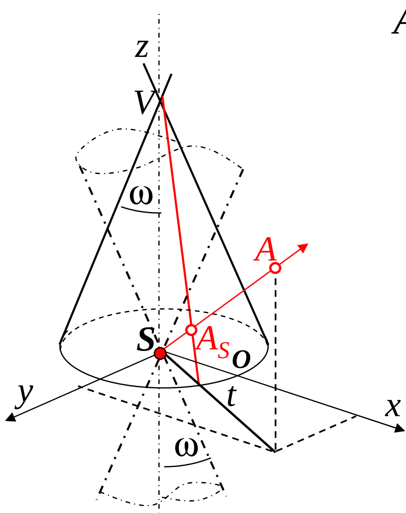
Margita Vajsáblová

Kónická perspektíva

Kónická perspektíva

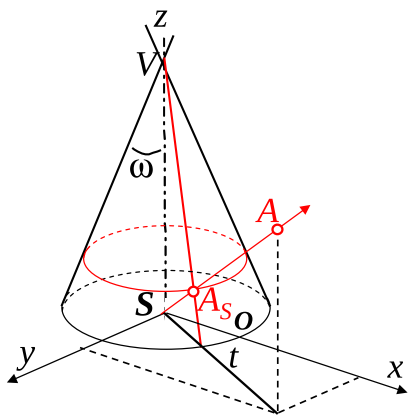
Definícia: Majme rotačnú kužeľovú plochu Ψ s osou o a bod S, ktorý leží na osi o. Potom pod kónickou perspektívou bodu $A \in \overline{E_3} - G$ (kde G je kužeľový priestor ohraničený kužeľovou plochou, ktorá je súosá s Ψ, jej vrchol je S a má vrcholový uhol rovnaký ako Ψ) rozumieme priesečník polpriamky $\overset{\mapsto}{SA}$ s kužeľovou plochou Ψ (v prípade, ak existujú dva, za kónickú perspektívu bodu považujeme ten, ktorý je bližšie k bodu S), teda:

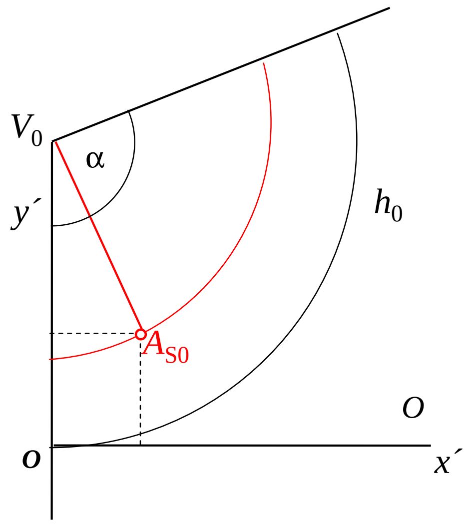
$$A_s = \overset{\mapsto}{SA} \cap \Psi$$



Rozvinutie kónickej perspektívy

- rozvinutím kužeľovej plochy *Ψ*, ktorej uhol tvoriacich priamok s osou je ω, je uhol α = 360°.sinω,
- tvoriace priamky kužeľovej plochy sa rozvinú do zväzku priamok so stredom vo vrchole V_0,
- rovnobežkové kružnice do oblúkov sústredných kružníc, ktorých stred je V_0.





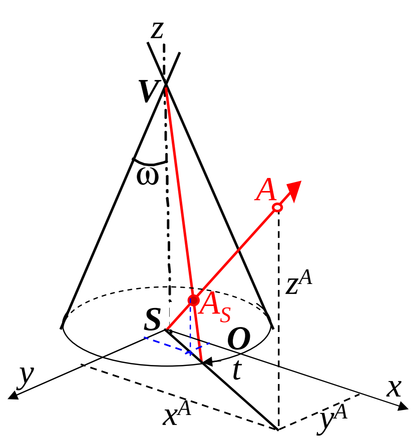
Zobrazovacie rovnice kónickej perspektívy

