Slovenská technická univerzita v Bratislave
Stavebná fakulta

Ing. Michal Dibala

Autoreferát dizertačnej práce

Kopuly ako nástroj modelovania problémov finančnej matematiky

na získanie akademického titulu doktor (philosophiae doctor, PhD.)

v doktorandskom študijnom programe: Aplikovaná matematika

Bratislava, jún 2020

Dizertačná práca bola vypracovaná v dennej forme doktorandského štúdia na:
Katedre matematiky a deskriptívnej geometrie Stavebnej fakulty STU v Bratislave

Predkladateľ:	Ing. Michal Dibala Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie Stavebná fakulta STU v Bratislave Radlinského 11, 810 05 Bratislava
Školiteľ:	prof. RNDr. Radko Mesiar, DrSc. Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie Stavebná fakulta STU v Bratislave Radlinského 11, 810 05 Bratislava
Oponenti:	prof. RNDr. Magdaléna Komorníková, PhD. Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie Stavebná fakulta STU v Bratislave Radlinského 11, 810 05 Bratislava
	doc. RNDr. Oľga Nanásiová, PhD. Ústav informatiky a matematiky Fakulta elektrotechniky a informatiky STU v Bratislave Ilkovičova 3, 812 19 Bratislava
	doc. RNDr. Mária Bohdalová, PhD. Katedra kvantitatívnych metód Fakulta managementu UK v Bratislave Odbojárov 10, 820 05 Bratislava

Autoreferát bol rozoslaný dňa:

Ohajoba dizertačnej práce sa koná dňa o h.

na KMaDG SvF STU, Radlinského 11, 810 05, Bratislava.

prof. Ing. Stanislav Unčík, PhD.
Dekan SvF STU v Bratislave

Obsah

Ciele dizertačnej práce

- Preskúmanie vzťahov niektorých tried kopúl známych z literatúry
- Návrh nových konštrukčných metód kopúl a odvodenie základných vlastností
- Podrobné preskúmanie niektorých zovšeobecnení kopúl, ako sú napr. užitkové kopule, alebo I-kopule (Imprecise copulas)
- Praktické aplikácie študovaných kopúl

1 Úvod

V aplikačnej praxi sa tak často stretávame so snahou odhadnúť náhodné zložky pomocou niektorého zo známych rozdelení, v ideálnom prípade toho istého druhu a ich prípadnú závislosť modelovať pomocou matice Pearsonových korelačných koeficientov. Avšak tento prístup dáva zmysel iba v prípade združeného normálneho rozdelenia. Ak jednotlivé zložky združené viacrozmerným normálnym rozdelením sú aj jednotlivé okrajové rozdelenia normálne. Opačná implikácia ale neplatí. Z toho vyplýva, že akonáhle nemožno niektorú zo zložiek náhodného vektora vhodne odhadnúť normálnym rozdelením, automatické uprednostnenie Pearsonovho korelačného koeficientu pred inými mierami závislosti stráca svoje opodstatnenie.

V posledných dvoch desaťročiach minulého storočia došlo k prudkému rozvoju v oblasti finančnej matematiky spôsobeného ľahšou dostupnosťou výkonnej výpočtovej techiky a snahou aplikovať matematické modely inšpirované modelmi používanými vo fyzikálnych aplikáciach v obore financií a poisťovníctva. Rovnako dochádza k masívnej automatizícii, ktorej odrazy vidno v presadení sa elektronického obchodovania, robotického obchodovania na akciovom trhu, automatickému vyvažovaniu portfólia a.i. Bolo to obdobie viery v možnosť dostatočne odhadnúť budúce správanie a riziko s použitím kvantitatívnych metód. Bežne používané modely predpokladali Gaussovo rozdelenie odchýliek, avšak skutočné hodnoty vykazovali často úplne iné znaky. Kríza v roku 2009 naplno odhalila slabiny matematických modelov používaných v kvantitatívnych ekonomických metódach postavených na vlastnostiach Gaussovho rozdelenia. Niektoré z problémov použitia nevhodných mier závislostí možno aspoň čiastočne vyriešiť s pomocou štruktúr nazývaných *kopuly*.

Na rozdiel od koeficientu korelácie, kopuly riešia problém, ako popísať závislostnú štruktúru medzi viacerými náhodnými premennými, jednoznačne. S pomocou kopúl možno rozdeliť proces vytvárania mnohorozmerného rozdelenia na dva samostatné kroky. V prvom kroku je potrebné definovať alebo odhadnúť jednotlivé okrajové rozdelenia náhodných veličín, v druhom kroku ich *spojiť* do mnohorozmerného rozdelenia náhodnej premennej. Je potrebné dodať, že slovný základ slova *kopula*, slovo *copulae*, v latinčine znamená spájať. Veľmi názorne tak toto slovo opisuje samotnú podstatu a aj najčastejšie použitie kopúl v praxi.

V prvom desaťročí 21. storočia nastal prudký rozvoj v teórii kopúl ako aj v ich aplikáciach. Najväčšia pozornosť kopulám bola venovaná v oblasti poisťovníctva, finančníctva, manažmentu rizika a vodohospodárstva, kde sú s pomocou kopúl odhadované združeného rizika napr. prírodných katastrof a strát. Pri týchto aplikáciach je snaha z nameraných hodnôt vhodne odhadnúť kvantily mnohorozmerného rozdelenia pre extrémne udalosti. Ďalšou blízkou oblasťou je použitie kopúl na generovanie náhodných čísel zo združeného rozdelenia napr. na účel metód Monte Carlo simulácie a stochastickej optimalizácie [11, 103]. Uplatnenie kopuly pomaly nachádzajú aj v metódach umelej inteligencie, strojového učenia a bioinformatiky [34, 62, 33]. Ich uplatnenie je široké a možno ich použiť všade tam, kde potrebujeme dobre odhadnúť vzájomnú závislosť náhodných premenných za predpokladu, že sa závislostná štruktúra nemení. Spomínaný predpoklad jasne obmedzuje oblasť použitia. Po prudkom rozvoji v oblasti výskumu a praktického nasadenia kopúl prišlo dnes v oblasti finančníctva k istej stagnácii práve z tohto dôvodu. Správanie trhu je chaotické a závislostná štruktúra medzi jednotlivými skúmanými premennými sa ukázala v skutočnosti časovo premenlivá. Na podobné limity naráža dnes aj použitie v oblasti vodného hospodárstva. Klimatické zmeny posledných desaťročí spôsobujú, že mladšie dáta z posledných rokov občas nepokračujú v trende platných závislostí vypozorovaných zo starších dát [10, 88, 40].

Výzvou je rovnako aj modelovanie komplexnej závislostnej štruktúry väčšieho množstva náhodných premenných bez apriórnej znalosti závislostnej štruktúry. So zväčšujúcou sa dimenziou náhodného vektora rastie aj komplexita závislostnej štruktúry a výpočtová zložitosť pri odhadovaní štruktúry závislosti. Viaceré dvojrozmerné modely totiž nie je ľahké rozšíriť do viacrozmerných, prípadne ich rozšíriť tak, aby sme neobmedzili rozsah rôznych typov závislostných štruktúr. V poslednom čase nachádzajú uplatnenie tzv. hierarchické modely kopúl [5, 16]. Problémom v prípade modelovania závislostnej štruktúry pre väčšie dimenzie je neposlednom rade aj dostatočné množstvo dát, ktoré je potrebné získať na dobrý odhad a dostatočný popis situácie ohľadom stochastickej závislosti. Problémy v tomto smere robia práve extrémne udalosti, ktoré sa sami o sebe vyskytujú zriedkavo, o to viac, keď sú podmieňované výskytom ďalšej alebo ďalších extrémnych a teda veľmi často aj zriedkavých udalostí.

Za zmienku stojí aj prínosná polemická diskusia ohľadom praktického používania kopúl, kedy sú často kopuly v praxi nasadzované bez hlbších znalostí o ich vlastnostiach aj v prípadoch, keď sú aplikované modely vyslovene nevhodne použité, občas aj s vážnymi následkami [81, 45, 57, 19, 20, 73, 90, 82] a [75, 76].

Cieľom tejto práce bolo predstaviť a popísať základné vlastnosti kopúl v slovenskom jazyku, charakterizovať ich niektoré v praxi často používané triedy, demonštrovať použitie štandardných tried kopúl v praktických aplikáciach a navrhnúť nové metódy konštrukcie kopúl na odhad konkrétnych typov závislostí z dát, vrátane aplikácie kopúl na reálne dáta.

2 Klasické miery závislosti

V celej kapitole predpokladáme pevne určený pravdepodobnostný priestor (Ω, Σ, P).

Snahy kvantifikovať závislosť náhodných premenných sú zjavné už od počiatkov matematickej štatistiky ako vedeckej disciplíny. Do dnešného dňa existuje veľké množstvo rôznych mier závislosti [56]. Medzi najznámejšie a v praxi najčastejšie používané patrí Pearsonov korelačný koeficient.

