SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
Stavebná fakulta

Ing. Jozef Havran

Autoreferát dizertačnej práce

Mechanizmus preskoku štíhlej steny, prelomenia plochej škrupiny

na získanie akademického titulu
philosophiae doctor (PhD.)

v doktorandskom študijnom programe:
aplikovaná mechanika

v študijnom odbore:
5.1.7. aplikovaná mechanika

Forma štúdia:
denná

Bratislava, 2017

Dizertačná práca bola vypracovaná na Katedre stavebnej mechaniky Stavebnej fakulty Slovenskej technickej univerzity v Bratislave.

Predkladateľ: Ing. Jozef Havran
Katedra stavebnej mechaniky
Stavebná fakulta STU v Bratislave
Radlinského 11, 810 05 Bratislava

Školiteľ: doc. Ing. Martin Psotný PhD.
Katedra stavebnej mechaniky
Stavebná fakulta STU v Bratislave
Radlinského 11, 810 05 Bratislava

Oponenti: prof. Ing. Ján Benčat, CSc.
Katedra stavebnej mechaniky
Stavebná fakulta, Žilinská univerzita
Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

doc. Ing. Jiří Kala, PhD.
Ústav stavební mechaniky
Fakulta stavební, VUT v Brně
Veveří 331/95, 602 00 Brno, Česká republika

Ing. Miroslav Šimonovič, PhD.
autorizovaný stavebný inžinier
Nitrianska 37, 949 01 Nitra

Autoreferát bol rozoslaný: ....

Obhajoba dizertačnej práce sa bude konať dňa .... o ....h.

na Katedre stavebnej mechaniky Stavebnej fakulty Slovenskej technickej univerzity v Bratislave, Radlinského 11, 810 05 Bratislava.

Dekan Stavebnej fakulty STU v Bratislave
prof. Ing. Stanislav Unčík, PhD.

Obsah

Abstract

The expression stability denotes an attribute of structure that can be characterized as an ability of the structure to remain in the equilibrium state. Stability of the bearing system is a crucial requirement when it comes to the safety of each building structure. In the presented work, the attention is paid to the analysis of an undesirable phenomenon of loss of stability. From the analysis of simple bar structures we gradually move to the stability analysis of planar structures (thin plates and shells). Among the substantial problems concerning the mechanism of stability loss of thin-walled structures belongs the snap-through of thin plate, of von Mises truss and of a shallow shell. Theoretical background of this phenomenon is analyzed in detail in this work. The geometrically nonlinear theory must be used to describe the post buckling effect of thin-walled structures. In the work, an incremental technique has been used (Euler) in combination with iteration procedures (Newton-Raphson). Effect of shape imperfections (called as initial imperfections) has been analyzed. In the primary analyses it was necessary to confirm the validity of some principles on mathematically simple models of bars. Subsequently, we proceeded with analysis of thin plates and shallow shells. In the case of plates loaded in compression, the post buckling behavior was analyzed. Our next objective was to investigate the stability problems of cylindrical shells and shells of translation. The above mentioned problems were examined using the computer software based on the Finite Element Method. The results of particular programs and computation approaches were analyzed and evaluated.

Keywords

Stability, geometrically nonlinear theory, initial imperfections, incremental solution.

1 Úvod

Pojmom stabilita sa označuje vlastnosť konštrukcie, ktorá by sa dala charakterizovať ako schopnosť konštrukcie zotrvať v rovnovážnom stave. Stabilita nosného systému je základná požiadavka pri ohľade na bezpečnosť všetkých stavieb. Preto je potrebné venovať pozornosť práve analýze nežiaduceho javu, ktorým je strata stability.

Tlakové hodnoty osových a membránových zložiek napätí môžu viesť pri tenkostenných konštrukciách ku strate stability, čiže východisková geometrická konfigurácia sústavy sa stáva nestabilnou. Prechod do stabilného stavu je spojený, okrem prerozdelenia napätí, s veľkými, funkčne neprípustnými deformáciami a stratou únosnosti celej konštrukcie alebo jej časti. Z energetického hľadiska môžeme celý jav popísať ako premenu akumulovanej energie napätosti membránových zložiek na energiu napätosti ohybových zložiek. Z dôvodu, že sú membránová a ohybová tuhosť pri tenkostenných konštrukciách rádovo rozdielne, je tento proces sprevádzaný veľkými priehybmi strednicovej plochy konštrukcie. Strata stability môže byť lokálna, kedy dochádza k vybočeniu časti nosnej konštrukcie (napr. vybočenie steny nosníka), alebo celková, kedy dochádza k zlyhaniu nosného systému.

Pri riešení stabilitných úloh je možné použiť dva prístupy; teóriu lineárnej stability a geometricky nelineárny výpočet. Teória lineárnej stability, nazývaná aj linearizovaná úloha stability, vychádza z podmienok rovnováhy vypísaných na deformovanej sústave a vedie na problém vlastných čísel a vlastných vektorov. Linearizacia spočíva v tom, že membránové alebo osové sily nie sú funkciou priehybu. Táto teória sa zameriava na určenie vlastných tvarov vybočenia a kritického zaťaženia, pri ktorom dochádza k strate stability. Pri niektorých typoch úloh (analýza pokritického pôsobenia, analýza konštrukcie so začiatočnou imperfekciou a analýza konštrukcií, pri ktorých sa očakáva preskok) je táto teória nepostačujúca a je potrebné použiť nelineárny výpočet, ktorý využíva geometricky nelineárnu teóriu. Náročnosť takéhoto výpočtu je mnohonásobne vyššia ako pri linearizovanej úlohe.

1.1 Ciele dizertačnej práce

Jav preskoku steny alebo prelomenia škrupiny je v oblasti stavebných konštrukcií nežiaduci. Aby bolo možné tomuto javu predchádzať, je potrebné mechanizmus preskoku podrobne skúmať. Držiac sa zásady, že riešiť problémy je výhodné od jednoduchších k zložitejším, bolo nutné overiť mnohé zákonitosti najprv na matematicky jednoduchších modeloch prúta (jednorozmerná úloha), a až potom pristúpiť k riešeniu plošných konštrukcií ako úlohy dvojrozmernej. Boli stanovené nasledujúce ciele:

1. V prvom rade venovať pozornosť analytickému (presnému) riešeniu prútových sústav, potom prejsť na numerické riešenia. Na jednoduchom von Misesovom vzperadle analyzovať mechanizmus prelomenia vrcholu vzperadla.
2. Riešenie pokritického pôsobenia štíhlych stien namáhaných tlakom a analýza vplyvu začiatočných imperfekcií na správanie stien.

3. Skúmanie stabilitných problémov valcových škrupín pri zaťažení v smere normály a vo zvislom smere. Analýza konštrukcií so začiatočnými imperfekciami a skúmanie vplyvu priečneho rezu na únosnosť škrupín.
4. Skúmanie stabilitných problémov translačných škrupín pri zaťažení v smere normály. Analýza konštrukcií so začiatočnými imperfekciami pri rôznych okrajových podmienkach.
5. Porovnanie výsledkov z viacerých metodík výpočtu pomocou výpočtových softvérov pracujúcich na báze MKP (autorské programy (pracovníci katedry) a ANSYS).

1.2 Historický vývoj

Začiatky stabilitnej analýzy ako vednej disciplíny siahajú až do 18. storočia. Pričinil sa o to Leonard Paul Euler (1744), ktorý sa ako prvý venoval riešeniu vzperu prúta, a tým položil základy k teórii stability. Podstatnejší pokrok v stabilitnej analýze nastal až o 150-200 rokov neskôr. H. Poincaré (1885) napísal prácu, ktorá sa venovala stabilite rotujúcej tekutiny a ukázal, že strata stability je spojená s limitným alebo bifurkačným bodom. Začiatkom 20. storočia boli riešené úlohy stability a pokritického pôsobenia štíhlej steny. Za tvorcov prvej teórie stability sú považovaní Bryan a von Kármán (1910). V tomto období pôsobia aj Marguerre, Donel a von Mises, po ktorom je pomenované jednoduché kĺbové vzperadlo. Ďalším vedcom, ktorý sa pričinil o rozvoj stability bol Timoshenko (1936). Kvalitatívnym prelomom v teórii stability bola práca Koitera (1945). Jedným z najdôležitejších výsledkov Koiterovej teórie bolo zistenie, že začiatočné štádium pokritického pôsobenia je určené kvalitou riešenia v kritickom bode. Teória stability zaznamenala ďalší rozvoj v prácach Roordyho, Huseyina, Sewella, Thompsona, Connora a ďalších. Huseyin (1975) vytvoril koncepciu riešenia stabilitných problémov pomocou perturbačnej metódy. Najrozsiahlejšie dielo venované problémom stability je spracované autormi Bažantom a Cedolinom (1991).