Majme súradnicovú sústavu {*S*, *x*, *y*, *z*}, kužeľovú plochu *Ψ* s osou *z*, s uhlom tvoriacej priamky s osou ω. V kónickej perspektíve so stredom *S*, na plochu *Ψ* a polomer horizontu je *r*, obrazom bodu $A[x_A, y_A, z_A]$ je $A_S[x_{As}, y_{As}, z_{As}]$ a platí:

$$x_{As} = \frac{r\, x_A^2}{y_A z_A \operatorname{tg}\omega + x_A\sqrt{x_A^2 + y_A^2}}$$

$$y_{As} = \frac{r\, y_A^2}{y_A z_A \operatorname{tg}\omega + x_A\sqrt{x_A^2 + y_A^2}}$$

$$z_{As} = \frac{r\, y_A z_A}{y_A z_A \operatorname{tg}\omega + x_A\sqrt{x_A^2 + y_A^2}}$$



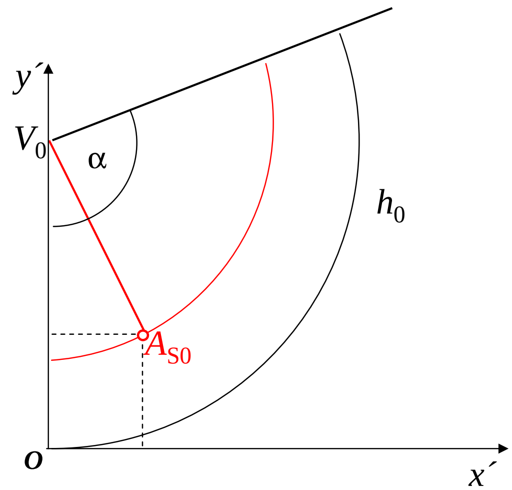
Analytické vyjadrenie rozvinutia kónickej perspektívy bodu

Zobrazovacie rovnice rozvinutej polohy bodu A_S, $A_{S0}[x´, y´]$ sú:

$$x' = \frac{r\sqrt{x_A^4(\mathrm{tg}^2\,\omega+1)+y_A^2(x_A^2+y_A^2\,\mathrm{tg}\,\omega)}}{\mathrm{tg}\,\omega(y_A z_A\,\mathrm{tg}\,\omega+x_A\sqrt{x_A^2+y_A^2})}\sin[\arcsin(\frac{x_A}{\sqrt{x_A^2+y_A^2}})\sin\omega]$$

$$y' = \frac{r}{\sin\omega}-\frac{r\sqrt{x_A^4(\mathrm{tg}^2\,\omega+1)+y_A^2(x_A^2+y_A^2\,\mathrm{tg}\,\omega)}}{\mathrm{tg}\,\omega(y_A z_A\,\mathrm{tg}\,\omega+x_A\sqrt{x_A^2+y_A^2})}\cos[\arccos(\frac{y_A}{\sqrt{x_A^2+y_A^2}})\sin\omega]$$

v súradnicovej sústave $\{V_0, x´, y´\}$, $x´$ je totožná s rozvinutou polohou tvoriacej priamky kužeľovej plochy, ktorá leží v rovine (x, z).



