t_0) + \frac{2}{9}y_0 \cos t_0 = \\ &= \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{w}_0, \end{aligned}$$

kde $\vec{w}_0 = \left(\frac{dx}{dt}(t_0), \frac{dy}{dt}(t_0)\right)$.

Uvedená parametrizácia krivky (prieniku plášťa valca a funkcie f) nie je jediná možná. Môžeme mať $x = \cos nt$, $y = \sin nt$ a $t \in \left[0, \frac{2\pi}{n}\right]$ pre $n > 0$. Potom bod $A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{13}{72}\right)$ bude pre $t_n = \frac{\pi}{4n}$ a smerový vektor dotyčnice bude

$$\vec{s}_n = \left(-n\sin kt_n, n\cos nt_n, -\frac{n}{4}2\cos nt_n \sin nt_n + \frac{n}{9}2\cos nt_n \sin nt_n\right) = n\vec{s}.$$

Výsledná dotyčnica bude rovnaká, ale derivácie (súradnice vektora $\vec{s}_n$), budú rôzne. □

Parametrizácia krivky, pri ktorej je dĺžka vektora $\vec{w}_0 = \left(\frac{dx}{dt}(t_0), \frac{dy}{dt}(t_0)\right)$ rovná 1, sa volá *prirodzená.*

Pri prirodzenej parametrizácii $\frac{dz}{dt}(t_0)$ vyjadruje rýchlosť, akou bod A, „putujúci po krivke", mení svoju výšku (z-ovú súradnicu).

Definícia 5.11 *Nech $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ je diferencovateľná funkcia. Predpokladajme, že $\vec{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_k)$ je vektor dĺžky 1 a $A \in \mathbb{R}^k$. Potom $\frac{df}{d\vec{w}}(A) = \nabla f(A) \cdot \vec{w}$ nazveme deriváciou funkcie f v smere vektora $\vec{w}$ (smerovou deriváciou).*

Príklad 5.19 Majme funkciu $f(x, y) = x^2 - 3xy^2 + y^3$ a kružnicu $x_t = \varphi_1(t) = 2\cos\frac{t}{2}$, $y_t = \varphi_2(t) = 2\sin\frac{t}{2}$ pre $t \in [0, 4\pi]$. Určte normálový vektor ku krivke $\tilde{f}(t) = f(x_t, y_t)$ a rýchlosť zmeny z-ovej súradnice v závislosti od t.

Riešenie: Ako sme videli v príklade 5.16, normálový vektor ku krivke $\tilde{f}$ je gradient funkcie f. To znamená,

$$\begin{aligned} n_t &= \nabla f(x_t, y_t) = \left(2x_t - 3y_t^2,\ -6x_t y_t + 3y_t^2\right) = \\ &= \left(4\cos\frac{t}{2} - 12\sin^2\frac{t}{2},\ -24\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2} + 12\sin^2\frac{t}{2}\right). \end{aligned}$$

Rýchlosť zmeny z-ovej súradnice, podľa príkladu 5.18, je súčin gradientu a smerového vektora v prirodzenej parametrizácii krivky, teda smerová derivácia. Najprv overíme, či ide o prirodzenú parametrizáciu.

$$\varphi_1'(t) = -\sin\frac{t}{2}, \quad \varphi_2'(t) = \cos\frac{t}{2}, \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + (\varphi_1 2'(t))^2} = 1.$$

Preto rýchlosť zmeny z-ovej súradnice je $v_t = \nabla f(x_t, y_t) \cdot (\varphi_1'(t), \varphi_2'(t))$. Z toho

$$v_t = -4\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2} + 12\sin^3\frac{t}{2} - 24\cos^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2} + 12\sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}.$$

□

5.3 Parciálne derivácie vyšších rádov

5.3.1 Základné pravidlá

Parciálne derivácie druhého rádu funkcie f sú parciálne zderivované prvé parciálne derivácie. Funkcia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má 4 parciálne derivácie druhého rádu.

Označenie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\left(f_x'(x,y)\right)}{\partial x} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = f_{xx}''(x,y), \\ \frac{\partial\left(f_y'(x,y)\right)}{\partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = f_{yy}''(x,y), \\ \frac{\partial\left(f_x'(x,y)\right)}{\partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = f_{xy}''(x,y), \quad \text{poradie: najprv podľa } x, \text{ potom podľa } y, \\ \frac{\partial\left(f_y'(x,y)\right)}{\partial x} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = f_{yx}''(x,y), \quad \text{poradie: najprv podľa } y, \text{ potom podľa } x. \end{aligned}$$

Výraz f_{xx}'' nazývame *druhou parciálnou deriváciou podľa* x, f_{yy}'' nazývame *druhou parciálnou deriváciou podľa* y, f_{xy}'' a f_{yx}'' nazývame *druhými zmiešanými parciálnymi deriváciami podľa premenných* x, y.

Parciálne derivácie druhého (a vyšších) rádov sú opakované limity. Opakované limity môžu závisieť od poradia, v akom ich počítame. Rovnako aj druhé zmiešané parciálne derivácie môžu závisieť od poradia, teda môžeme mať

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y). \tag{5.20}$$

Nasledujúca veta hovorí o tom, za akých podmienok platí vo výraze (5.20) rovnosť.

Veta 5.6 *Nech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkcia, ktorá má v bode (x_0, y_0) druhé parciálne derivácie. Potom, ak $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ sú diferencovateľné funkcie v bode (x_0, y_0), tak platí*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y).$$

Poznámka 5.4 Veta 5.6 sa dá zovšeobecniť pre parciálne derivácie tretieho a vyšších rádov (a rovnako aj pre funkcie viac ako dvoch premenných). Ak sú parciálne derivácie $n-1$. rádu diferencovateľné, tak parciálne derivácie n-tého rádu nezávisia od poradia, v akom derivujeme podľa jednotlivých premenných, ale len od toho, koľkokrát podľa ktorej premennej.

Hovoríme, že funkcia $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ je *n-krát diferencovateľná* v $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, ak sú $(n-1)$-vé parciálne derivácie diferencovateľné funkcie v $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

Definícia 5.12 *Nech $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ je 2-krát diferencovateľná funkcia v $A = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Označme $X = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Potom výraz*

$$\begin{aligned} d^2 f(A,X) &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a_1, a_2, \ldots, a_k)(x_i - a_i)^2 + \\ &+ 2\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a_1, a_2, \ldots, a_k)(x_i - a_i)(x_j - a_j) \end{aligned}$$

nazveme druhým diferenciálom funkcie f v A.

Príklad 5.20 Vypočítajte druhé parciálne derivácie funkcie $f(x,y) = x^2 - 3xy^2 + y - y^3$ a rozhodnite, či druhé zmiešané parciálne derivácie nezávisia od poradia, v akom derivujeme podľa premenných x a y.

Riešenie:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 3y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -6xy + 1 - 3y^2.$$

Polynómy sú diferencovateľné funkcie (pozri dôsledok 5.1), to znamená, že druhé parciálne derivácie závisia len od toho, koľkokrát podľa ktorých premenných derivujeme a nie od poradia, v akom derivujeme. Preto

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial(2x-3y^2)}{\partial y} = \frac{\partial(-6xy+1-3y^2)}{\partial x} = -6y.$$

Pre druhé parciálne derivácie podľa x, resp. podľa y dostaneme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial(2x-3y^2)}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial(-6xy+1-3y^2)}{\partial y} = -6x-6y.$$

□

Príklad 5.21 Vypočítajte druhé parciálne derivácie funkcie $f(x,y) = e^{x-y} + \ln(x+y^2)$ a rozhodnite, či druhé zmiešané parciálne derivácie nezávisia od poradia, v akom derivujeme podľa premenných x a y.

Riešenie:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x-y} + \frac{1}{x+y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -e^{x-y} + \frac{2y}{x+y^2}.$$

Prvé parciálne derivácie sú vytvorené z exponenciálnej funkcie a polynómov pomocou skladania funkcií, súčtu a podielu, preto sú diferencovateľné vo všetkých bodoch, v ktorých existujú parciálne derivácie (pozri dôsledok 5.1), to znamená, že druhé parciálne derivácie závisia len od toho, koľkokrát podľa ktorých premenných derivujeme a nie od poradia, v akom derivujeme. Preto

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial\left(e^{x-y} + \frac{1}{x+y^2}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(-e^{x-y} + \frac{2y}{x+y^2}\right)}{\partial x} = -e^{x-y} - \frac{2y}{(x+y^2)^2}.$$

Pre druhé parciálne derivácie podľa x, resp. podľa y dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial\left(e^{x-y} + \frac{1}{x+y^2}\right)}{\partial x} = e^{x-y} - \frac{1}{(x+y^2)^2}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial\left(-e^{x-y} + \frac{2y}{x+y^2}\right)}{\partial y} = e^{x-y} + \frac{2(x+y^2)-4y^2}{(x+y^2)^2} = e^{x-y} + \frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

□

5.3.2 Taylorov rozvoj

Ukážeme si Taylorov rozvoj pre funkcie dvoch premenných. Budeme predpokladať, že funkcie sú $(n+1)$-krát diferencovateľné. Potom pre $k \leq n+1$ platí, že k-te parciálne derivácie nezávisia od toho, v akom poradí derivujeme podľa jednotlivých premenných, ale len od toho, koľkokrát podľa ktorej premennej. Konkrétne, pri tretích parciálnych deriváciách platí

$$\begin{array}{rcccl} \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,y) & = & \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x,y) & = & \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x,y), \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x,y) & = & \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(x,y) & = & \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(x,y). \end{array}$$

Keď počítame k-tu parciálnu deriváciu funkcie f, j-krát derivujeme parciálne podľa premennej x a $(k-j)$-krát podľa premennej y, máme $\left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array}\right)$ možností ako zvoliť poradie derivovania podľa jednotlivých premenných, kde

$$\left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array}\right) = \frac{k!}{j!(k-j)!}, \quad \text{je kombinačné číslo.}$$

Označme $A = (x_0, y_0)$ a $X = (x, y)$. Potom k-ty diferenciál funkcie f v A je definovaný nasledujúco:

$$d^k f(A, X) = \sum_{j=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array}\right) \frac{\partial^k f}{\partial x^j \partial y^{k-j}}(A)(x-x_0)^j (y-y_0)^{k-j}. \tag{5.21}$$

Analógiou s Taylorovym rozvojom funkcie jednej premennej dostaneme

$$T_k(f, A, X) = f(A) + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} d^i f(A, X). \tag{5.22}$$

Keď odhadujeme hodnotu funkcie f v bode $B = (x_1, y_1)$ pomocou Taylorovho rozvoja k-teho stupňa, dopúšťame sa chyby, ktorá je funkciou $(k+1)$-diferenciálu:

$$\varepsilon_k = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{j=0}^{k+1} \left(\begin{array}{c} k+1 \\ j \end{array}\right) \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^j \partial y^{k+1-j}}(\theta)(x_1-x_0)^j (y_1-y_0)^{k+1-j}, \tag{5.23}$$

kde θ je neznámy bod, ležiaci na úsečke AB.

Príklad 5.22 Odhadnite $f(x,y) = \sin x \cos y$ v bode $B = (0,3; 0,2)$ pomocou rozvoja f do Taylorovho polynómu 3. stupňa v bode $A = (0; 0)$ a odhadnite chybu.

Riešenie: Vypočítame parciálne derivácie

$$\begin{array}{rll} f'_x(x,y) = \cos x \cos y, & f'_y(x,y) = -\sin x \sin y, & \\ f''_{xx}(x,y) = -\sin x \cos y, & f''_{xy}(x,y) = -\cos x \sin y, & f''_{yy}(x,y) = -\sin x \cos y, \\ f'''_{xxx}(x,y) = -\cos x \cos y, & f'''_{xxy}(x,y) = \sin x \sin y, & f'''_{xyy}(x,y) = -\cos x \cos y, \\ f'''_{yyy}(x,y) = \sin x \sin y. & & \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} f(A)=0, & f'_x(A)=1, & f'_y(A)=0, & \\ f''_{xx}(A)=0, & f''_{xy}(A)=0, & f''_{yy}(A)=0, & \\ f'''_{xxx}(A)=-1, & f'''_{xxy}(A)=0, & f'''_{xyy}(A)=-1, & f'''_{yyy}(A)=0. \end{array}$$

Z toho

$$T_3(f,A,(x,y)) = x - \frac{x^3}{3!} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{xy^2}{3!}.$$

Dosadíme súradnice bodu B

$$f(B) \doteq 0,3 - \frac{1}{3!}0,3^3 - 3\frac{1}{3!}0,3 \cdot 0,2^2 \doteq 0,2895.$$

Odhadneme chybu:

$$\begin{array}{lll} f^{(4)}_{xxxx}(x,y) = -\sin x \cos y, & f^{(4)}_{xxxy}(x,y) = \cos x \sin y, & f^{(4)}_{xxyy}(x,y) = \sin x \cos y, \\ f^{(4)}_{xyyy}(x,y) = \cos x \sin y, & f^{(4)}_{yyyy}(x,y) = \sin x \cos y. & \end{array}$$

Využijeme odhady $|\sin x| \leq |x|$ a $\cos x \leq 1$. Potom

$$|f^{(4)}_{xxxx}(\theta)| \leq 0,3;\ |f^{(4)}_{xxxy}(\theta)| \leq 0,2;\ |f^{(4)}_{xxyy}(\theta)| \leq 0,3;\ |f^{(4)}_{xyyy}(\theta)| \leq 0,2;\ |f^{(4)}_{yyyy}(\theta)| \leq 0,3.$$

Dosadíme do (5.23)

$$\begin{aligned} |\varepsilon_3| \ &\leq \ \frac{1}{4!}\left(0,3 \cdot 0,3^4 + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 0,2 \cdot 0,3^3 \cdot 0,2 + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} 0,3 \cdot 0,3^2 \cdot 0,2^2 + \right. \\ &+ \left. \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,2^3 + 0,2 \cdot 0,2^4 \right) \leq 0,0384 \end{aligned}$$

□

5.4 Extrémy

5.4.1 Lokálne extrémy a sedlové body

Definícia 5.13 *Nech $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ je funkcia, ktorá má prvé parciálne derivácie. Potom $A = (x_{1,0}, \dots, x_{k,0}, f(x_{1,0}, \dots, x_{k,0}))$ je stacionárny bod funkcie f, ak je splnená podmienka*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{1,0}, \dots, x_{k,0}) = 0 \quad \textit{pre všetky } i \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

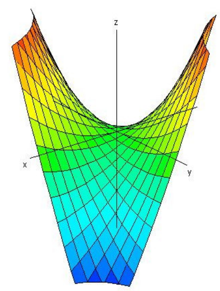
Príklad 5.23 Majme funkciu $f(x,y) = x^2 + y^2 - 6xy$. Nájdeme jej stacionárne body:

$$f'_x(x,y) = 2x - 6y, \quad f'_y(x,y) = 2y - 6x.$$

Z toho dostaneme sústavu rovníc

$$\begin{array}{l} 2x - 6y = 0 \\ 2y - 6x = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x = 0, \\ y = 0, \end{array}$$

$f(0,0) = 0$. Z toho dostaneme, že $A = (0,0,0)$ je stacionárny bod funkcie f. Ako vidíme na obr. 5.15, funkcia f nemá v bode A extrém.



Obr. 5.15. Graf funkcie f

Pre funkcie jednej premennej sme mali niekoľko kritérií na overenie, či má funkcia v stacionárnom bode extrém. Spravíme analógiu s kritériom na overovanie extrémov pomocou druhých derivácií. Vo viacrozmernom prípade tomu zodpovedajú druhé diferenciály. Označme $A = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

Veta 5.7 *Nech $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ je dvakrát diferencovateľná funkcia a $(A, f(A))$ je jej stacionárny bod.*

(a) *Ak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pre všetky $X \in \mathbb{R}^k$, $0 \neq \rho(A,X) < \varepsilon$, je $d^2f(A,X) > 0$, tak funkcia f má v bode $(A, f(A))$ lokálne minimum.*

(b) *Ak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pre všetky $X \in \mathbb{R}^k$, $0 \neq \rho(A,X) < \varepsilon$, je $d^2f(A,X) < 0$, tak funkcia f má v bode $(A, f(A))$ lokálne maximum.*

(c) *Ak pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ existujú X_1, X_2 $0 \neq \rho(A,X_1) < \varepsilon$, $0 \neq \rho_{\mathbb{E}}(A,X_2) < \varepsilon$ také, že $d^2f(A,X_1) < 0$ a $d^2f(A,X_2) > 0$, potom f nemá lokálny extrém v $(A, f(A))$.*

Funkcia $g(X) = d^2f(A,X)$ je kvadratická forma, ktorej matica je

$$D(f,A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(A) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(A) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_k}(A) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_k}(A) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(A) \end{pmatrix}.$$

Maticu $D(f,A)$ môžeme pomocou otočenia cez maticu vlastných vektorov (to znamená, pomocou Choleského rozkladu) transformovat' na diagonálnu pozostávajúcu z vlastných čísel matice $D(f,A)$. Z tejto úvahy dostaneme:

1. $d^2f(A,X) > 0$ pre všetky $X \neq A$ práve vtedy, keď sú všetky vlastné čísla matice $D(f,A)$ kladné,

2. $d^2f(A,X) < 0$ pre všetky $X \neq A$ práve vtedy, keď sú všetky vlastné čísla matice $D(f,A)$ záporné,

3. $d^2f(A,X)$ mení znamienka pre rôzne hodnoty X, ak má matica $D(f,A)$ kladné aj záporné vlastné čísla.

