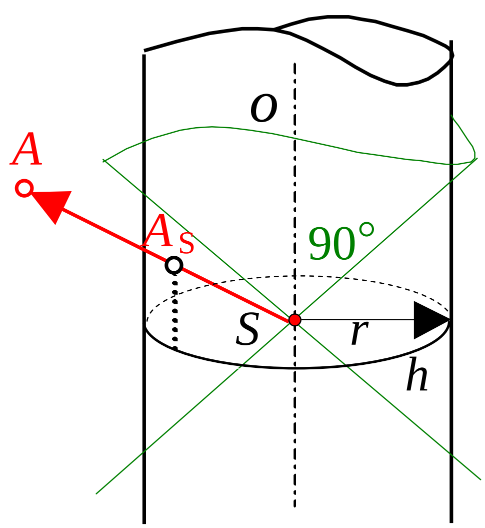
Margita Vajsáblová

Cylindrická perspektíva

Cylindrická perspektíva

Definícia:

Majme rotačnú valcovú plochu Φ s osou o, polomerom r (nazývaným dištančný polomer) a bod S, ktorý leží na osi o. Pod cylindrickou perspektívou bodu $A \in \overline{E_3} - G$ (G je rotačný kužeľový priestor ohraničený rotačnou kužeľovou plochou Ψ, ktorá je súosá s plochou Φ, vrchol je bod S a jej vrcholový uhol je 90°) rozumieme priesečník polpriamky $\overset{\mapsto}{SA}$ s valcovou plochou Φ, teda:



$$A_s = \overset{\mapsto}{SA} \cap \Phi$$

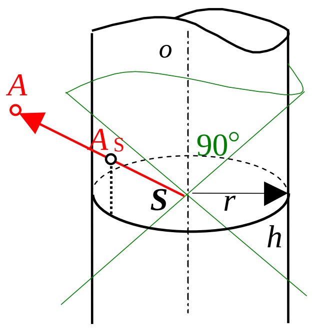
Obraz bodu v cylindrickej perspektíve

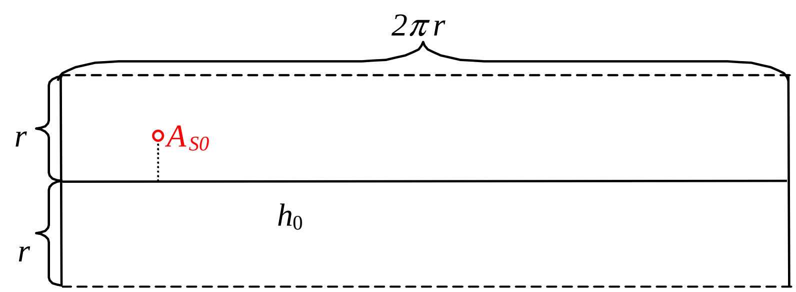
- v geometrii cylindrickú perspektívu objektov zostrojujeme na rozvinutú časť valcovej plochy Φ,
- rez valcovej plochy Φ rovinou, ktorá obsahuje stred S a je kolmá na os o, je kružnica h, (horizont),
- rozvinutím horizontu je úsečka h_0, ktorej dĺžka je $2\pi r$,
- obrazy bodov zorného priestoru v rozvinutí cylindrickej perspektívy sa nachádzajú vnútri obdĺžnika, ktorého stredná priečka je h_0 a výška je $2r$.

Poznámka: V cylindrickej perspektíve platí:

✓ nejednoznačnosť zobrazenia nevlastného bodu (priamka má 2 úbežníky – preto uvažujeme úbežníky polpriamok),

✓ horizont je množina úbežníkov všetkých vodorovných priamok.

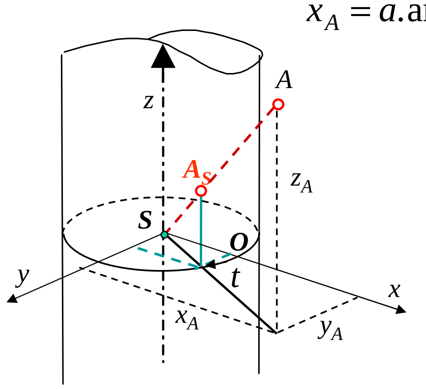


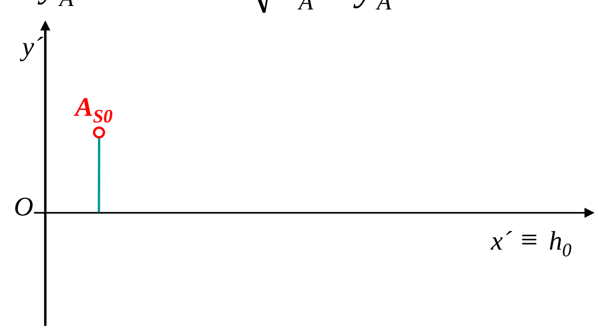


Zobrazovacie rovnice cylindrickej perspektívy

- v pravouhlej súradnicovej sústave $\{S, x, y, z\}$ majme bod $A[x_A, y_A, z_A]$,
- v rovine rozvinutej valcovej plochy Φ majme pravouhlú súradnicovú sústavu $\{O, x´, y´\}$ tak, že bod $O = h \cap x$ a $x´ \equiv h_0$,
- nech bod A_s je cylindrickou perspektívou bodu A, jeho obraz v rozvinutí valcovej plochy Φ je bod A_{so}, ktorého súradnice v rovine rozvinutia sú $x´$, $y´$. Súradnica $x´$ bodu A_{so} sa rovná dĺžke oblúka horizontálnej kružnice h ohraničeného bodom O a priesečníkom horizontu s tvoriacou priamkou valcovej plochy prechádzajúcej bodom A_s. Ak t je veľkosť uhla prislúchajúceho tomuto oblúku v radiánoch, potom súradnica $x´ = r.t$. Súradnica $y´$ sa rovná vzdialenosti bodu A_s od spomínaného priesečníka. Potom zobrazovacie rovnice cylindrickej perspektívy možno formulovať:

$$x_A^{'} = a.\arcsin\frac{y_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2}} \qquad y_A^{'} = a.\frac{z_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2}}$$