Definícia 2.1. *Nech X a Y sú náhodné premenné, pre ktoré platí $0 < Var\left(X\right) < \infty$ a $0 < Var\left(Y\right) < \infty$. Veličinu*

$$\rho_P\left(X, Y\right) = \frac{Cov\left(X, Y\right)}{\sqrt{Var\left(X\right)}\sqrt{Var\left(Y\right)}} \tag{1}$$

nazývame Pearsonov korelačný koeficient, *kde*
$Cov\left(X, Y\right) = \mathbb{E}\left(XY\right) - \mathbb{E}\left(X\right)\mathbb{E}\left(Y\right)$ *a* $Var\left(X\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}\left(X\right)^2$.

Odhad hodnoty Pearsonovho korelačného koeficientu zo vzorky údajov veľkosti n možno vyjadriť v tvare:

$$r_P = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right)}{s_X s_Y}$$

kde $\bar{X}$ a $\bar{Y}$ sú jednotlivé výberové priemery a s_X a s_Y sú výberové smerodajné odchýlky jednotlivých vzoriek.

Veta 2.1. Vlastnosti Pearsonovho korelačného koeficientu: *Nech X a Y sú náhodné premenné, pre ktoré platí $Var\left(X\right), Var\left(Y\right) \in (0, \infty)$. Potom ρ_P má nasledujúce vlastnosti:*

1. Komutativita, $\rho_P\left(X, Y\right) = \rho_P\left(Y, X\right)$
2. Normalita, $-1 \leq \rho_P\left(X, Y\right) \leq 1$
3. *Ak $Y = aX + b, a, b \in \mathbb{R}$, potom $\rho_P\left(X, Y\right) = 1 \Leftrightarrow a > 0$ a $\rho_P\left(X, Y\right) = -1 \Leftrightarrow a < 0$*
4. *Ak sú X a Y vzájomne nezávislé náhodné premenné, potom $\rho_P\left(X, Y\right) = 0$*
5. *Ak $\varphi\left(X\right) = cX + d, c, d \in \mathbb{R}$, potom $\rho_P\left(\varphi\left(X\right), Y\right) = \rho_P\left(X, Y\right)$, ak $c > 0$ a $\rho_P\left(\varphi\left(X\right), Y\right) = -\rho_P\left(X, Y\right)$, ak $c < 0$.*

Veta 2.1 ukazuje, že Pearsonov korelačný koeficient je výborným indikátorom lineárnej závislosti medzi náhodnými premennými X a Y. V prípade, ak $\rho_P(X,Y) = 0$ povieme, že premenné X a Y sú vzájomne *nekorelované.*

Nedostatky Pearsonovho korelačného koeficientu:

- *Predpoklad konečných hodnôt disperzií a náhodných premenných X a Y*
  je silne limitujúcim faktorom. Pokiaľ by ktorákoľvek z náhodných premenných bola z niektorého zo štandardných rozdelení s nekonečnou alebo s nedefinovanou disperziou, nie je možné vyjadriť hodnotu korelačného koeficientu. Medzi klasické príklady takýchto štandardných rozdelení patrí napríklad Paretovo rozdelenie, Cauchyho rozdelenie alebo aj Studentovo rozdelenie pre malé hodnoty stupňa voľnosti.

- *Nulová hodnota Pearsonovho koeficientu korelácie neimplikuje nezávislosť náhodných premenných.*
  Prepodkladajme náhodnú premennú X z rovnomerného rozdelenia $U(-1,1)$ a premennú $Y = X^2$. Dá sa ľahko ukázať, že pre takto zvolené X a Y, $\rho_P(X,Y) = 0$, hoci sú obe premenné vzájomne funkčne závislé. Vzájomná nezávislosť náhodných premenných z nulovej hodnoty Pearsonovho korelačného koeficientu vyplýva iba v prípade, že združená distribučná funkcia náhodných premenných je z mnohorozmerného normálneho rozdelenia.

- *Pearsonov korelačný koeficient je invariatný iba voči lineárnym transformáciam.*
  V prípade nelineárnej monotónnej transformácie sa hodnota korelačného koeficientu nezachováva.

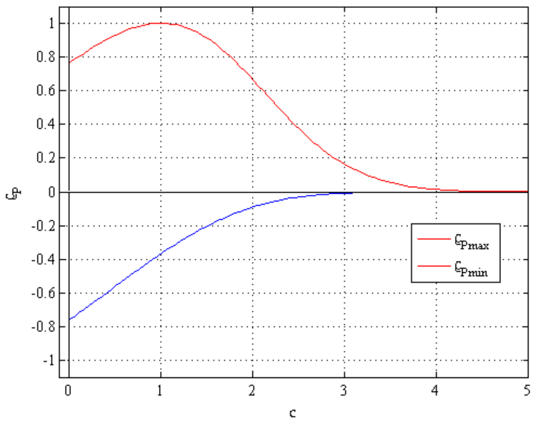
- *Maximálne a minimálne dosiahnuteľné hodnoty pre dané mnohorozmerné rozdelenie nemusia byť nutne -1 a 1.*
  Ak pracujeme s mnohorozmerným rozdelením, ktoré nie je normálne, nemožno vo všeobecnosti z hodnôt korelačného koeficientu usudzovať silu vzájomnej závislosti.
  Názorný príklad je uvedený v [36]. Nech $X \sim LogN(0,1)$ a nech $Y \sim LogN(0,\sigma^2), \sigma > 0$. Potom z definície log-normálneho rozdelenia platí: $X = e^Z$ a $Y = e^{\sigma Z}$, kde $Z \sim N(0,1)$. Minimálnu a maximálnu dosiahnutelnú hodnotu Pearsonovho koeficientu tak možno určiť ako
  $\rho_{Pmin}(X,Y) = \rho_P\left(e^Z, e^{-\sigma Z}\right)$ a
  $\rho_{Pmax}(X,Y) = \rho_P\left(e^Z, e^{\sigma Z}\right)$.

Zo známych vzťahov pre výpočet strednej hodnoty a disperzie tak možno odvodiť:

$$\rho_{Pmin}\left(X,Y\right)=\frac{e^{-\sigma}-1}{\sqrt{\left(e-1\right)\left(e^{\sigma^2}-1\right)}}, \tag{2}$$

$$\rho_{Pmax}\left(X,Y\right)=\frac{e^{\sigma}-1}{\sqrt{\left(e-1\right)\left(e^{\sigma^2}-1\right)}}. \tag{3}$$

Z grafov hodnot ρ_{Pmin} a ρ_{Pmax} pre rôzne hodnoty σ na obrázku 1 vidno, že pre rastúce hodnoty smerodajnej odchýlky smerujú obe krajné dosiahnutelné hodnoty k 0. Napr. pre zvolené $\sigma = 1$ dostávame $\rho_{Pmin}\left(X,Y\right) = -e^{-1}$. Usudzovať preto o sile závislosti z hodnôt Pearsonovho korelačného koeficientu nemožno. Situácie blízke spomenutému príkladu boli v už praxi viackrát pozorované.



Obr. 1: Vykreslenie závislosti oboch limít Pearsonovho korelačného koeficinetu v závislosti od veľkosti smerodajnej odchýlky.

Nedostatky Pearsonovho korelačného koeficientu nám umožňujú sformulovať vhodné požadované vlastnosti ideálnej číselnej charakteristiky miery závislosti dvoch náhodných premenných. Predpokladajme dve náhodné premenné X a Y a ideálnu číselnú charakteristiku miery závislosti označme δ. Od tejto číselnej charakteristiky je rozumné požadovať nasledujúce vlastnosti [36, 93]:

1. Komutativita: $\delta\left(X,Y\right)=\delta\left(Y,X\right)$

2. Normalita: $-1\leq\delta\left(X,Y\right)\leq 1$

3. $\delta(X,Y) = 1 \Leftrightarrow X,Y$ sú navzájom združené kopulou M a $\delta(X,Y) = -1 \Leftrightarrow X,Y$ sú navzájom združené kopulou W.

4. Správanie voči monotónnym transformáciam: Ak $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je rýdzo monotónna transformácia, potom $\delta(\phi(X), Y) = \delta(X,Y)$ ak ϕ je rastúca a $\delta(\phi(X), Y) = -\delta(X,Y)$, ak ϕ je klesajúca funkcia

5. Nulová hodnota v prípade nezávislosti: $\delta(X,Y) = 0 \Leftrightarrow X,Y$ sú vzájomne nezávislé

Lemma 2.1. *[93] Neexistuje závislostná miera spĺňajúca zároveň vlastnosť 4 a vlastnosť 5.*

Často používané alternatívne miery závislosti kompenzujú niektoré nedostatky Pearsonovho korelačného koeficientu. Predpokladajme vzorku dvojrozmerných náhodných dát $(x_i, y_i), i \in 1 \dots n$. Aby sme zaistili platnosť vlastnosti 3. a vlastnosti 4., navrhneme mieru závislosti tak, že nebudeme brať do úvahy číselné hodnoty vo vzorke, ale poradie jednotlivých hodnôt v rámci usporiadania po zložkách. Formalizáciou a drobnou úpravou tejto myšlienky zavedieme pojem konkordancie.