Tieto tri prípady, ktoré sme práve uviedli, môžeme vyšetrovat' cez subdeterminanty matice $D(f,A)$. K tomu zavedieme nasledujúce označenie:

$$
\begin{aligned}
D_1(f,A) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(A), \\
D_2(f,A) &= \det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(A) & \frac{\partial^2 f}{1\partial x_2^2}(A) \end{pmatrix}, \\
D_3(f,A) &= \det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(A) & \frac{\partial^2 f}{1\partial x_2^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(A) & \frac{\partial^2 f}{1\partial x_2 \partial x_3}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(A) \end{pmatrix}, \\
&\vdots \\
D_k(f,A) &= \det(D(f,A)).
\end{aligned}
$$

Hodnoty $D_i(f,A)$ nazveme *subdeterminanty* matice $D(f,A)$.

Kritérium 5.1 *Nech $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ je dvakrát diferencovateľná funkcia a nech $(A, f(A))$ je jej stacionárny bod. Predpokladajme, že $D_i(f,A) \neq 0$ pre všetky $i \in \{1,2,\ldots,k\}$.*

- *Ak $D_i(f,A) > 0$ pre všetky $i \in \{1,2,\ldots,k\}$, tak $(A, f(A))$ je lokálne minimum funkcie f.*

- *Ak pre subdeterminanty s párnymi indexami platí $D_{2j}(f,A) > 0$ a pre subdeterminanty s nepárnymi indexami $D_{2j-1}(f,A) < 0$, $2j \leq k$ a $2j-1 \leq k$, tak $(A, f(A))$ je lokálne maximum funkcie f.*

- *V iných prípadoch funkcia f nemá v $(A, f(A))$ lokálny extrém.*

Na základe kritéria 5.1 nevieme rozhodnúť o existencii lokálneho extrému v stacionárnom bode v prípade, že aspoň jeden zo subdeterminantov sa rovná nule. V niektorých prípadoch vieme rozhodnúť na základe nasledujúcej nutnej podmienky.

Veta 5.8 (Nutná podmienka existencie lokálneho extrému). *Nech $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ je dvakrát diferencovateľná funkcia a nech $(A, f(A))$ je jej stacionárny bod, kde $A \in \mathbb{R}^k$.*

- *Ak má funkcia f lokálne minimum v bode $(A, f(A))$, tak $D_i(f, A) \geq 0$ pre všetky $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.*
- *Ak má funkcia f lokálne maximum v bode $(A, f(A))$, tak pre subdeterminanty s párnymi indexami platí $D_{2j}(f, A) \geq 0$ a pre subdeterminanty s nepárnymi indexami $D_{2j-1}(f, A) \leq 0$ pre všetky $2j \leq k$ a $2j - 1 \leq k$.*

Definícia 5.14 *Nech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je dvakrát diferencovateľná funkcia a $(A, f(A))$ je jej stacionárny bod. Hovoríme, že $(A, f(A))$ je sedlový bod funkcie f, ak funkcia f nemá lokálny extrém v tomto bode.*

Z vety 5.8 a kritéria 5.1 vyplýva nasledujúce kritérium pre funkcie dvoch premenných.

Kritérium 5.2 *Nech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je dvakrát diferencovateľná funkcia a nech $(A, f(A))$ je jej stacionárny bod.*

- *Ak $D_2(f, A) > 0$, tak má funkcia f v bode $(A, f(A))$ lokálny extrém,*
  - *ak $D_1(f, A) > 0$, tak v $(A, f(A))$ je lokálne minimum,*
  - *ak $D_1(f, A) < 0$, tak v $(A, f(A))$ je lokálne maximum.*
- *Ak $D_2(f, A) < 0$, tak $(A, f(A))$ je sedlovým bodom funkcie f.*

Príklad 5.24 Vyšetrite lokálne extrémy a sedlové body funkcie
$f(x, y) = x^2 - y^2 + 4xy - 5x + 2$.

Riešenie: Nájdeme stacionárne body. Prvé parciálne derivácie sú

$$f'_x(x, y) = 2x + 4y - 5, \quad f'_y(x, y) = -2y + 4x.$$

Prvé parciálne derivácie sa v hľadaných bodoch rovnajú nule. Z toho dostaneme sústavu rovníc

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x + 4y & = & 5 \\ 4x - 2y & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \qquad \begin{array}{rcl} x_0 & = & \frac{1}{2}, \\ y_0 & = & 1. \end{array}$$

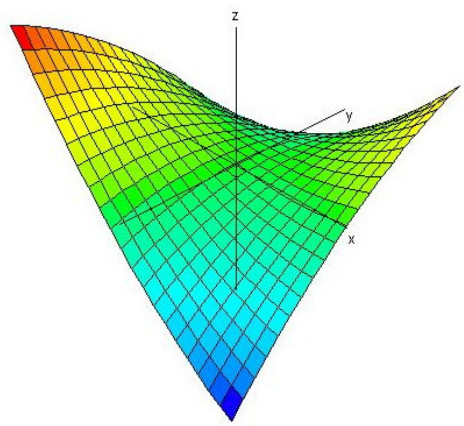
Označíme $A = (\frac{1}{2}, 1)$ a vypočítame hodnotu $f(A)$. $f\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{3}{4}$. Stacionárny bod má súradnice $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{4}\right)$. Vypočítame druhé parciálne derivácie.

$$f''_{xx}(x,y) = 2, \quad f''_{yy}(x,y) = -2, \quad f''_{xy}(x,y) = 4.$$

Test na extrémy

$$D_2(A) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -20 < 0$$

Na základe kritéria 5.2 spravíme záver, že $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{4}\right)$ je sedlový bod funkcie f.



Obr. 5.16. Graf funkcie f

□

Príklad 5.25 Vyšetrite lokálne extrémy a sedlové body funkcie
$f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 10$.

Riešenie: Nájdeme stacionárne body.

$$f'_x(x,y) = 3x^2 - 6y - 39, \quad f'_y(x,y) = -6x + 2y + 18.$$

Z toho

$$\begin{aligned} 3x^2 - 6y - 39 &= 0, \\ -6x + 2y + 18 &= 0, \quad \Rightarrow \qquad y &= 3x - 9, \\ &\qquad \text{dosadíme do 1. rovnice:} \\ x^2 - 6x + 5 &= 0. \end{aligned}$$

Riešenia sústavy rovníc sú $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, $y_1 = -6$, $y_2 = 6$. Označíme $A = (1, -6)$ a $B = (5, 6)$ a vypočítame hodnoty funkcie f

$$f(A) = -64, \quad f(B) = -96.$$

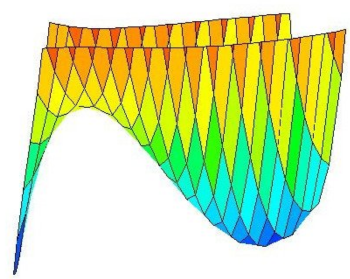
Stacionárne body sú $(1,-6,-64)$, $(5,6,-96)$.
Vypočítame druhé parciálne derivácie:

$$f''_{xx}(x,y)=6x,\quad f''_{yy}(x,y)=2,\quad f''_{xy}(x,y)=-6.$$

Určíme hodnoty determinantov $D_2(f,A)$ a $D_2(f,B)$.

$$D_2(A)=\begin{vmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 2 \end{vmatrix}=-24,\qquad D_2(B)=\begin{vmatrix} 30 & -6 \\ -6 & 2 \end{vmatrix}=24$$

Podľa kritéria 5.2 je $(1,-6,-64)$ sedlový bod. $f''_{xx}(B)=30$, podľa kritéria 5.2 je $(5,6,-96)$ lokálnym minimom funkcie f.



Obr. 5.17. Graf funkcie f

□

Príklad 5.26 Vyšetrite lokálne extrémy a sedlové body funkcie
$f(x,y)=27x^2y+14y^3-69y-54x$.

Riešenie: Nájdeme stacionárne body.

$$f'_x(x,y)=54xy-54,\quad f'_y(x,y)=27x^2+42y^2-69.$$

Z toho

$$\begin{aligned} 54xy-54 &= 0, \\ 27x^2+42y^2-69 &= 0, \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} y &= \tfrac{1}{x}, \\ \underbrace{27x^2+\frac{42}{x^2}-69}_{z=x^2} &= 0, \\ 27z^2-69z+42 &= 0, \end{aligned}$$

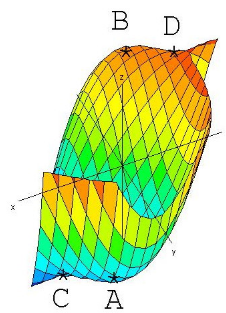
$z_1=1$, $z_2=\frac{14}{9}$. Potom $x_{1,1}=1, y_{1,1}=1$, $x_{1,2}=-1, y_{1,2}=-1$, $x_{2,1}=\frac{\sqrt{14}}{3}, y_{2,1}=\frac{3\sqrt{14}}{14}$, $x_{2,2}=-\frac{\sqrt{14}}{3}, y_{2,2}=-\frac{3\sqrt{14}}{14}$. Hodnoty funkcie f pre jednotlivé dvojice riešení sú

$f(1,1) = -82$, $f(-1,-1) = 82$, $f\left(\frac{\sqrt{14}}{3}, \frac{3\sqrt{14}}{14}\right) = -153\frac{\sqrt{14}}{7}$ a $f\left(-\frac{\sqrt{14}}{3}, -\frac{3\sqrt{14}}{14}\right) = 153\frac{\sqrt{14}}{7}$. Máme štyri stacionárne body

$$A = (1, 1, -82), \quad B = (-1, -1, 82), \quad C = \left(\frac{\sqrt{14}}{3}, \frac{3\sqrt{14}}{14}, -153\frac{\sqrt{14}}{7}\right),$$
$$D = \left(-\frac{\sqrt{14}}{3}, -\frac{3\sqrt{14}}{14}, 153\frac{\sqrt{14}}{7}\right).$$

Druhé parciálne derivácie funkcie f sú

$$f''_{xx}(x,y) = 54y, \quad f''_{yy}(x,y) = 84y, \quad f''_{xy}(x,y) = 54x.$$



Obr. 5.18. Graf funkcie f a jej stacionárne body

Pomocou kritéria 5.2 budeme analyzovať jednotlivé stacionárne body.

$$D_2(f,(1,1)) = \begin{vmatrix} 54 & 54 \\ 54 & 84 \end{vmatrix} = 1620, \quad f''_{xx}(1,1) = 54.$$

Z toho vyplýva, že v A má funkcia f lokálne minimum.

$$D_2(f,(-1,-1)) = \begin{vmatrix} -54 & -54 \\ -54 & -84 \end{vmatrix} = 1620, \quad f''_{xx}(-1,-1) = -54.$$

Z toho vyplýva, že v B má funkcia f lokálne maximum.

$$D_2\left(f, \left(\frac{\sqrt{14}}{3}, \frac{3\sqrt{14}}{14}\right)\right) = \begin{vmatrix} \frac{81\sqrt{14}}{7} & 18\sqrt{14} \\ 18\sqrt{14} & 18\sqrt{14} \end{vmatrix} = -1620.$$

Z toho vyplýva, že C je sedlový bod funkcie f.

$$D_2\left(f, \left(-\frac{\sqrt{14}}{3}, -\frac{3\sqrt{14}}{14}\right)\right) = \begin{vmatrix} -\frac{81\sqrt{14}}{7} & -18\sqrt{14} \\ -18\sqrt{14} & -18\sqrt{14} \end{vmatrix} = -1620.$$

Z toho vyplýva, že D je sedlový bod funkcie f. □

Príklad 5.27 Vyšetrite lokálne extrémy a sedlové body funkcie $f(x,y) = xy \cdot \ln(x^2+y^2)$.

Riešenie: Definičný obor funkcie f je $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$. Nájdeme stacionárne body.

$$f'_x(x,y) = y \cdot \ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2y}{x^2+y^2}, \quad f'_y(x,y) = x \cdot \ln(x^2+y^2) + \frac{2xy^2}{x^2+y^2}.$$

$$\left.\begin{array}{rcl} y \cdot \ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2y}{x^2+y^2} & = & 0 \\ x \cdot \ln(x^2+y^2) + \frac{2xy^2}{x^2+y^2} & = & 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} y\left(\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right) & = & 0 \\ x\left(\ln(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2}\right) & = & 0 \end{array} \tag{5.24}$$

Rozlíšime niekoľko prípadov:

1. $x = 0$. Potom $y \neq 0$ (pretože $(0,0) \notin D_f$) a dostaneme $\ln(y^2) = 0$. Sú dve riešenia $y_1 = 1$, $y_2 = -1$. $f(0,1) = f(0,-1) = 0$. Stacionárne body sú $A = (0,1,0)$, $B = (0,-1,0)$.

2. $y = 0$. Potom $x \neq 0$ a dostaneme $\ln(x^2) = 0$. Opäť sú dve riešenia $x_3 = 1$, $x_4 = -1$. $f(1,0) = f(-1,0) = 0$. Stacionárne body sú $C = (1,0,0)$, $D = (-1,0,0)$.

3. $x \neq 0$, $y \neq 0$. Keď z oboch rovníc (5.24) vyjadríme $\ln(x^2+y^2)$, dostaneme rovnicu $\frac{2x^2}{x^2+y^2} = \frac{2y^2}{x^2+y^2}$. Jej riešením je $|x| = |y|$. Spätne dosadíme do sústavy (5.24) a dostaneme

   $$\ln(2x^2) + \underbrace{\frac{2x^2}{x^2+y^2}}_{=1} = 0, \quad \Rightarrow \quad 2x^2 = e^{-1}.$$

   Potom $|x| = |y| = \frac{1}{\sqrt{2e}}$. Rovnica má 4 riešenia

   $$\hat{E} = \left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right), \qquad \hat{F} = \left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right),$$
   $$\hat{G} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right), \qquad \hat{H} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right).$$

   Vypočítame funkčnú hodnotu $f(\hat{E}) = f(\hat{H}) = -\frac{1}{2e}$, $f(\hat{F}) = f(\hat{G}) = \frac{1}{2e}$. Stacionárne body majú súradnice
   $E = \left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{2e}\right)$, $F = \left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{2e}\right)$, $G = \left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{2e}\right)$,
   $H = \left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{2e}\right)$.

Druhé parciálne derivácie sú:

$$
\begin{aligned}
f''_{xx}(x,y) &= \frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{4xy(x^2+y^2)-2x^2y(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^3y+6xy^3}{(x^2+y^2)^2}, \\
f''_{yy}(x,y) &= \frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{4xy(x^2+y^2)-2xy^2(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{6x^3y+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, \\
f''_{xy}(x,y) &= \ln(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{2x^2(x^2+y^2)-2x^2y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \\
&= \ln(x^2+y^2) + \frac{2x^4+2y^4}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}
$$

Pomocou kritéria 5.2 budeme analyzovat' jednotlivé stacionárne body.

$$D_2(f,(0,1)) = D_2(f,(0,-1)) = D_2(f,(1,0)) = D_2(f,(-1,0)) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4.$$

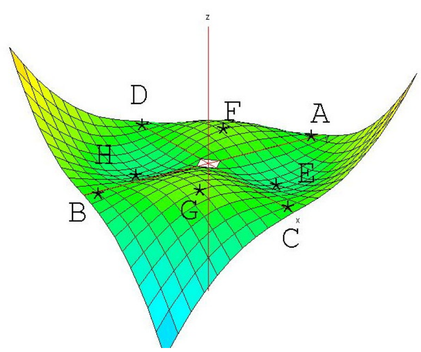
Body A, B, C, D sú sedlové.

$$D_2(f,\hat{E}) = D_2(f,\hat{H}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad f''_{xx}(\hat{E}) = f''_{xx}(\hat{H}) = 2.$$

V bodoch E a H má funkcia f lokálne minimá.

$$D_2(f,\hat{F}) = D_2(f,\hat{G}) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4, \quad f''_{xx}(\hat{F}) = f''_{xx}(\hat{G}) = -2.$$

V bodoch F a G má funkcia f lokálne maximá.



Obr. 5.19. Graf funkcie f a jej stacionárne body

□

Príklad 5.28 Vyšetrite lokálne extrémy a sedlové body funkcie
$f(x,y) = x^4 + y^4 + 4(x^3 - y^3) + 5(x^2 + y^2)$.

Riešenie: Nájdeme stacionárne body.

$$f'_x(x,y) = 4x^3 + 12x^2 + 10x, \quad f'_y(x,y) = 4y^3 - 12y^2 + 10y.$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x(4x^2+12x+10) & = & 0, \\ y(4y^2-12y+10) & = & 0, \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_0 = 0, \\ y_0 = 0, \end{array}$$

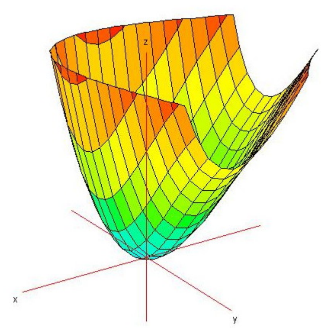
$f(0,0) = 0$. Funkcia f má jediný stacionárny bod $A = (0,0,0)$. Vypočítame druhé parciálne derivácie:

$$f''_{xx}(x,y) = 12x^2 + 24x + 10, \quad f''_{yy}(x,y) = 12y^2 - 24y + 10, \quad f''_{xy}(x,y) = 0$$

Pomocou kritéria 5.2 zistíme, či má funkcia f lokálny extrém v A.

$$D_2(f,(0,0)) = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 100, \quad f''_{xx}(0,0) = 10.$$

V A má funkcia f lokálne minimum.