V sedemdesiatych rokoch dvadsiateho storočia sa začína rozvíjať matematicko-počítačové modelovanie geometricky nelineárnych problémov v oblasti stability. Základ predstavuje priestorová diskretizácia sústavy metódou konečných prvkov (MKP) a riešenie tejto sústavy niektorou z modifikácií prírastkovej metódy. Murray a Wilson (1969) ako prví prezentovali kombinovanie prírastkových (Euler) a iteračných (Newton-Raphson) metód pri riešení nelineárnych problémov. Efekt prelomenia ako prví popísali Sharifi a Popov (1971). Použitie arc-length metódy na prekonanie limitných bodov zaťažovacej dráhy predstavil Riks (1972), Batoz a Dhatt (1979) prezentovali detekciu kritických bodov použitím arc-length metódy. Bathe (1982) sa venoval aplikácii metódy konečných prvkov pri geometricky nelineárnych problémoch. Washizu (1982) sa zaoberal variačnými metódami. O zhrnutie stabilitných problémov škrupín (cylindrických, sférických a kónických) v pozemnom staviteľstve sa pričinil Hampe (1983). Yamaki (1984) a Bushnell (1985) prezentovali stabilitnú analýzu škrupín formou počítačových programov. Numerickým metódam sa venovali aj Bittnar a Šejnoha (1992), Samuelson a Eggwertz (1992) a Ravinger (1994). Crisfield (1996) sa venovali programovaniu nelineárneho prístupu a Teng a Luo

(1998) predložili významnú modifikáciu tejto techniky. Zaujímavé experimentálne výsledky prezentujú aj Singer a kol. (2002). Podrobne spracovanú teóriu predkladajú Bloom a Coffin (2001). Tenkostenným oceľovým škrupinám sa venuje Teng a Rotter (2004).

Významnými odborníkmi na stabilitu boli v Československu M. Škaloud v Prahe a J. Djubek v Bratislave. Vďaka prácam ich tímov sa hovorilo o tzv. Československej škole stability. V Brne v súčasnosti pôsobia Kala a kolektív a Frantík a kolektív. V Bratislave na stavebnej fakulte sa zaoberajú stabilitou Ravinger, Psotný, Ároch a Baláž, na fakulte elektrotechniky a informatiky STU Murín a kolektív.

2 Súčasný stav riešenej problematiky

K základným rovniciam teórie pružnosti patria diferenciálne rovnice rovnováhy, rovnice kompatibility, geometrické a fyzikálne rovnice. Rovnovážny princíp, resp. rovnice rovnováhy môžu byť nahradené princípom minima celkovej potenciálnej energie. Rovnovážny princíp sa dá nahradiť aj vetou o virtuálnej práci. Nelinearity viazané na rovnováhu v teórii konštrukcií nemáme. V predloženej práci sme použili teóriu lineárnej stability a geometricky nelineárnu analýzu konštrukcií so začiatočnými imperfekciami (Geometrically Nonlinear Analysis of the Imperfect Structure).

Teória lineárnej stability vedie na problém vlastných čísel a vlastných vektorov. Pre riešenie kritického zaťaženia sa prijme predpoklad, že kritická sila F_{cr} sa rovná $\lambda \cdot F$. Dá sa vyjadriť z podmienky netriviálneho riešenia:

$$\left| \boldsymbol{K}_L - \lambda \boldsymbol{K}_G \right|_{\det} = 0, \tag{2.1}$$

kde $\boldsymbol{K_L}$ je tuhostná matica, $\boldsymbol{K_G}$ je geometrická matica (matica prírastku ohybovej tuhosti prúta od pôsobenia osových síl), λ je násobiteľ elastickej kritickej sily.

Geometricky nelineárna analýza využíva prírastkovú formuláciu. Pre tenkostenné konštrukcie platí, že premiestnenia v strednicovej ploche u, v (tzv. stenové premiestnenia) sú výrazne nižšie ako tzv. doskové premiestnenia w ($u, v << w$). Potom sú nelineárne členy pomerných pretvorení viazané iba na doskové premiestnenia.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_m + \boldsymbol{\varepsilon}_b, \; \boldsymbol{\varepsilon}_m = \boldsymbol{\varepsilon}_l + \boldsymbol{\varepsilon}_n, \tag{2.2}$$

kde $\boldsymbol{\varepsilon}_l = \left[u_{,x}\,, v_{,y}\,, u_{,y} + v_{,x}\right]^T$, $\boldsymbol{\varepsilon}_n = \frac{1}{2}\left[w_{,x}^2\,,\, w_{,y}^2\,, 2w_{,x}w_{,y}\,\right]^T$, $\boldsymbol{\varepsilon}_b = -z \cdot \boldsymbol{k} = -z \cdot \left[w_{,xx}\,, w_{,yy}\,, 2w_{,xy}\right]^T$.
Indexy za čiarkou označujú parciálne derivácie a w reprezentuje globálne premiestnenie.

Začiatočné pomerné pretvorenie sú viazané len na premiestnenia kolmé na strednicovú plochu:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{\varepsilon}_{0n} + \boldsymbol{\varepsilon}_{0b}, \tag{2.3}$$

kde $\boldsymbol{\varepsilon}_{0n} = \frac{1}{2}\left[w_{0,x}^2\,, w_{0,y}^2\,, 2w_{0,x}w_{0,y}\,\right]^T$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{0b} = -z \cdot \boldsymbol{k}_0 = -z \cdot \left[w_{0,xx}\,, w_{0,yy}\,, 2w_{0,xy}\right]^T$ a w_0 je člen prislúchajúci k začiatočným premiestneniam.

Pri analýzach bolo uvažované s lineárne pružným materiálom.

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D} \cdot (\varepsilon - \varepsilon_0), \tag{2.4}$$

kde $\boldsymbol{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$. E je Youngov modul pružnosti a ν je Poissonovo číslo.

Celková potenciálna energia sa vyjadrí nasledovne:

$$U = U_i + U_e = \int_V \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0)^T \boldsymbol{\sigma} \, dV - \int_A \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{p} dA. \tag{2.5}$$

Po úprave rovnice (2.5) sa získa vzťah:

$$U = \int_A \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon}_m - \boldsymbol{\varepsilon}_{0n})^T t \boldsymbol{D} (\boldsymbol{\varepsilon}_m - \boldsymbol{\varepsilon}_{0n}) dA + \int_A \frac{1}{2} (\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_0)^T \frac{t^3}{12} \boldsymbol{D} (\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_0) dA - \int_A \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{p} \, dA. \tag{2.6}$$

kde $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{k}$ sú vektor pomerných pretvorení a vektor krivostí, $\boldsymbol{\varepsilon}_0$, $\boldsymbol{k}_0$ sú vektor počiatočných pomerných pretvorení a vektor počiatočných krivostí, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{p}$ sú vektor premiestnení a prislúchajúci vektor zaťaženia.

Systém podmienkových rovníc sa získa z princípu minima prírastku celkovej potenciálnej energie ($\delta \Delta U = 0$).Výsledný systém podmienkových rovníc vyzerá nasledovne:

$$\boldsymbol{K}_{inc} \Delta \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{F}_{\text{int}} - \boldsymbol{F}_{ext} - \Delta \boldsymbol{F}_{ext} = \boldsymbol{0}. \tag{2.7}$$

kde $\boldsymbol{K}_{inc} = \left[\begin{array}{c:c} \boldsymbol{K}_{incD} & \boldsymbol{K}_{incDS} \\ \hdashline \boldsymbol{K}_{incSD} & \boldsymbol{K}_{incS} \end{array} \right]$ je prírastková tuhostná matica, $\boldsymbol{F}_{int} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{F}_{intD} \\ \hdashline \boldsymbol{F}_{intS} \end{array} \right\}$ je vektor vnútorných síl, $\boldsymbol{F}_{ext} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{F}_{extD} \\ \hdashline \boldsymbol{F}_{extS} \end{array} \right\}$ je vektor vonkajších síl, $\Delta \boldsymbol{F}_{ext} = \left\{ \begin{array}{c} \Delta \boldsymbol{F}_{extD} \\ \hdashline \Delta \boldsymbol{F}_{extS} \end{array} \right\}$ je vektor prírastku vonkajších síl a $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\alpha} = \left[\begin{array}{c:c} \boldsymbol{B}_D & \\ \hdashline & \boldsymbol{B}_S \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\alpha}_D \\ \hdashline \boldsymbol{\alpha}_S \end{array} \right\}$, $\Delta \boldsymbol{q} = \boldsymbol{B} \cdot \Delta \boldsymbol{\alpha}$.