Definícia 2.2. *Predpokladajme náhodný vektor (X,Y) a n pozorovaní z neho. Povieme, že pár pozorovaní (x_i, y_i) a pár (x_j, y_j) sú* konkordantné, *ak $x_i < x_j$ implikuje aj $y_i < y_j$ alebo ak pre $x_i > x_j$ platí zároveň aj $y_i > y_j$.*
Podobne, povieme, že páry pozorovaní z náhodného vektora (X,Y) sú diskordantné, ak $x_i < x_j$ implikuje $y_i > y_j$ alebo z $x_i > x_j$ vyplýva $y_i < y_j$.
Alternatívne možno povedať, že páry pozorovaní z náhodného vektora (X,Y) a sú konkorantné, ak platí $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$ a páry sú diskordantné, ak spĺňajú $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$.

Na základe definície konkordancie a diskordancie možno definovať nasledujúce miery závislosti.

Definícia 2.3. *Nech (X_1, Y_1) a (X_2, Y_2) sú nezávislé náhodné vektory z rovnakých rozdelení. Kendallovým τ nazveme rozdiel pravdepodobností*

$$\tau = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] \tag{4}$$

Rovnakú mieru možno určiť aj pre výberovú vzorku z dát. Nech $(x_i, y_i), i \in 1 \dots n$ je vzorka dát z náhodného vektora (X,Y). Nech c a d označujú počet konkordantných a diskonkordantných párov. Kendallovým tau *pre vzorku dát nazveme číslo*

$$k = \frac{c-d}{c+d} \tag{5}$$

Definícia 2.4. *Nech* (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3) *sú tri vzájomne nezávislé náhodné vektory s rovnakým rozdelením.* Spearmanovým koeficientom poradovej korelácie *budeme označovať hodnotu*

$$\rho_S = 3\left(P\left[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0\right] - P\left[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0\right]\right). \quad (6)$$

Spearmanovo ρ *možno určiť aj pre vzorku dát* $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{n}$ *pomocou vzťahu*

$$r_S = r_P\left(Rank\left(\mathbf{x}\right), Rank\left(\mathbf{y}\right)\right), \quad (7)$$

kde $\mathbf{x}$ *a* $\mathbf{y}$ *sú vektory tvorené x-ovými a y-ovými zložkami vzorky dát a* $Rank\left(\mathbf{z}\right)$ *označuje vektor poradí hodnôt vektora* $\mathbf{z}$ *v usporiadaní podľa veľkosti vzostupne. V prípade, že pre dve a viac zložiek* $\mathbf{x}$ *platí* $x_i = x_j, i \neq j, i, j \in 1 \ldots n$, *potom sa príslušným zložkám vektora s rovnakou hodnotou priradí priemerná hodnota poradí. Ak by väčšiemu množstvu zložiek vektora mali byť priradené priemerné hodnoty, potom je vhodné vykonať korekciu popísanú napr. v [24].*

Veta 2.2. Vlastnosti Spearmanovho a Kendallovho koeficientu poradovej korelácie: *Nech* X *a* Y *sú náhodné premenné. Potom miery závislosti* ρ_S *a* τ *majú nasledujúce vlastnosti:*

1. Komutativita*:*
   $\rho_S(X, Y) = \rho_S(Y, X)$,
   $\tau(X, Y) = \rho_P(Y, X)$;

2. Normalizovanosť*:*
   $-1 \leq \rho_S(X, Y) \leq 1$,
   $-1 \leq \tau(X, Y) \leq 1$;

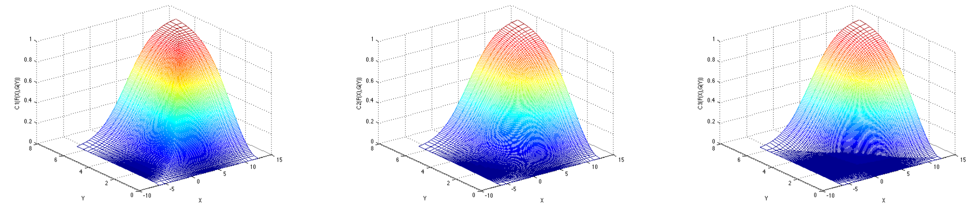
3. *ak* $Y = f(X)$, *kde* f *je rýdzo monotónna funkcia potom*
   $\rho_S(X, Y) = \tau(X, Y) = 1 \Leftrightarrow f$ *je neklesajúca*
   a
   $\rho_S(X, Y) = \tau(X, Y) = -1 \Leftrightarrow f$ *je nerastúca;*

4. *ak sú* X *a* Y *vzájomne nezávislé náhodné premenné, potom*
   $\rho_S(X, Y) = \tau(X, Y) = 0$;

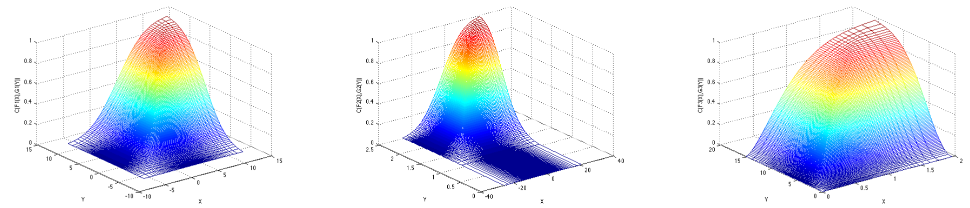
5. *ak* $\varphi(X)$ *je neklesajúca transformácia, potom*
   $\rho_S(\varphi(X), Y) = \rho_S(X, Y)$ *a*
   $\tau(\varphi(X), Y) = \tau(X, Y)$,
   podobne, ak $\varphi(X)$ *je nerastúca transformácia, potom*
   $\rho_S(\varphi(X), Y) = -\rho_S(X, Y)$ *a*
   $\tau(\varphi(X), Y) = -\tau(X, Y)$.

3 Kopuly

Je zrejmé, že nech akokoľvek zadefinujeme mieru závislosti dvoch náhodných premenných, pomocou jediného čísla nemožno dostatočne vystihnúť všetky aspekty závislosti. Situácie dobre ilustrujú nasledujúce obrázky:



Obr. 2: Príklad rozdielnych distribučných funkcii združených mnohorozmerných rozdelení so zhodnými okrajovými rozdeleniami



Obr. 3: Príklad distribučných funkcii mnohorozmerných rozdelení s rôznymi okrajovými rozdeleniami a s rovnakým závislostným modelom

Za rozumnú tak možno označiť myšlienku nájsť spôsob, ako popísať závislosť dvoch náhodných premenných bez ohľadu na ich okrajové rozdelenia. Zobecnenie tejto myšlienky vedie na pojem *kopula*. Nasledujúce pojmy a tvrdenia sú podrobne popísané v [87].

Definícia 3.1. *Symbolom $\triangle_{x_1}^{x_2} H(x,y)$ označíme rozdiel funkčných hodnôt funkcie $H : \overline{\mathbb{R}}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$ pre x rovné x_2 a x_1, tj. $\triangle_{x_1}^{x_2} H(x,y) = H(x_2,y) - H(x_1,y)$. Podobne $\triangle_{y_1}^{y_2} H(x,y) = H(x,y_2) - H(x,y_1)$.*

Definícia 3.2. H-mierou *množiny $A = [x_d, x_h] \times [y_d, y_h]$ nazveme funkciu: $V_H(A) = \triangle_{y_d}^{y_h} \triangle_{x_d}^{x_h} H(x,y) = H(x_h,y_h) - H(x_d,y_h) - H(x_h,y_d) + H(x_d,y_d)$.*

Definícia 3.3. *Funkciu $H : \overline{\mathbb{R}}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$ nazveme* 2-rastúcou, *ak $V_H(A) \geq 0, \forall A = [x_d, x_h] \times [y_d, y_h], x_d, x_h, y_d, y_h \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Definícia 3.4. Distribučnou funkciou *budeme nazývať takú funkciu $F : \overline{\mathbb{R}} \to I$, ktorá spĺňa nasledujúce podmienky:*

1. *F je neklesajúca*

2. *F je spojitá zľava*

3. $F(-\infty) = 0$ *a* $F(\infty) = 1$

Definícia 3.5. Združenou distribučnou funkciou *nazveme funkciu:* $H : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to I$ *spĺňajúcu nasledujúce podmienky:*

1. *H je 2-rastúca*

2. *H je spojitá zľava v oboch premenných*

3. $H(x, -\infty) = H(-\infty, y) = 0, \forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ *a* $H(\infty, \infty) = 1$

Teraz môžme zadefinovať *2-kopulu*. Ak bude z kontextu zrejmé, že pracujeme s dvojrozmernou funkciou, budeme používať iba termín *kopula* v tom istom význame.