Obr. 5.20. Graf funkcie f

□

Príklad 5.29 Vyšetrite lokálne extrémy a sedlové body funkcie $f(x,y) = xy + \frac{25}{x} + \frac{40}{y}$.

Riešenie: $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0,\ y \neq 0\}$. Nájdeme stacionárne body.

$$f'_x(x,y) = y - \frac{25}{x^2}, \quad f'_y(x,y) = x - \frac{40}{y^2}.$$

$$\left.\begin{array}{rcl} y - \frac{25}{x^2} & = & 0 \\ x - \frac{40}{y^2} & = & 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} y & = & \frac{25}{x^2}, \\ x - \frac{40}{\frac{625}{x^4}} & = & x\left(1 - \frac{2^3}{5^3}x^3\right) = 0. \end{array}$$

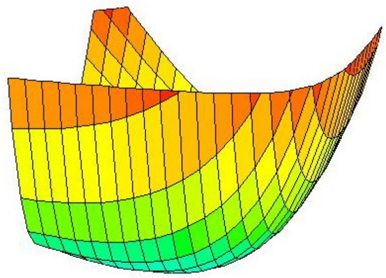
Sústava rovníc má jediné riešenie $x_0 = \frac{5}{2}$, $y_0 = 4$. $f\left(\frac{5}{2}, 4\right) = 30$. Stacionárny bod je $A = \left(\frac{5}{2}, 4, 30\right)$. Druhé parciálne derivácie:

$$f''_{xx}(x,y) = \frac{50}{x^3}, \quad f''_{yy}(x,y) = \frac{80}{y^3}, \quad f''_{xy}(x,y) = 1.$$

Pomocou kritéria 5.2 zistíme, či má funkcia f lokálny extrém v A.

$$D_2\left(f,\left(\frac{5}{2},4\right)\right) = \begin{vmatrix} \frac{16}{5} & 1 \\ 1 & \frac{5}{4} \end{vmatrix} = 3, \quad f''_{xx}\left(\frac{5}{2},4\right) = \frac{16}{5}.$$

Funkcia f má v bode A lokálne minimum.



Obr. 5.21. Graf funkcie f

□

Príklad 5.30 Vyšetrite lokálne extrémy funkcie $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+yz-z+y-2x$.

Riešenie: Nájdeme stacionárne body.

$$f'_x(x,y,z) = 2x-2, \quad f'_y(x,y,z) = 2y+z+1, \quad f'_z(x,y,z) = 2z+y-1.$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x-2 &=& 0, \\ 2y+z+1 &=& 0, \\ 2z+y-1 &=& 0, \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcr} x_0 &=& 1, \\ y_0 &=& -1, \\ z_0 &=& 1, \end{array}$$

$f(1,-1,1) = -2$. Funkcia f má jediný stacionárny bod $A = (1,-1,1,-2)$.
Druhé parciálne derivácie:

$$\begin{array}{lll} f''_{xx}(x,y,z) = 2, & f''_{xy}(x,y,z) = 0, & f''_{xz}(x,y,z) = 0 \\ & f''_{yy}(x,y,z) = 2, & f''_{yz}(x,y,z) = 1 \\ & & f''_{zz}(x,y,z) = 2 \end{array}$$

Pomocou kritéria 5.1 zistíme, či má funkcia f lokálny extrém v bode A.

$$D_2(f,(1,-1,1)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad D_3(f,(1,-1,1)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6,$$

$f''_{xx}(1,-1,1) = 2$. Funkcia f má v bode A lokálne minimum. □

5.4.2 Viazané extrémy

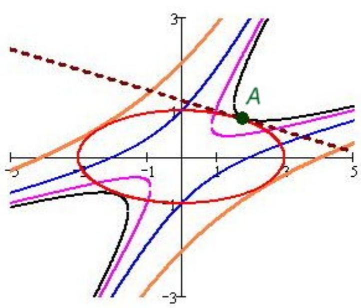
Máme danú funkciu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ktorej extrémy hľadáme a *väzby* (sústavu k rovníc s n premennými, $k < n$)

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Úlohou je nájsť extrémy funkcie f na množine $M \subseteq \mathbb{R}^n$, ktorá je daná sústavou (5.25). Predpokladáme, že funkcia f aj funkcie g_i sú dvakrát diferencovateľné v každom bode množiny M. Viazaný extrém funkcie f s väzbou (5.25), je lokálny extrém funkcie f, zúženej na množinu M. Sú dve metódy hľadania viazaných extrémov:

1. Ak to funkcie g_i umožňujú, k premenných vyjadríme pomocou zvyšných $n - k$ premenných. V tomto prípade úlohu prevedieme na hľadanie lokálnych extrémov funkcie s $n - k$ premennými.

2. *Metóda Lagrangeovych multiplikátorov* Túto metódu si vysvetlíme na funkcii dvoch premenných f a jednej väzbe, funkcii g.



Obr. 5.22. Vrstevnice funkcie f, väzba g a dotyčnica ku g v bode A

Predpokladáme, že f má v bode $(A, f(A))$ hľadaný extrém. Potom, ako vidíme na obr. 5.22, dotyčnica ku g, prechádzajúca cez bod A (v rovine $z = 0$) je zhodná s dotyčnicou k vrstevnici funkcie f, ktorá prechádza bodom A. Z toho dostaneme, že gradient k f v A je násobkom gradientu ku g v A, teda

$$\nabla f(A) = -\lambda \nabla g(A).$$

Okrem toho, bod A leží na grafe funkcie g, teda $g(A) = 0$.

Keď úvahu zovšeobecníme na funkciu n premenných f a k väzieb g_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$, dostaneme sústavu rovníc s $n+k$ neznámymi - súradnicami bodu A a Lagrangeovymi koeficientami $\lambda_1, \dots, \lambda_k$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Poznámka 5.5 Nevýhodou tejto metódy je, že sa nemusí podariť nájsť všetky viazané extrémy. Môže nastať situácia, že metóda nájde stacionárny bod, ale kritérium 5.1 tento bod neidentifikuje ako extrém. Túto situáciu ilustrujeme príkladom 5.33.

Pri použití metódy Lagrangeovych multiplikátorov pomocou kritéria 5.1, resp. 5.2, testujeme stacionárne body funkcie

$$F_{\lambda_1,\dots,\lambda_k}(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x_1, \dots, x_n). \tag{5.27}$$

Príklad 5.31 Nájdite viazané extrémy funkcie $f(x, y) = xy - x + y - 1$ pri väzbe $x + y - 1 = 0$.

Riešenie: Z rovnice $x + y - 1 = 0$ vyjadríme y dosadíme do funkcie f (tým vytvoríme funkciu jednej premennej f_1):

$$y = 1 - x \quad \Rightarrow \quad f_1(x) = f(x, 1 - x) = x(1 - x) - x + 1 - x - 1 = -x^2 - x.$$

Hľadáme stacionárne body funkcie f_1.

$$f_1'(x) = -2x - 1, \quad -2x_0 - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \quad x_0 = -\frac{1}{2}.$$

Potom $y_0 = \frac{3}{2}$ a $f\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}$. Použijeme kritérium 2.2 na overenie extrémov funkcie jednej premennej.

$$f_1''(x) = -2 < 0 \Rightarrow \qquad f_1 \text{ nadobúda pre } x_0 = -\tfrac{1}{2} \text{ lokálne maximum.}$$

Funkcia f má, pri väzbe $x + y - 1 = 0$, v bode $A = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$ viazané maximum. □

Príklad 5.32 Nájdite viazané extrémy funkcie $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ pri väzbách $x + y - 3z + 7 = 0$ a $x - y + z - 3 = 0$.

Riešenie: Z väzieb dostaneme

$$\left.\begin{array}{rcr} x + y - 3z & = & -7 \\ x - y + z & = & 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcr} y & = & 2x - 1, \\ z & = & x + 2. \end{array}$$

Množina M, daná väzbami, je priamka. Premenné y, z dosadíme do funkcie f a dostaneme funkciu jednej premennej f_1.

$$f_1(x) = f(x, 2x-1, x+2) = x^2 + (2x-1)^2 + (x+2)^2 = 6x^2 + 5.$$

Hľadáme stacionárne body funkcie f_1. $f_1'(x) = 12x$, z toho dostaneme rovnicu

$$12x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 0.$$

Potom $y_0 = -1$, $z_0 = 2$ a $f(0,-1,2) = 5$. Použijeme kritérium 2.2

$$f_1''(xx) = 12 \quad \Rightarrow \quad f_1 \text{ nadobúda pre } x_0 = 0 \text{ lokálne minimum.}$$

Funkcia f má, pri väzbách $x+y-3z+7 = 0$ a $x-y+z-3 = 0$, v bode $A = (0,\ -1,\ 2, 5)$ viazané minimum. □

Príklad 5.33 Nájdite viazané extrémy funkcie $f(x,y,z) = x + 2x^2 + xy + z^2$, ak $x + y - 3z - 1 = 0$ a $3x + 4y = 0$.

Riešenie: Použijeme metódu Lagrangeovych multiplikátorov. Zavedieme funkciu F_{λ_1,λ_2}

$$F_{\lambda_1,\lambda_2}(x,y,z) = x + 2x^2 + xy + z^2 + \lambda_1(x + y - 3z - 1) + \lambda_2(3x + 4y).$$

Vypočítame parciálne derivácie funkcie F_{λ_1,λ_2}:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial F_{\lambda_1\lambda_2}}{\partial x}(x,y,z) & = & 1 + 4x + y + \lambda_1 + 3\lambda_2, \\ \dfrac{\partial F_{\lambda_1\lambda_2}}{\partial y}(x,y,z) & = & x + \lambda_1 + 4\lambda_2, \\ \dfrac{\partial F_{\lambda_1\lambda_2}}{\partial z}(x,y,z) & = & 2z - 3\lambda_1. \end{array}$$

Z parciálnych derivácií a väzieb dostaneme sústavu rovníc

$$\left.\begin{array}{rcl} 1 + 4x + y + \lambda_1 + 3\lambda_2 & = & 0 \\ x + \lambda_1 + 4\lambda_2 & = & 0 \\ 2z - 3\lambda_1 & = & 0 \\ x + y - 3z & = & 1 \\ 3x + 4y & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcr} \lambda_1 & = & -\frac{44}{181} \\ \lambda_2 & = & \frac{28}{181} \\ x_0 & = & -\frac{68}{181} \\ y_0 & = & \frac{51}{181} \\ z_0 & = & -\frac{66}{181} \end{array}$$

Označme $A = \left(-\frac{68}{181}, \frac{51}{181}, -\frac{66}{181}\right)$. Vypočítame druhé parciálne derivácie.

$$\begin{array}{lll}
\frac{\partial^2 F_{\lambda_1\lambda_2}}{\partial x^2}(x,y,z) = 4, & \frac{\partial^2 F_{\lambda_1\lambda_2}}{\partial y^2}(x,y,z) = 0, & \frac{\partial^2 F_{\lambda_1\lambda_2}}{\partial z^2}(x,y,z) = 2, \\
\frac{\partial^2 F_{\lambda_1\lambda_2}}{\partial x\partial y}(x,y,z) = 1, & \frac{\partial^2 F_{\lambda_1\lambda_2}}{\partial x\partial z}(x,y,z) = 0, & \frac{\partial^2 F_{\lambda_1\lambda_2}}{\partial y\partial z}(x,y,z) = 0.
\end{array}$$

Použijeme kritérium 5.1

$$D_2(f,A) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad \Rightarrow \quad \text{v } A \text{ nebol potvrdený viazaný extrém funkcie } f.$$

Príklad vypočítame ešte raz, teraz bez použitia Lagrangeovych multiplikátorov.

Z väzieb vyjadríme premenné y a z pomocou x:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y-3z & = & 1 \\ 3x+4y & = & 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} y & = & -\frac{3}{4}x \\ z & = & \frac{1}{12}x - \frac{1}{3} \end{array}$$

Z toho dostaneme funkciu f_1

$$f_1(x) = f\left(x, -\frac{3}{4}x, \frac{1}{12}x - \frac{1}{3}\right) = \frac{181}{144}x^2 + \frac{17}{18}x + \frac{1}{9}.$$

Nájdeme stacionárne body f_1. $f_1'(x) = 2\frac{181}{144}x + \frac{17}{18}$, z toho

$$\frac{181}{72}x + \frac{17}{18} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = -\frac{68}{181}.$$

Ľahko sa presvedčíme, že aj súradnice y_0 a z_0 vyjdu rovnako ako pri metóde Lagrangeovych multiplikátorov. Použijeme kritérium 2.2 na overenie extrémov.

$$f_1''(x_0) = \frac{181}{72} \quad \Rightarrow \quad \text{funkcia } f_1 \text{ dosahuje lokálne minimum pre } x_0 = -\tfrac{68}{181}.$$

$f(x_0, y_0, z_0) = \frac{937}{6516}$. Bod $(A, f(A)) = \left(-\frac{68}{181}, \frac{51}{181}, -\frac{66}{181}, \frac{937}{6516}\right)$ je viazaným minimom funkcie f pri daných väzbách. □

Metóda Lagrangeovych multiplikátorov neodhalila v tomto príklade viazaný extrém. Aj napriek tomu, táto metóda má svoje výhody, keď nevieme z väzieb zredukovať premenné.

5.4.3 Globálne extrémy

Majme diferencovateľnú funkciu a uzavretú oblasť M, ktorej hranica je diferencovateľná až na konečne veľa bodov, (vrcholov oblasti). Globálne extrémy funkcie f na uzavretej oblasti M môžu byť

- v stacionárnom bode, ležiacom v oblasti M,

- na hranici oblasti M vo viazanom stacionárnom bode,
- vo vrcholoch oblasti M.

Porovnáme hodnoty f vo všetkých stacionárnych bodoch, viazaných stacionárnych bodoch a vo vrcholoch oblasti M a zistíme najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie f.

Príklad 5.34 Zistite najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie $f(x,y) = x^3 + \frac{1}{3}y^3 - 3xy$ v obdĺžniku s vrcholmi $A = (0,-1)$, $B = (2,-1)$, $C = (2,2)$ a $D = (0,2)$.

Riešenie: Nájdeme stacionárne body funkcie f.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y^2 - 3x.$$

Z toho

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x^2 - 3y &=& 0 \\ y^2 - 3x &=& 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} y &=& x^2 \\ x^4 - 3x &=& 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x_1 &=& 0, \\ x_2 &=& \sqrt[3]{3}. \end{array}$$

Potom $y_1 = 0$, $y_2 = \sqrt[3]{9}$. Označme $E = (0,0)$, $F = (\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{9})$. Máme dva stacionárne body. E aj F ležia v obdĺžniku $ABCD$.

Vyšetríme hranice.

- Strana AB: $y = -1$, $x \in [0,2]$. Zavedieme funkciu

  $$f_1(x) = f(x,-1) = x^3 - \frac{1}{3} + 3x$$

  a hľadáme jej stacionárne body pre $x \in [0,2]$:

  $$f_1'(x) = 3x^2 + 3, \quad 3x^2 + 3 = 0 \quad \text{nemá riešenie.}$$

- Strana BC: $x = 2$, $y \in [-1,2]$. Zavedieme funkciu

  $$f_2(y) = f(2,y) = 8 + \frac{1}{3}y^3 - 6y$$

  a hľadáme jej stacionárne body pre $y \in [-1,2]$:

  $$f_2'(y) = y^2 - 6, \quad y^2 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{1,2} = \pm\sqrt{6}.$$

  $\pm\sqrt{6} \notin [-1,2]$, funkcia f_2 nemá stacionárne body pre $y \in [-1,2]$.

- Strana CD: $y = 2$, $x \in [0, 2]$. Zavedieme funkciu

$$f_3(x) = f(x, 2) = x^3 = \frac{8}{3} - 6x$$

a hľadáme jej stacionárne body pre $x \in [0, 2]$:

$$f_3'(x) = 3x^2 - 6, \quad 3x^2 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{2}.$$

$x_2 = -\sqrt{2} \notin [0, 2]$, máme jeden viazaný stacionárny bod. Označme $G = (\sqrt{2}, 2)$.

- Strana AD: $x = 0$, $y \in [-1, 2]$. Zavedieme funkciu

$$f_4(y) = f(0, y) = \frac{1}{3}y^3$$

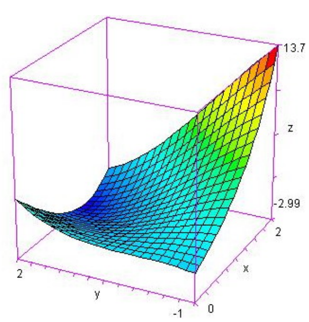
a hľadáme jej stacionárne body pre $y \in [-1, 2]$:

$$f_2'(y) = y^2, \quad y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 0.$$

Našli sme viazaný stacionárny bod. Tento bod sme už našli predtým $((0, 0) = E)$.