Obraz priamky v cylindrickej perspektíve

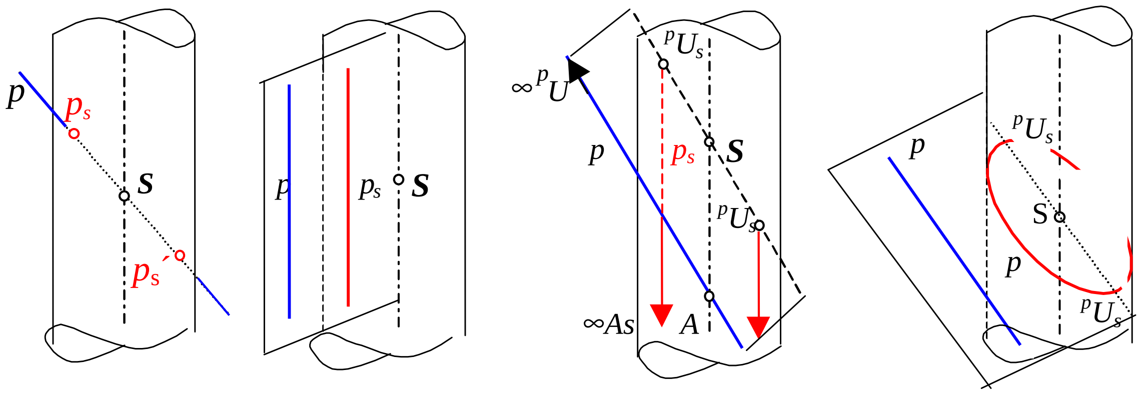
Veta 1: Pre cylindrickú perspektívu priamky p ($p \neq o$) platí:

a) Ak $S \in p$, potom jej obrazom sú dva body p_s, $p_{s'}$, a to priesečníky priamky p s valcovou plochou Φ.

b) Ak $p \parallel o$, jej obrazom je tvoriaca priamka p_s valcovej plochy Φ.

c) Ak p je rôznobežná s o, jej obrazom sú dve polpriamky ležiace na tvoriacich priamkach valcovej plochy Φ.

d) Ak neplatia podmienky 1 – 3, obrazom priamky p je polelipsa, príp. polkružnica.



Obraz priamky v cylindrickej perspektíve

Veta 2: Rozvinutím elipsy ležiacej na rotačnej valcovej ploche Φ je časť sínusoidy.

Dôkaz: Parametrické vyjadrenie rotačnej valcovej plochy Φ s osou z a polomerom r je:

$x = r\cos t \qquad y = r\sin t \qquad z = v\ , \qquad t \in \langle 0, 2\pi), v \in \mathrm{R}.$

Majme rovinu α, v ktorej leží os x a s rovinou (x, y) zviera uhol φ (tg $\varphi = b/r$). Potom analytické vyjadrenie roviny α je:

$$z = \frac{b}{r}y$$

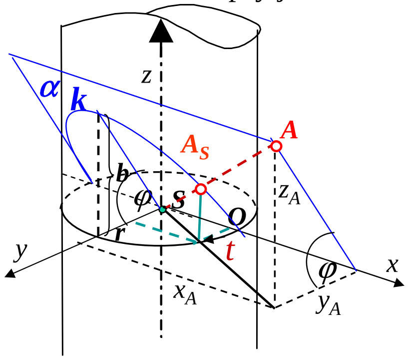
Dosadením za $y = r\sin t$, pre z-tové súradnice bodov rezu k:

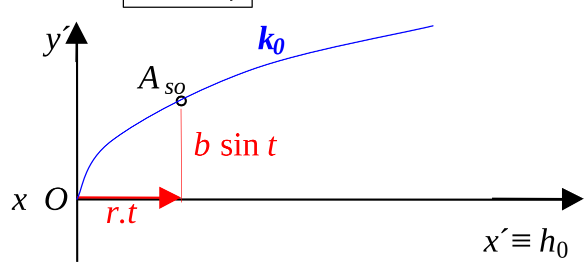
$$z = \frac{b}{r}y = \frac{b}{r}r\sin t = b\sin t$$

Ak $b \neq 0$, rez plochy Φ rovinou α je elipsa k. Súradnice bodov elipsy v rozvinutí sú:

$x' = r\,t \qquad y' = z = b\sin t\ ,$

teda rozvinutím elipsy je funkcia (časť sínusoidy): $\boxed{y' = b\sin\frac{x'}{r}}$





Obraz priamky v cylindrickej perspektíve

Veta 3: Nech $\alpha \cap \alpha' = p$, kde p je priemer kružnice h, potom rozvinutím elíps k, k' sú sínusoidy, ktoré sú perspektívne afinné, osou afinity je h_0, smer je kolmý na os.

Dôkaz: Nech platia všetky vzťahy uvedené v dôkaze vety 2, nech $\alpha \cap \alpha' = x$ a uhol roviny α' s $\pi(x, y)$ je φ' (tg $\varphi' = b'/a$). Pre súradnice bodov elipsy k' v rozvinutí platí:

$$x' = a \,.\, t$$

$$y' = z = b' \sin t$$

Z oboch vzťahov pre y' vyplýva, že perspektívna afinita s osou $x' \equiv h_0$, so smerom kolmým na os a charakteristikou b'/b zobrazuje sínusoidu k_0 do sínusoidy k'_0.