Definícia 3.6. *Funkciu* $C : I^2 \to I$ *nazveme* 2-kopulou*, ak spĺňa zároveň všetky nasledujúce podmienky:*

1. *funkcia C je ukotvená:*

$$\forall u, v \in I : C(u, 0) = C(0, v) = 0 \tag{8}$$

2. *pre funkciu C platia okrajové podmienky:*

$$\forall u, v \in I : C(u, 1) = u, C(1, v) = v \tag{9}$$

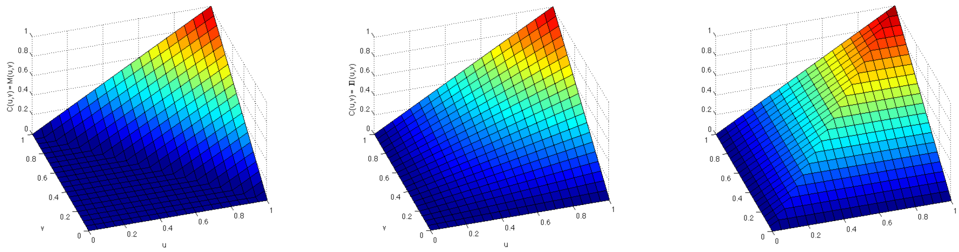
3. *funkcia C je 2-rastúca:*

$$V_C(A) \geq 0, \forall A = [u_d, u_h] \times [v_d, v_h], u_d, u_h, v_d, v_h \in I \tag{10}$$

Lemma 3.1. *Nech* $C : I^2 \to I$ *je ukotvená 2-rastúca funkcia. Potom je C neklesajúcou funkciou v ktorejkoľvek svojej premennej.*

Z definície kopuly, Lemmy (3.1) a za predpokladu spojitosti zľava vo všetkých premenných možno ukázať, že každá kopula je zároveň združenou distribučnou funkciou zúženou na I^2. Lemma (3.1) zaručuje neklesajúcosť v jednotlivých premenných, oborom hodnôt kopuly je interval $[0, 1]$. Z platnosti okrajových podmienok v definícii kopuly a 2-rastúcosti preto vyplýva, že funkcie $F(u) = C(u, 1)$ a $G(v) = C(1, v)$ sú distribučnými funkciami a funkcia C je zúženie niektorej spojitej združenej distribučnej funkcie H s nosičom v $\overline{\mathbb{R}}^2$ na I^2 ($=H|I^2$).

Dodržíme konvenciu z [87] a premenné 2-kopúl budeme označovať u a v.



(a) $W(u,v)$ (b) $\Pi(u,v)$ (c) $M(u,v)$

Veta 3.1. *Nech C je kopula. Potom pre $\forall u,v \in I$ platí:*

$$W(u,v) = max(u+v-1,0) \leq C(u,v) \leq min(u,v) = M(u,v)\,. \tag{11}$$

Funkcie W a M definované predpisom $W(u,v) = max(u+v-1,0)$ a $M(u,v) = min(u,v)$ nazývame *dolná* a *horná Fréchet-Hoeffdingova hranica.* Je triviálne ukázať, že funkcie W a M sú kopuly. Kopula Π daná vzťahom $\Pi(u,v) = u \cdot v$ sa často nazýva *kopula nezávislosti*, resp. *produktová kopula.*

Nasledujúce vety nám určia ohraničenia na rýchlosť rastu pre kopuly.

Veta 3.2. *Predpokladajme, že C je kopula. Potom pre $\forall u_1,u_2,v_1,v_2 \in I, u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2 \in I$ platí:*

$$|C(u_2,v_2) - C(u_1,v_1)| \leq |u_2-u_1| + |v_2-v_1|, \tag{12}$$

t.j. C je 1-Lipschitzovská pre L_1-normu. Funkcia C je preto zároveň aj rovnomerne spojitá na I^2.

Veta 3.3. *Nech C je kopula. Potom pre $\forall u,v \in I$, ak dané derivácie existujú, tak spĺňajú:*

$$0 \leq \frac{\partial C}{\partial u}(u,v) \leq 1 \tag{13}$$

$$0 \leq \frac{\partial C}{\partial v}(u,v) \leq 1 \tag{14}$$

Veta 3.4. Sklarova veta: *Nech H je združená distribučná funkcia s okrajovými rozdeleniami F a G. Potom existuje taká kopula C, že $\forall x,y \in \mathbb{R}$:*

$$H(x,y) = C(F(x),G(y)) \tag{15}$$

Ak F a G sú spojité, potom je C určená jednoznačne, v opačnom prípade je C určená jednoznačne na množine $Range(F) \times Range(G)$.
Naopak, ak C je kopula a F a G sú distribučné funkcie, potom funkcia H je združená distribučná funkcia s okrajovými rozdeleniami F a G.

Sklarovu vetu možno považovať za základnú vetu v oblasti teórie kopúl. S jej pomocou je možné prepojiť pojem kopuly s teóriou pravdepodobnosti, štatistikou a s praktickými aplikáciami. Aby sme však mohli dobre pracovať v oblasti pravdepodobnosti a štatistiky, potrebujeme na účel definície kvantilovej funkcie vhodne definovať zovšeobecnenie inverznej funkcie.

Definícia 3.7. *[49] Nech* $[a,b], [c,d] \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ *a nech funkcia* $f : [a,b] \to [c,d]$ *je monotónna a nekonštantná. Potom* pseudo-inverznou *funkciou nazveme funkciu* $f^{(-1)} : [c,d] \to [a,b]$ *definovanú predpisom:*

$$f^{(-1)}(y) = sup\{x \in [a,b] \,|\, (f(x) - y)(f(b) - f(a)) < 0\} \tag{16}$$

pre všetky $y \in [c,d]$.

Viac o zovšeobecneniach inverzných funkcií možno nájsť napr. v prácach [35], [64].

Veta 3.5. *Nech* X *a* Y *sú spojité náhodné premenné s distribučnými funkciami* F *a* G*. Potom* X *a* Y *sú stochasticky nezávislé vtedy a iba vtedy, ak* $H(x,y) = C_{X,Y}(F(x), G(y)) = \Pi(F(x), G(y)), \forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}$.

Po zadefinovaní pojmu 2-kopuly a krátkom zhrnutí niektorých jej dôležitých vlastností, ktoré budeme potrebovať. V tejto kapitole zadefinujeme a zhrnieme niektoré potrebné vlastnosti dôležitej triedy kopúl. Trieda Archimedovských kopúl je pre účely práce obzvlášť dôležitá, pretože predstavuje spôsob ako popísať určitý typ závislostnej štruktúry s použitím jednoduchšieho aparátu ako v prípade všeobecných kopúl.

Definícia 3.8. Aditívnym generátorom kopuly*, skrátene aj* generátorom*, označíme spojitú a rýdzo klesajúcu funkciu* $\varphi : I \to [0,\infty]$*,* $\varphi(1) = 0$*. Funkcia* $\varphi^{(-1)} : [0,\infty] \to I$ *definovanú nasledovne:*

$$\varphi^{(-1)}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t) & 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0 & \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases} \tag{17}$$

je pseudo-inverznou funkciou ku generátoru φ*. V prípade ak* $\varphi(0) = \infty$*, t.j. v prípade ak* $\varphi^{(-1)} = \varphi^{-1}$*, nazývame funkciu* φ striktným *generátorom kopuly.*

Lemma 3.2. *Nech* $\varphi : I \to [0,\infty]$ *je spojitá, rýdzo klesajúca funkcia spĺňajúca* $\varphi(1) = 0$ *a nech* $\varphi^{(-1)}$ *je jej pseudo-inverzom. Potom funkcia* $C : I^2 \to I$ *definovaná predpisom:*

$$C(u,v) = \varphi^{(-1)}(\varphi(u) + \varphi(v)) \tag{18}$$

spĺňa okrajové podmienky (8) a (9) pre 2-kopulu.

Veta 3.6. *Nech $\varphi : I \to (0, \infty)$ je spojitá, rýdzo klesajúca funkcia, kde $\varphi(1) = 0$ a nech $\varphi^{(-1)}$ je jej pseudo-inverzom. Potom je funkcia $C : I^2 \to I, C(u, v) = \varphi^{(-1)}(\varphi(u) + \varphi(v))$ 2-kopula vtedy a práve vtedy, ak φ je konvexná.*

Kopuly spĺňajúce predpis (18) nazývame *Archimedovské* kopuly. Ak je generátor kopuly striktný, kopulu nazývame *striktnou* kopulou.