Zistíme hodnoty funkcie f v bodoch A, B, C, D, E, F, G:

$$f(A) = -\frac{1}{3}, \quad f(B) = \frac{41}{3}, \quad f(C) = -\frac{4}{3}, \quad f(D) = \frac{8}{3}, \quad f(E) = 0, \quad f(F) = -3,$$
$$f(G) = \frac{8}{3} - 4\sqrt{2}.$$



Obr. 5.23. Graf funkcie f v obdĺžniku $ABCD$

Najmenšia hodnota funkcie f je -3 a dosahuje sa v bode $F = (\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{9})$, najväčšia hodnota funkcie f je $\frac{41}{3}$ a dosahuje sa vo vrchole $B = (2, -1)$. □

Príklad 5.35 Zistite najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(3x^2+2y^2)$ v kruhu $k: \ x^2 + y^2 \leq 4$.

Riešenie: Nájdeme stacionárne body.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= -2xe^{-x^2-y^2}(3x^2+2y^2)+6xe^{-x^2-y^2},\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -2ye^{-x^2-y^2}(3x^2+2y^2)+4ye^{-x^2-y^2}.
\end{aligned}
$$

Z toho ($e^{-x^2-y^2} \neq 0$) dostaneme sústavu rovníc

$$
\begin{aligned}
-2x(3x^2+2y^2-3) &= 0\\
-2y(3x^2+2y^2-2) &= 0
\end{aligned}
$$

Sú tri možnosti: 1. $x=0$, y je ľubovoľné, 2. $x\neq 0$ a $y=0$, 3. $x\neq 0$, $y\neq 0$. Rozoberieme tieto tri možnosti.

$$
x=0 \;\Rightarrow\; y(y^2-1)=0, \quad (x\neq 0,\, y=0) \;\Rightarrow\; x^2=1,
$$
$$
(x\neq 0,\, y\neq 0) \;\Rightarrow\; \begin{cases} 3x^2+2y^2 = 3,\\ 3x^2+2y^2 = 2. \end{cases}
$$

Máme päť bodov $A=(0,0)$, $B=(0,1)$, $C=(0,-1)$, $D=(1,0)$, $E=(-1,0)$. V treťom prípade sústava rovníc nemá riešenie.

Vyšetríme hranicu $x^2+y^2=4$. Po dosadení do f dostaneme funkciu

$$
f_1(x)=e^{-4}(x^2+8)
$$

a hľadáme jej stacionárne body pre $x\in[-2,2]$:

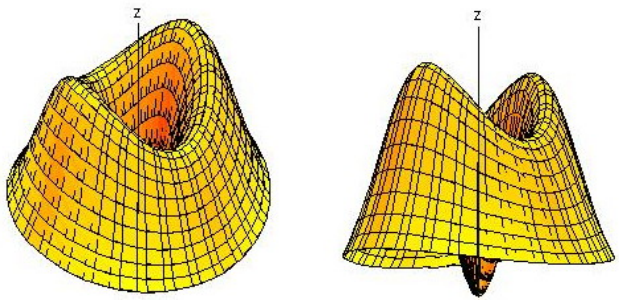
$$
f_1'(x)=2e^{-4}x, \quad 2e^{-4}x=0 \quad \Rightarrow \quad x=0.
$$

Dostali sme body $F=(0,2)$, $G=(0,-2)$.

Body $H=(-2,0)$ a $I=(2,0)$ berieme ako vrcholy (stacionárne body funkcie f_1 sme hľadali pre $x\in[-2,2]$).

Zistíme hodnoty funkcie f v bodoch A,B,C,D,E,F,G,H,I:

$$
\begin{aligned}
&f(A)=0, \quad f(B)=f(C)=2e^{-1}, \quad f(D)=f(E)=3e^{-1}\doteq 1{,}105,\\
&f(F)=f(G)=8e^{-4}, \quad f(H)=f(I)=12e^{-4}\doteq 0{,}220.
\end{aligned}
$$



Obr. 5.24. Graf funkcie f v kruhu $x^2 + y^2 \le 4$, pohľad zhora a zdola

Najmenšia hodnota funkcie f je 0 a dosahuje sa v bode $A = (0, 0)$, najväčšia hodnota funkcie f je $3e^{-1}$ a dosahuje sa vo vrcholoch $D = (1, 0)$ a $E = (-1, 0)$. □

Príklad 5.36 Zistite najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie $f(x, y) = x^2 - y^2$ v kruhu $k:\ x^2 + y^2 \le 4$.

Riešenie: Nájdeme stacionárne body.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y.$$

Z toho budeme mať sústavu rovníc

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x & = & 0 \\ -2y & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x = y = 0$$

Našli sme jeden stacionárny bod. Označme $A = (0, 0)$. Vyšetríme hranicu $x^2 + y^2 = 4$. Použijeme metódu Lagrangeovych multiplikátorov. Zavedieme funkciu f_λ predpisom

$$f_\lambda(x, y) = x^2 - y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 4).$$

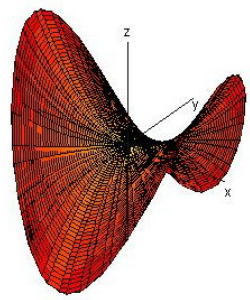
Viazané stacionárne body získame riešením sústavy rovníc $\nabla f_\lambda(x, y) = 0$, $x^2 + y^2 = 4$, to znamená:

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{\partial x^2-y^2+\lambda(x^2+y^2-4)}{\partial x} & = & 0 \\ \frac{\partial x^2-y^2+\lambda(x^2+y^2-4)}{\partial y} & = & 0 \\ x^2+y^2 & = & 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} 2x+2\lambda x & = & 0 \\ -2y+2\lambda y & = & 0 \\ x^2+y^2 & = & 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ccc} x & y & \lambda \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}$$

Máme 4 viazané stacionárne body. Označíme $B = (0, 2)$, $C = (0, -2)$, $D = (2, 0)$, $E = (-2, 0)$.

Zistíme hodnoty funkcie f v bodoch A, B, C, D, E

$$f(A) = 0, \quad f(B) = f(C) = -4, \quad f(D) = f(E) = 4.$$



Obr. 5.25. Graf funkcie f v kruhu $x^2 + y^2 \leq 4$

Najmenšia hodnota funkcie f je -4 a dosahuje sa v bodoch $B = (0, 2)$ a $C = (0, -2)$, najväčšia hodnota funkcie f je 4 a dosahuje sa v bodoch $D = (2, 0)$ a $E = (-2, 0)$. $\square$

Príklad 5.37 Zistite najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie $f(x, y) = xy^2(4 - x - y)$ v trojuholníku, ohraničenom priamkami $p_1 : \ x = 0, \ p_2 : \ y = 0, \ p_3 : \ x + y = 6$.

Riešenie: Zistíme vrcholy daného trojuholníka. $A = p_1 \cap p_2 = (0, 0)$. $B = p_1 \cap p_3 = (0, 6)$, $C = p_2 \cap p_3 = (6, 0)$. Nájdeme stacionárne body.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2(4 - x - y) - xy^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy(4 - x - y) - xy^2.$$

Z toho budeme mať sústavu rovníc

$$\left.\begin{array}{rcl} y^2(4 - 2x - y) & = & 0 \\ xy(8 - 2x - 3y) & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} y = 0, & x \text{ ľubovoľné}, \\ x = 0, & y = 4, \\ x = 1, & y = 2. \end{array}$$

Máme 2 stacionárne body, označme $D = (0, 4)$, $E = (1, 2)$. Oba body ležia v trojuholníku ABC. Okrem toho, každý bod priamky $y = 0$, ležiaci v trojuholníku ABC, je taktiež stacionárnym bodom.

Zistíme viazané stacionárne body na hranici trojuholníka.

- $p_1 : \ x = 0, \ y \in [0, 6]$. Zavedieme funkciu

  $$f_1(y) = f(0, y) = 0 \quad \text{funkcia je konštantná.}$$

- $p_2 : y = 0, \ x \in [0, 6]$. Zavedieme funkciu

  $$f_2(x) = f(x, 0) = 0 \quad \text{funkcia je konštantná.}$$

- $p_3: \; x = 6 - y,\; y \in [0,6]$. Zavedieme funkciu

  $$f_3(y) = f(6-y, y) = -2(6-y)y^2 = 2y^3 - 12y^2$$

  a hľadáme jej stacionárne body pre $y \in [0,6]$:

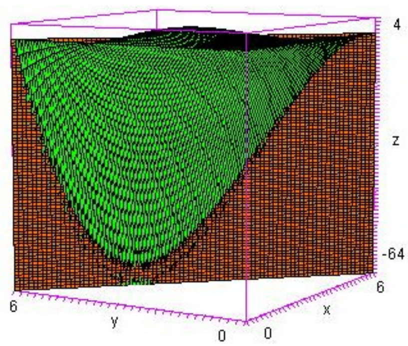
  $$f_3'(y) = 6y^2 - 24y, \quad 6y(y-4) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 0,\; y_2 = 4.$$

  Máme dva viazané stacionárne body, ktorých súradnice (x,y) sú $C = (6,0)$ (vrchol trojuholníka), $F = (2,4)$.

Zistíme hodnoty funkcie f v bodoch A, B, C, D, E, F:

$$f(A) = f(B) = f(C) = f(D) = 0, \quad f(E) = 4, \quad f(F) = -64.$$

V každom bode priamok p_1 a p_2 má funkcia f hodnotu 0.



Obr. 5.26. Graf funkcie f v trojuholníku ABC

Najmenšia hodnota funkcie f je -64 a dosahuje sa v bode $F = (2,4)$, najväčšia hodnota funkcie f je 4 a dosahuje sa v bode $E = (1,2)$. □

Príklad 5.38 Zistite najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie $f(x,y) = \cos x \cos y \cos(x+y)$ vo štvorci, danom vrcholmi $A = (0,0)$, $B = (\pi,0)$, $C = (\pi,\pi)$, $D = (0,\pi)$.

Riešenie: Nájdeme stacionárne body.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= -\sin x \cos y \cos(x+y) - \cos x \cos y \sin(x+y), \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -\cos x \sin y \cos(x+y) - \cos x \cos y \sin(x+y).
\end{aligned}$$

Z toho dostaneme sústavu rovníc

$$\begin{aligned}
-\sin x \cos y \cos(x+y) - \cos x \cos y \sin(x+y) &= 0 \\
-\cos x \sin y \cos(x+y) - \cos x \cos y \sin(x+y) &= 0
\end{aligned}$$

Rozlíšime niekoľko prípadov.

1. $x = \frac{\pi}{2}$, potom $\cos y \cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right) = 0$. Z toho, pre $y \in [0, \pi]$ dostaneme $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{\pi}{2}$, $y_3 = \pi$. Označíme $E = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $F = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $G = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

2. $x \neq \frac{\pi}{2}$ (teda $\cos x \neq 0$), $y = \frac{\pi}{2}$, potom $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$. Z toho $x_4 = 0$, $x_5 = \pi$. Označíme $H = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $I = \left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$.

3. $x \neq \frac{\pi}{2}$, $y \neq \frac{\pi}{2}$. Potom budeme mať sústavu rovníc

$$\left.\begin{array}{rcl} \sin x \cos(x+y) + \cos x \sin(x+y) & = & 0 \\ \sin y \cos(x+y) + \cos y \sin(x+y) & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} \operatorname{tg}(x+y) & = & -\operatorname{tg} x, \\ \operatorname{tg}(x+y) & = & -\operatorname{tg} y, \end{array} \tag{5.28}$$

$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y$ a z toho, pre $x, y \in [0, \pi]$ vyjde $x = y$. Dosadíme do sústavy (5.28)

$$\operatorname{tg} 2x = -\operatorname{tg} x, \ x \in [0, \pi] \quad \Rightarrow \quad 2x = \pi - x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{3}.$$

Označíme $J = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$.

Vyšetríme funkciu f na hranici štvorca.

- $AB : y = 0, \ x \in [0, \pi]$. Zavedieme funkciu

  $$f_1(x) = f(x, 0) = \cos^2 x.$$

  Nájdeme jej stacionárne body pre $x \in [0, \pi]$

  $$f_1'(x) = -2 \sin x \cos x, \quad -2 \sin x \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}.$$

  Pre $x = 0$ a $x = \pi$ dostaneme vrcholy A, B. Pre $x = \frac{\pi}{2}$ dostaneme bod E.

- $BC : x = \pi, \ y \in [0, \pi]$. Zavedieme funkciu

  $$f_2(y) = f(\pi, y) = -\cos y \cos(\pi + y) = \cos^2 y.$$

  Nájdeme jej stacionárne body pre $y \in [0, \pi]$

  $$f_2'(y) = -2 \sin y \cos y, \quad -2 \sin y \cos y = 0 \quad \Rightarrow \quad y \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}.$$

  Pre $y = 0$ a $y = \pi$ dostaneme vrcholy B, C. Pre $y = \frac{\pi}{2}$ dostaneme bod I.

- $CD : y = \pi, \ x \in [0, \pi]$. Zavedieme funkciu

  $$f_3(x) = f(x, \pi) = -\cos x \cos(x + \pi) = \cos^2 x.$$

  Nájdeme jej stacionárne body pre $x \in [0, \pi]$

  $$f_3'(x) = -2 \sin x \cos x, \quad -2 \sin x \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}.$$

  Pre $x = 0$ a $x = \pi$ dostaneme vrcholy C, D. Pre $x = \frac{\pi}{2}$ dostaneme bod G.

- $AD: x = 0,\ y \in [0, \pi]$. Zavedieme funkciu

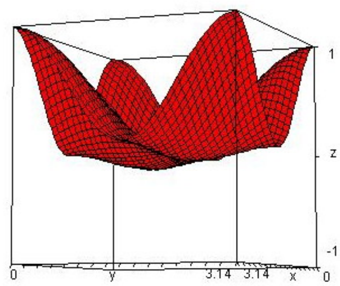
  $$f_4(y) = f(0, y) = \cos^2 y.$$

  Nájdeme jej stacionárne body pre $y \in [0, \pi]$

  $$f_2'(y) = -2\sin y \cos y, \quad -2\sin y \cos y = 0 \quad \Rightarrow \quad y \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}.$$

  Pre $y = 0$ a $y = \pi$ dostaneme vrcholy A, D. Pre $y = \frac{\pi}{2}$ dostaneme bod H.

Zistíme hodnoty funkcie f v bodoch $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$:
$f(A) = f(B) = f(C) = f(D) = 1, \quad f(E) = f(F) = f(G) = f(H) = f(I) = 0,$
$f(J) = -\frac{1}{8}$.



Obr. 5.27. Graf funkcie f vo štvorci $ABCD$

Najmenšia hodnota funkcie f je $-\frac{1}{8}$ a dosahuje sa v bode $J = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$. Najväčšia hodnota funkcie f je 1 a dosahuje sa vo vrcholoch A, B, C, D. □

Príklad 5.39 Zistite najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy + x + 1$ vo štvorci, danom vrcholmi $A = (0, 0),\ B = (3, 0),\ C = (3, 3),\ D = (0, 3)$.

Riešenie: Nájdeme stacionárne body.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - y + 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y - x.$$

Z toho dostaneme sústavu rovníc

$$\left.\begin{array}{rcr} 2x - y & = & -1 \\ 4y - x & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{rcl} x_0 & = & -\frac{4}{7}, \\ y_0 & = & -\frac{1}{7} \end{array}\right\} \left(-\frac{4}{7}, -\frac{1}{7}\right) \notin \square ABCD$$

Vyšetríme hranice.

- Strana $AB : y = 0,\ x \in [0,3]$. Zavedieme funkciu

  $$f_1(x) = f(x,0) = x^2 + x + 1.$$

  Nájdeme stacionárne body f_1 pre $x \in [0,3]$.

  $$f_1'(x) = 2x + 1, \quad 2x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2} \notin [0,3].$$

- Strana $BC : x = 3,\ y \in [0,3]$. Zavedieme funkciu

  $$f_2(y) = f(3,y) = 2y^2 - 3y + 13.$$

  Nájdeme stacionárne body f_2 pre $y \in [0,3]$.

  $$f_2'(y) = 4y - 3, \quad 4y - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{4}.$$

  Označíme $E = \left(3, \frac{3}{4}\right)$.

- Strana $CD : y = 3,\ x \in [0,3]$. Zavedieme funkciu

  $$f_3(x) = f(x,3) = x^2 - 2x + 19.$$

  Nájdeme stacionárne body f_3 pre $x \in [0,3]$.

  $$f_3'(x) = 2x - 2, \quad 2x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1.$$

  Označíme $F = (1,3)$.

- Strana $AD : x = 0,\ y \in [0,3]$. Zavedieme funkciu

  $$f_4(y) = f(0,y) = 2y^2 + 1.$$

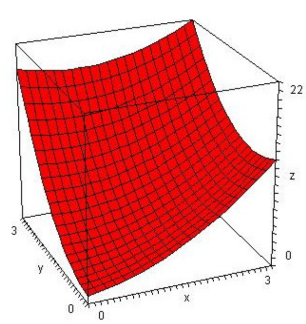
  Nájdeme stacionárne body f_4 pre $y \in [0,3]$.

  $$f_4'(y) = 4y, \quad 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0.$$

  $(0,0)$ je vrchol A.

