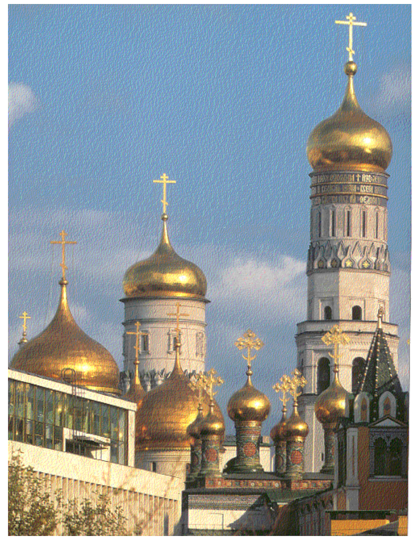
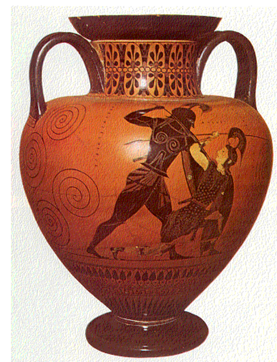
Margita Vajsáblová

Rotačné plochy





Definícia rotačných plôch a základné pojmy

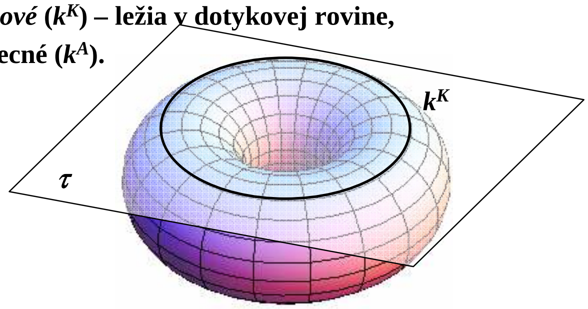
Definícia 1: **Majme os o, uhol v $\in \langle 0, 2\pi)$. Množina všetkých obrazov bodu $A \notin o$ v rotácii o všetky uhly $v \in \langle 0, 2\pi)$ je kružnica k^A, ktorá prechádza bodom A, stred má na osi o a leží v rovine kolmej na os o. *Rotačná plocha* Φ je útvar, ktorý vznikne rotáciou bodov krivky k ($k \neq o$, $k \neq k^A$) a je tvorený všetkými kružnicami k^A pre všetky body $A \in k$.**

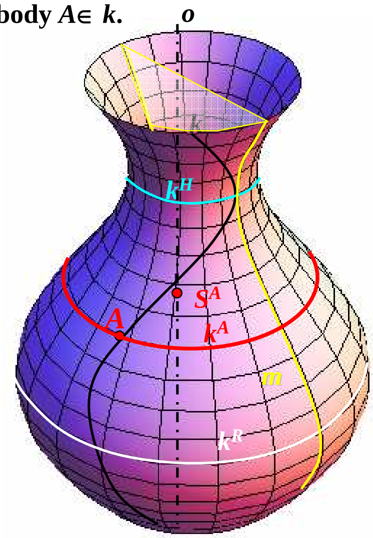
o – os rotácie,

k – určujúca krivka,

k^A – rovnobežkové kružnice:

- ***rovníkové*** **(k^R) – ich polomery tvoria lokálne maximum,**
- ***hrdlové*** **(k^H) – ich polomery tvoria lokálne minimum,**
- ***kráterové*** **(k^K) – ležia v dotykovej rovine,**
- **všeobecné (k^A).**





Definícia 2: Meridiány (poludníky) **– krivky, ktoré vzniknú rezom rotačnej plochy polrovinami, ktorých hraničnou priamkou je os rotácie.**

Vlastnosti rotačnej plochy:

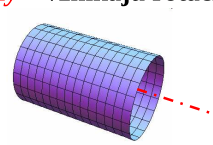
1. **Všetky meridiány jednej rotačnej plochy sú zhodné.**
2. **Rotačná plocha je súmerná podľa osi rotácie.**
3. **Rotačná plocha je súmerná podľa všetkých rovín obsahujúcich jej os.**