Medzi v praxi často používané triedy Archimedovských kopúl patria kopuly určené nasledujúcimi predpismi:

- *Ali-Mikhail-Haq kopula*:
  určená generátorom generátorom:
  $$\varphi(t) = \ln \frac{1 - \theta(1 - t)}{t}, \tag{19}$$
  pre $\theta \in [1, \infty)$ s funkčným predpisom:
  $$C(u, v) = \frac{uv}{1 - \theta(1 - u)(1 - v)}; \tag{20}$$
- *Claytonova kopula*:
  určená generátorom generátorom:
  $$\varphi(t) = \frac{1}{\theta}\left(t^{-\theta} - 1\right), \tag{21}$$
  pre $\theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$ s funkčným predpisom:
  $$C(u, v) = \left[max\left(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1, 0\right)\right]^{-\frac{1}{\theta}}; \tag{22}$$
  a pre $\theta = 0, C = \Pi$.
- *Gumbelova kopula*:
  určená generátorom generátorom:
  $$\varphi(t) = (\ln t)^{\theta}, \tag{23}$$
  pre $\theta \in [1, \infty)$ s funkčným predpisom:
  $$C(u, v) = e^{-\left[(\ -\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta}\right]}; \tag{24}$$

- *Gumbelova-Hougard kopula*:
  určená generátorom generátorom:

$$\varphi(t) = \ln(1 - \theta \ln t), \tag{25}$$

  pre $\theta \in (0, 1]$ s funkčným predpisom:

$$C(u, v) = uve^{-\theta \ln u \ln v}; \tag{26}$$

- *Frankova kopula*:
  určená generátorom generátorom:

$$\varphi(t) = -\ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}, \tag{27}$$

  pre $\theta \in (-\infty, \infty) \setminus \{0\}$ s funkčným predpisom:

$$C(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{\left(e^{-\theta u} - 1\right)\left(e^{-\theta v} - 1\right)}{\left(e^{-\theta} - 1\right)} \right). \tag{28}$$

  V prípade, že $\theta = 0, C = \Pi$, pre $\theta = \infty, C = M$ a pre $\theta = -\infty, C = W$.

Okrem spomenutých tried existuje veľké množstvo iných tried kopúl, častokrát určených viacerými parametrami. Väčšina z nich bola vytvorená za konkrétnym účelom modelovať niektorú zo závislostných štruktúr pozorovanú v praxi. Podrobnosti možno nájsť v [87, 58, 32].

Zovšeobecnením triedy Archimedovských kopúl bola odvodená pre náš účel zaujímavá trieda kopúl [9].

Definícia 3.9. *Dvojrozmernú funkciu $C_{\varphi,A}$ nazveme* Archimax *kopulou, ak ju možno zapísať v tvare*

$$C_{\varphi,A}(u, v) = \varphi^{(-1)} \left((\varphi(u) + \varphi(v)) A \left(\frac{\varphi(u)}{\varphi(u) + \varphi(v)} \right) \right) \tag{29}$$

$\forall u, v \in I$, kde

1. *$A : I \to [1/2, 1]$ je konvexná funkcia, pre ktorú platí*
   $\max(1 - z, z) \le A(z) \le 1, \forall z \in I$
2. *φ je generátorom Archimedovskej kopuly.*

Funkciu A nazývame Pickandsovou závislostnou funkciou Archimax kopuly $C_{\varphi,A}$.

Veta 3.7. *Ak funkcia $C_{\varphi,A}$ spĺňa podmienky definície (3.9), potom je $C_{\varphi,A}$ 2-kopulou.*

Trieda Archimax kopúl je pre nás zaujímavá, pretože sme schopní pomocou generátora vytvárať kopulu, ktorá je nekomutatívna, čo je v praxi častý prípad a umožňuje tak kompenzovať najväčší nedostatok triedy Archimedovských kopúl.

V pratických aplikáciach kopúl sa možno často stretnúť s pojmom *empirické kopuly*. Najčastejšie sa používajú na účel odhadu hodnôt kopuly získanej z meraných údajov.

Definícia 3.10. *Predpokladáme vzorku údajov $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ veľkosti n z dvojrozmerného spojitého rozdelenia.* Empirickou kopulou *nazveme funkciu C_n danú vzťahom*

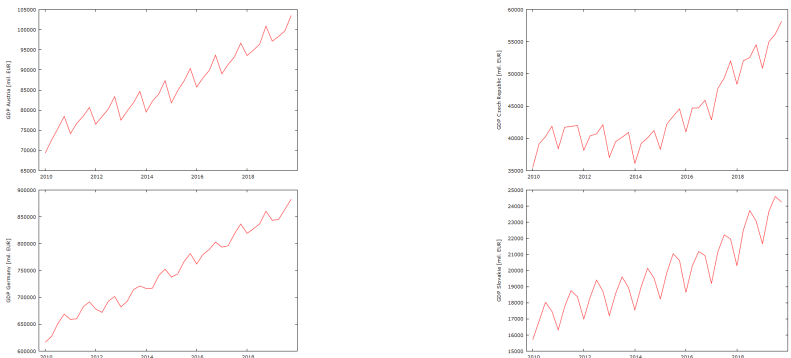
$$C_n\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1_{x_{r(k)} \leq x_{r(i)}, y_{r(k)} \leq y_{r(j)}}\left(x_k, y_k\right), \tag{30}$$

kde $x_{r(i)}$ je i-ta hodnota x-ovej súradnice vzorky vo vzostupnom usporiadaní, podobne $y_{r(j)}$ je j-ta hodnota y-ovej súradnice vzorky vo vzostupnom usporiadaní, pričom predpokladáme rôznosť pozorovaných údajov $x_1, \ldots, x_n$ resp. $y_1, \ldots, y_n$.

Už z definície možno vidieť, že empirické kopuly nie sú kopulami v pravom slova zmysle, keďže sú jednoznačne definované iba v niektorých bodoch I^2 Je však možné ich spojito dodefinovať tak, aby kopulami boli. V prípade meraných dát a z nich vytvorenej empirickej kopuly je celá pravdepodobnostná masa veľkosti 1 sústredená rovnomerne v n bodoch. Redistribúciou pravdepodobnostnej masy do množín $\left[x_{(k-1)}, x_{(k)}\right] \times \left[y_{(k-1)}, y_{(k)}\right]$ možno dosiahnúť dodefinovanie hodnôt na celom I^2. Definíciu 3.10 možno ľahko rozšíriť aj pre vyššie dimenzie.

4 Praktická aplikácia kopúl

V praktickej časti práce sme modelovali vplyv zmeny hodnoty HDP Nemecka na zmenu hodnoty HDP vybraného štátu regiónu V4. Z praktických dôvodov sme vybrali do porovnania Slovensko. Dôvodom bola spoločná mena a podobné štatistické charakteristiky časových radov Slovenska a Nemecka, ktoré nám umožnili za dodržania predpokladov modelov ARIMA vytvoriť z reziduí modelov kopulu. Pomocou kopuly sme modelovali závislosť zmien HDP oboch krajín. Do porovnania sme pridali ešte Rakúsko, ktoré ma rovnakú spoločnú menu a so Slovenskom zdieľa spoločnú históriu, ale je súčasťou hospodárskeho priestoru D-A-CH, t.j. väzba na hospodárstvo Nemecka je užšia, čo možno pozorovať z odhadov hodnôt mier závislostí získaných z empirických dát. Ostatné štáty buď nespĺňali predpoklad časovo stabilnej variancie za zvolené obdobie (Maďarsko, Poľsko) alebo ich nebolo možné vhodne modelovať pomocou zvolenej štruktúry modelu (Česko) za podmienky zachovanie predpokladu použitia ARIMA modelu (normálne rozdelenie reziduí). V prípade použitia rozdielnej štruktúry modelu v porovnaní s ostatnými krajinami by nebolo možné zmysluplne interpretovať kopulu vytvorenú z reziduí modelu. Údaje sme získali z databázy EUROSTAT zverejnených dňa 15.5.2020 [37].



Obr. 5: Grafy sezónne neočistených údajov HDP Rakúska, Česka, Nemecka a Slovenska v miliónoch € za obdobie Q1 2010 až Q4 2019

Surové údaje sme pomocou otvoreného softwarového balíka gretl metodikou X-12-ARIMA očistili od sezónnych vplyvov a trendové zložky odhadli pomocou vhodných modelov typu ARIMA(1,1,2).

Odstránením trendovej zložky sme získali reziduá, z ktorých sme vytvorili dve kopuly pokrývajúce stochastickú väzbu medzi údajmi HDP Slovenska a Nemecka a väzbu medzi HDP Rakúska a Nemecka. Aby sme z reziduí vy-

Krajina	**ARIMA model**
Nemecko	$(1-0,291L)\,(1-L)\,y_t = (1-0,703L+0.507L^2)\epsilon_t + 4499,341$
Rakúsko	$(1-0,359L)\,(1-L)\,y_t = (1-0,417L+0,137L^2)\epsilon_t + 469,037$
Slovensko	$(1-0,665L)\,(1-L)\,y_t = (1-0,677L+0,393L^2)\epsilon_t + 60,195$

Tabuľka 1: Odhadnuté modely časových radov rozdielov HDP jednotlivých štátov.

tvorili kopuly, bolo potrebné jednotlivé zložky transformovať príslušnou jednorozmernou distribučnou funckiou, v našom prípade distribučnou funkciou normálneho rozdelenia.

Krajina	μ [mil. €]	σ [mil. €]
Nemecko	-103,988	4411,497
Rakúsko	3,659	458,699
Slovensko	3,488	139,678

Tabuľka 2: Parametre normálneho rozdelenia reziduí rozdielov HDP jednotlivých štátov.