Zistíme hodnoty funkcie f v A, B, C, D, E, F:

$$f(A) = 1, \quad f(B) = 13, \quad f(C) = 22, \quad f(D) = 19, \quad f(E) = \frac{95}{8}, \quad f(F) = 18.$$



Obr. 5.28. Graf funkcie f vo štvorci $ABCD$

Najmenšia hodnota funkcie f je 1 a dosahuje sa vo vrchole $A = (0,0)$. Najväčšia hodnota funkcie f je 22 a dosahuje sa vo vrchole $C = (3,3)$. $\square$

5.5 Cvičenia

Cvičenie 5.1 Nájdite definičné obory funkcií a načrtnite ich:
$f_1(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2-9}$, $f_2(x,y) = \ln\left(\frac{x}{y-4}\right)$, $f_3(x,y) = \ln(x^2 \cdot \operatorname{tg} y)$,
$f_4(x,y) = \ln\left((x-3)(y-4)\right)$, $f_5(x,y) = \frac{\sqrt{16-4x^2-y^2}}{\ln(x^2+y^2-1)}$, $f_6(x,y) = \arcsin(x+y)$,
$f_7(x,y) = \frac{1}{xy}$, $f_8(x,y) = \sqrt{xy}$.

Cvičenie 5.2 Nakreslite vrstevnice daných funkcií pre $z = 0,1,2,3$ a rezy rovinami $x = 0,1,2$, $y = 0,1,2$, ak existujú:
$f_1(x,y) = x^2 + y^2$, $f_2(x,y) = \frac{x}{y^2}$, $f_3(x,y) = xy$,
$f_4(x,y) = \frac{1}{xy}$, $f_5(x,y) = \frac{1}{x^2-y^2}$.

Cvičenie 5.3 Vypočítajte opakované, resp. dvojné limity (ak existujú):
$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\frac{\cos y}{y-\frac{\pi}{2}}$, $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} x^y$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} x^y$, $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty} \frac{x^2-2xy+3y^3}{x+y^4}$, $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+3y^3}{x+y^4}$,
$\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x^2-1)e^y}{x-1}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} x^y$, $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} x^y$, $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,-\infty)} \frac{x+y}{x^2-y^2}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\infty)} x\sin y$.

Cvičenie 5.4 Nájdite dotykové roviny k daným funkciám v dotykovom bode T_i a zistite definičný obor týchto funkcií:
$f_1(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$; $T_1 = (0;2;?)$, $f_2(x,y) = \arctan\frac{x}{y}$; $T_2 = (2;2;?)$,
$f_3(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-9}$; $T_3 = (5;-3;?)$, $f_4(x,y) = \sqrt{6x-x^2-y^2-5}$; $T_4 = (3;0;?)$,
$f_5(x,y) = e^{xy} + 3$; $T_5 = (3;0;?)$, $f_6(x,y) = \ln\frac{y}{x}$; $T_6 = (1;1;?)$,
$f_7(x,y) = e^{x-y}$; $T_7 = (3;3;?)$, $f_8(x,y) = \sqrt{19-x^2-y^2}$; $T_8 = (-3;1;?)$.

Cvičenie 5.5 Nájdite dotykové roviny k daným funkciám, ktoré sú rovnobežné s rovinami τ_i:
$f_1(x,y) = \ln\frac{y}{x}$; $\tau_1: \ -2x+y+3 = z$, $f_2(x,y) = e^{x-y^2}$; $\tau_2: \ x = z-5$,
$f_3(x,y) = x^2+y^2$; $\tau_3: \ x+3y = z$, $f_4(x,y) = x^2y^2$; $\tau_4: \ 2x+2y-3 = z$.

Cvičenie 5.6 Rozviňte funkcie f_i do Taylorovho polynómu $T_3(f_i, A_i, x)$.
$f_1(x,y) = e^{x+y}$, $A_1 = (0,0)$.
$f_2(x,y) = e^x \ln y$, $A_2 = (0,1)$.
$f_3(x,y) = \ln\frac{x}{y}$, $A_3 = (1,1)$.
$f_4(x,y) = \sin(x-y)$, $A_4 = (0,\pi)$.

Cvičenie 5.7 Nájdite lokálne extrémy a sedlové body funkcí
$f_1(x,y) = xy - x^2 + 3y^3, \quad f_2(x,y) = x^3 + y^2 - 12xy + 3,$
$f_3(x,y) = xy(12 - x - y), \quad f_4(x,y) = x^3 - xy^2 + y^2,$
$f_5(x,y) = xy \cdot e^{-x^2-y^2}, \quad f_6(x,y) = (x-y) \cdot e^{-x^2-y^2}.$

Cvičenie 5.8 Nájdite lokálne extrémy funkcií
$f(x,y,z) = x^2 - 3xy^2 + y^2 - x + zy - z^2, \quad g(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 - 2z^2 + xy.$

Cvičenie 5.9 Nájdite viazané extrémy funkcie $f(x,y) = x^2 - xy + 2y^2$, ak $y = x$.

Cvičenie 5.10 Nájdite viazané extrémy funkcie $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$, ak $x + 2y - z = 1, x - y + 2z = 2$.

Cvičenie 5.11 Nájdite viazané extrémy funkcie $f(x,y,z) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 - x + y^2 + 2y + xz$, ak $x - 2y - z + 1 = 0$.

Cvičenie 5.12 Nájdite najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie $f(x,y) = xy^2(4 - x - y)$ v trojuholníku ABC s vrcholmi $A = (-1,-1),\ B = (-1,0),\ C = (0,-1)$.

Cvičenie 5.13 Nájdite najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie $f(x,y) = 5x^2 - y^2$ v kruhu $x^2 + y^2 = 4$.

Cvičenie 5.14 Nájdite najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ na oblasti M, danej nerovnosťou $|x| + |y| \leq 1$.

Cvičenie 5.15 Nájdite najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie $f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2$ na oblasti M, danej nerovnosťami $0 \leq |x| + y \leq 1$.

Cvičenie 5.16 Nájdite najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy$ vo štvorci s vrcholmi $A = (-1,-2), B = (-1,1), C = (2,1), D = (2,-2)$.

Cvičenie 5.17 Nájdite najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie $f(x,y) = x^3 - y^2 - 6xy$ v obdĺžniku s vrcholmi $A = (0,-2), B = (0,1), C = (1,1), D = (1,-2)$.

Výsledky cvičení

Kapitola 1

Cvičenie 1
(a) $(x = 1, y = 2, z = -1)$,
(b) $[x = 3, y = 0, z = 4]$,
(c) $(x = 2 + 10t, y = y, z = -1 - 7t)$,
(d) $\left(x = -\frac{18}{11}, y = -\frac{4}{11}, z = \frac{17}{11}\right)$,
(e) $\left(x = 28 - 9t, y = t, z = -\frac{37}{2} + \frac{11}{2}t\right)$,
(f) nemá riešenie,
(g) $\left(x = -\frac{1}{7}t + 2, y = \frac{5}{7}t, z = t\right)$,
(h) nemá riešenie,
(i) $\left(x = \frac{7}{3}, y = -\frac{1}{3}, z = -3\right)$,
(j) $\left[x = -1, y = \frac{4}{3}, z = \frac{10}{3}\right]$,
(k) $(x = 2, y = 1, z = -4)$,
(l) $(x = 1, y = -2, z = 2)$.

Cvičenie 2 $|A| = 1$, $|B| = 1$, $|C| = -7$, $|D| = 16$, $|E| = 80$, $|F| = -40$, $|G| = -64$, $|H| = -8$, $|K| = -15$

Cvičenie 3

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -4 & 2 & 4 \\ 8 & -4 & -10 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = -\frac{1}{31}\begin{pmatrix} -7 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & -13 \\ 2 & -5 & 18 \end{pmatrix},$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 13 & 24 & -15 \\ 7 & 13 & -8 \\ -24 & -45 & 28 \end{pmatrix}, \quad D^{-1} = -\frac{1}{40}\begin{pmatrix} -7 & -9 & -7 & 4 \\ 1 & 7 & 1 & -12 \\ 27 & -11 & -13 & -4 \\ 4 & -12 & 4 & -8 \end{pmatrix},$$

$$E^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -4 & 10 & 22 & -10 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \\ 0 & -8 & -16 & 8 \\ 2 & -7 & -9 & 3 \end{pmatrix}, \quad F^{-1} = -\frac{1}{15}\begin{pmatrix} -13 & 7 & 13 & -2 \\ -9 & 6 & 9 & -6 \\ 20 & -20 & -35 & 10 \\ 1 & -4 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cvičenie 4

$$\textbf{(a)}\ X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \textbf{(b)}\ X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \textbf{(c)}\ X = \begin{pmatrix} -18 & -6 & 17 \\ 12 & 1 & -9 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix},$$

(d) $X = \begin{pmatrix} 11 & 18 & -11 \\ -7 & -10 & 8 \end{pmatrix}$, **(e)** $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, **(f)** $X = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 11 & 8 & 14 \\ -7 & 8 & 2 \\ 10 & 8 & -4 \end{pmatrix}$,

(g) $X = \begin{pmatrix} 20 & 21 & 29 \\ -8 & -9 & -13 \\ -5 & -4 & -5 \end{pmatrix}$, **(h)** $X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \frac{3}{2} \\ 2 & 5 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$, **(i)** $X = \begin{pmatrix} 17 & -23 \\ 8 & -11 \end{pmatrix}$,

(j) $X = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$, **(k)** $X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -36 & -44 \\ 81 & 99 \end{pmatrix}$, **(l)** $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -6 & -8 & 5 \\ -9 & -15 & 10 \end{pmatrix}$,

(m) $X = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, **(n)** $X = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{7}{6} \\ -\frac{5}{4} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$, **(o)** $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{11} \\ 3 & -6 & \frac{5}{11} \end{pmatrix}$,

(p) matica X neexistuje.

Cvičenie 5 $\rho: \; 7x - 9y - 13z + 51 = 0$, $|A\rho| = \frac{17}{\sqrt{299}}$.

Cvičenie 6 $\rho \cap \tau: \; \left(x = t, y = -t - \frac{3}{5}, z = -t - \frac{1}{5}\right)$, $\cos\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$, $\gamma \doteq 1,237\,\text{rad}$.

Cvičenie 7 $\rho \cap \tau \; : \; \left(x = \frac{35}{9}t - \frac{16}{3}, y = -\frac{2}{3}t + 2, z = \frac{23}{9}t - \frac{1}{3}\right)$, $\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{299}}$, $\gamma \doteq 1,524\,rad$.

Cvičenie 8 $\rho \cap p: \; \left(x = \frac{5}{8}, y = \frac{1}{8}, z = \frac{1}{2}\right)$, $\sin\gamma = \frac{8}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{19}}$, $\gamma \doteq 0,368\,rad$.

Cvičenie 9 $|pq| = 4\sqrt{2}$.

Cvičenie 10 $p \cap q = (-2, 3)$, $\cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\gamma \doteq 0,322\,rad$.

Cvičenie 11 $|pq| = \frac{27}{\sqrt{91}}$. **Cvičenie 12** $|Ap| = \sqrt{\frac{110}{21}}$. **Cvičenie 13** $V = 18$.
Cvičenie 14 $V = 1$. **Cvičenie 15** $P = \sqrt{74}$. **Cvičenie 16** $V = 3$.
Cvičenie 17 $|pq| = \frac{20}{\sqrt{222}}$. **Cvičenie 18** $V = 17$.

Cvičenie 19

$A: \lambda_1 = 3, \; \lambda_2 = -3, \; \vec{v}_1 = k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; \vec{v}_2 = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$B: \lambda_1 = 1 + \sqrt{10}, \; \lambda_2 = 1 - \sqrt{10}, \; \vec{v}_1 = k\begin{pmatrix} 3 \\ 1 + \sqrt{10} \end{pmatrix}, \; \vec{v}_2 = k\begin{pmatrix} 1 + \sqrt{10} \\ -3 \end{pmatrix}$,

$C: \lambda_1 = 5, \; \lambda_2 = 0, \; \vec{v}_1 = k\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \; \vec{v}_2 = k\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$D : \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 1,\ \vec{v}_1 = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{v}_2 = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$

$E : \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -3,\ \vec{v}_1 = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{v}_2 = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$

$F : \lambda_1 = -1 + \sqrt{10},\ \lambda_2 = -1 - \sqrt{10},\ \vec{v}_1 = k \begin{pmatrix} 3 \\ 1 + \sqrt{10} \end{pmatrix},\ \vec{v}_2 = k \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{10} \\ -3 \end{pmatrix},$

$G : \lambda_1 = \frac{3+\sqrt{17}}{2},\ \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{17}}{2},\ \vec{v}_1 = k \begin{pmatrix} -4 \\ 1 - \sqrt{17} \end{pmatrix},\ \vec{v}_2 = k \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{17} \\ 4 \end{pmatrix},$

$H : \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -10,\ \vec{v}_1 = k \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{v}_2 = k \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$

Cvičenie 20

(a) Elipsa, $9\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 1$, $v_{\bar{x}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_{\bar{y}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Dve rovnobežky, $9\bar{x}^2 = 1$, $v_{\bar{x}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_{\bar{y}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) Elipsa, $8\bar{x}^2 + 3\bar{y}^2 = 1$, $v_{\bar{x}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_{\bar{y}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(d) Elipsa, $14\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 1$, $v_{\bar{x}} = \frac{\sqrt{13}}{13} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_{\bar{y}} = \frac{\sqrt{13}}{13} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(e) Hyperbola, $11\bar{x}^2 - 2\bar{y}^2 = 1$, $v_{\bar{x}} = \frac{\sqrt{13}}{13} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_{\bar{y}} = \frac{\sqrt{13}}{13} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(f) Dve rovnobežky, $1\bar{x}^2 = 1$, $v_{\bar{x}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_{\bar{y}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(g) Hyperbola, $4\bar{x}^2 - \bar{y}^2 = 1$, $v_{\bar{x}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_{\bar{y}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(h) Elipsa, $10\bar{x}^2 + 5\bar{y}^2 = 1$, $v_{\bar{x}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_{\bar{y}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(i) Hyperbola, $3\bar{x}^2 - 2\bar{y}^2 = 1$, $v_{\bar{x}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_{\bar{y}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

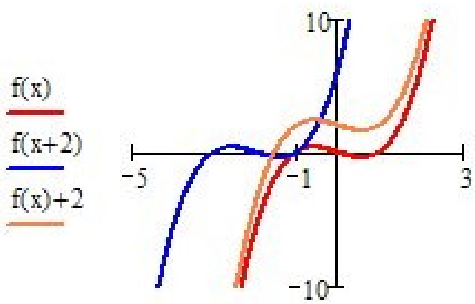
Kapitola 2

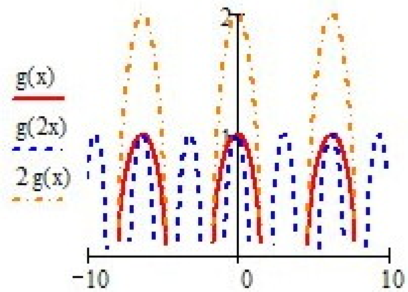
Cvičenie 1

$D(f_1) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{2}\right\}$, funkcia je prostá, $f_1^{-1}(x) = \frac{5x+3}{2x-1}$, $D(f_1^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.
$D(f_2) = \mathbb{R} \setminus \left\{\sqrt[3]{-2}\right\}$, funkcia je prostá, $f_2^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{3+2x}{1-x}}$, $D(f_2^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
$D(f_3) = (0,1) \cup (1,\infty)$, funkcia je prostá, $f_3^{-1}(x) = exp\left(\frac{\ln 3}{3x-1}\right)$, $D(f_3^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

$D(f_4) = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$, funkcia je prostá, $f_4^{-1}(x) = \frac{2}{\log_2 x} - 5$, $D(f_4^{-1}) = (0,1) \cup (1,\infty)$.
$D(f_5) = \mathbb{R}$, funkcia je prostá, $f_5^{-1}(x) = \operatorname{tg}(\log_2 x)$, $D(f_5^{-1}) = \left(2^{-\frac{\pi}{2}}, 2^{\frac{\pi}{2}}\right)$.
$D(f_6) = (-5,\infty)$, funkcia je prostá, $f_6^{-1}(x) = 10^{1-x} - 5$, $D(f_6^{-1}) = \mathbb{R}$.
$D(f_7) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, funkcia je prostá, $f_7^{-1}(x) = \frac{2\ln x}{2-\ln x}$, $D(f_7^{-1}) = (0,e^2) \cup (e^2,\infty)$.
$D(f_8) = (0,3)$, funkcia je prostá, $f_8^{-1}(x) = \frac{3e^x}{2+e^x}$, $D(f_8^{-1}) = \mathbb{R}$.
$D(f_9) = \mathbb{R}$, funkcia je prostá, $f_9^{-1}(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{1-3x}\right)$, $D(f_9^{-1}) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$.
$D(f_{10}) = \mathbb{R}$, funkcia je prostá, $f_{10}^{-1}(x) = x$, $D(f_{10}^{-1}) = \mathbb{R}$.

Cvičenie 2 Návod je v nasledujúcich obrázkoch





Obr. 5.1. Funkcia f a aditívne konštanty   Obr. 5.2. Funkcia g a násobné konštanty

Cvičenie 3
(a) Funkcie sú rôzne, lebo majú rôzne definičné obory.
(b) Funkcie sú rôzne, lebo majú rôzne definičné obory.
(c) Funkcie sa rovnajú. **(d)** Funkcie sa rovnajú.