Pri prírastkovom postupe riešenia predpokladajme, že presné riešenie reprezentuje vektor $\boldsymbol{\alpha}^i$, potom platí $\boldsymbol{F}_{int} - \boldsymbol{F}_{ext} = 0$. Dosadením do rovnice (2.7) dostávame vzťah pre prírastok: $\boldsymbol{K}_{inc} \Delta \boldsymbol{\alpha} = \Delta \boldsymbol{F}_{ext} \Rightarrow \Delta \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{K}_{inc}^{-1} \Delta \boldsymbol{F}_{ext}$ a $\boldsymbol{\alpha}^{i+1} = \boldsymbol{\alpha}^i + \Delta \boldsymbol{\alpha}$. Newton-Raphsonovu iteráciu môžeme zostaviť nasledujúcim spôsobom. Predpokladom, že vektor $\boldsymbol{\alpha}^i$ nepredstavuje presné riešenie, nám vznikajú reziduá $\boldsymbol{F}_{int}^i - \boldsymbol{F}_{ext}^i = \boldsymbol{r}^i$. Opravu koreňov získame z podmienky $\Delta \boldsymbol{\alpha}^i = -\boldsymbol{K}_{inc}^{-1} \boldsymbol{r}^i$, $\boldsymbol{\alpha}^{i+1} = \boldsymbol{\alpha}^i + \Delta \boldsymbol{\alpha}^i$. Pri analýze využívame predpoklad, že Jacobiho matica Newton-Raphsonovej iterácie je zhodná s prírastkovou tuhostnou maticou $\boldsymbol{J} \equiv \boldsymbol{K}_{inc}$.

3 Analýza výsledkov – plošné konštrukcie (štíhle steny)

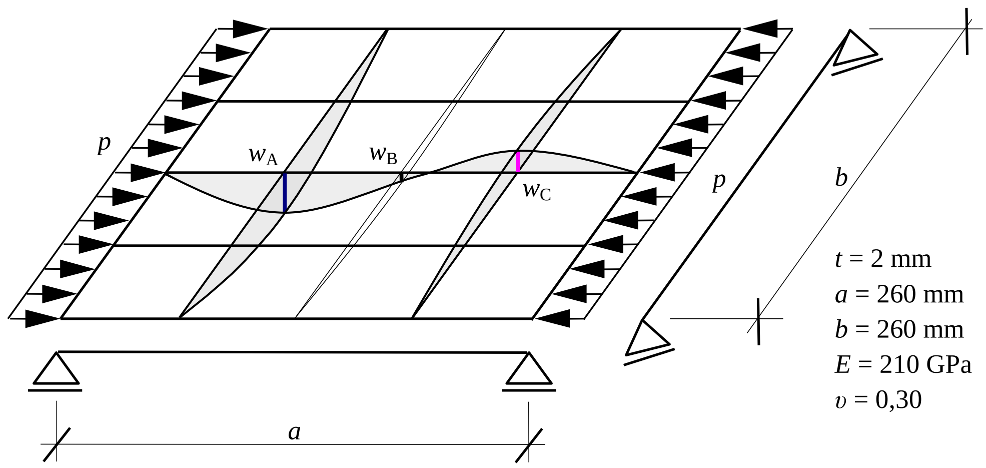
Štíhla stena je základný konštrukčný prvok tenkostennej konštrukcie. Membránové sily pôsobiace v rovine namáhanej steny môžu hrať rozhodujúcu úlohu a z tohto dôvodu je stabilitný výpočet neoddeliteľnou súčasťou každého statického výpočtu stenových konštrukcií.

Pre riešenie sme si vybrali štíhlu stenu po obvode kĺbovo podopretú, namáhanú tlakom v jednom smere. Túto stenu sme podrobili nelineárnemu výpočtu, ktorého výsledkom sú zaťažovacie dráhy (priebeh závislosti premiestnenia od zaťaženia) pre vybrané body strednicovej roviny. V konkrétnych prípadoch sme znázornili aj tvar vybočujúcej plochy.

Pri riešení stability štíhlej steny sme sa nemohli uspokojiť len s určením kritického zaťaženia (linearizovaná úloha stability), to je zaťaženie, kedy vybočí ideálne rovná stena. Chceli sme presnejšie definovať prípustnú hladinu zaťaženia, preto sme sa zamerali na vplyv začiatočnej imperfekcie na pokritické pôsobenie reálnej steny. V prvom prípade sme modelovali tvary začiatočnej geometrickej imperfekcie zodpovedajúce tvaru vybočenia pri minimálnej hodnote kritického zaťaženia. V druhom prípade sme modelovali tvar imperfekcie, ktorý bol podobný druhému vlastnému tvaru vybočenia.

3.1 Nelineárne riešenie pravouhlej štíhlej steny so začiatočnou imperfekciou

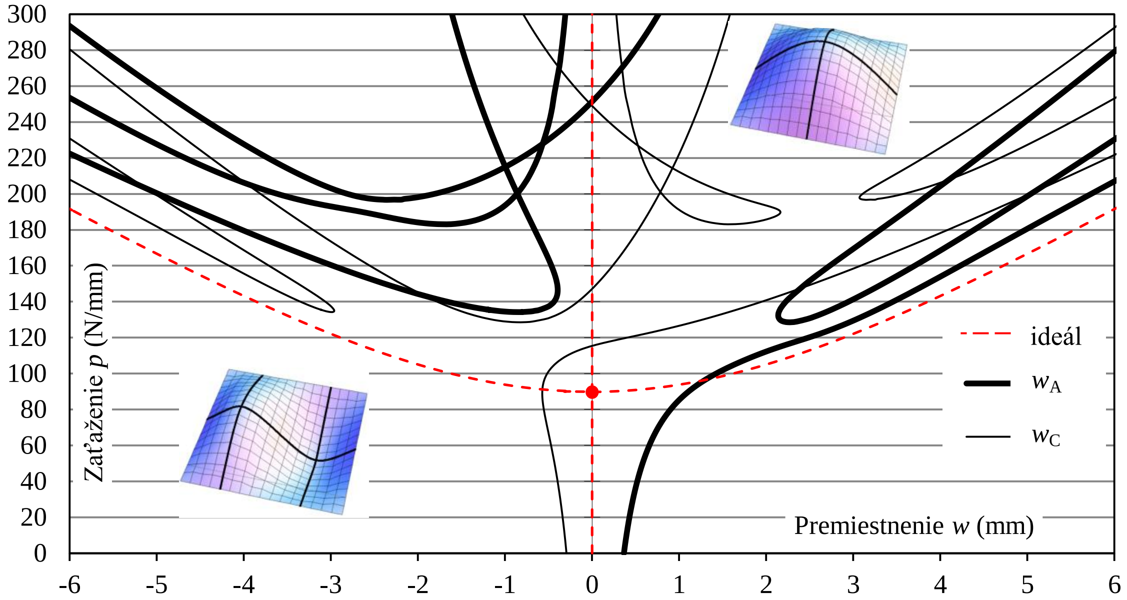
Konkrétnym príkladom, ktorý sme riešili bola štíhla stena kĺbovo podopretá po obvode, namáhaná tlakom v jednom smere (Obr. 3.1). Stenu tvorí oceľový plech hrúbky 2 mm. V autorskom programe sme model rozdelili na 4x4 prvky. Tento program využíva štvoruzlový prvok s 12 stupňami voľnosti v každom uzle (48 DOF).



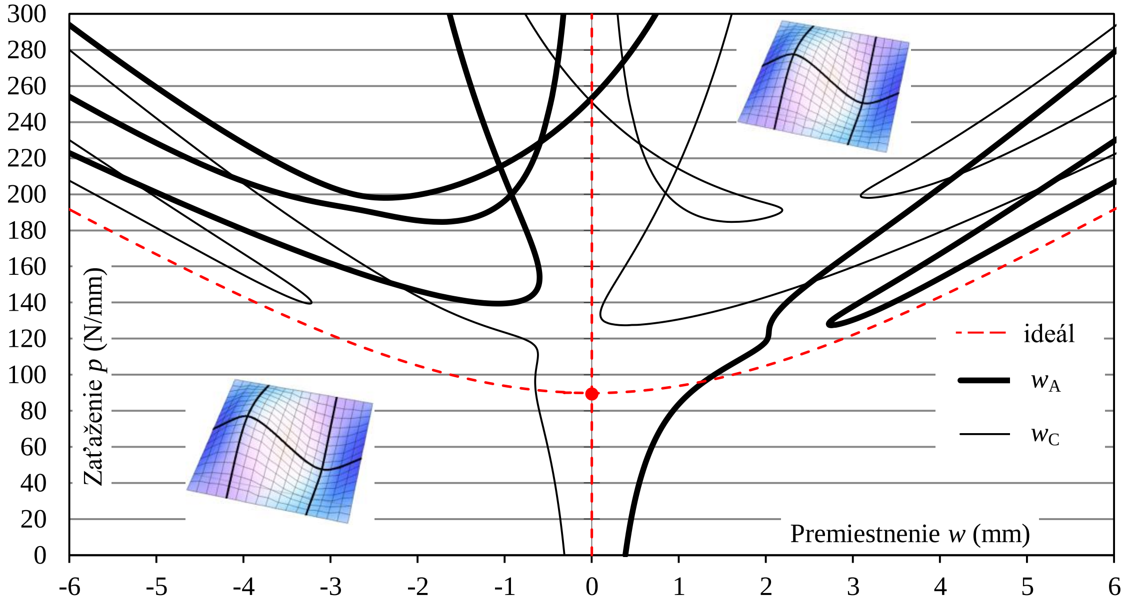
Obr. 3.1 Pravouhlá štíhla stena namáhaná tlakom.