Bodové diagramy dátových bodov na odhad oboch kopúl:

(a) Slovensko/Nemecko (C_{SkGe}) (b) Rakúsko/Nemecko (C_{AtGe})

Obr. 6: Bodové diagramy (scatter plot) reziduí modelov HDP použité na odhad hodnôt empirických kopúl.

Z bodových diagramov možno predpokladať pozitívne hodnoty mier závislosti. Pre obidve kopuly C_{SkDe} a C_{AtDe} sme vypočítali základné miery závislosti (Pearsonov korelačný koeficient, Spearmanovo ρ_S a Kendallovo τ), ktoré tento predpoklad potvrdzujú.

Ako vidno, hodnoty rozdielov reziduí HDP Slovenska a Nemecka, popísané empirickou kopulou C_{SkGe}, vykazujú iba veľmi nízku mieru pozitívnej

Kopula	ρ_P	ρ_S	τ
Slovensko/Nemecko	0,1137	0,1270	0,0692
Rakúsko/Nemecko	0,3560	0,3265	0,2333

Tabuľka 3: Hodnoty mier závislosti pre jednotlivé empirické kopuly.

závislosti, čo nás núti pracovať aj s hypotézou o nezávislosti rozdielov rezíduí HDP Nemecka a Slovenska. V prípade závislosti rozdielov rezíduí HDP Rakúska a Nemecka, reprezentovaných empirickou kopulou C_{AtGe}, je miera pozitívnej závislosti jasne signifikantnejšia. S pomocou softwaru Matlab sme metódou maximálnej vierohodnosti odhadli parametre jednotlivých typov kopúl, prípadne kopúl získaných transformáciou prevrátením niektorej z osí.

Kopula	Parametre	AIC
Clayton	$\hat{\alpha} = 0,222$	0.213
Gumbel	$\hat{\alpha} = 1,315$	-5,216

Tabuľka 4: Najlepší odhady kopuly C_{SkGe} a kopuly C_{AtGe} s prislúchajúcimi hodnotami Akaikeho informačného kritéria.

Okrem štandardných kopúl sme sa pokúsili overiť aj možnosť použitia niektorej z kopúl z triedy Archimax vykreslením transformovaných bodov pre jednotlivé typy generátorov do priestoru s definovanou Pickandsovou funkciou, avšak neúspešne.

Pre parametrické odhady kopúl s najnižšími hodnotami Akaikeho informačného kritéria (AIC) sme úspešne vykonali testy dobrej zhody odhadovanej kopuly (GOF = goodness of fit) Münchhausenovou metódou. Vzhľadom k nízkemu počtu dátových bodov ($n = 40$) je na mieste v záujme dobrého odhadu snaha zredukovať počet parametrov na minimum.

S aktuálnymi nominálnymi hodnotami HDP podľa EUROSTAT pre prvý kvartál roku 2020 uvedenými v tabuľke 4 sme vykonali porovnanie odhadov zmeny HDP Rakúska a Slovenska podľa nášho modelu so skutočne nameranou zmenou HDP oboch štátov. Na základe známych nameraných odchýlok HDP v Nemecku sme odhadli zmeny hodnôt HDP na Slovensku a v Rakúsku pomocou metódy Monte Carlo. Z odhadnutých kopúl sme vytvorili podmienené rozdelenia pravdepodobnosti a na základe nameranej zmeny hodnoty HDP v Nemecku za prvý kvartál roku 2020 sme vygenerovali náhodne vzorky.

Aktuálne hodnoty zmien HDP v jednotlivých štátoch porovnáme s rozdielmi aktuálnych hodnôt HDP od ideálnej predpovede. Na vytvorenie každej z predpovedí vygenerujeme $N = 1000000$ vzoriek.

Krajina	**HDP**	**odhad HDP**	**ΔHDP**
Nemecko	847440,0	879974,5	-32534,4
Rakúsko	95706,2	101473,1	-5766,9
Slovensko	21485,3	22992,2	-1506,9

Tabuľka 5: Nominálne a sezónne neočistené hodnoty HDP jednotlivých štátov za prvý kvartál roku 2020 v mil. €.

Krajina	**Predpoveď**	**min**	**max**	**priemer**	**ΔHDP**
Rakúsko	Π	-2354,4	2229,6	3,7	-5767,0
Rakúsko	C_{AtGe}	-3739,7	-3198,5	-3723,6	-5767,0
Slovensko	Π	-641,9	704,0	3,6	-1506,9
Slovensko	C_{SkGe}	-1306,0	482.8	-948.5	-1506,9

Tabuľka 6: Vyhodnotenie odhadov zmeny HDP v závislosti od zmeny HDP Nemecka za prvý kvartál roku 2020 voči meranej hodnote zmeny HDP daného štátu metódou Monte Carlo za predpokladu empirickej a súčinovej kopuly v mil. €.

Napriek výrazne zjednodušenému modelu a extrémnemu poklesu hodnoty HDP z dôvodu obmedzenia hospodárskej činnosti v súvislosti s pandémiou ochorenia COVID-19 počas prvého kvartálu roku 2020 možno považovať výsledky za uspokojivé. Vzhľadom k skutočnosti, že Slovensko vstúpilo do Eurozóny v roku 2008, t.j. tesne pred začiatkom finančnej a následnej hospodárskej krízy, nebolo možné použiť viac údajov na účel presnejšieho odhadu kopuly bez toho, aby sme porušili niektorý z nutných predpokladov modelovania časových radov. Z vygenerovaných vzoriek veľkosti $N = 1000000$ možno s dostatočnou istotou tvrdiť, že odhad pomocou parametrickej kopuly odhadnutej z historických údajov bol presnejší aj napriek tomu, že ani jeden z odhadov nebol schopný dostatočne presne reagovať na tak výraznú skokovú zmenu hodnôt HDP. Treba dodať, že náš relatívne jednoduchý model ani nie je schopný vhodne vystihnúť vplyv rozdielnych opatrení a rozdielnych začiatkov platnosti karanténnych opatrení na Slovensku, v Nemecku a v Rakúsku.

5 Záver a diskusia

Práca naplnila stanovené tézy. V teoretickej časti práce s prakticky uplatniteľnými výsledkami sme venovali najväčšiu pozornosť triede Archimax kopúl. Ukázali sme ekvivalenciu triedy kónických kopúl a triedy Archimax kopúl založených na generátore kopuly W. Následne sme pre kónicke kopuly odvodili vzťah pre výpočet Spearmanovho ρ zo znalosti Pickandsovej funkcie závislosti. Bolo snahou použiť túto triedu kopúl aj v praktickej aplikácii, avšak údaje vykazovali rozdielnu štruktúru závislosti. V aplikácii sme sa s rovnakým výsledkom pokúsili použiť aj kopuly extrémych hodnôt, ktoré rovnako patria do triedy Archimax kopúl. V praktickej aplikácii sa najlepšie uplatnili Claytonova a Gumbelova kopula, čo vzhľadom k skutočnosti, že sme pracovali s ekonomickými dátami, nie je nijako prekvapujúce [71].

Hlbšie sme preskúmali aj viaceré konštrukcie kvázi-kopúl (ordinálne súčty a defektové transformácie), t.j. štruktúry, ktoré sú zovšeobecnením kopúl. Na základe defektových transformácií sme alternatívne definovali nepresné kopuly, matematickú štruktúru, ktorá na množine kvázi-kopúl reprezentuje myšlienku p-hyperintervalov. V tejto konštrukcii vidíme možné budúce širšie praktické uplatnenie.

Vo väčšine praktických aplikácií vidno snahu modelovať údaje pomocou niektorej zo známych tried kopúl. Systematicky sa pre každú z uvažovaných tried kopúl vyberie pre danú triedu vhodná metóda odhadu a následne sa s jej pomocou odhadnú parametre kopuly. Vhodnosť jednotlivých modelov sa následne posúdi na základe výsledkov testov GOF a vyberie sa najvhodnejší model.

Alternatívou pre menšie vzorky údajov by mohli byť neparametrické modely postavené na empirických kopulách, prípadne niektoré ich rozšírenia. Prístup pomocou empirických kopúl možno navyše automatizovať. Hlavnou nevýhodou aplikácie empirických kopúl vo finančnej matematike a ich prípadnom využití pri Monte Carlo simuláciach je nevhodná štruktúra náhodných vzoriek získaných z empirickej kopuly na tento účel. Túto nevýhodu možno odstrániť pomocou niektorých známych rozšírení. Lineárne rozšírenie empirickej kopuly má pravdepodobnostnú intepretáciu, keďže ho možno získať pomocou lineárnej interpolácie empirických distribučných funkcií jednotlivých náhodných premenných. Ostatné rozšírenia empirickej kopuly ako použitie vlnkovej transformácie, odhad hustoty s pomocou Gaussovských jadier, prípadne odhad s pomocou Bernsteinových polynómov sú v praxi používané, avšak ťažko ich interpretovať štatisticky [84]. V práci možno nájsť porovnanie jednotlivých metód. Mnohé zo spomínaných rozšírení možno použiť aj v prípade viacerých rozmerov.

