

Margita Vajsáblová

Geometrické základy matematickej kartografie - stereografická azimutálna projekcia

Stereografická projekcia

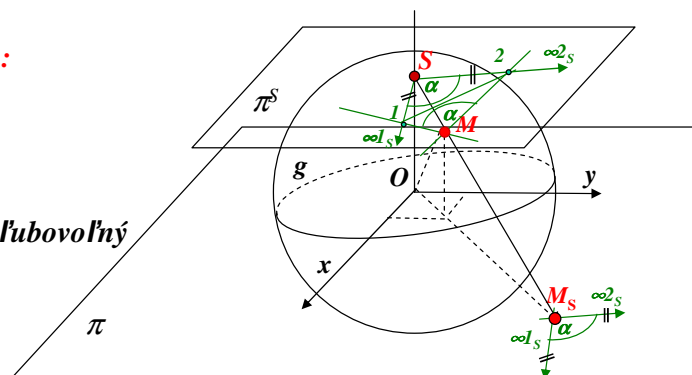
Definícia: Stereografická projekcia je stredové premietanie referenčnej guľovej plochy Γ , pričom stred premietania S leží na referenčnej guľovej ploche Γ a priemetňa π je rovnobežná s dotykovou rovinou plochy Γ v bode S .

Veta 1: Stereografická projekcia je konformné zobrazenie, teda platí: Nech t, t' sú dve dotyčnice guľovej plochy Γ v jej bode $M \neq S$ a nech t_s, t'_s sú stereografické priemety dotyčníc t, t' z bodu S do π (obr. 1). Potom platí, že $\angle(t, t') = \angle(t_s, t'_s)$.

Veta 2: Stereografickým obrazom kružnice ležiacej na referenčnej guľovej ploche Γ je priamka, alebo kružnica.

Stereografická projekcia podľa polohy:

- a) **pólová** – stred premietania S je pól,
- b) **rovníková** – stred premietania S je ľubovoľný bod rovníka,
- c) **všeobecná** – neplatí a), b).



Obr. 1

Stereografická projekcia – zobrazovacie rovnice

Nech π prechádza stredom O guľovej plochy a súradnicová sústava $\{O, x, y, z\}$, kde x, y sú v π a $z \perp \pi$.
 Zemepisné súradnice stredy premietania $S [U_K, V_K]$.

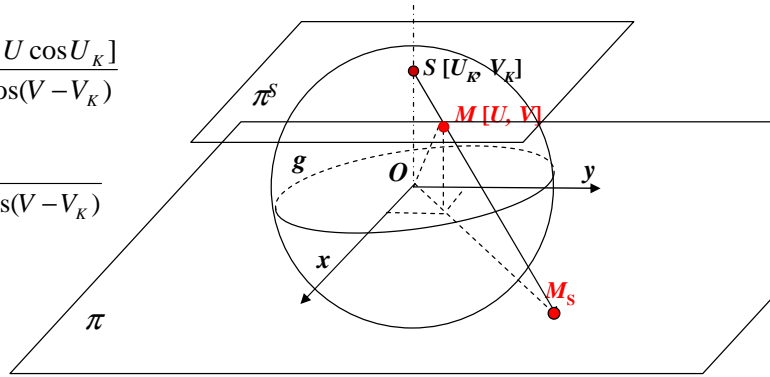
Pravouhlé súradnice stredy premietania $S [0, 0, R]$.

Bod $M [x, y, z]$ ležiaci na guľovej ploche Γ sa zobrazí do $M_s [\frac{x \cdot R}{R-z}, \frac{y \cdot R}{R-z}, 0]$ (obr. 2), kde za x, y, z môžeme dosadiť zobrazovacie rovnice ortografickej projekcie.