V nasledujúcej analýze sme uvažovali so začiatočnou geometrickou imperfekciou v tvare $w_0 = \alpha_{01} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b} + \alpha_{02} \sin\frac{2\,\pi\pi}{a} \sin\frac{\pi y}{b}$. Tento tvar predstavuje lineárnu kombináciu 1. a 2. vlastného tvaru a je prenásobený vhodne zvolenými parametrami α_{0i}. Na nasledujúcich obrázkoch sme znázornili zaťažovacie dráhy uzla A a uzla C (premiestnenia

w_A a w_C z Obr. 3.1).



Obr. 3.2 Zaťažovacie dráhy vybočujúcej plochy štíhlej steny so začiatočnou imperfekciou v tvare $w_0 = 0{,}05 \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} + 0{,}33 \sin\frac{2\,\pi\pi}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$.



Obr. 3.3 Zaťažovacie dráhy vybočujúcej plochy štíhlej steny so začiatočnou imperfekciou v tvare $w_0 = 0{,}05 \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} + 0{,}35 \sin\frac{2\,\pi\pi}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$.

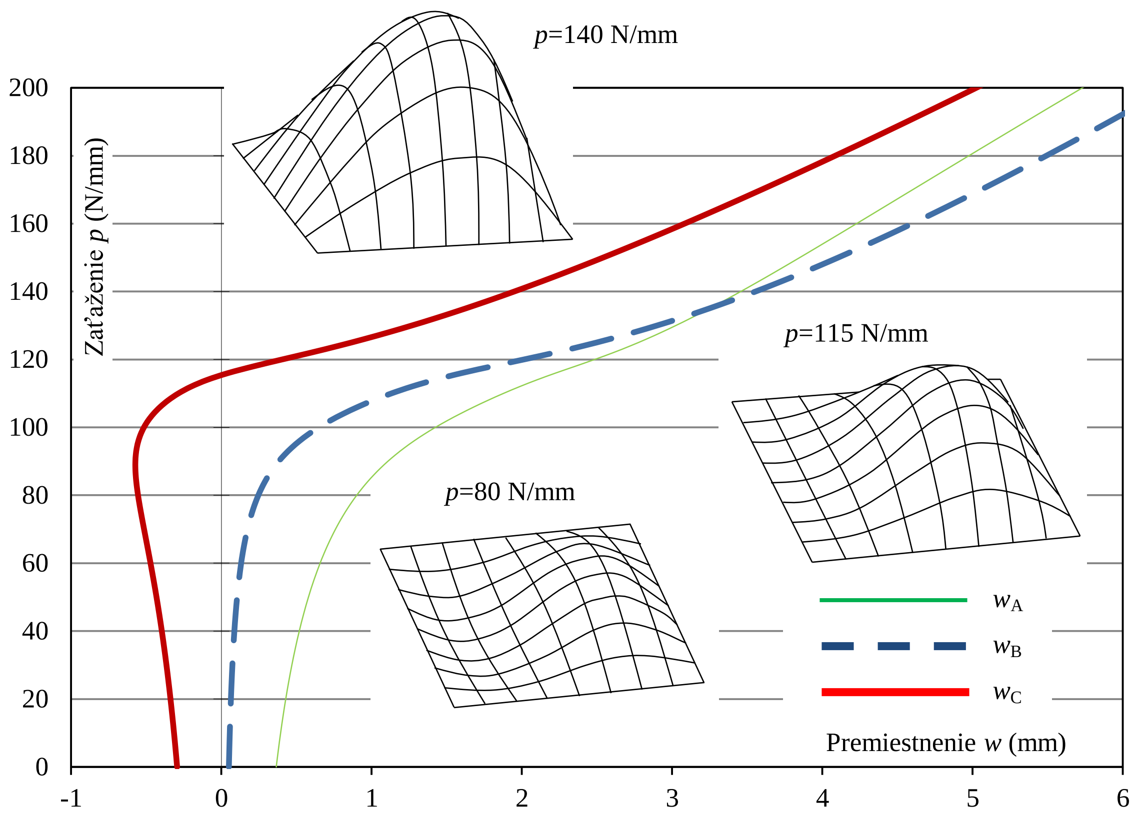
Z hľadiska tvaru vybočovania v pokritickom štádiu sú premiestnenia týchto uzlov výstižnejšie ako premiestnenie stredového uzla w_B. Na Obr. 3.2 sú spracované výsledky pre štíhlu stenu s parametrami začiatočnej imperfekcie α_{01}=0,05 a α_{02}=0,33. Vidíme, že v blízkosti hodnoty kritického zaťaženia (p_{cr}= 89,846 N/mm) dochádza v mieste uzla C k prechodu z pôvodného tvaru (tvar začiatočnej imperfekcie) do tvaru, ktorý je podobný prvému vlastnému tvaru (viď Obr. 3.2).

Na Obr. 3.3 sme znázornili výsledky pre štíhlu stenu s parametrami začiatočnej imperfekcie α_{01}=0,05 a α_{02}=0,35. Vidíme, že stena vybočuje aj v pokritickom štádiu v tvare podobnom začiatočnej imperfekcii (tvar podobný druhému vlastnému tvaru vybočenia steny).

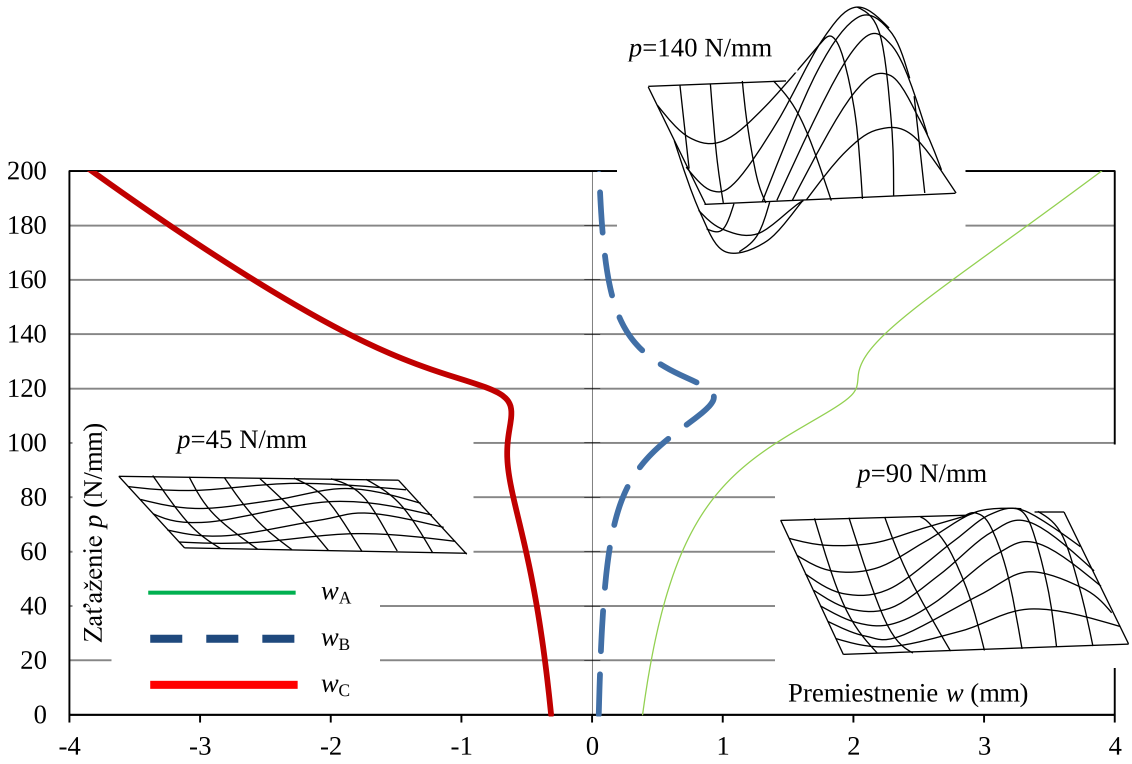
Z týchto dvoch obrázkov vyplýva, že začiatočná imperfekcia má rozhodujúci vplyv na vybočovanie steny v pokritickom štádiu pôsobenia.

Kolaps prúta nastáva vždy v tvare zodpovedajúcom prvému vlastnému tvaru vybočenia. Stena má taktiež tendenciu vybočovať v tvare zodpovedajúcom začiatočnej imperfekcii. V pokritickom štádiu pôsobenia však existuje niekoľko vetiev riešenia, ktoré reprezentujú vybočovanie steny v rôznych tvaroch. Samozrejme nie všetky vetvy riešenia sú stabilné.