Najvýznamnejšie výsledky autora:

DIBALA, M., VAVRÍKOVÁ, L. A note on Archimax copulas and their representation by means of conic copulas. In *Fuzzy Sets and Systems.* 2017, vol. 308, p. 123-132.

DIBALA, M., SAMINGER-PLATZ, S., MESIAR, R. AND KLEMENT, E.P. Defects and transformations of quasi-copulas. In *Kybernetika.* 2016, vol. 52, no. 6, p. 848-865.

DIBALA, M., VAVRÍKOVÁ, L. Determining Spearma's Rho for Conic Copulas. In *MAGIA, 2015.* ISBN 978-80-227-4611-3. 2016, p. 7-14.

SAMINGER-PLATZ, S. DIBALA, M., KLEMENT, E. P. AND MESIAR, R. Ordinal sums of binary conjunctive operations based on the product. In *PUBLICATIONES MATHEMATICAE-DEBRECEN.* 2017, vol. 91, no. 1-2, p. 63-80.

Literatúra

[1] Alsina, C., Nelsen, R. B., and Schweizer, B. On the characterization of a class of binary operations on distribution functions. *Statistics & Probability Letters 17*, 2 (1993), 85–89.

[2] Alsina, C., Schweizer, B., and Frank, M. J. *Associative functions: triangular norms and copulas.* World Scientific, 2006.

[3] Alvoni, E., Papini, P. L., and Spizzichino, F. On a class of transformations of copulas and quasi-copulas. *Fuzzy Sets and Systems 160*, 3 (2009), 334–343.

[4] Bassan, B., and Spizzichino, F. Relations among univariate aging, bivariate aging and dependence for exchangeable lifetimes. *Journal of Multivariate Analysis 93*, 2 (2005), 313–339.

[5] Bedford, T., and Cooke, R. M. Vines: A new graphical model for dependent random variables. *Annals of Statistics* (2002), 1031–1068.

[6] Berg, D., and Quessy, J.-f. Local power analyses of goodness-of-fit tests for copulas. *Scandinavian Journal of Statistics 36*, 3 (2009), 389–412.

[7] Birkhoff 3rd, G. Lattice theory, vol. 25 of american mathematical society colloquium publications. *American Mathematical Society, Providence, RI* (1967).

[8] Box, G., Jenkins, G., Reinsel, G., and Ljung, G. *Time series analysis: forecasting and control.* John Wiley & Sons, 2015.

[9] Capéraà, P., Fougères, A.-L., and Genest, C. Bivariate distributions with given extreme value attractor. *Journal of Multivariate Analysis 72*, 1 (2000), 30–49.

[10] Cerrato, M., Crosby, J., Kim, M., and Zhao, Y. Modeling dependence structure and forecasting market risk with dynamic asymmetric copula. *???* (2015).

[11] Cherubini, U., Luciano, E., and Vecchiato, W. *Copula methods in finance.* John Wiley & Sons, 2004.

[12] Clifford, A. H. Naturally totally ordered commutative semigroups. *American Journal of Mathematics 76*, 3 (1954), 631–646.

[13] Clifford, A. H. Connected ordered topological semigroups with idempotent endpoints. *Transactions of the American Mathematical Society 88*, 1 (1958), 80–98.

[14] Clifford, A. H. Totally ordered commutative semigroups. *Bulletin of the American Mathematical Society 64*, 6 (1958), 305–316.

[15] Clifford, A. H. Connected ordered topological semigroups with idempotent endpoints. *Transactions of the American Mathematical Society 91*, 2 (1959), 193–207.

[16] Czado, C. Pair-copula constructions of multivariate copulas. *Copula theory and its applications* (2010), 93–109.

[17] De Baets, B., and De Meyer, H. Orthogonal grid constructions of copulas. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems 15*, 6 (2007), 1053–1062.

[18] De Baets, B., De Meyer, H., and Díaz, S. On an idempotent transformation of aggregation functions and its application on absolutely continuous archimedean copulas. *Fuzzy Sets and Systems 160*, 6 (2009), 733–751.

[19] de Haan, L. Discussion of "Copulas: Tales and facts", by Thomas Mikosch. *Extremes 9*, 1 (2006), 21–22.

[20] de Vries, C. G., and Zhou, C. Discussion of "Copulas: Tales and facts", by Thomas Mikosch. *Extremes 9*, 1 (2006), 23–25.

[21] Dibala, M., Saminger-Platz, S., Mesiar, R., and Klement, E. P. Defects and transformations of quasi-copulas. *Kybernetika 52*, 6 (2016), 848–865.

[22] Dibala, M., and Vavríková, L. Determining the spearman's rho for conic copulas, vavríkova, dibala. *Magia 308* (2016), 123–132.

[23] Dibala, M., and Vavríková, L. A note on archimax copulas and their representation by means of conic copulas. *Fuzzy Sets and Systems 308* (2017), 123–132.

[24] Dodge, Y. *The concise encyclopedia of statistics*. Springer Science and Business Media, 2008.

[25] Dolati, A., Mohseni, S., and Úbeda-Flores, M. Some results on a transformation of copulas and quasi-copulas. *Information Sciences 257* (2014), 176–182.

[26] Durante, F., Saminger-Platz, S., and Sarkoci, P. On representations of 2-increasing binary aggregation functions. *Information Sciences 178*, 23 (2008), 4534–4541.

[27] Durante, F., Saminger-Platz, S., and Sarkoci, P. Rectangular patchwork for bivariate copulas and tail dependence. *Communications in Statistics—Theory and Methods 38*, 15 (2009), 2515–2527.

[28] Durante, F., and Sánchez, J. F. On the approximation of copulas via shuffles of min. *Statistics & Probability Letters 82*, 10 (2012), 1761–1767.

[29] Durante, F., Sarkoci, P., and Carlo, S. Shuffles of copulas. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 352*, 2 (2009), 914–921.

[30] Durante, F., and Sempi, C. Copula and semicopula transforms. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences 2005*, 4 (2005), 645–655.

[31] Durante, F., and Sempi, C. Semicopulæ. *Kybernetika 41*, 3 (2005), 315–328.

[32] Durante, F., and Sempi, C. *Principles of copula theory.* CRC press, 2015.

[33] Eban, E., Rothschild, G., Mizrahi, A., Nelken, I., and Elidan, G. Dynamic copula networks for modeling real-valued time series. In *Artificial Intelligence and Statistics* (2013), pp. 247–255.

[34] Elidan, G. Copulas in machine learning. In *Copulae in mathematical and quantitative finance.* Springer, 2013, pp. 39–60.

[35] Embrechts, P., and Hofert, M. A note on generalized inverses. *Mathematical Methods of Operations Research 77*, 3 (2013), 423–432.

[36] Embrechts, P., McNeil, A., and Daniel, S. Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls. *Risk management: value at risk and beyond 1* (2002), 178–223.

[37] EUROSTAT. Gdp and main components (output, expenditure and income).

[38] EUROSTAT. Glossary:gross domestic product (gdp).

[39] EUROSTAT. Glossary:gross domestic product (gdp).

[40] Fermanian, J.-D., and Wegkamp, M. H. Time-dependent copulas. *Journal of Multivariate Analysis 110* (2012), 19–29.

[41] Frank, M. J. On the simultaneous associativity of f (x, y)*and*x+y - f (x, y). *Aequationes mathematicae 19*, 1 (1979), 194–226.

[42] Frees, E. W., and Valdez, E. A. Understanding relationships using copulas. *North American actuarial journal 2*, 1 (1998), 1–25.

[43] Fuchs, S., and Schmidt, K. D. Bivariate copulas: transformations, asymmetry and measures of concordance. *Kybernetika 50*, 1 (2014), 109–125.

[44] Genest, C., Molina, J. Q., Lallena, J. R., and Sempi, C. A characterization of quasi-copulas. *Journal of Multivariate Analysis 69*, 2 (1999), 193–205.

[45] Genest, C., and Rémillard, B. Discussion of "Copulas: tales and facts", by Thomas Mikosch. *Extremes 9*, 1 (2006), 27–36.

[46] Genest, C., and Rémillard, B. Validity of the parametric bootstrap for goodness-of-fit testing in semiparametric models. *Annales l'IHP Probabilités es statistiques 44*, 6 (2008), 1096–1127.

[47] Genest, C., Rémillard, B., and Beaudoin, D. Goodness-of-fit tests for copulas: A review and a power study. *Insurance: Mathematics and economics 44*, 2 (2009), 199–213.

[48] Gómez, V., and Maravall, H. A. *Programs TRAMO and SEATS: instructions for the user (beta version: September 1996)*. Banco de España. Servicio de Estudios, 1995.

[49] Grabisch, M., Marichal, J.-L., Mesiar, R., and Pap, E. *Aggregation functions*, vol. 127. Cambridge University Press, 2009.

[50] gretl. gretl and tramo/seats, 2020.

[51] gretl. gretl and x-12-arima, 2020.