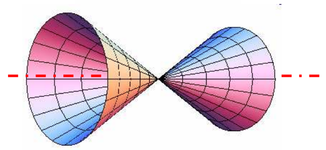
Druhy rotačných plôch

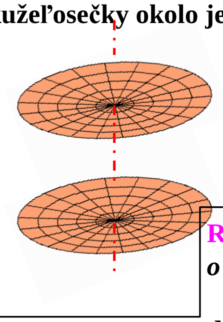
1, *Rotačné kvadratické plochy* **– vznikajú rotáciou kužeľosečky okolo jej osi.**

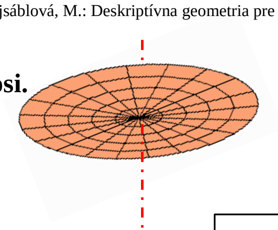
a, singulárne:

- **rotačná valcová plocha,**
- **rot. kužeľová plocha,**
- **2 rovnobežné roviny**
- **rovina.**







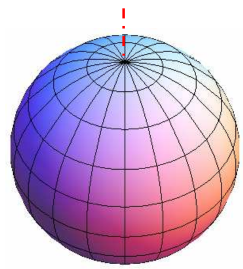


b, regulárne:

Guľová plocha:

stred *O*[0, 0, 0],

$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

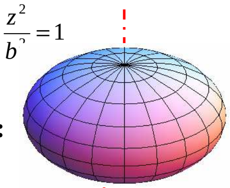


Rotačné elipsoidy:

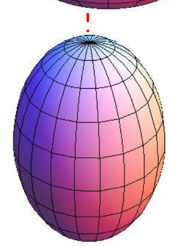
stred *O*[0, 0, 0], *o* ≡ *z*,

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

***sploštený*:**
$a > b$



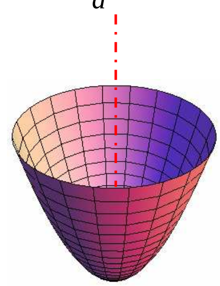
pozdĺžny:
$a < b$



Rotačný paraboloid:

***o* ≡ *z* :**

$$z=\frac{x^2+y^2}{a^2}$$

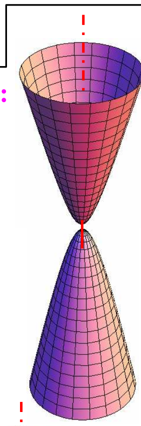


Rotačné hyperboloidy:

***o* ≡ *z*,**

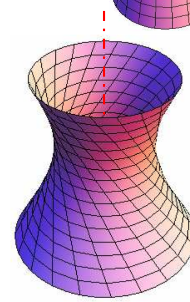
dvojdielny

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=-1$$



jednodielny:

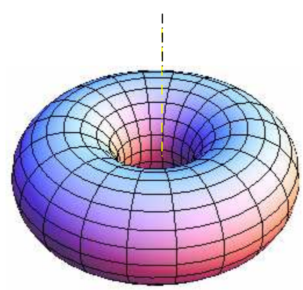
$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$$

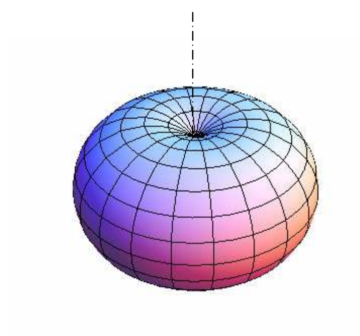


Druhy rotačných plôch

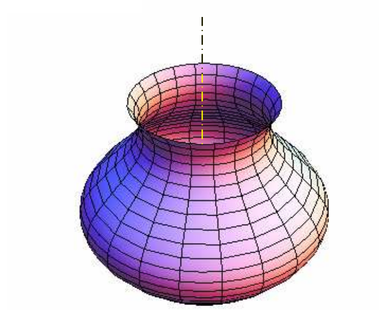
2. Anuloid (torus, spirická plocha) **– *plocha 4. stupňa,* vzniká rotáciou kružnice okolo osi, ktorá v rovine kružnice leží.**