Výsledky sme následne porovnali s výsledkami z programu ANSYS, kde sme uvažovali s modelom rozdeleným na 256 konečných prvkov typu SHELL 143. Na Obr. 3.4 a Obr. 3.5 prezentujeme výsledky v podobe zaťažovacích dráh v uzloch A, B a C s obrázkami vybočujúcej steny pri konkrétnych hladinách zaťaženia. V programe ANSYS bola vypočítaná fundamentálna zaťažovacia dráha. Podarilo sa nám verifikovať výsledky získané autorským programom s výsledkami získanými programom ANSYS.



Obr. 3.4 Štíhla stena (α_{01}=0,05, α_{02}=0,33) – program ANSYS.



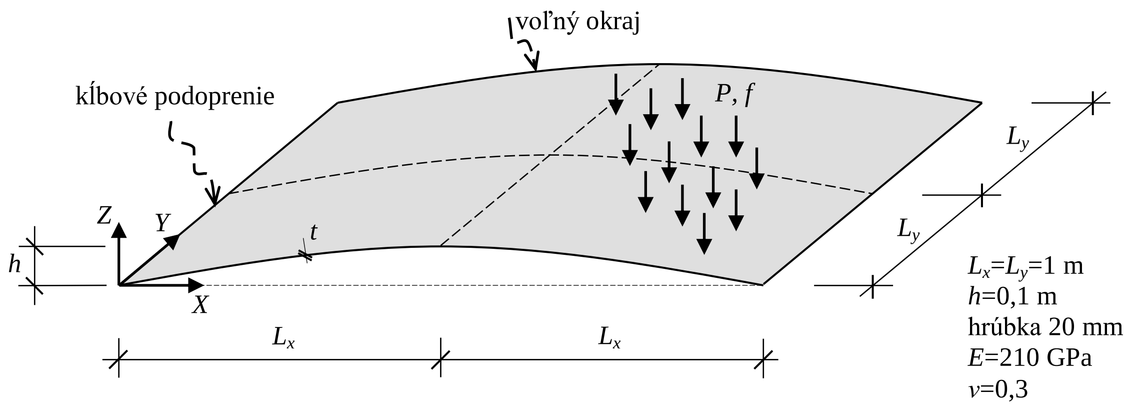
Obr. 3.5 Štíhla stena (α_{01}=0,05, α_{02}=0,35) – program ANSYS.

4 Analýza výsledkov – plošné konštrukcie (valcové škrupiny)

Ploché valcové škrupiny sú konštrukčné prvky, ktoré sa často vyskytujú v inžinierskej praxi. Ich strednicová plocha je generovaná posunom vertikálnej riadiacej krivky po tvoriacej priamke. Riadiaca krivka môže mať najčastejšie tvar kruhu, elipsy alebo paraboly. Ploché valcové škrupiny sú náchylné na vybočovanie a preto je potrebné podrobiť ich stabilitnej analýze. Lineárny stabilitný výpočet je pre daný typ konštrukcií nepostačujúci a je teda nutné používať geometricky nelineárnu analýzu, pomocou ktorej vieme popísať celkovú odozvu konštrukcie.

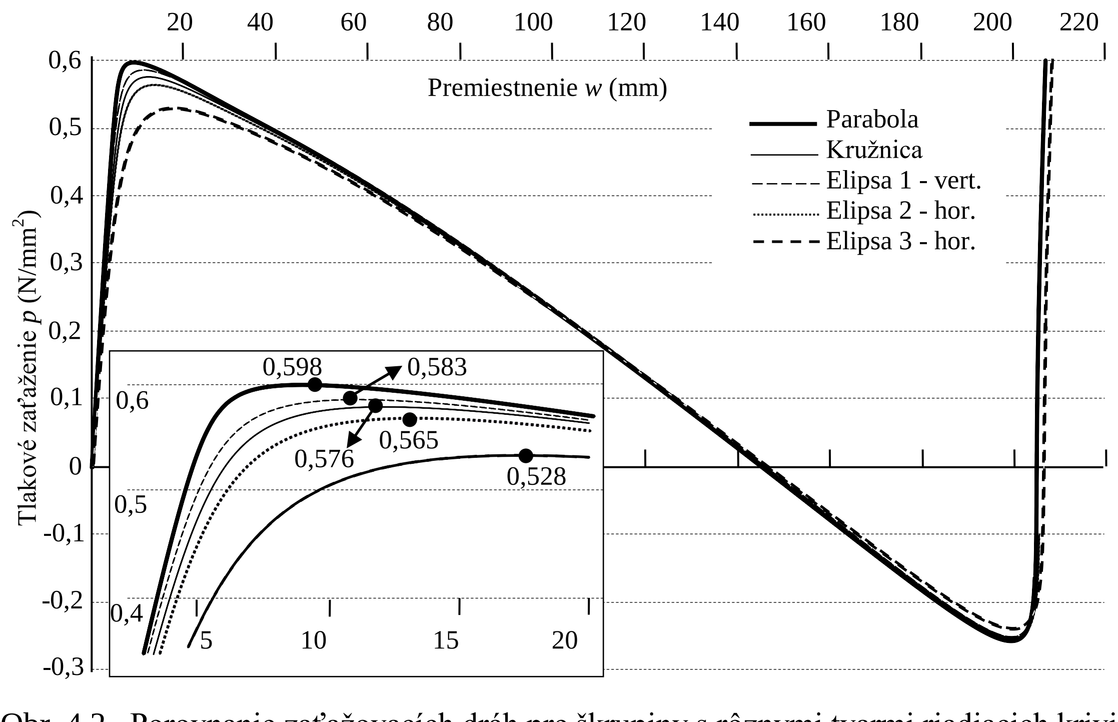
V tejto kapitole sme analyzovali niekoľko typov plochých valcových škrupín, ktoré boli zaťažené rovnomerným tlakovým zaťažením a zaťažením pôsobiacim v zvislom smere (na spôsob vlastnej tiaže). Riadiacu krivku tvorili kružnica, parabola a tri elipsy (s rôznymi rozmermi poloosí). Všetky škrupiny mali štvorcový pôdorys s rozmermi strán 2 m x 2 m a rovnaké vzopätie *h*. Na dvoch hranách modelu sme aplikovali kĺbové podoprenie. Ďalšie dve hrany (čelný a zadný oblúk) boli bez podoprenia. Porovnávali sme výsledky získané lineárnym a nelineárnym stabilitným výpočtom. Výsledky, ktoré sme získali pomocou teórie lineárnej stability nám pomohli pri zostavení nelineárneho výpočtu. Hladina kritického zaťaženia nám umožnila vytvoriť si približný obraz o polohe bifurkačného bodu na zaťažovacej dráhe. Venovali sme sa zahrnutiu začiatočnej imperfekcie do výpočtu, čím sa výsledok priblížil reálnej konštrukcii. Pomocou nelineárnej teórie, ktorá zahŕňa geometrickú nelinearitu sme boli schopní popísať pokritické pôsobenie imperfektnej valcovej škrupiny.

Na Obr. 4.1 uvádzame konkrétny príklad oceľovej valcovej škrupiny. Vpravo dole je zobrazená materiálová a geometrická charakteristika. Indexom *p* sme v tejto kapitole označovali rovnomerné tlakové zaťaženie (v smere normály) a indexom *f* sme označovali zaťaženie, ktoré pôsobí v smere -*Z* (na spôsob vlastnej tiaže).

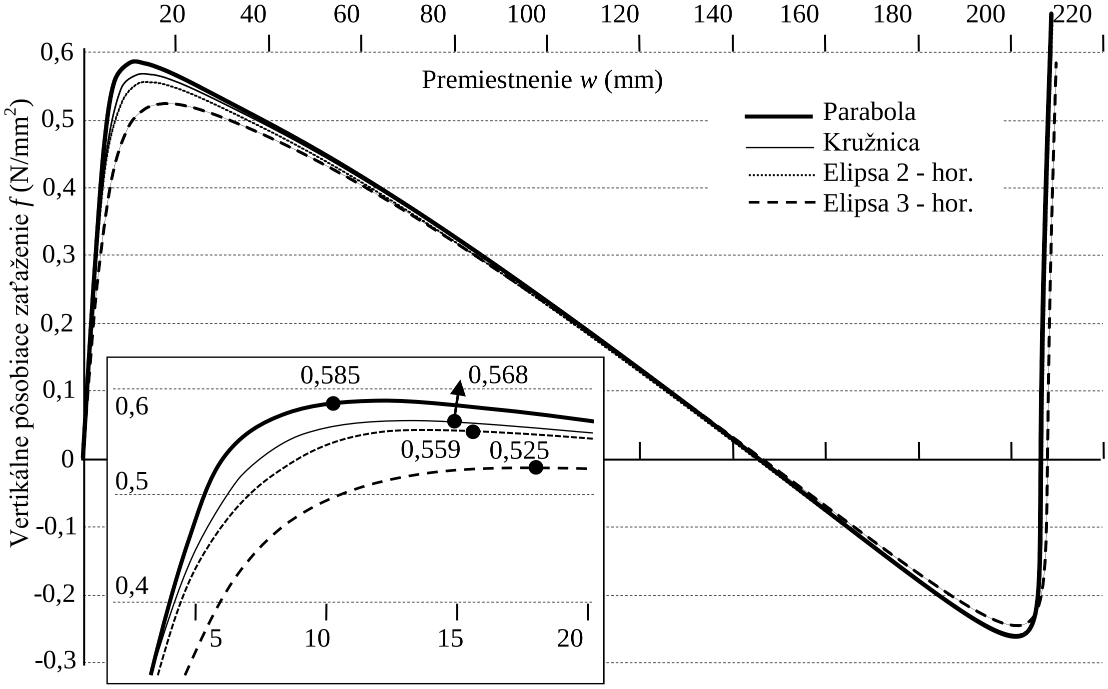


Obr. 4.1 Valcová škrupina – geometrická a fyzikálna charakteristika.