[52] Hájek, P. *Metamathematics of fuzzy logic*, vol. 4. Springer Science & Business Media, 1998.

[53] Hood, C. C. Comparison of time series characteristics for seasonal adjustments from seats and x-12-arima. *ASA proceedings, business and economic statistics section, alexandria, VA: ASA* (2002).

[54] Jenei, S. Structure of left-continuous triangular norms with strong induced negations (ii) rotation-annihilation construction. *Journal of Applied Non-Classical Logics 11*, 3-4 (2001), 351–366.

[55] Jenei, S. Structure of girard monoids on [0, 1]. In *Topological and Algebraic Structures in Fuzzy Sets*. Springer, 2003, pp. 277–308.

[56] Joe, H. *Multivariate models and multivariate dependence concepts*. CRC Press, 1997.

[57] Joe, H. Discussion of "Copulas: Tales and facts", by Thomas Mikosch. *Extremes 9*, 1 (2006), 37–41.

[58] Joe, H. *Dependence modeling with copulas*. CRC Press, 2014.

[59] Jwaid, T. *Semilinear and semiquadratic conjunctive aggregation functions*. PhD thesis, Ghent University, 2014.

[60] Jwaid, T., De Baets, B., Kalická, J., and Mesiar, R. Conic aggregation functions. *Fuzzy Sets and Systems 167*, 1 (2011), 3–20.

[61] Kalická, J. On some construction methods for 1-lipschitz aggregation functions. *Fuzzy sets and Systems 160*, 6 (2009), 726–732.

[62] Kim, J.-M., Jung, Y.-S., Sungur, E. A., Han, K.-H., Park, C., and Sohn, I. A copula method for modeling directional dependence of genes. *BMC bioinformatics 9*, 1 (2008), 225.

[63] Klement, E. P., and Kolesárová, A. Extension to copulas and quasi-copulas as special 1-lipschitz aggregation operators. *Kybernetika 41*, 3 (2005), 329–348.

[64] Klement, E. P., Mesiar, R., and Pap, E. A note on generalized inverses. *Fuzzy Sets and Systems 104*, 1 (1999), 3–13.

[65] Klement, E. P., Mesiar, R., and Pap, E. *Triangular norms. 2000*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[66] Klement, E. P., Mesiar, R., and Pap, E. Invariant copulas. *Kybernetika 38*, 3 (2002), 275–286.

[67] Klement, E. P., Mesiar, R., and Pap, E. Transformations of copulas. *Kybernetika 41*, 4 (2005), 425–434.

[68] Kolesárová, A. 1-lipschitz aggregation operators and quasi-copulas. *Kybernetika 39*, 5 (2003), 615–629.

[69] Kolesárová, A., Mesiar, R., and Kalická, J. On a new construction of 1-lipschitz aggregation functions, quasi-copulas and copulas. *Fuzzy Sets and Systems 226* (2013), 19–31.

[70] Kolesárová, A., and Mordelová, J. 1-lipschitz and kernel aggregation operators. *Proc. AGOP* (2001), 71–76.

[71] Kreinovich, V., Nguyen, H. T., and Sriboonchitta, S. Why clayton and gumbel copulas: a symmetry-based explanation. In *Uncertainty analysis in econometrics with applications*. Springer, 2013, pp. 79–90.

[72] Li, X., Mikusiński, P., Sherwood, H., and Taylor, M. On approximation of copulas. In *Distributions with given marginals and moment problems*. Springer, 1997, pp. 107–116.

[73] Lindner, A. Discussion of "Copulas: Tales and facts", by Thomas Mikosch. *Extremes 9*, 1 (2006), 43–44.

[74] Ling, C. M. Representation of associative functions. *PUBLICATIONES MATHEMATICAE-DEBRECEN 12* (1965), 189–212.

[75] MacKenzie, D., and Spears, T. 'The Formula That Killed Wall Street'? The Gaussian Copula and the Material Cultures of Modelling. *Edinburgh, University of Edinburgh, June* (2012).

[76] MacKenzie, D., and Spears, T. 'The formula that killed Wall Street': The Gaussian copula and modelling practices in investment banking. *Social Studies of Science 44*, 3 (2014), 393–417.

[77] Mesiar, R., Jágr, V., Juráňová, M., and Komorníková, M. Univariate conditioning of copulas. *Kybernetika 44*, 6 (2008), 807–816.

[78] Mesiar, R., and Jágr, V. d-dimensional dependence functions and archimax copulas. *Fuzzy Sets and Systems 228* (2013), 78–87.

[79] Mesiar, R., and Sempi, C. Ordinal sums and idempotents of copulas. *Aequationes mathematicae 79*, 1–2 (2010), 39–52.

[80] Mesiar, R., and Szolgay, J. W-ordinal sums of copulas and quasi-copulas. In *Proceedings of the MAGIA 2004 Conference, Koňovce, Slovak Republic* (2004), pp. 78–83.

[81] Mikosch, T. *Copulas: Tales and facts.* Laboratory of Actuarial Mathematics, University of Copenhagen, 2005.

[82] Mikosch, T. Copulas: Tales and facts—rejoinder. *Extremes 9*, 1 (2006), 55–62.

[83] Mikusinski, P., Sherwood, H., and Taylor, M. D. Shuffles of min. *Stochastica 13*, 1 (1992), 61–74.

[84] Mikusiński, P., and Taylor, M. D. Some approximations of n-copulas. *Metrika 72*, 3 (2010), 385–414.

[85] Montes, I., Miranda, E., and Montes, S. Decision making with imprecise probabilities and utilities by means of statistical preference and stochastic dominance. *European Journal of Operational Research 234*, 1 (2014), 209–220.

[86] Montes, I., Miranda, E., Pelessoni, R., and Vicig, P. Sklar's theorem in an imprecise setting. *Fuzzy Sets and Systems 278* (2015), 48–66.

[87] Nelsen, R. B. *An Introduction to Copulas.* Springer-Verlag New York, 2006.

[88] Patton, A. J. Copula–based models for financial time series. In *Handbook of financial time series.* Springer, 2009, pp. 767–785.

[89] Pelessoni, R., Vicig, P., Montes Gutiérrez, I., and Miranda Menéndez, E. Imprecise copulas and bivariate stochastic orders. *???* (2013).

[90] Peng, L. Discussion of "Copulas: Tales and facts", by Thomas Mikosch. *Extremes 9*, 1 (2006), 49–50.

[91] Rodabaugh, S. E., and Klement, E. P. *Topological and algebraic structures in fuzzy sets: A handbook of recent developments in the mathematics of fuzzy sets*, vol. 20. Springer Science & Business Media, 2013.

[92] Saminger-Platz, S., Dibala, M., Klement, E. P., and Mesiar, R. Ordinal sums of binary conjunctive operations based on the product. *PUBLICATIONES MATHEMATICAE-DEBRECEN 70*, 3-4 (2007), 319–335.

[93] Scarsini, M. On measures of concordance. *Stochastica 8*, 3 (1984), 201–218.

[94] Schweizer, B., and Sklar, A. Statistical metric spaces. *Pacific journal of mathematics 10*, 1 (1960), 313–334.

[95] Schweizer, B., and Sklar, A. Associative functions and statistical triangle inequalities. *PUBLICATIONES MATHEMATICAE-DEBRECEN 8* (1961), 169–186.

[96] Schweizer, B., and Sklar, A. Associative functions and abstract semigroups. *PUBLICATIONES MATHEMATICAE-DEBRECEN 10* (1963), 69–81.

[97] Schweizer, B., and Sklar, A. *Probabilistic Metric Spaces.* North-Holland, New York, 1983.

[98] Schweizer, B., and Wolff, E. F. On nonparametric measures of dependence for random variables. *The annals of statistics* (1981), 879–885.

[99] Siburg, K. F., and Stoimenov, P. A. Gluing copulas. *Communications in Statistics—Theory and Methods 37*, 19 (2008), 3124–3134.

[100] Siburg, K. F., and Stoimenov, P. A. A measure of mutual complete dependence. *Metrika 71*, 2 (2010), 239–251.

[101] Sklar, A. Fonctions de repartition an dimensions et leurs marges. *Publ. inst. statist. univ. Paris 8* (1959), 229–231.

[102] Thorp, J. Change of seasonal adjustment method to x-12-arima, 2003.

[103] Trivedi, P. K., Zimmer, D. M., et al. Copula modeling: an introduction for practitioners. *Foundations and Trends® in Econometrics 1*, 1 (2007), 1–111.

[104] Trutschnig, W. On a strong metric on the space of copulas and its induced dependence measure. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 384*, 2 (2011), 690–705.

[105] TSAB. Guide to seasonal adjustment with x-12-arima, 2007.

[106] Villarreal, F. G. *Elementos teóricos del ajuste estacional de series económicas utilizando X-12-ARIMA y TRAMO-SEATS*. CEPAL, 2005.

[107] Walley, P. Statistical reasoning with imprecise probabilities. *???* (1991).

[108] Zadeh, L. A. Fuzzy sets. *Information and control 8*, 3 (1965), 338–353.