$(x^2 + y^2 + z^2 - r^2)^2 = 4\,a^2(x^2 + y^2)$





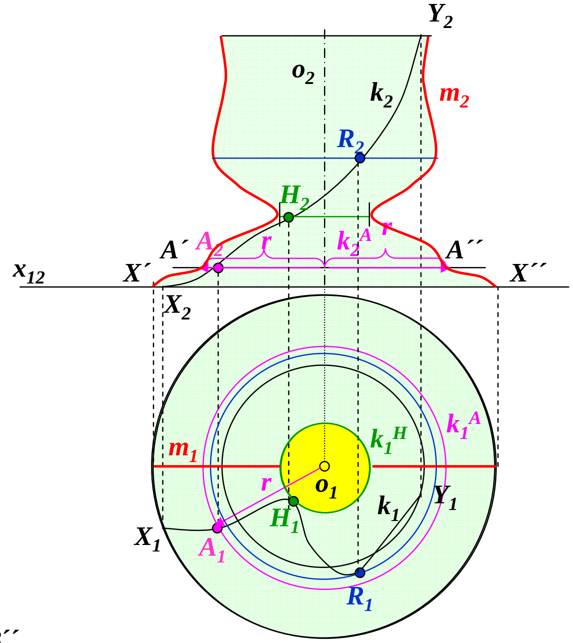
3. Všeobecné rotačné plochy:



Obraz rotačnej plochy v Mongeovej projekcii

Úloha: **Zostrojte obraz rotačnej plochy, ktorá je daná osou o$\perp\pi$ a určujúcou krivkou $k[k_1, k_2]$.**

Riešenie: **Zostrojíme niekoľko rovnobežkových kružníc, ktoré vzniknú rotáciou bodov krivky k okolo osi o. Keďže os o je kolmá na pôdorysňu π, pôdorys rovnobežkovej kružnice k^A je kružnica k_1^A so stredom na osi o_1 a polomerom $r = |A_1 o_1|$, nárys je úsečka s dĺžkou 2r súmerná podľa osi o_2.**



1. Zvolíme ľubovoľný $A \in k$, $[A_1 \in k_1, A_2 \in k_2]$.

2. $k_1^A = [S_1 = o_1,\ r = |A_1 o_1|]$.

3. $k_2^A = A´A´´$- úsečka, $A_2 \in k_2^A$, $k_2^A \perp o_2$, $S_2 \in o_2$, $|S_2 A´| = |S_2 A´´| = r$.

4. Zostrojíme rovnobežkové kružnice ďalších bodov k^X, k^Y, ...

5. Ak existujú, zostrojíme hrdlovú kružnicu k^H a rovníkovú k^R.

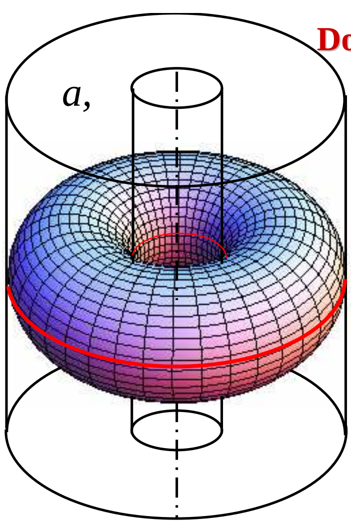
Záver: **Pôdorys rotačnej plochy je medzikružie (príp. kruh) ohraničené rovnobežkovými kružnicami s minimálnym a maximálnym polomerom.**

Obrys rotačnej plochy v náryse je m_2, čo je nárys meridiánu m, ktorý leží v rovine rovnobežnej s nárysňou:

$m_1 \parallel x_{12}$

m_2 sú krivky prechádzajúce bodmi $A´, B´, ...$ a $A´´, B´´, ...$

Dotykové roviny rotačných plôch



Dotykovú rovinu rotačnej plochy najjednoduchšie určíme pomocou dotyčnice k rovnobežkovej kružnici a dotyčnice k meridiánu.

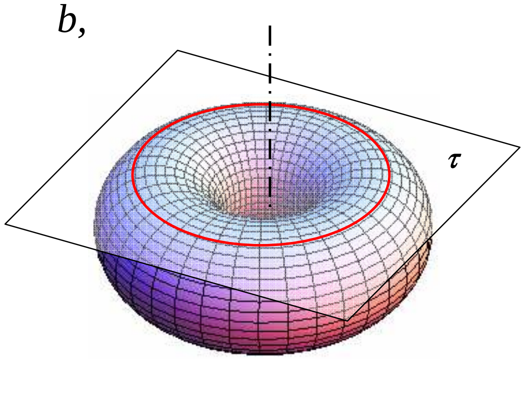
Veta: Dotyčnice k meridiánom rotačnej plochy **v bodoch tej istej rovnobežkovej kružnice tvoria:**

a) V bodoch rovníka, alebo hrdlovej kružnice tvoria rotačnú valcovú plochu, ktorej osou je os rotačnej plochy.