Obraz priamky v kónickej perspektíve

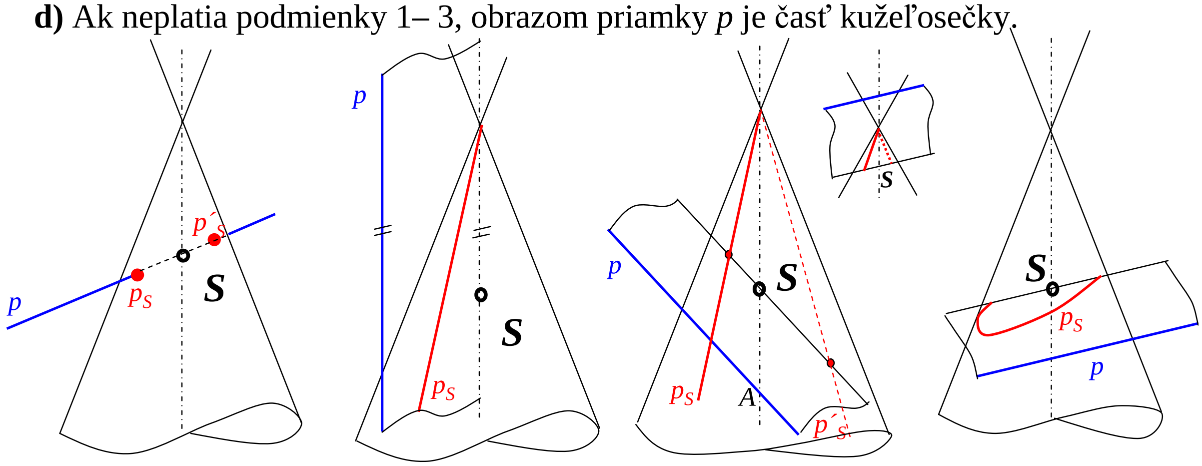
Veta 1: Ak uvažujeme aj časti priamky, ktoré sa nachádzajú mimo zobrazovacieho priestoru, potom pre kónickú perspektívu priamky p ($p \neq o$) platí:

a) Ak $S \in p$, potom jej obrazom sú dva body p_s, $p_{s´}$, a to priesečníky priamky p s kužeľovou plochou Φ.

b) Ak $p \parallel o$, jej obrazom je p_s – časť tvoriacej priamky kužeľovej plochy Φ so začiatkom v jej vrchole.

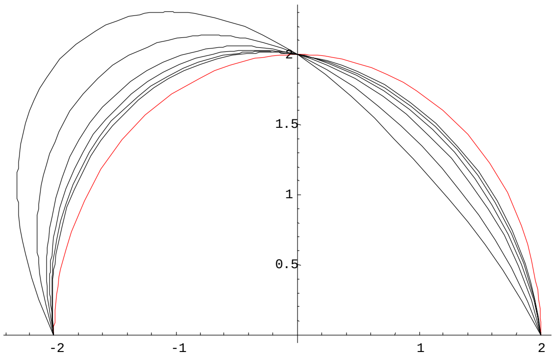
c) Ak p je rôznobežná s o, jej obrazom sú dve polpriamky (príp. úsečky) ležiace na tvoriacich priamkach kužeľovej plochy Φ.

d) Ak neplatia podmienky 1– 3, obrazom priamky p je časť kužeľosečky.



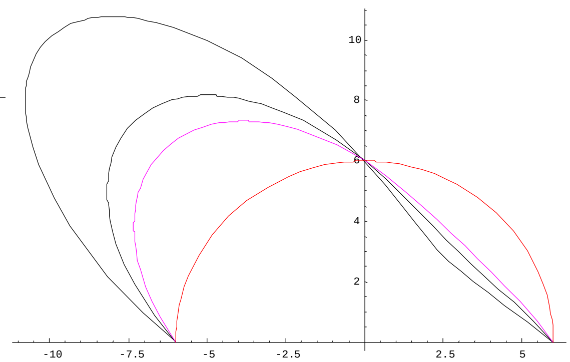
Obraz priamky v kónickej perspektíve pomocou programu vytvoreného v Mathematica

Kónickou perspektívou navzájom rovnobežných vodorovných priamok sú časti kužeľosečiek so spoločnými úbežníkmi na horizonte.