Potom súradnice x', y' bodu M_s , ktorý je obrazom bodu $M[U, V]$, vypočítame pomocou zobrazovacích rovníc stereografického zobrazenia:

$$x' = \frac{R [\cos U \sin U_K \cos(V - V_K) - \sin U \cos U_K]}{1 - \sin U \sin U_K - \cos U \cos U_K \cos(V - V_K)}$$

$$y' = \frac{R \cos U \sin(V - V_K)}{1 - \sin U \sin U_K - \cos U \cos U_K \cos(V - V_K)}$$



Obr. 2

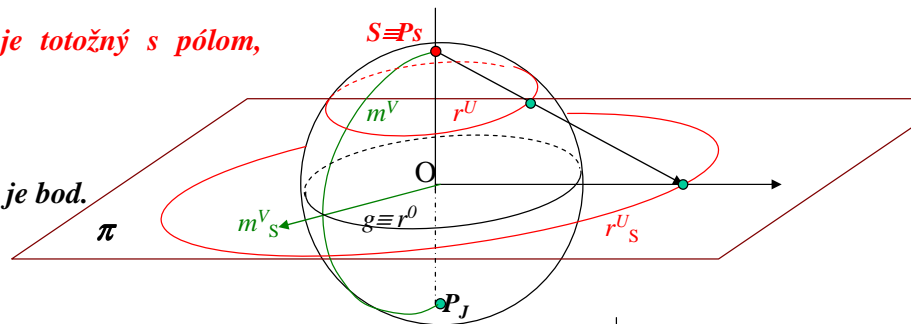
Poznámka: V geodetickej a kartografickej praxi je používaná stereografická projekcia na dotykovú rovinu, príp. na rovinu sečnú v rovnobežkovej kružnici (zemepisnej, príp. kartografickej). V tejto kapitole budeme predpokladať, že stred referenčnej guľovej plochy leží v rovine obrazu (priemetni).

Stereografická projekcia v pólovej polohe

Stred premietania S je totožný s pólom, nech $S \equiv P_s$ (obr. 3).

$\Gamma \cap \pi = g \equiv r^0$ – rovník

Priemetom zemskej osi je bod.



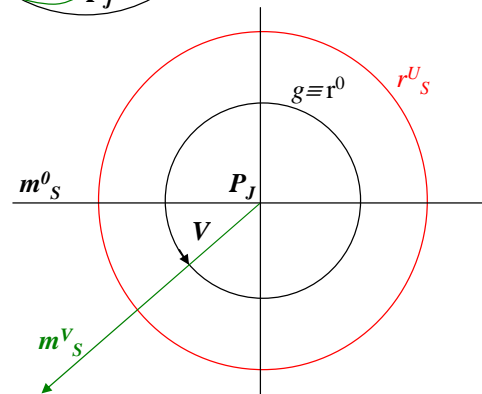
Obr. 3

Obraz prvkov zemepisnej siete (obr. 4)

Obrazom rovnobežkových kružníc sú sústredné kružnice so stredom v priemete zemskej osi.

Obrazom poludníkov sú polpriamky so spoločným začiatkom v priemete zemskej osi, platí:

$$\angle(m_s^0, m_s^V) = V$$



Obr. 4

Stereografická projekcia v rovníkovej polohe

Stred premietania S je ľubovoľný bod rovníka, $S \in r^0$ (obr. 5).

$\Gamma \cap \pi = g \equiv m$ – poludník.

Obraz prvkov zemepisnej siete (obr. 6)

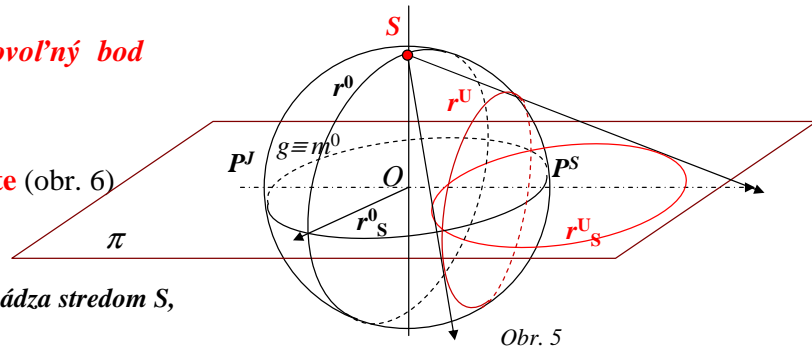
Priemetom rovníka je priamka.

Priemetom poludníku, ktorý prechádza stredom S , je priamka, nech $S \in m^{90}$.