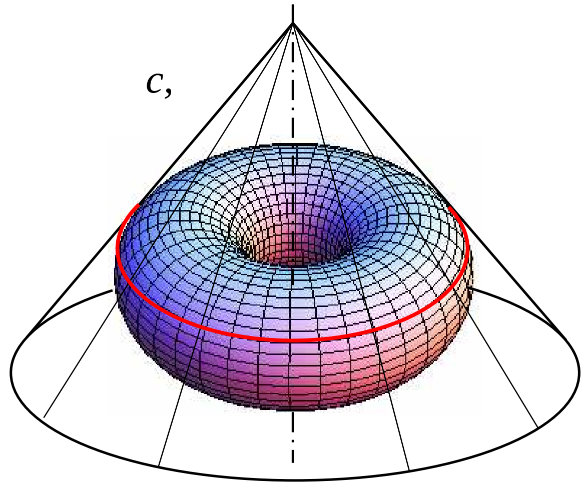
b) V bodoch kráterovej kružnice, tvoria dotykovú rovinu.

c) Ak neplatí a,b, tvoria rotačnú kužeľovú plochu, ktorej osou je os rot. plochy.

b,



c,

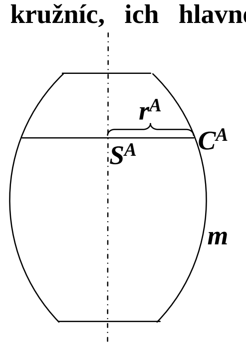


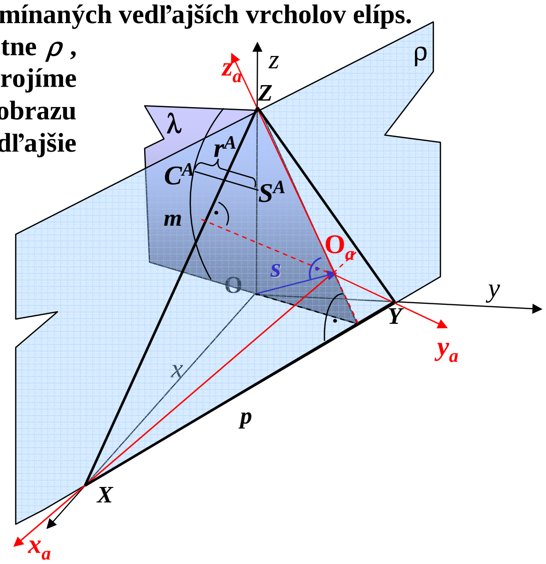
Obraz rotačnej plochy v kolmej axonometrii

Úloha: **Zostrojte obraz rotačnej plochy, ktorá je daná osou $o \equiv z$ a meridiánom m.**

Riešenie: **Zostrojíme niekoľko rovnobežkových kružníc rotačnej plochy. Keďže $o \equiv z$, rovnobežkové kružnice ležia v rovinách rovnobežných so súradnicovou rovinou $\pi(x, y)$. Ich obrazy v kolmej axonometrii sú elipsy, ktorých hlavné osi sú na hlavných priamkach, teda rovnobežné s axonometrickou stopou p roviny, dĺžky hlavných polosí sa rovnajú ich polomeru. Vedľajšie osi týchto elíps ležia na spádových priamkach rovín rovnobežných s π, ktoré ležia v premietacej rovine λ, ktorá je premietacou rovinou aj osi $o \equiv z$. Prienik premietacej roviny λ s rotačnou plochou je meridián m, ktorý je množinou spomínaných vedľajších vrcholov elíps.**

Rovinu λ sklopíme do axonometrickej priemetne ρ, pomocou sklopenej polohy meridiánu zostrojíme spätne axonometrické obrazy stredov obrazu rovnobežkových kružníc, ich hlavné a vedľajšie vrcholy.





Konštrukcia je uvedená na nasledujúcej strane.