Cvičenie 4
(a) 0, **(b)** $\frac{21}{4}$, **(c)** -1, **(d)** $\frac{1}{2\sqrt{5}}$, **(e)** $\frac{1}{2}$, **(f)** $-\frac{1}{5}$, **(g)** $\frac{1}{3}$, **(h)** 0, **(i)** $-\infty$,
(j) limita neexistuje, **(k)** ∞, **(l)** $-\infty$, **(m)** 7, **(n)** $-\frac{1}{2}$, **(o)** $-\frac{1}{2}$, **(p)** ∞,
(q) ∞, **(r)** $-\infty$.

Cvičenie 5
$f_1'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$, $f_2'(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^3}}$, $f_3'(x) = \cos x$,
$f_4'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 2x$, $f_5'(x) = \frac{1}{x}$, $f_6'(x) = \frac{e^x(x-\frac{1}{3})}{\sqrt[3]{x^4}}$,
$f_7'(x) = 4^x \ln 4 + 4x^3$, $f_8(x) = \frac{2}{x\ln 3}$, $f_9'(x) = 2\cos(2x)$,
$f_{10}'(x) = \sinh x - \sin x$, $f_{11}'(x) = (x^2+2x)e^x$, $f_{12}'(x) = e^{2x}(2x+1)$,
$f_{13}'(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}$, $f_{14}'(x) = \frac{\arcsin x + \arccos x}{\sqrt{1-x^2}\arccos^2 x}$, $f_{15}'(x) = \frac{2}{1+x^2}$.

Cvičenie 6 $g_1'(x) = 2xe^{x^2}$, $g_2'(x) = 2(e^x)^2$, $g_3'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$, $g_4'(x) = \frac{25}{12}x^{\frac{13}{12}}$,

$$g_5'(x) = \begin{cases} 1, & \text{pre } x \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right) \\ -1 & \text{pre } x \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right) \end{cases}, \quad g_6'(x) = 1 \text{ pre } x > 0,$$

$g_7'(x) = 1$ pre $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\quad$ $g_8'(x) = 2x\sin(5x) + 5x^2\cos(5x)$,
$g_9'(x) = \frac{2\ln x}{x}$, $\quad$ $g_{10}'(x) = \frac{2}{x}$,
$g_{11}'(x) = \frac{1}{\ln(\ln x)}\frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}$, $\quad$ $g_{12}'(x) = 2x\cos(x^2)$,
$g_{13}'(x) = 2\sin x\cos x = \sin(2x)$, $\quad$ $g_{14}'(x) = \frac{-2x}{9-x^2}$,
$g_{15}'(x) = \frac{6}{9-x^2}$, $\quad$ $g_{16}'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,
$g_{17}'(x) = \frac{-x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$, $\quad$ $g_{18}'(x) = \frac{1}{\sqrt{(x+1)(1-x)^3}}$,
$g_{19}'(x) = -\operatorname{tg} x$ pre $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, $\quad$ $g_{20}'(x) = -15\arccos^2(5x)\frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}$,
$g_{21}'(x) = \frac{2}{1+4x^2}$.

Cvičenie 8

$h_1'(x) = x^{1-x}\left(-\ln x + \frac{1-x}{x}\right)$, $\quad$ $h_2'(x) = x^{\sin x}\left(\cos x\ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$,
$h_3'(x) = 0$, $\quad$ $h_4'(x) = (\sin x)^{\cos x}\left(-\sin x\ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right)$,
$h_5(x) = x^{\arcsin x}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{x}\right)$, $\quad$ $h_6'(x) = x^{x^2}(2x\ln x + x)$,
$h_7'(x) = x^{e^x}\left(e^x\ln x + \frac{e^x}{x}\right)$, $\quad$ $h_8'(x) = (x^2+3)^{2x}\left(2\ln(x^2+3) + \frac{4x^2}{x^2+3}\right)$,
$h_9'(x) = \left(\frac{2}{x}\right)^x(\ln 2 - \ln x - 1)$.

Cvičenie 9

$s_1'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\quad$ $s_2'(x) = 3\cos x - 3\cos(3x)$,
$s_3'(x) = e^{x^2}(1+2x^2)$, $\quad$ $s_4'(x) = \frac{1}{1+x^2}$,
$s_5'(x) = 5e^{5x} + 5x^4e^{x^5}$, $\quad$ $s_6'(x) = \operatorname{cotg} x$ pre $x \in (2k\pi,\ (2k+1)\pi)$,
$s_7'(x) = 0$ pre $x \notin \left\{k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$, $\quad$ $s_8'(x) = \frac{-1}{(x+5)\ln(x+5)}$,
$s_9'(x) = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$, $\quad$ $s_{10}'(x) = 4\frac{\ln^3 x}{x}$,
$s_{11}'(x) = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$, $\quad$ $s_{12}'(x) = e^{\frac{x}{\ln x}}\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$,
$s_{13}'(x) = \frac{-1}{(1+x^2)\operatorname{arccotg} x}$, $\quad$ $s_{14}'(x) = \frac{-1}{\sin x}$ pre $x \in ((2k+1)\pi,\ 2k\pi)$,
$s_{15}'(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln(x^2)}}$ pre $x \neq 0$, $\quad$ $s_{16}'(x) = (\ln x)^x\left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}\right)$,
$s_{17}'(x) = \frac{-1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$, $\quad$ $s_{18}'(x) = \frac{\operatorname{tg} e^x + \frac{xe^x}{\cos^2(e^x)}}{\operatorname{tg}^2(e^x)}$,
$s_{19}'(x) = \frac{3\operatorname{arctg}^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(1+x)}$, $\quad$ $s_{20}'(x) = \frac{-4}{\sqrt{1-16x^2}}$,
$s_{21}'(x) = e^{\sin x}\cos x$.

Cvičenie 10

Funkcia f_1: $T = (5, \sqrt{5})$, $\quad t:\ y - \sqrt{5} = \frac{1}{2\sqrt{5}}(x-5)$, $\quad n:\ y - \sqrt{5} = -2\sqrt{5}(x-5)$.
Funkcia f_2: $T = (0, 0)$, $\quad t:\ y = x$, $\quad n:\ y = -x$.
Funkcia f_3: $T = (0, 1)$, $\quad t:\ y - 1 = -x$, $\quad n:\ y - 1 = x$.
Funkcia f_4: $T = (1, 3)$, $\quad t:\ y - 3 = 7(x-1)$, $\quad n:\ y - 3 = -\frac{1}{7}(x-1)$.

Funkcia f_5: $T=\left(\frac{\pi}{2},\, 0\right)$, $t: y=0$, $n:\ x=\frac{\pi}{2}$.
Funkcia f_6: $T=(0,0)$, $t:\ y=x$, $n:\ y=-x$.
Funkcia f_7: $T=\left(3,\, \frac{2}{3}\right)$, $t:\ y-\frac{2}{3}=\frac{5}{108}(x-3)$, $n:\ y-\frac{2}{3}=-\frac{108}{5}(x-3)$.
Funkcia f_8: $T=(3,4)$, $t:\ y-4=-\frac{4}{3}(x-3)$, $n:\ y-4=\frac{3}{4}(x-3)$.

Cvičenie 11

Funkcia f_1: $\begin{cases} t_1:\ y+4=5(x+5) \\ t_2:\ y-6=5(x+7) \end{cases}$, $\begin{matrix} n_1:\ y+4=-\frac{1}{5}(x+5) \\ n_2:\ y-6=-\frac{1}{5}(x+7) \end{matrix}$.

Funkcia f_2: $\begin{cases} t_1:\ y=x-1 \\ t_2:\ y=x-3 \end{cases}$, $\begin{matrix} n_1:\ y=-x+3 \\ n_2:\ y=-x+3 \end{matrix}$.

Funkcia f_3: $t:\ y-\frac{25}{4}=3\left(x-\frac{5}{2}\right)$, $n:\ y-\frac{25}{4}=-\frac{1}{3}\left(x-\frac{5}{2}\right)$.
Funkcia f_4: $t:\ y=2x-1+\ln 2$, $n:\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+\ln 2$.
Funkcia f_5: $t:\ y=2x$, $n:\ y=-\frac{1}{2}x$.
Funkcia f_6: $t:\ y=x+1$, $n:\ y=-x+1$.

Cvičenie 12

Funkcia f_1: $t:\ y=-x-e^{-2}$, $n:\ y=x-3e^{-2}$.
Funkcia f_2: $t:\ y-\frac{51}{4}=2\left(x-\frac{5}{2}\right)$, $n:\ y-\frac{51}{4}=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{5}{2}\right)$.

Funkcia f_3: $\begin{cases} t_1:\ y-2=-\frac{1}{2}(x-3) \\ t_2:\ y=-\frac{1}{2}(x+1) \end{cases}$, $\begin{matrix} n_1:\ y-2=2(x-3) \\ n_2:\ y=2(x+1) \end{matrix}$.

Cvičenie 13

Funkcia f_1: $t:\ y=1$. Funkcia f_2: $t:\ y=e^{-1}$.

Funkcia f_3: $\begin{cases} t_1:\ y=\frac{2-\pi}{4} \\ t_2:\ y=\frac{\pi-2}{4} \end{cases}$. Funkcia f_4: $t:\ y=-e^{-1}$.

Funkcia f_5: $\begin{cases} t_1:\ y=2 \\ t_2:\ y=-2 \end{cases}$. Funkcia f_4: $\begin{cases} t_1:\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}} \\ t_2:\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$.

Cvičenie 14

Funkcia f_1: $D(f_1)=(-1,1)$, je rýdzo rastúca, lokálne extrémy nemá, na $(-1,0)$ je konkávna, na int. $(0,1)$ je konvexná, Inflexný bod je $I=(0,0)$.
Funkcia f_2: $D(f_2)=\mathbb{R}$, na int. $(-\infty,0)$ je rýdzo rastúca, na int. $(0,\infty)$ je rýdzo klesajúca, v bode $M=(0,1)$ má lokálne maximum. Na int. $\left(-\infty,\, -\frac{1}{2}\right)$ je konvexná, na int. $\left(-\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}\right)$ je konkávna, na int. $\left(\frac{1}{2},\, \infty\right)$ je konvexná. Inflexné body má $I_1=\left(-\frac{1}{2},\, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ a $I_2=\left(\frac{1}{2},\, e^{-\frac{1}{2}}\right)$.
Funkcia f_3: $D(f_3)=\mathbb{R}$, na int. $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ je rýdzo klesajúca, na int. $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ je rýdzo rastúca, na int. $\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\, \infty\right)$ je rýdzo klesajúca. Lokálne maximum má v bode $M=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\, \frac{1}{\sqrt{6}}e^{-\frac{1}{2}}\right)$, lokálne minimum má v bode $m=\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\, -\frac{1}{\sqrt{6}}e^{-\frac{1}{2}}\right)$. Na int. $\left(-\infty,-\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$ je konkávna, na int. $\left(-\frac{1}{3\sqrt{2}},\, 0\right)$ je konvexná, na int. $\left(0,\, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$ je konkávna, na int. $\left(\frac{1}{3\sqrt{2}},\, \infty\right)$

je konvexná. Inflexné body má $I_1 = \left(-\frac{1}{3\sqrt{2}},\, -\frac{1}{3\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{6}}\right)$ a $I_2 = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}},\, \frac{1}{3\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{6}}\right)$.
Funkcia f_4: $D(f_4) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, na int. $(-\infty,\, 0)$ aj na int. $(0,\, \infty)$ je rýdzo klesajúca, lokálne extrémy nemá. Na int. $\left(-\infty,\, -\frac{1}{2}\right)$ je konkávna, na int. $\left(-\frac{1}{2},\, 0\right)$ je konxexná, na int. $(0,\, \infty)$ je konvexná. Inflexný bod má $I = \left(-\frac{1}{2},\, e^{-2}\right)$.
Funkcia f_5: $D(f_5) = (-3, 3)$, na int. $(-3,\, 0)$ je rýdzo rastúca, na int. $(0, 3)$ je rýdzo klesajúca, v bode $M = (0, \ln 9)$ má lokálne maximum. Je konkávna, inflexné body nemá.
Funkcia f_6: $D(f_6) = [0, 2\pi]$, na int. $[0, \pi)$ je rýdzo rastúca, na int. $[(\pi, 2\pi]$ je rýdzo klesajúca, v bode (π, π) má lokálne maximum. Je kokávna, inflexné body nemá. (Podľa poznámky 2.10 je na int. $(0, \pi)$ aj na $(\pi,\, 2\pi)$ konvexná aj konkávna.)
Funkcia f_7: $D(f_7) = \mathbb{R}$, na int. $(-\infty,\, -2)$ je rýdzo klesajúca, na int. $(-2,\, \infty)$ je rýdzo rastúca, v bode $m = (-2, 0)$ má lokálne minimum. Na int. $(-\infty, -3)$ je konkávna, na int. $(-3, -1)$ je konvexná, na int. $(-1, \infty)$ je konkávna. Inflexné body má $I_1 = (-3, \ln 2)$ a $I_2 = (-1, \ln 2)$.
Funkcia f_8: $D(f_8) = \mathbb{R}$, je rýdzo rastúca, lokálne extrémy nemá. Na int. $(-\infty,\, 0)$ je konvexná, na int. $(0,\, \infty)$ je konkávna. Inflexný bod má $(0,\, 0)$.
Funkcia f_9: $D(f_9) = (0, \infty)$, na int. $(0,\, e^{-1})$ je rýdzo klesajúca, na int. $(e^{-1},\, \infty)$ je rýdzo rastúca, v bode $m = (e^{-1},\, -e^{-1})$ má lokálne minimum. Je konvexná, nemá inflexné body.
Funkcia f_{10}: $D(f_{10}) = (0,\, \infty)$, na int. $(0,\, e)$ je rýdzo rastúca, na int. $(e,\, \infty)$ je rýdzo klesajúca, v bode $(e,\, e^{-1})$ má lokálne maximum. Na int. $\left(0,\, e^{\frac{3}{2}}\right)$ je konkávna, na int. $\left(e^{\frac{3}{2}},\, \infty\right)$ je konvexná. Inflexný bod má $I = \left(e^{\frac{3}{2}},\, \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$.
Funkcia f_{11}: $D(f_{11}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, na int.v $(-\infty,\, 0)$ a na $\left(0,\, \frac{1}{2}\right)$ je rýdzo klesajúca, na int. $\left(\frac{1}{2},\, \infty\right)$ je rýdzo rastúca, v bode $m = \left(\frac{1}{2},\, \frac{1}{4}e^2\right)$ má lokálne minimum. Na int. $(-\infty,\, 0)$ a na int. $(0,\, \infty)$ je konvexná. Inflexné body nemá.
Funkcia f_{12}: $D(f_{12}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, na int. $(-\infty,\, 0)$ a na int. $(0,\, \infty)$ je rýdzo klesajúca, lokálne extrémy nemá. Na int. $(-\infty,\, 0)$ je konkávna, na int. $(0,\, \infty)$ je konvexná. Inflexné body nemá.
Funkcia f_{13}: $D(f_{13}) = \mathbb{R}$, na int. $(-\infty,\, 0)$ je rýdzo klesajúca, na int. $(0,\, \infty)$ je rýdzo rastúca, v bode $m = (0,\, 0)$ má lokálne minimum. Je konvexná, inflexné body nemá.
Funkcia f_{14}: $D(f_{14}) = \mathbb{R}$, na int. $(-\infty,\, -\sqrt{3})$ je rýdzo rastúca, na int. $(-\sqrt{3},\, \sqrt{3})$ je rýdzo klesajúca, na int. $(\sqrt{3},\, \infty)$ je rýdzo rastúca, v bode $M = \left(-\sqrt{3},\, \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right)$ je lokálne maximum a v bode $m = \left(\sqrt{3},\, \sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi\right)$ je lokálne minimum. Na int. $(-\infty,\, 0)$ je konkávna, na int. $(0,\, \infty)$ je konvexná. Inflexný bod má $I = (0, 0)$.
Funkcia f_{15}: $D(f_{15}) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$. Na int. $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi,\, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ je rýdzo rastúca, lokálne extrémy nemá. Je konvexná aj konkávna na intervaloch $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi,\, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$. Inflexné body nemá.
Funkcia f_{16}: $D(f_{16}) = (-\infty,\, 0]$, funkcia je rýdzo rastúca, najväčšia hodnota je v bode $M = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, lokálne minimum nemá. Je konvexná, inflexné body nemá.
Funkcia f_{17}: $D(f_{17}) = (-\infty,\, -1] \cup [1,\, \infty)$, je rýdzo klesajúca na int. $(-\infty,\, -1]$ aj na int. $[1,\, \infty)$, najmenšiu hodnotu má v bode $m = \left(-1,\, -\frac{\pi}{2}\right)$, najväčšiu hodnotu má v bode

$M = \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$. Na int. $(-\infty, -1]$ je konkávna, na int. $[1, \infty)$ je konvexná. Inflexné body nemá.

Funkcia f_{18}: $D(f_{18}) = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} (2k\pi, (2k+1)\pi)$, na int. $\left(2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ je rýdzo klesajúca, na int. $\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}, (2k+1)\pi\right)$ je rýdzo rastúca, v bodoch $m_k = \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}, 0\right)$ má lokálne minimá. Funkcia je konvexná na int. $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, inflexné body nemá.