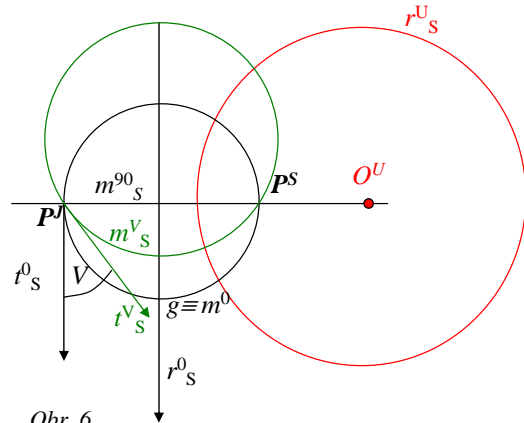
Obrazom rovnobežkových kružníc sú nesústredné kružnice, so stredmi na $m^{90}_S \cup m^{270}_S$.

Obrazom poludníkov sú nesústredné kružnice so stredmi na obraze rovníka, teda r^0_S , so spoločnou tetivou určenou obrazmi pólů a určené dotyčnicami v póloch, keďže z konformnosti zobrazenia vyplýva, že uhly dotyčníc poludníkov v póloch sa zachovávajú:

$$\angle(t^0_S, t^V_S) = V$$



Obr. 5



Obr. 6

Stereografická projekcia vo všeobecnej polohe

Stred premietania S nie je v póle, a tiež neleží na rovníku (obr. 7).

$\Gamma \cap \pi = g$ všeobecná hlavná kružnica (ortodróma) referenčnej guľovej plochy.

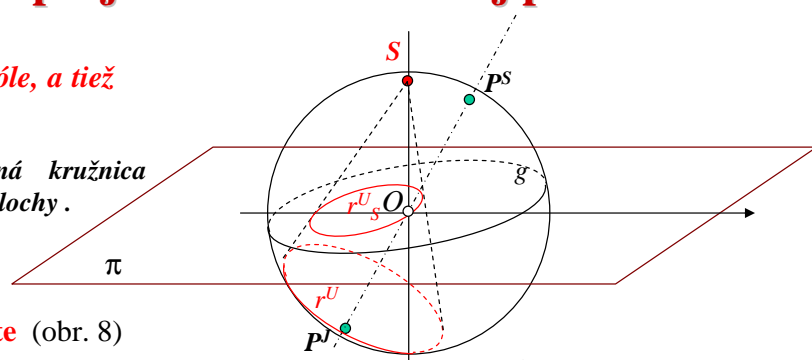
Obraz prvkov zemepisnej siete (obr. 8)

Priemetom poludníku, ktorý prechádza stredom S , je priamka, nech $S \in m^{90}$.

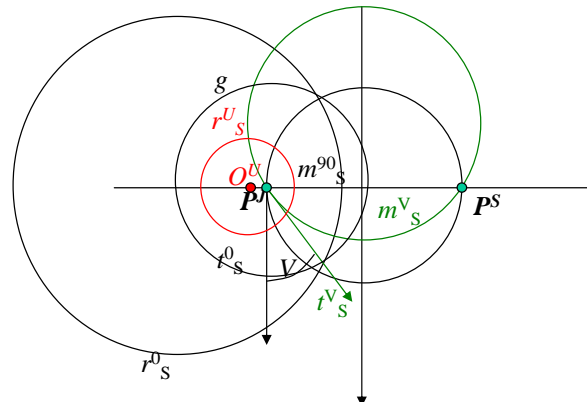
Obraz rovníka a rovnobežkových kružníc sú nesústredné kružnice so stredmi na priamke $m^{90}_S \cup m^{270}_S$.