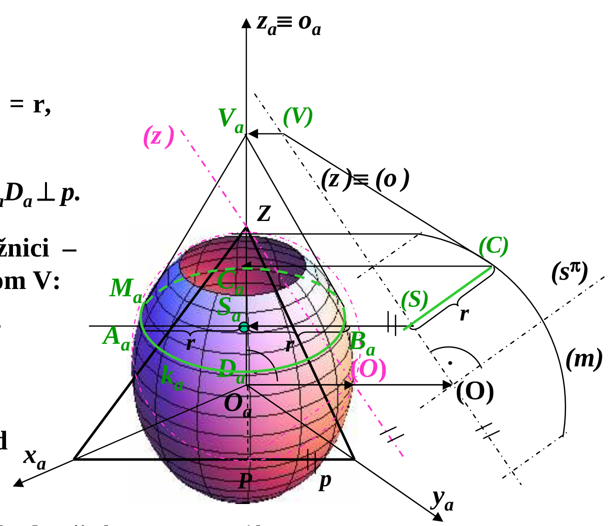
Konštrukcia obrazu rotačnej plochy v kolmej axonometrii

1. **Sklopíme premietaciu rovinu λ osi z do priemetne ρ a posunieme $(z) \equiv (o)$ v smere sklápania o ľubovoľnú dĺžku, aby sa sklopená poloha neprekrývala s obrazom rotačnej plochy.**
2. **V premietacej rovine λ leží meridián m rotačnej plochy, ktorý spája vedľajšie vrcholy rovnobežkových kružníc, zostrojíme (m).**
3. **Zostrojíme obraz ľubovoľnej rovnobežkovej kružnice k, ktorej v sklopení poznáme $(S) \in (o)$, $(C) \in (m)$, elipsu k_a:**

- **stred S_a: $(S) \in (o)$, $S_a \in z_a$, $(S)S_a \perp z_a$,**
- **hlavná os elipsy k_a : $A_aB_a \,||\, p$, $|A_aS_a| = |B_aS_a| = r$, kde $r = |(S)(C)|$,**
- **vedľajšia os elipsy k_a: $(C) \in (m)$, $(C)C_a \perp z_a$, $C_aD_a \perp p$.**

4. **Určenie bodu obrysu na rovnobežkovej kružnici – pomocou dotykovej kužeľovej plochy s vrcholom V:**

- **(V) je priesečník dotyčnice (m) v bode (C) s (o),**
- **$V_a \in z_a$, $(V)V_a \perp z_a$,**
- **z V_a zostrojíme dotyčnicu ku k_a, dotykový bod M_a je na obryse.**



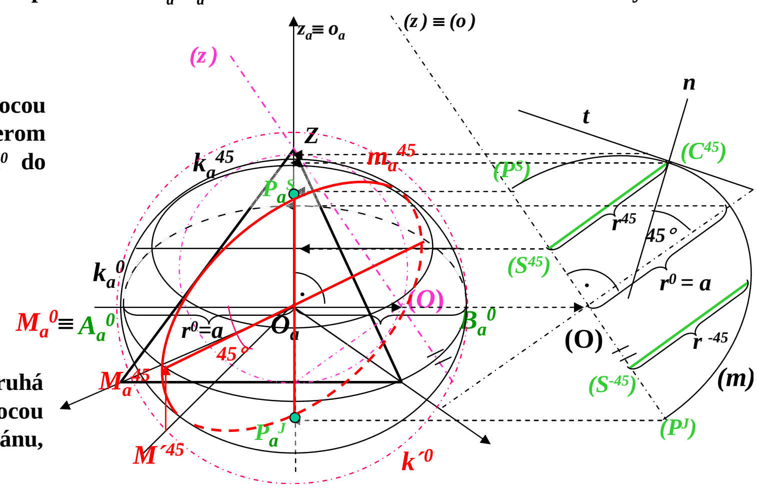
4. **Zostrojíme obrazy ďalších rovnobežkových kružníc a zostrojíme obrysovú krivku *(pokračovanie na obrázku nie je z dôvodu prehľadnosti)*.**

Obraz zemepisnej siete na rotačnom elipsoide (príp. guľovej ploche) v kolmej axonometrii

Úloha: Zostrojte obraz siete rovnobežiek a meridiánov (každých 45°) na sploštenom elipsoide, ktorého osou je $o \equiv z$, stred je O a meridiánová elipsa má osi $a = 5\ cm$, $b = 4\ cm$.