Cvičenie 15 Strana vystrihnutého štvorca má mať 4 cm.

Cvičenie 16 Drôt treba rozdeliť tak, aby strana štvorca mala dĺžku $\frac{10}{4+\pi}$ cm.

Cvičenie 17 Optimálna šírka trámu je $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$ a optimálna výška je $h = \sqrt{\frac{2}{3}}d$.

Cvičenie 18 Základňa trojuholníka ma mať dĺžku $\sqrt{3}\,r$ a výška má byť $\frac{3}{2}\,r$.

Cvičenie 19 Výška kužeľa má byť $\frac{5}{3}\,r$ a polomer podstavy $\frac{\sqrt{5}}{3}\,r$.

Cvičenie 20 Polomer vpísaného valca musí byť $\frac{2}{3}\,r$.

Cvičenie 21 K bodu A je najbližšie bod $(2, 3)$.

Cvičenie 22 Polomer valca musí byť $r = 3$ a výška $v = 6$.

Cvičenie 23 Musí doplávať do miesta, ktoré je od bodu C vzdialené o $\sqrt{3}$ km.

Cvičenie 24 Optimálna rýchlosť lode je $v = 6\sqrt[3]{6}\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

Cvičenie 25 $\ln(1,1) \doteq 0,95$. Na odhad s chybou $\varepsilon \leq 0,001$ stačí zvoliť Taylorov rozvoj druhého stupňa.

Cvičenie 26 $\operatorname{arctg}(0,2) \doteq 0,1973$, pre chybu odhadu platí $\varepsilon \leq 6,4 \cdot 10^{-5}$.

Cvičenie 27
$T_4\left(\sin 3x, \frac{\pi}{2}, x\right) = -1 + \frac{9}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{27}{8}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4$,
$T_3\left(\operatorname{tg} 2x, 0, x\right) = 2x + \frac{8}{3}x^3$,
$T_4(e^{2x}, 0, x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4$,
$T_4(\sinh, 0, x) = x + \frac{1}{6}x^3$,
$T_5(\ln(x+3), -2, x) = x + 2 - \frac{1}{2}(x+2)^2 + \frac{1}{3}(x+2)^3 - \frac{1}{4}(x+2)^4 + \frac{1}{5}(x+2)^5$.

Cvičenie 28

Funkcia f_1: $D(f_1) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, asymptota bez smernice: $x = 1$, asymptota so smernicou v $\pm\infty$: $y = -1$.

Funkcia f_2: $D(f_2) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, asymptoty bez smernice: $x = -1$, $x + 1$, asymptota so smernicou v $\pm\infty$: $y = x$.

Funkcia f_3: $D(f_3) = (0, \infty)$, asymptota bez smernice: $x = 0$, asymtota so smernicou v ∞: $y = 0$.

Funkcia f_4: $D(f_4) = (-3, 3)$, asymptoty bez smernice: $x = -3$, $x = 3$, asymptoty so smernicou neexistujú.

Funkcia f_5: $D(f_5) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, asymptoty bez smernice neexistujú, asymptota so smernicou v $\pm\infty$: $y = 0$.

Funkcia f_6: $D(f_6) = (-\infty, 0]$, asymptoty bez smernice neexistujú, asymptota so smernicou v $-\infty$: $y = -\frac{\pi}{2}$.

Funkcia f_7: $D(f_7) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, asymptota bez smernice: $x = 0$, asymptoty so smernicou neexistujú.

Funkcia f_8: $D(f_8) = (0, \infty)$, asymptoty neexistujú.

Funkcia f_9: $D(f_9) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, asymptota bez smernice: $x = 0$, asymptoty so smernicou v $\pm\infty$: $y = x + 1$.

Kapitola 3

Cvičenie 1

(a) $-\frac{1}{15}\cos(5x^3)$, **(b)** $\frac{1}{5}e^{5x}$, **(c)** substitúcia $t = 3^x$, následne $z = 1 - t^2$, výsledok: $\frac{1}{\ln 3}\arcsin 3^x$, **(d)** $\frac{-1}{6(2x+3)^4}$, **(e)** $\frac{4}{9}\sqrt[8]{(2x+7)^9}$, **(f)** $-\frac{1}{4}\sqrt[3]{(10-x^6)^2}$,
(g) substitúcia $t = x^3$, výsledok: $\frac{1}{3}\operatorname{arctg} x^3$, **(h)** $\frac{1}{5}\ln^5 x$, **(i)** $\ln|\sin(e^x)|$,
(j) výraz rozšírte s $\frac{\sin x}{\sin x}$, následne substitúcia $t = \cos x$, výsledok: $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)$,
(k) $\frac{1}{6}\ln\left(\frac{1-\cos x^3}{1+\cos x^3}\right)$, **(l)** $\frac{1}{2}\ln|\sin(2x+1)|$, **(m)** $\operatorname{tg}(x^3-1)$, **(n)** $\frac{1}{2}\ln|\cos(x^2-1)|$,
(o) $\frac{1}{2}\ln^2(\operatorname{arctg} x)$, **(p)** $-e^{\frac{1}{x}}$, **(q)** $\frac{1}{2}(3+x^2)(\ln(3+x^2)-1)$, **(r)** $\frac{1}{2}\sin^2 x$, **(s)** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x$,
(t) $\frac{2}{3\sqrt{\cos^3 x}}$, **(u)** $\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin x}{5}\right)$.

Cvičenie 2

(a) $2x(\ln x - 1)$, **(b)** $x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$, **(c)** $\frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)$,
(d) $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}$, **(e)** $\frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2}\right)$, **(f)** $x \cdot \ln(1+x^2) - 2x + 2\operatorname{arctg} x$,
(g) $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)$, **(h)** $\frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x))$, **(i)** $\ln x(\ln(\ln x) - 1)$,
(j) $\frac{1}{5}e^x\cos 2x + \frac{2}{5}e^x\sin 2x$, **(k)** $x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2}$, **(l)** $\frac{3}{10}\sin x\sin 3x + \frac{1}{10}\cos x\cos 3x$,
(m) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \frac{x}{3} + \frac{\ln(1+x)}{3}$, **(n)** $\frac{1}{2}\cosh x\sinh x - \frac{x}{2}$,
(o) $\frac{3}{5}\cosh 3x\cosh 2x - \frac{2}{5}\sinh 3x\sinh 2x$.

Cvičenie 3
(a) $\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-3}{x-\frac{2}{3}}\right|$, **(b)** $\frac{1}{x}+\ln\left|1-\frac{1}{x}\right|$, **(c)** $4\ln|x-2|-6\ln|x+2|+5\ln|x-5|$,
(d) $\frac{11}{26}\ln|x+2|+\frac{15}{52}\ln(x^2-6x+10)+\frac{29}{26}\operatorname{arctg}(x-3)$, **(e)** $\frac{-1}{2(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}+2\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|$,
(f) $\frac{1}{11}\ln\left|\frac{x-\frac{3}{2}}{x+4}\right|$, **(g)** $\frac{x^2}{2}+x-\ln|x-1|+\frac{1}{3}\ln\left|x-\frac{1}{3}\right|-\frac{2}{3}\ln\left|x+\frac{2}{3}\right|$,
(h) $2x+2\ln|x-1|+\ln|x-2|-3\ln|x-5|$, **(i)** $\frac{1}{2}\ln|x^2+2x|-\ln|1+x|$, **(j)** $2\ln\left|\frac{x+2}{x+1}\right|-\frac{3}{x+2}$,
(k) $\ln|x-3|-\frac{1}{4}\ln(1+4x^2)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2x$, **(l)** $x+5\ln|x|-3\operatorname{arctg}x$.

Cvičenie 4
(a) $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\cos 2x$, **(b)** $x-2\sqrt{x}+2\ln(\sqrt{x}+1)$, **(c)** $\ln|\sin x|$, **(d)** $-\frac{1}{6}\cos^6 x$,
(e) $-\operatorname{cotg}x-x$, **(f)** $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x$, **(g)** $\ln(\cosh x)$, **(h)** $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$, **(i)** $2e^{\sqrt{x}}$,
(j) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{e^x}{2}\right)$, **(k)** $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)$, **(l)** $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)-\ln|\sin x|$, **(m)** $\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}$,
(n) $\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}x-\frac{x^2}{6}+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)$, **(o)** $2\sqrt{x}(\ln|x|-2)$, **(p)** $\frac{1}{5}\ln^5 x$, **(q)** $-e^{\cos x}$,
(r) $\sin(\ln x)$.

Cvičenie 5
(a) $\sqrt{2}-1$, **(b)** $\frac{e^2-1}{e}$, **c)** $\frac{1}{5}e^5+\frac{3}{4}e^4+e^3+\frac{1}{2}e^2-\frac{49}{20}$, **(d)** $e-\sqrt{e}$, **(e)** $\frac{3}{2}$, **(f)** $\frac{\pi}{6}$, **(g)** 0,
(h) $\frac{\pi}{2}$, **(i)** $\frac{3}{4}\ln 2-\frac{1}{4}$, **(j)** $\ln 2$, **(k)** $\ln 3$, **(l)** $\frac{4\sqrt{2}-2}{3}$, **(m)** $2\ln 2-1$, **(n)** $4-2\operatorname{arctg}2$,
(o) π, **(p)** $\frac{2}{5}e^\pi+\frac{1}{5}$, **(q)** $4-\pi$, **(r)** $\frac{1}{3}$, **(s)** $\left(\frac{9}{2}-\frac{27}{64}\right)\sqrt[3]{\frac{3}{4}}-\frac{27}{8}$, **(t)** $\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$,
(u) $\ln\frac{4}{3}$, **(v)** $1-\frac{2}{e}$, **(w)** 1, **(x)** 1, **(y)** $2\ln 2-\frac{3}{4}$, **(z)** $\frac{e^2+3}{8}$.

Cvičenie 6
(a) 3, **(b)** $\frac{9}{2}$, **(c)** $\frac{9}{2}$, **(d)** $\frac{1}{3}$, **(d)** 125, **(e)** $\frac{343}{3}$, **(f)** $\frac{16}{3}$, **(g)** $\frac{2-\sqrt{2}}{3}$, **(h)** 4,
(i) $\frac{5}{6}$, **(j)** $\frac{15}{2}-8\ln 2$, **(k)** $\frac{1}{2}$, **(l)** $\frac{1}{4}-\frac{1}{2e}$, **(m)** $3-e$, **(n)** $\sinh 1=\frac{e^2-1}{2e}$,
(o) $\frac{3}{2}\pi\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)-\frac{9}{2}(\sqrt{3}-1)$, **(p)** $\frac{\pi}{2}$, **(q)** $\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)$, **(r)** $P=\frac{9}{4}$, rovnice dotyčníc sú $t_A:\ y=-4x+7$, $t_B:\ y=2x-8$, **(s)** 474, **(t)** $\frac{3}{4}$, **(u)** $8\ln 2+\frac{16}{3}(1+\sqrt{8})$.

Cvičenie 7
(a) $\frac{72}{3}\sqrt{3}$, **(b)** 1, **(c)** $3a^2\pi$, **(d)** $\frac{3}{8}a^2\pi$.

Cvičenie 8 Objem kužeľa je 6π cm.

Cvičenie 9 Objem gule je 16π.

Cvičenie 10
(a) $\frac{3}{10}\pi$, **(b)** $b^2\left(\frac{k^3}{3a^2}-k+\frac{2}{3}a\right)$, **(c)** $\frac{1}{12}\pi^2$, **(d)** $\frac{\pi}{8}$, **(e)** $\frac{23}{40}\pi$, **(f)** $\frac{3}{4}\pi$, **(g)** $\frac{2}{3}\pi\sqrt{2}$,
(h) $5\pi^2$.

Cvičenie 11
(a) $\frac{512}{15}\pi$, **(b)** $\frac{\pi}{12}$, **(c)** $\pi\left(a\ln^2 a-2a\ln a+2a-2\right)$.

Cvičenie 12
(a) $\frac{128}{3}\pi$, **(b)** π, **(c)** $\pi\left(\frac{3}{2}\pi^2 - \frac{8}{3}\right)$.

Cvičenie 13
(a) $\sinh 1 = \frac{e^2-1}{2e}$, **(b)** $1 + \frac{1}{2}\ln\frac{6}{5}$.

Cvičenie 14
(a) $2\pi^2 a$, **(b)** π, **(c)** $\frac{\pi^3}{3}$.

Cvičenie 15 $4\pi\, r^2$

Cvičenie 16 **(a)** $\frac{196}{729}\pi = \frac{2(5^3-3^3)}{3^6}\pi$, **(b)** $\pi(2+\ln(e^2+2)-\ln 3)$ (pmôcka: použite substitúciu $t^2 = e^{2x}+1$), **(c)** $\frac{56}{3}\pi\, a^2$.

Cvičenie 17
(a) $\frac{64}{3}\pi$, **(b)** $\frac{2\sqrt{5}}{17}\pi(e^{2\pi}-4)$, **(c)** $4\pi^2 a^2$.

Cvičenie 18 Hmotnosť tyče je $m = \frac{4}{3}\,\mathrm{kg}$, statický moment $M = \frac{4}{3}\,\mathrm{kg{\cdot}m}$ a jej ťažisko má súradnicu $T = 1\,\mathrm{m}$.

Cvičenie 19 Hmotnosť tyče je $(1-e^{-1})\,\mathrm{kg}$ a jej ťažisko má súradnicu $T = \frac{e-2}{e-1}\,\mathrm{m}$.

Kapitola 4

Cvičenie 1
(a) $y = 5x^2 + c$, **(b)** $y = \frac{c}{x+c}$, **(c)** $y = \frac{3-ce^{2x}}{1-ce^{2x}}$, **(d)** $y = ce^{-x^{-3}}$, **(e)** $y^2 = cx^2 - 1$, **(f)** $y = \frac{ce^{x^2+x}}{1-ce^{x^2+x}}$.

Cvičenie 2
(a) $y = -5+ce^{\frac{x^2}{2}-2x}$, **(b)** $y = \frac{1}{3}x-\frac{1}{9}+ce^{-3x}$, **(c)** $y = \frac{1}{4}e^{2x}+ce^{-2x}$, **(d)** $y = 1+ce^{-\frac{x^2}{2}}$, **(e)** $y = -x-\frac{1}{2}+cx^2$, **(f)** $y = \frac{x^3}{4}+\frac{c}{x}$, **(g)** $y = \frac{c}{x}-\frac{\ln x}{x}$.

Cvičenie 3 Implicitné tvary všeobecných riešení cvičení **(a)**–**(d)** sú
(a) $c = \ln|y+x| + \frac{x}{y+x}$, **(b)** $y^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{x^2}-x^2\right)$,
(c) $c - \frac{1}{2}\ln x = \frac{1}{4}\ln\left(2y^2-yx+x^2\right) + \frac{4}{\sqrt{7}}\ \mathrm{arctg}\,\frac{4y-x}{x\sqrt{7}}$, **(d)** $y - x\ln|y| = cx$.

Explicitné tvary všeobecných riešení cvičení **(e)**–**(f)** sú
(e) $y = \frac{1}{x+1+ce^x}$, **(f)** $y = \frac{1}{e^x\sqrt{1+e^{2x}}}$, **(g)** $y = \left(\frac{1}{2}+ce^{-\frac{1}{3}x^3}\right)^2$, **(h)** $y = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}e^{-x}+ce^{\frac{2}{3}x}\right)^3}$.

Cvičenie 4

(a) $x - 3\ln|3+x| + c = 5\ln|y| + y$, (b) $x + \ln|x| + c = y + \operatorname{arctg} y$,
(c) $y = c\sin x - a$ (d) $\frac{1}{\cos y} = \ln(c\cos x)$,
(e) $y = -\ln(1 - ce^x)$, (f) $y = -\ln(c - e^x)$,
(g) $y^2 = c + 2\ln(1 + e^x)$, (h) $y = 3 + c\sqrt{x^2 - 1}$,
(i) $y = x + x^3 + c(1 + x^2)$, (j) $y = e^{x^2} + ce^{\frac{x^2}{2}}$,
(k) $y = -\ln x + c\ln^2 x$, (l) $y = -\cos x + \frac{\sin x}{x+1} + \frac{c}{x+1}$,
(m) $y = x^2\sin x + cx^2$, (n) $y = 1 + c\cos^2 x$.

Cvičenie 5

(a) $y = \operatorname{arctg} x - 1 + 4e^{-\operatorname{arctg} x}$, (b) $y = -e^{2-x} - \frac{e^{2-x}}{x+1} + \frac{7}{3}$,
(c) $2\ln x + x - 2 - e = 5\ln y + y$, (d) $y = \frac{x^3}{3}e^{\frac{x^2}{2}} + \frac{2}{3}e^{\frac{x^2}{2}}$.

Cvičenie 6

(a) $y_v = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} - xe^{-x}$, (b) $y_v = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + 2xe^{3x}$,
(c) $y_v = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + \frac{\cos 3x}{6} - \frac{\sin 3x}{3}$, (d) $y_v = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + x^2 - \frac{x}{2} + 1$,
(e) $y_v = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + \frac{e^4x}{12}$, (f) $y_v = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} - e^{2x}\sin x$.