Numerický model sme rozdelili na 40x40 elementov. Uvažovali sme so škrupinou kĺbovo podopretou po dvoch bočných hranách (u_x, u_y a u_z=0 aplikované na hranách modelu). V programe ANSYS sme použili element typu SHELL 181 (4- uzlový, 6 stupňov voľnosti v každom uzle). Pri numerickej analýze sme aktivovali Newton-Raphsonovu iteráciu a arc-length metódu. Na Obr. 4.2 prezentujeme primárne zaťažovacie dráhy pre valcové škrupiny s ideálnym tvarom, ktoré majú rôzne tvary riadiacich kriviek. Zaťažovacie dráhy reprezentujú premiestnenie vrcholového uzla, ktorý sa nachádza v strede rozpätia konštrukcie.



Obr. 4.2 Porovnanie zaťažovacích dráh pre škrupiny s rôznymi tvarmi riadiacich kriviek (rovnomerné tlakové zaťaženie *p*).



Obr. 4.3 Porovnanie zaťažovacích dráh pre škrupiny s rôznymi tvarmi riadiacich kriviek (Vertikálne pôsobiace zaťaženie *f*).

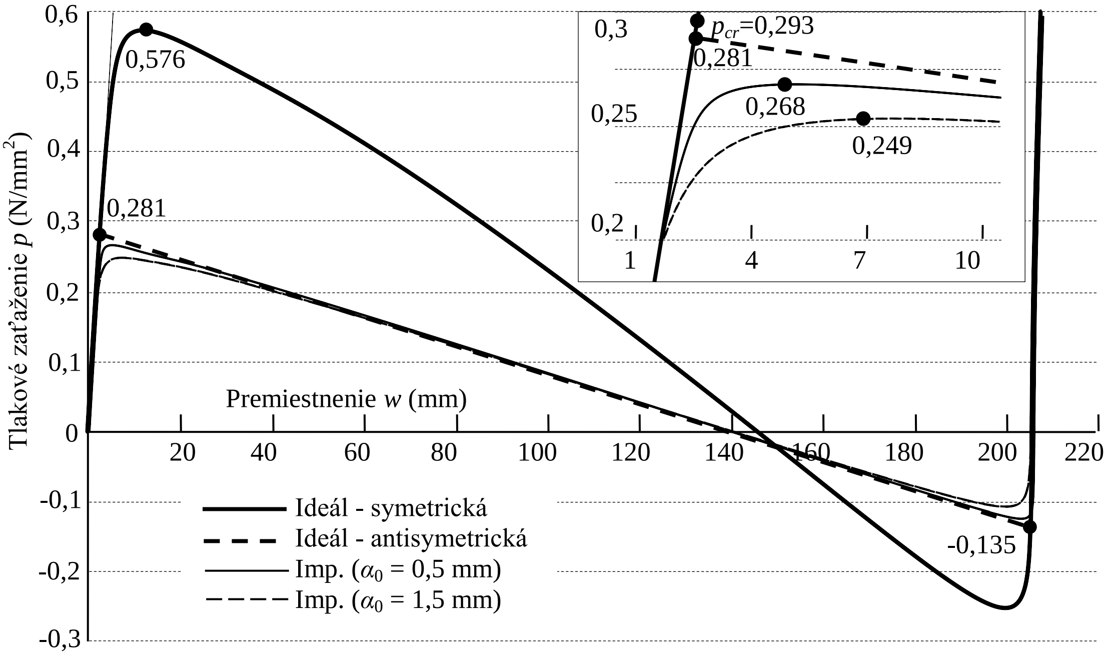
V prvom prípade sme uvažovali s rovnomerným tlakovým zaťažením *p*. Z pomeru $h/2L_x$=1/20 je zrejmé, že ide o veľmi plochú škrupinu, čiže aj tvary riadiacich kriviek sú veľmi podobné. Aj napriek tejto skutočnosti môžeme pozorovať rozdiely v hodnotách zaťažení v limitných bodoch zaťažovacích dráh (detail vľavo dole). V druhom prípade (Obr. 4.3) sme uvažovali so zaťažením *f* pôsobiacim vo zvislom smere.

Tab. 4.1 Zhrnutie výsledkov (tlak – zvislé zaťaženie).

	Tlakové zaťaženie [N/mm^2] (kolmo na strednicovú plochu)			**Zvislé zaťaženie [N/mm^2] (smer -Z)**		
Tvoriaca krivka	***p* [N/mm^2]**	**Δ (%)**	***w* [mm]**	***f* [N/mm^2]**	**Δ (%)**	***w* [mm]**
Parabola	0,598	+3,82	9,16	0,585	+2,99	10,1
Elipsa 1 (vertikálna)	0,583	+1,22	11,40			
Kružnica	0,576	100	12,49	0,568	100	15,0
Elipsa 2 (horizontálna)	0,565	-1,91	13,29	0,559	-1,58	15,7
Elipsa 3 (horizontálna)	0,528	-8,33	17,66	0,525	-7,57	17,5

Získané výsledky sme porovnali v tabuľke 4.1. Zaťaženie v limitnom bode, ktoré sa týka škrupiny s kružnicovou riadiacou krivkou sme uvažovali ako porovnávaciu hodnotu (Δ=100 %). Tlakové zaťaženie pôsobiace kolmo na strednicovú plochu škrupiny má priaznivý vplyv na vybočovanie konštrukcie a škrupina má väčšiu únosnosť ako škrupina zaťažená v zvislom smere (na spôsob vlastnej tiaže). Keďže majú riešené škrupiny veľmi podobný tvar priečneho rezu, rozdiel vo výsledkoch je malý. Aj napriek malému rozdielu môžeme zhodnotiť, že tvar priečneho rezu škrupiny má vplyv na únosnosť konštrukcie. Ovplyvňuje ju zmena krivosti od podpier po vrchol oblúka. Ako výhodnejší tvar sa javí krivka s redukciou krivosti od vrcholu k podperám.

Výsledky ideálnej a imperfektnej konštrukcie prezentujeme na Obr. 4.4. Jednotlivé zaťažovacie dráhy reprezentujú premiestnenia vrcholového uzla. V detaile na Obr. 4.4 vpravo hore pozorujeme pokles zaťaženia v limitných bodoch. S narastajúcou amplitúdou imperfekcie sa hodnota zaťaženia znižuje. Pre porovnanie uvádzame aj hodnotu kritického zaťaženia p_{cr}, ktorú sme získali pomocou teórie lineárnej stability.

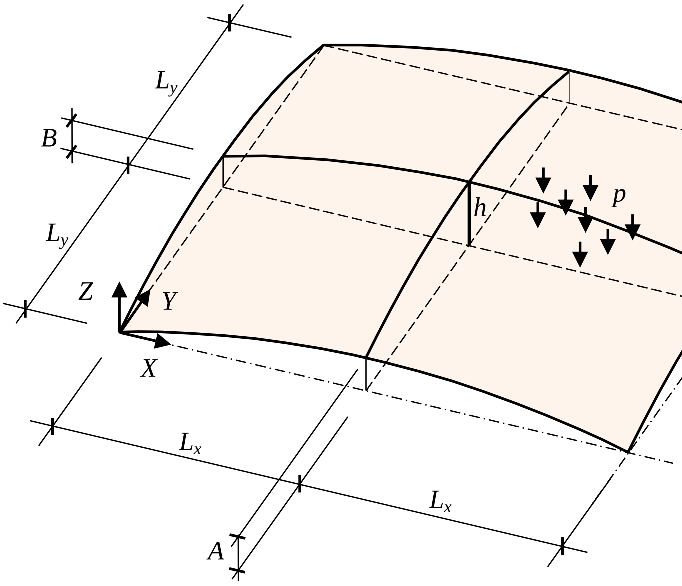


Obr. 4.4 Valcová škrupina s priečnym rezom v tvare kružnicového oblúku – porovnanie ideálnej a imperfektnej konštrukcie.