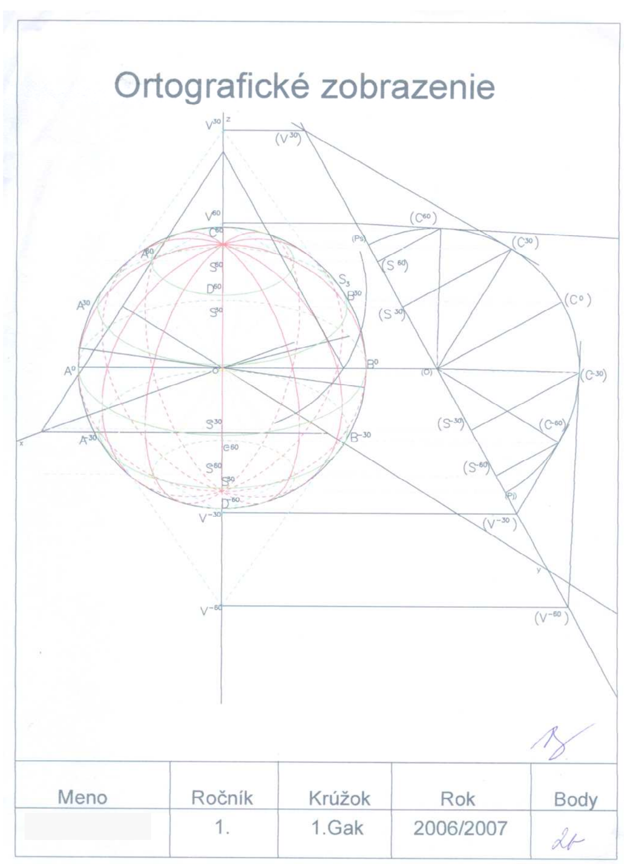
Riešenie:

1. **Sklopíme premietaciu rovinu λ osi z do priemetne ρ a posunieme $(z) \equiv (o)$ v smere sklápania o ľubovoľnú dĺžku, aby sa sklopená poloha neprekrývala s obrazom rotačnej plochy.**
2. **V premietacej rovine λ leží meridián m rotačnej plochy, ktorý spája vedľajšie vrcholy rovnobežkových kružníc, zostrojíme (m), ktorý je elipsa s vedľajšou osou na $(z) \equiv (o)$.**
3. **Zostrojíme obraz rovníka k_a^0 podľa postupu na predchádzajúcej strane.**
4. **Prvky rovnobežkovej kružnice k^{45} v sklopení určíme pomocou normály elipsy (m) v bode (C), ktorá zviera s rovinou rovníka uhol 45°, jej obraz k_a^{45} zostrojíme tiež podľa predchádzajúceho postupu.**
5. **Zostrojíme obrazy pólov - severného a južného P_a^S, P_a^J.**
6. **Obrazy meridiánov sú elipsy so spoločným priemerom $P_a^S P_a^J$ na osi rotácie. Priemer k nemu združený určíme v rovine rovníka:**



- **Nech A je na meridiáne m^0, teda $A_a^0 \equiv M_a^0$.**
- **Bod M_a^{45} určíme na rovníku k_a^0 pomocou perspektívnej afinity s osou $A_a^0 B_a^0$ so smerom kolmým na os, ktorá zobrazí elipsu k_a^0 do kružnice k'^0.**
- **$M'^{45}\ k'^0$, $\angle(M_a^0 O_a, M'^{45} O_a) = 45°$,**
- **$M_a^{45} \in k_a^0$, $M_a^{45} M'^{45} \perp A_a^0 B_a^0$.**
- **Osi meridiánovej elipsy dourčíme Rytzovou konštrukciou.**

7. **Obrys elipsoidu je elipsa s osou $A_a^0 B_a^0$, druhá os je na $(z) \equiv (o)$, dourčíme ju pomocou dotyčníc k sklopenému meridiánu, rovnobežných so smerom sklápania.**



Kolmý priemet guľovej plochy do roviny tiež nazývame ortografické zobrazenie. Kolmá axonometria je ortografické zobrazenie vo všeobecnej polohe, teda zemská os nie je rovnobežná s priemetňou, ani nie je kolmá na priemetňu.

Na obrázku je ukážka práce študenta vytvorená pomocou programu AutoCAD.

Na obrázku je ukážka práce študenta obrazu zemepisnej siete guľovej plochy v kolmej axonometrii.