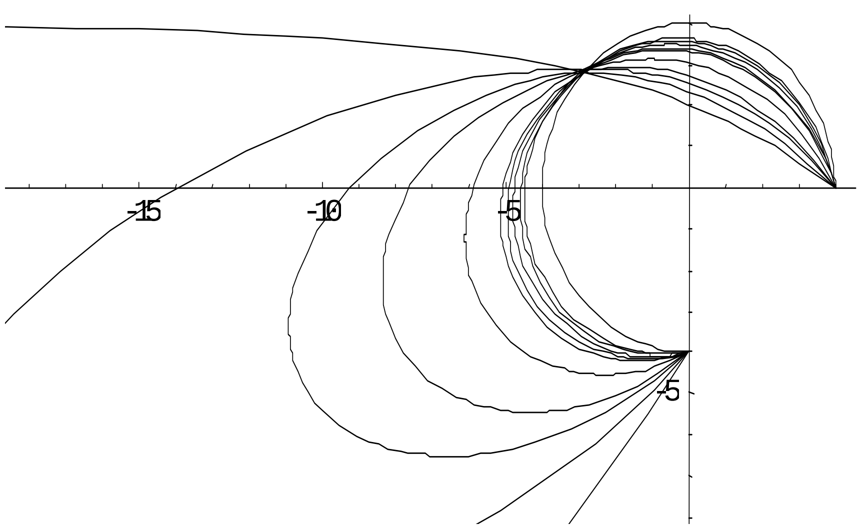


Rozvinutie elíps kužeľovej plochy s $\omega = 30°$, teda $\alpha = \pi$

Rozvinutie paraboly a hyperbol kužeľovej plochy s $\omega = 30°$



Obraz priamky v kónickej perspektíve pomocou programu vytvoreného v Mathematica



Rozvinutie kužeľosečiek kužeľovej plochy s $\omega = \arcsin\frac{3}{4}$ *, teda* $\alpha = \frac{3}{2}\pi$

Obraz priamky v rozvinutí kónickej perspektívy

Obrazom kužeľosečky, ktorá leží s osou *x* v jednej rovine, pri rozvinutí kužeľovej plochy je krivka s parametrickým vyjadrením:

$$x = \cos[t \sin\omega]\sqrt{[a\cos t(1-\frac{\operatorname{tg}\omega\operatorname{tg}\varphi\sin t}{1+\operatorname{tg}\omega\operatorname{tg}\varphi\sin t})]^2+[a\sin t(1-\frac{\operatorname{tg}\omega\operatorname{tg}\varphi\sin t}{1+\operatorname{tg}\omega\operatorname{tg}\varphi\sin t})]^2+ \atop +(\frac{a}{\operatorname{tg}\omega}-a\operatorname{tg}\varphi\sin t(1-\frac{\operatorname{tg}\omega\operatorname{tg}\varphi\sin t}{1+\operatorname{tg}\omega\operatorname{tg}\varphi\sin t})}$$

$$y = \sin[t \sin\omega]\sqrt{[a\cos t(1-\frac{\operatorname{tg}\omega\operatorname{tg}\varphi\sin t}{1+\operatorname{tg}\omega\operatorname{tg}\varphi\sin t})]^2+[a\sin t(1-\frac{\operatorname{tg}\omega\operatorname{tg}\varphi\sin t}{1+\operatorname{tg}\omega\operatorname{tg}\varphi\sin t})]^2+ \atop +(\frac{a}{\operatorname{tg}\omega}-a\operatorname{tg}\varphi\sin t(1-\frac{\operatorname{tg}\omega\operatorname{tg}\varphi\sin t}{1+\operatorname{tg}\omega\operatorname{tg}\varphi\sin t})}$$

kde ω je uhol tvoriacej priamky kužeľovej plochy Ψ s osou rotácie, φ je uhol premietacej roviny s rovinou horizontu, *t* je parameter.

Literatúra použitá v kapitolách z Cylindrickej a kónickej perspektívy

[1] Medek,V. – Zámožík, J.: *Konštruktívna geometria pre technikov*. Bratislava: Alfa, 1978.

[2] Hojovec,V.a kol.: *Kartografie*. Praha: GKP, 1987.

[3] Vajsáblová, M.: *Cylindrická a kónická perspektíva*, Zborník VII. Vedeckej konferencie Stavebnej fakulty v Košiciach, Košice, 2002.

[4] Vajsáblová, M.: *Aplikácie cylindrickej a kónickej perspektívy*, Zborník SCG, Kočovce 2002, pp. 83 – 86.

[5] Vajsáblová, M.: *Premietania na rozvinuteľné plochy*, Zborník konferencie Matematika, geometria a ich aplikácie, Kočovce, 2003, pp. 107 – 112.

[6] Thomas W. Sherlock: MATHEMATICA – a system for doing mathematics by computer, 1993 Wolfram Research, Inc.

[7] Guide to Standard Mathematica Packages, Version 2.1 Wolfram Research.