5 Analýza výsledkov – plošné konštrukcie (translačné škrupiny)

Ploché translačné škrupiny sú tak isto konštrukčné prvky často sa vyskytujúce v inžinierskej praxi. Ich strednicová plocha je generovaná posunom vertikálnej krivky po ďalšej zvislej krivke. Ploché škrupiny tvoria časti konštrukcií napríklad v leteckom a námornom priemysle. V stavebníctve slúžia na zastrešenia veľkorozponových konštrukcií. V tejto kapitole sme analyzovali dva prípady obdĺžnikovej translačnej škrupiny, ktorá bola zaťažená rovnomerným tlakovým zaťažením. Porovnávali sme výsledky škrupín s rôznymi okrajovými podmienkami získané lineárnym a nelineárnym stabilitným výpočtom.

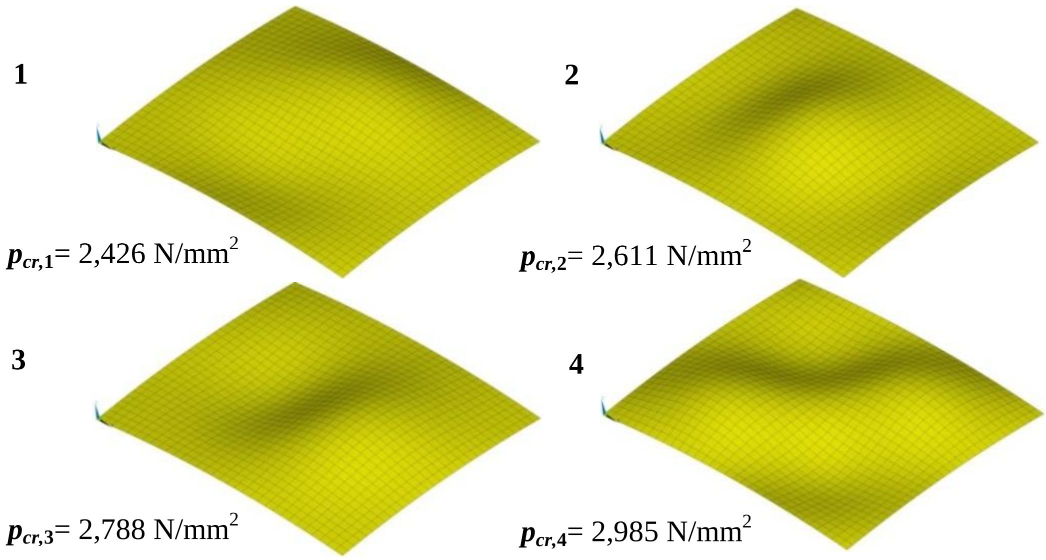
Ilustračný problém oceľovej plochej škrupiny zaťaženej rovnomerným tlakovým zaťažením uvádzame na Obr. 5.1. Vpravo dole je zobrazená materiálová a geometrická charakteristika.



L_x = 500 mm	h = 50 mm
L_y = 400 mm	hrúbka 12 mm
A = 30 mm	E = 210 GPa
B = 20 mm	ν = 0,3

Obr. 5.1 Translačná škrupina – geometrická a fyzikálna charakteristika.

5.1 Nelineárne riešenie škrupiny kĺbovo podopretej po obvode (prípad 1)

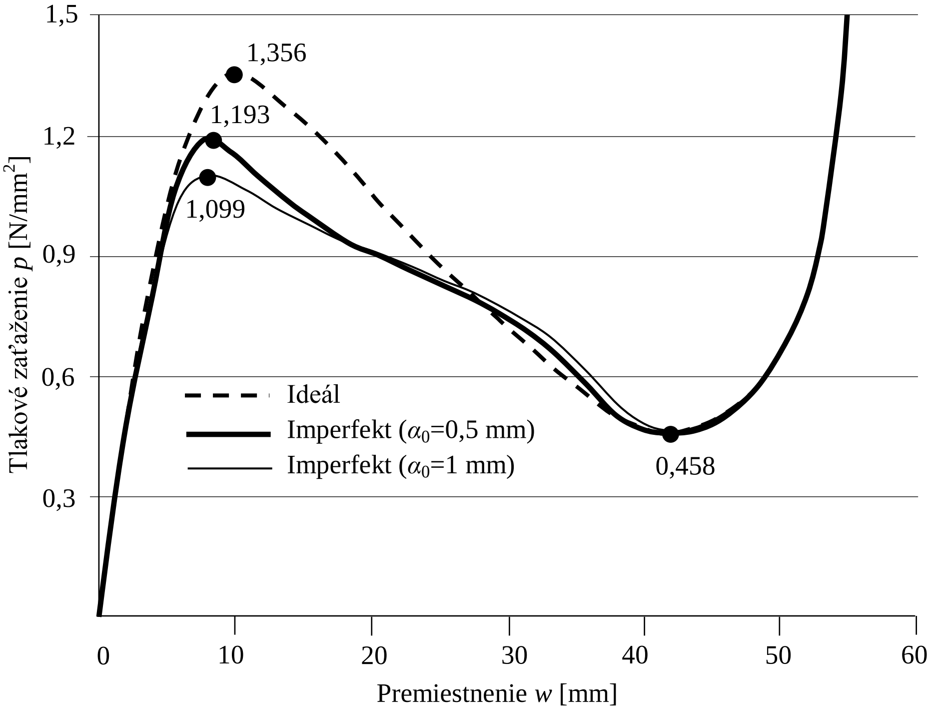


Obr. 5.2 Teória lineárnej stability – vlastné tvary vybočenia (prípad 1).

Numerický model sme rozdelili na 32x32 elementov. V prvom prípade sme uvažovali so škrupinou kĺbovo podopretou po celom obvode (u_x, u_y a u_z=0 aplikované na hranách modelu). Použili sme element SHELL 181 (4- uzlový, 6 stupňov voľnosti v každom uzle). Pri vytváraní modelu so začiatočnou imperfekciou sme použili vlastné tvary vybočenia konštrukcie s tým, že sme určili veľkosť amplitúdy imperfekcie. Z nelineárneho riešenia sme získali len primárnu zaťažovaciu dráhu.

Z pomeru vzopätia k šírke škrupiny ($h/2L_y = 50/800 = 1/16$) je zrejmé, že ide o veľmi plochú škrupinu. Výsledky linearizovanej úlohy (prvé štyri hodnoty kritického zaťaženia a k nim prislúchajúce tvary vybočenia) uvádzame na Obr. 5.2.

V ďalšej časti sa venujeme nelineárnej analýze plochej škrupiny so začiatočnou imperfekciou (Obr. 5.3). Tvar uvažovanej imperfekcie je totožný s prvým vlastným tvarom vybočenia. Tento (bezrozmerný) tvar sme vynásobili vhodne zvolenými parametrami α_0 (0,5 mm a 1 mm) a následne sme ho pripočítali k pôvodnej geometrii.

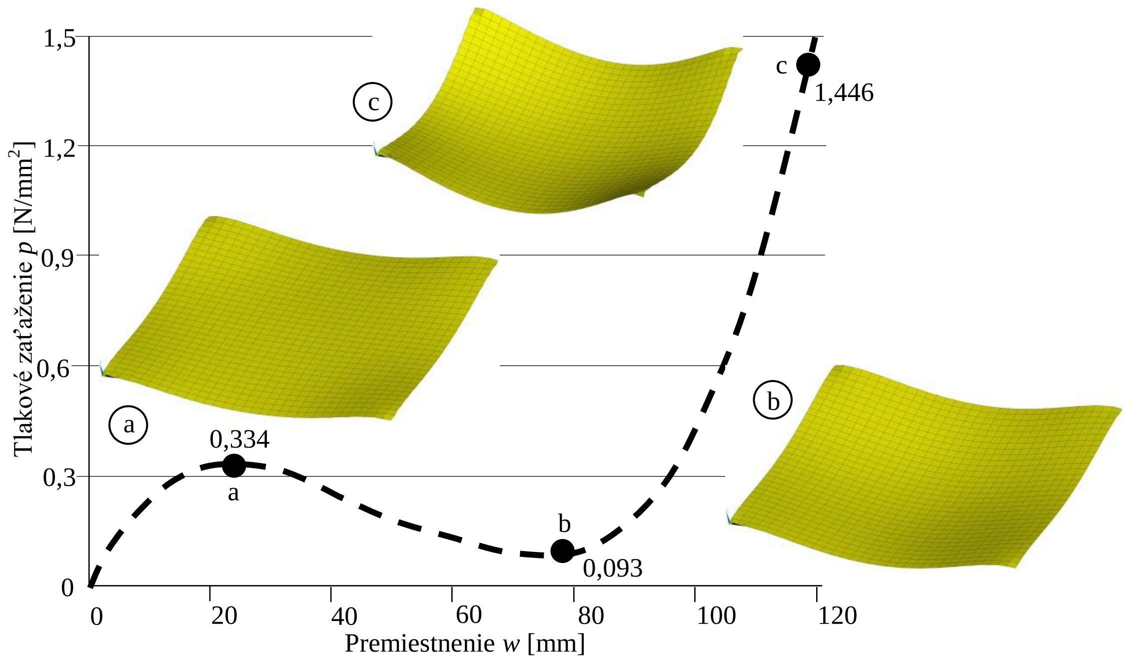


Obr. 5.3 Primárna zaťažovacia dráha vrcholového uzla – porovnanie ideálnej a imperfektnej škrupiny (prípad 1).