Obrazy poludníkov sú nesústredné kružnice, so stredmi na osi úsečky $P_S P_J$. Z konformnosti zobrazenia vyplýva, že uhly dotyčníc poludníkov v póloch sa zachovávajú:

$$\angle(t^0_S, t^V_S) = V$$



Obr. 7



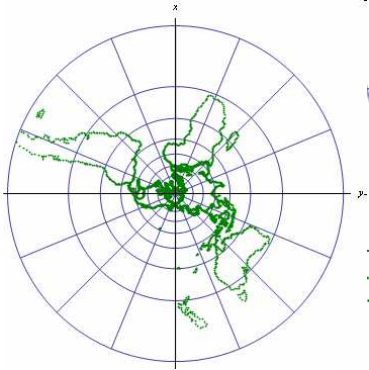
Obr. 8

Stereografická projekcia podľa polohy priemetne

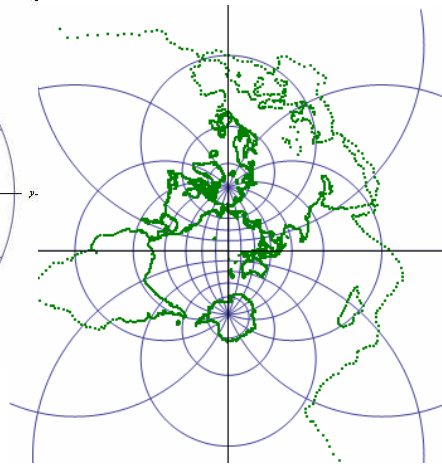
Pólová poloha

Rovníková poloha

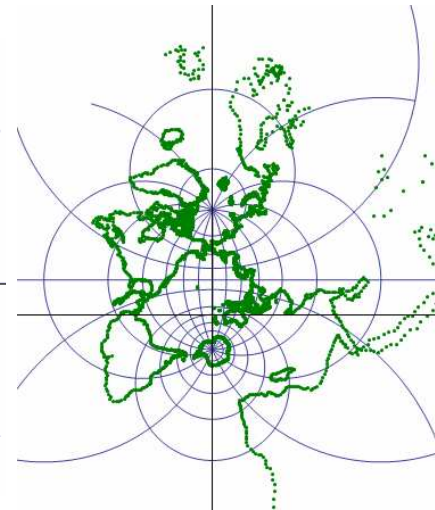
Všeobecná poloha



Obr. 9



Obr. 10



Obr. 11

Obraz ortodrómy v stereografickej projekcii

Úloha: Zostrojíte obraz ortodrómy k prechádzajúcej bodmi A, B v stereografickej projekcii danej hlavnou kružnicou g (ležiacej v priemetni), kolmým priemetom stredy premietania $S_1 \equiv O$ a obrazmi bodov $A, B, (A_S, B_S)$ v stereografickej projekcii.

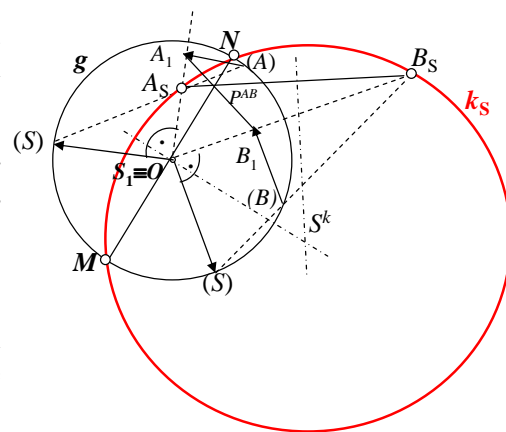
Ortodróma k (hlavná kružnica referenčnej guľovej plochy) má s hlavnou kružnicou g spoločný priemer MN , ktorý leží na priesečnici roviny ortodrómy s rovinou kružnice g .

1. Zostrojíme kolmé priemety bodov A, B do priemetne pomocou sklopenia kolmo premietacích rovín priamok SA a SB . V kolmo premietacej rovine priamky SA leží hlavná kružnica referenčnej sféry, ktorej sklopená poloha je totožná s kružnicou g . Potom: $(S) \in g, (A) \in g \cap (S)A_S, A_1 \in S_1A_S$.

Rovnakým spôsobom zostrojíme B_1 .

2. Potom $A_S B_S \cap A_1 B_1 = P^{AB}, OP^{AB} \cap g = MN$.

3. Stereografickým obrazom ortodrómy k je kružnica k_S prechádzajúca bodmi A_S, B_S, M, N . Jej stred S^k dostaneme ako priesečník ľubovoľných dvoch osí úsečiek určených týmito bodmi.



Obr. 12