Cvičenie 7

(a) $y_v = c_1 + c_2e^{\frac{3}{5}x} + e^x$, (b) $y_v = c_1 + c_2e^{\frac{3}{5}x} + x^2 - 5x$,
(c) $y_v = c_1 + c_2e^{\frac{3}{5}x} + \frac{1}{2}\cos x - \frac{3}{2}\sin x$ (d) $y_v = c_1 + c_2e^{\frac{3}{5}x} + xe^{\frac{3}{5}x}$,
(e) $y_v = c_1 + c_2e^{\frac{3}{5}x} + 5\cos\frac{3}{5}x$, (f) $y_v = c_1 + c_2e^{\frac{3}{5}x} + \frac{1}{2}e^{-x}(-\cos x + \sin x)$.

Cvičenie 8

(a) $y_v = c_1e^{\frac{x}{3}} + c_2xe^{\frac{x}{3}} + 2x$, (b) $y_v = c_1e^{\frac{x}{3}} + c_2xe^{\frac{x}{3}} + \frac{x^2}{6}e^{\frac{x}{3}}$,
(c) $y_v = c_1e^{\frac{x}{3}} + c_2xe^{\frac{x}{3}} - \sin\frac{x}{3}$, (d) $y_v = c_1e^{\frac{x}{3}} + c_2xe^{\frac{x}{3}} + \frac{1}{5}e^{2x}$,
(e) $y_v = c_1e^{\frac{x}{3}} + c_2xe^{\frac{x}{3}} + \frac{1}{2}(x\cos x - \sin x)$, (f) $y_v = c_1e^{\frac{x}{3}} + c_2xe^{\frac{x}{3}} + \frac{1}{16}xe^{3x}$.

Cvičenie 9

(a) $y_v = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x + 3x^2 + \frac{5}{3}x^2 - \frac{1}{3}$,
(b) $y_v = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x + \frac{1}{2}e^x - x\cdot\cos 3x$,
(c) $y_v = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x + \frac{x^2}{2}e^x$,
(d) $y_v = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x + 3x^2 + 2e^{3x}$,
(e) $y_v = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x + 3x^2 + x\left(\sin 3x - \frac{1}{3}\cos 3x\right)$,
(f) $y_v = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x + e^{3x}\cos x$.

Cvičenie 10

(a) $y_v = e^{3x}(c_1\cos x + c_2\sin x) + x - \frac{3}{4}$,
(b) $y_v = e^{3x}(c_1\cos x + c_2\sin x) + x^2e^{2x}$,
(c) $y_v = e^{3x}(c_1\cos x + c_2\sin x) + x\,e^{3x}\sin x$,
(d) $y_v = e^{3x}(c_1\cos x + c_2\sin x) + \cos x + \frac{2}{3}\sin x$,
(e) $y_v = e^{3x}(c_1\cos x + c_2\sin x) + (1 - x)\cos x$,
(f) $y_v = e^{3x}(c_1\cos x + c_2\sin x) + e^{3x} + \frac{1}{2}e^{-2x}$.

Cvičenie 11

(a) $y_v = c_1 e^{2x} + c_2 x\, e^{2x} + c_3 x^2 e^{2x} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} + 1$,
(b) $y_v = c_1 e^{2x} + c_2 x\, e^{2x} + c_3 x^2 e^{2x} + x^3 e^{2x}$,
(c) $y_v = c_1 e^{2x} + c_2 x\, e^{2x} + c_3 x^2 e^{2x} + \frac{1}{4} \cos 2x$.

Cvičenie 12

(a) $y_v = c_1 \cos\frac{x}{2} + c_2 \sin\frac{x}{2} + c_3 x \cos\frac{x}{2} + c_4 x \sin\frac{x}{2} + 16 \cos x - 48 \sin x$,
(b) $y_v = c_1 \cos\frac{x}{2} + c_2 \sin\frac{x}{2} + c_3 x \cos\frac{x}{2} + c_4 x \sin\frac{x}{2} + e^{\frac{1}{2}x} - 4\, e^{-\frac{1}{2}x}$,
(c) $y_v = c_1 \cos\frac{x}{2} + c_2 \sin\frac{x}{2} + c_3 x \cos\frac{x}{2} + c_4 x \sin\frac{x}{2} + x^2 \left(\cos\frac{x}{2} - 2 \sin\frac{x}{2}\right)$,
(d) $y_v = c_1 \cos\frac{x}{2} + c_2 \sin\frac{x}{2} + c_3 x \cos\frac{x}{2} + c_4 x \sin\frac{x}{2} + 4x^3 - 8x^2 + 16$.

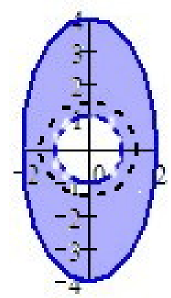
Cvičenie 13

(a) $y = \frac{7}{2} e^x - \frac{3}{2} e^{3x} + x\, e^x$, **(b)** $y = -\cos 3x + \frac{2}{3} \sin 3x + \cos(2x) - \sin x$,
(c) $y = 3e^{2x} + x^3 - 2x - 3$, **(d)** $y = e^x - 6x\, e^x + \cos x + 2 \sin x$.

Kapitola 5

Cvičenie 1

$D(f_1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \neq 9\}$,
$D(f_2) = (0, \infty) \times (4, \infty) \cup (-\infty, 0) \times (-\infty, 4)$,
$D(f_3) = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0,\ y \in \left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)\}$,
$D(f_4) = (3, \infty) \times (4, \infty) \cup (-\infty, 3) \times (-\infty, 4)$,
$D(f_6) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x + y \leq 1\}$,
$D(f_7) = \mathbb{R}^2 \setminus (\{(0, y); y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\})$,
$D(f_8) = (-\infty, 0] \times (-\infty, 0] \cup [0, \infty) \times [0, \infty)$.



Obr. 5.3. $D(f_5)$

Cvičenie 3

$\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \frac{\cos y}{y - \frac{\pi}{2}} = -1$, $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} x^y = 1$, $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} x^y = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} \lim\limits_{y \to \infty} \frac{x^2 - 2xy + 3y^3}{x + y^4} = 0$,
$\lim\limits_{y \to \infty} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 + 3y^3}{x + y^4} = \infty$, $\lim\limits_{(x,y) \to (1,1)} \frac{(x^2 - 1)e^y}{x - 1} = 2e$, $\lim\limits_{(x,y) \to (0,1)} x^y = 0$, $\lim\limits_{(x,y) \to (2,1)} x^y = 2$,
$\lim\limits_{(x,y) \to (\infty, -\infty)} \frac{x + y}{x^2 - y^2} = 0$, $\lim\limits_{(x,y) \to (0, \infty)} x \sin y = 0$.

Cvičenie 4

$f_1(0, 2) = 8,\ \tau:\ z - 8 = -6x + 12(y - 2)$, $f_2(2, 2) = \frac{\pi}{4},\ \tau:\ z - 8 = \frac{1}{4}(x - 2) - \frac{1}{4}(y - 2)$,
$f_3(5, -3) = 5,\ \tau:\ z - 5 = (x - 5) - \frac{3}{5}(y + 3)$, $f_4(3, 0) = 2,\ \tau:\ z - 2 = 0$,
$f_5(3, 0) = 4,\ \tau:\ z - 4 = 3y$, $f_6(1, 1) = 0,\ \tau:\ z = -x + y$,
$f_7(3, 3) = 1,\ \tau:\ z - 1 = x - y$, $f_8(-3, 1) = 3,\ \tau:\ z - 3 = x + 3 - (y - 1)$.

Cvičenie 5
$\nabla f_1(x,y) = \left(-\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$, z toho $x = \frac{1}{2}$, $y = 1$, $f_1\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \ln 2$, $\theta:\ z - \ln 2 = -2\left(x - \frac{1}{2}\right) + x - 1$,
$\nabla f_2(x,y) = \left((e^{x-y^2}, -2ye^{x-y^2}\right)$, z toho $x = 0, y = 0$, $f_2(0,0) = 1$, $\theta:\ z - 1 = x$,
$\nabla f_3(x,y) = (2x, 2y)$, z toho $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}$, $\theta:\ z - \frac{5}{2} = x - \frac{1}{2} + 3\left(y - \frac{3}{2}\right)$,
$\nabla f_4(x,y) = (2xy^2, 2x^2y)$, z toho $x = 1, y = 1$, $f_4(1,1) = 1$, $\theta:\ z - 1 = 2(x-1) + 2(y-1)$.

Cvičenie 6

$$\begin{aligned}
T_3(f_1, A_1, X) &= 1 + (x+y) = \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2) + \frac{1}{3!}(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3). \\
T_3(f_2, A_2, X) &= (y-1) + \frac{1}{2}(2x(y-1) - (y-1)^2) + \\
&+ \frac{1}{3!}(3x^2(y-1) - 3x(y-1)^2 + 2(y-1)^3). \\
T_3(f_3, A_3, X) &= (x-1) - (y-1) + \frac{1}{2}(-(x-1)^2 + (y-1)^2) + \\
&+ \frac{1}{3!}(2(x-1)^3 - 2(y-1)^3). \\
T_3(f_4, A_4, X) &= -x + (y-\pi) + \frac{1}{3!}(x^3 - 3x^2(y-\pi) + 3x(y-\pi)^2 - (y-\pi)^3).
\end{aligned}$$

Cvičenie 7
Pre funkciu f_1: $(0,0,0)$ je sedlový bod, $\left(\frac{1}{36}, \frac{1}{18}, \frac{5}{3888}\right)$ je lokálne maximum.
Pre funkciu f_2: $(0,0,3)$ je sedlový bod, $(24, 144, -6909)$ je lokálne minimum.
Pre funkciu f_3: $(4,4,64)$ je lokálne maximum, $(0,0,0)$, $(0,12,0)$, $(12,0,0)$ sú sedlové body.
Pre funkciu f_4: $(0,0,0)$, $(1,\sqrt{3},1)$ sú sedlové body. (Návod na overenie bodu $(0,0,0)$ – vyšetrite parciálnu funkciu $f(x,0)$.)
Pre funkciu f_5: $(0,0,0)$ je sedlový bod, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}e^{-1}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}e^{-1}\right)$ sú lokálne maximá, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}e^{-1}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}e^{-1}\right)$ sú lokálne minimá.
Pre funkciu f_6: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ je lokálne minimum, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ je lokálne maximum.

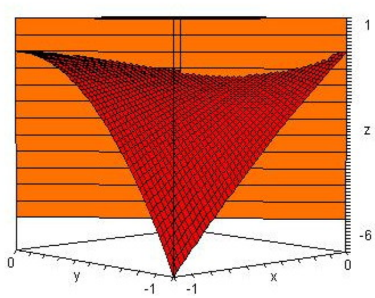
Cvičenie 8
Pre funkciu f: $\left(\frac{1}{2}, 0, 0, -\frac{1}{4}\right)$ je stacionárny bod, nie je tam extrém.
Pre funkciu g: $(0,0,0,0)$ je stacionárny bod, nie je tam extrém.

Cvičenie 9 Parciálna funkcia $f(x,x) = 2x^2$ má minimálnu hodnotu 0 a dosahuje sa v bode $(0,0)$.

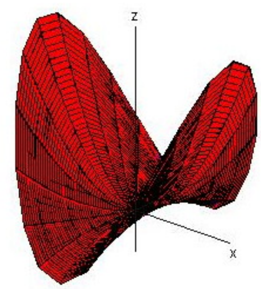
Cvičenie 10 Parciálna funkcia $f\left(x, \frac{4}{3} - x, \frac{5}{3} - x\right) = x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$ má minimálnu hodnotu $-\frac{10}{9}$ a dosahuje sa v bode $\left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, 2, \right)$.

Cvičenie 11 Parciálna funkcia $f(x,y,x-2y+1)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2xy+y^2+2y$ má minimálnu hodnotu $-\frac{1}{3}$, ktorú dosahuje v bode $(2,1,-1)$. V bode $(1,0,2)$ dosahuje hodnotu $-\frac{1}{6}$, nie je to extrém.

Cvičenie 12 $f(A)=-6$, $f(B)=f(C)=0$, $f\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)=-\frac{20}{27}$. Minimálna hodnota funkcie f v trojuholníku ABC je -6, dosahuje sa vo vrchole A, maximálna hodnota je 0, dosahuje sa vo vrcholoch B,C.



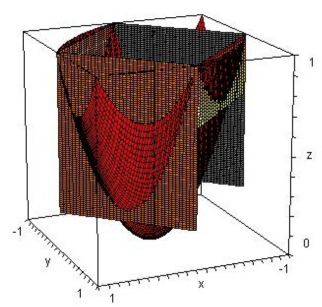
Obr. 5.4. Funkcia f z cvičenia 12



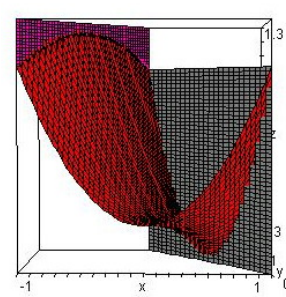
Obr. 5.5. Funkcia f z cvičenia 13

Cvičenie 13 $f(0,0)=0$, $f(2,0)=f(-2,0)=20$, $f(0,2)=f(0,-2)=-4$. Minimálna hodnota funkcie f v kruhu $x^2+y^2\leq 4$ je -4, dosahuje sa v bodoch $(0,2)$ a $(0,-2)$, maximálna hodnota je 20 a dosahuje sa v bodoch $(2,0)$ a $(-2,0)$. (Návod: použite substitúciu $y^2=4-x^2$.)

Cvičenie 14 $f(0,0)=0$, $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$, $f\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$, $f(1,0)=f(0,1)=f(-1,0)=f(0,-1)=1$. Minimálna hodnota funkcie f vo štvorci $|x|+|y|\leq 1$ 0, dosahuje sa v bode $(0,0)$. Maximálna hodnota je 1, dosahuje sa vo vrcholoch štvorca $(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$.



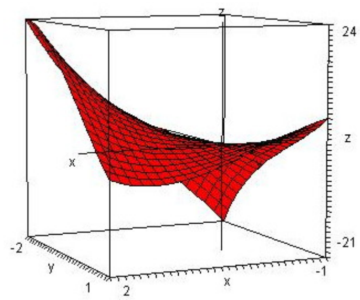
Obr. 5.6. Funkcia f z cvičenia 14



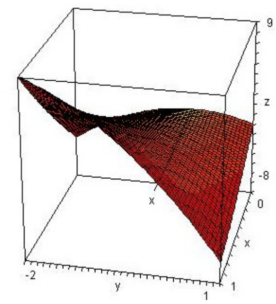
Obr. 5.7. Funkcia f z cvičenia 15

Cvičenie 15 $f(0,0)=0$, $f(1,0)=f(-1,0)=1=f(0,1)$, $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$, $f\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}$. Minimálna hodnota funkcie f v trojuholníku $|x|+y\leq 1$ je $-\frac{1}{4}$, dosahuje sa v bode $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Maximálna hodnota je $\frac{5}{4}$, dosahuje sa v bode $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Cvičenie 16 $f(0,0) = 0$, $f(\sqrt{2},1) = 1 - 4\sqrt{2} \doteq -4,657$, $f(A) = -21$, $f(B) = 6$, $f(C) = -3$, $f(D) = 24$. Minimálna hodnota funkcie f v obdĺžniku $ABCD$ je -21 a dosahuje sa vo vrchole A. Maximálna hodnota je 24 a dosahuje sa vo vrchole D.



Obr. 5.8. Funkcia f z cvičenia 16



Obr. 5.9. Funkcia f z cvičenia 17

Cvičenie 17 $f(0,0) = 0$, $f(A) = -8$, $f(B) = -1$, $f(C) = -6$, $f(D) = 9$. Minimálna hodnota funkcie f v obdĺžniku $ABCD$ je -8 a dosahuje sa vo vrchole A. Maximálna hodnota je 9 a dosahuje sa vo vrchole D.

Literatúra

[1] Birkhoff, G., Mac Lane, S.: *Prehľad modernej algebry*, Bratislava: Alfa, 1979 (preklad anglického originálu A Survay of Modern Algebra).

[2] Eliáš, J., Horváth, J., Kajan, J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky 1*, Bratislava: Alfa, 1979.

[3] Eliáš, J., Horváth, J., Kajan, J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky 2*, Bratislava: Alfa, 1986.

[4] Eliáš, J., Horváth, J., Kajan, J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky 3*, Bratislava: Alfa, 1979.

[5] Gillman, L., McDowell, R.H.: *Matematická analýza*, Praha: SNTL, 1980.

[6] Handlovičová, A., Mišík, L., Schneider, Z., Širáň, J.: *Riešené úlohy z matematiky I*, Bratislava: Vydavateľstvo STU v Bratislave, 1998.

[7] Handlovičová, A., Kálnová, A., Mišík, L., Širáň, J.: *Riešené úlohy z matematiky II*, Bratislava: Vydavateľstvo STU v Bratislave, 2000.

[8] Ivan, J.: *Matematika 1*, Bratislava: Alfa, 1983.

[9] Ivan, J.: *Matematika 2*, Bratislava: Alfa, 1989.

[10] Kluvánek, I., Mišík, L., Švec, M.: *Matematika I*, Bratislava: SNTL, 1959.

[11] Kluvánek, I., Mišík, L., Švec, M.: *Matematika II*, Bratislava: SNTL, 1963.

[12] Švec, M., Šalát, T., Neubrunn, T.: *Matematická analýza funkcií reálnej premennej*, Bratislava: Alfa, 1987.