5.2 Nelineárne riešenie škrupiny kĺbovo podopretej v rohoch (prípad 2)

Numerický model sme opäť rozdelili na 32x32 elementov. Uvažovali sme so škrupinou kĺbovo podopretou iba v rohoch (u_x, u_y a u_z=0 aplikované v rohových uzloch). Použili sme element SHELL181 (4- uzlový, 6 stupňov voľnosti v každom uzle). Postup výpočtu sme zostavili rovnako ako v predchádzajúcom prípade.

Výsledky nelineárnej analýzy ideálnej plochej škrupiny prezentujeme na Obr. 5.4. Z nelineárneho riešenia sme získali len primárnu zaťažovaciu dráhu, ktorá je znázornená hrubou čiarkovanou čiarou. Táto vetva prislúcha k vrcholovému uzlu a sú vyčíslené hodnoty zaťaženia v limitných bodoch spolu s príslušným tvarom vybočenia škrupiny. Pozorujeme značný rozdiel medzi hodnotou prvého kritického zaťaženia z linearizovanej úlohy (0,715 N/mm^2) a hodnotou zaťaženia v limitnom bode, ktorú sme získali nelineárnym výpočtom (0,334 N/mm^2). Výsledky linearizovanej úlohy nie sú použiteľné pre praktické využitie.



Obr. 5.4 Nelineárna analýza – primárna zaťažovacia dráha vrcholového uzla ideálnej škrupiny (prípad 2).

V tabuľke 5.1 ponúkame zhrnutie výsledkov pre jednotlivé modely s rozdielnymi okrajovými podmienkami pri rovnomernom tlakovom zaťažení. Únosnosť konštrukcie z prípadu 2 je podstatne nižšia, keďže hrany škrupiny sú voľné oproti konštrukcii z prípadu 1 kde sú hrany kĺbovo podopreté. Škrupina v prípade 2 je podstatne mäkšia. Z výsledkov prezentovaných v tejto kapitole je zrejmé, že pre daný problém je nevyhnutnosťou použiť geometricky nelineárny prístup.

Tab. 5.1 Porovnanie oboch prípadov.

Analýza		**Prípad 1 (N/mm^2)**	**Prípad 2 (N/mm^2)**
Teória lineárnej stability	Ideálna konštrukcia	2,426	0,715
Nelineárne riešenie	Ideálna konštrukcia	1,356	0,334
	Imperfektná konštrukcia (α_0 =0,5 mm)	1,193	0,327
	Imperfektná konštrukcia (α_0 =1,0 mm)	1,099	0,316

6 Záver

Predložená dizertačná práca sa zaoberala stabilitnou analýzou plošných konštrukcií s využitím geometricky nelineárnej teórie. Konkrétne sme riešili štíhle steny, ploché valcové a translačné škrupiny. Zamerali sme sa na modelovanie konštrukcií so začiatočnými imperfekciami, keďže takéto modely najviac vystihovali tvar reálnych konštrukcií. Primárne sme sa zamerali na analýzu výsledkov, ktoré opisovali pokritické štádium pôsobenia, a ktoré súviseli s efektom preskoku steny alebo prelomenia škrupiny.

V úvode sme charakterizovali stabilitu ako vlastnosť konštrukcie a hneď sme prešli k pojmu strata stability, keďže tomuto javu sme sa venovali v celej práci. Aby sme boli schopní predchádzať takémuto problému, museli sme ho najskôr podrobne analyzovať. V úvode sme ďalej ponúkli historický vývoj stabilitnej analýzy, ktorý sa začína písať už v 18. storočí. Históriu sme si dovolili rozdeliť na dve časti. Prvá časť sa venovala autorom a publikáciám, ktoré súvisia s teóriou stability. Druhá časť sa venovala autorom, ktorí prispeli k rozvoju numerických metód, ktoré sa dajú aplikovať pri stabilitných výpočtoch. Táto časť histórie súvisela s rozvojom počítačovej techniky, ktorá začala ísť do popredia v sedemdesiatych rokoch 20. storočia.

Pri analýze výsledkov štíhlych stien sme sa konkrétne zamerali na vplyv začiatočnej imperfekcie na pokritické pôsobenie štíhlej steny, ktorá bola zaťažená tlakom. Pokiaľ sme uvažovali so začiatočnou imperfekciou v tvare zodpovedajúcemu prvému vlastnému tvaru vybočenia, ťažko mohlo dôjsť k vybočovaniu v inom tvare ako v začiatočnom. V ďalšou prípade sme teda uvažovali s tvarom začiatočnej imperfekcie, ktorý predstavoval lineárnu kombináciu 1. a 2. vlastného tvaru. Zistili sme, že aj pri malej zmene začiatočného tvaru sa stena správala v pokritickom štádiu diametrálne odlišne. Tvar a veľkosť amplitúdy začiatočnej imperfekcie má rozhodujúci vplyv na vybočovanie steny v pokritickom štádiu pôsobenia. Úlohu sme riešili autorským aj komerčným programom ANSYS. Pri riešení úlohy v programe ANSYS sme nemali možnosť vstupovať do výpočtu a meniť veľkosť prírastku a pivotný člen (zaťaženie alebo premiestnenie). Tieto možnosti nám ponúkol autorský program so svojím interaktívnym prístupom a podarilo sa nám získať okrem fundamentálnej zaťažovacej dráhy ešte niekoľko sekundárnych dráh. Výpočet nebol časovo náročný. Podarilo sa nám verifikovať výsledky získané autorským programom s výsledkami získanými programom ANSYS.

Ďalej sme prezentovali výsledky plochých valcových škrupín, ktoré boli kĺbovo podopreté na dvoch protiľahlých stranách. Celkovo sme analyzovali 5 typov, ktoré sa líšili v tvare priečneho rezu (kružnica, parabola a 3x elipsa). Tieto modely sme zaťažovali zaťažením v zvislom smere (-Z) a rovnomerným tlakovým zaťažením. Analýzu sme urobili v komerčnom programe ANSYS. Zo získaných výsledkov sme zhodnotili, že tlakové zaťaženie pôsobiace kolmo na strednicovú plochu škrupiny malo priaznivý vplyv na vybočovanie konštrukcie a škrupina mala väčšiu únosnosť ako škrupina zaťažená v smere –Z. Keďže boli riešené škrupiny s podobným tvarom priečneho rezu, rozdiel vo výsledkoch bol malý. Aj napriek malému rozdielu sme mohli zhodnotiť, že tvar priečneho rezu škrupiny mal vplyv na únosnosť konštrukcie. Ovplyvňovala ju zmena krivosti oblúka. Krivka s redukciou krivosti od vrcholu k podperám sa nám javila ako výhodnejšia pre tvar priečneho rezu škrupiny.

Ďalšie porovnanie sa týkalo lineárneho a nelineárneho výpočtu ideálnej konštrukcie a konštrukcie so začiatočnou imperfekciou. Výsledky získané pomocou teórie lineárnej stability neponúkali adekvátne výsledky. Pokles únosnosti konštrukcie závisel od veľkosti amplitúdy začiatočnej imperfekcie.

Analýzu výsledkov translačných škrupín sme prezentovali v ďalšej kapitole. Plochá škrupina bola zaťažená rovnomerným tlakovým zaťažením. Riešili sme dva modely s rozdielnym okrajovými podmienkami. Úlohu sme riešili pomocou teórie lineárnej stability a geometricky nelineárnym výpočtom. Rozdiel medzi kritickým zaťažením (lineárny výpočet) a hodnotou zaťaženia v bifurkačnom bode (nelineárny výpočet) bol väčší ako pri valcových škrupinách. Bolo to spôsobené vplyvom obojsmerného zakrivenia translačnej škrupiny a rozdielnymi okrajovými podmienkami. Porovnávali sme výsledky ideálnej konštrukcie a konštrukcie so začiatočnou imperfekciou, ktorá mala tvar podobný s prvým vlastným tvarom vybočenia. Vplyvom začiatočnej imperfekcie sme pozorovali pokles hodnoty zaťaženia v limitnom bode zaťažovacej dráhy oproti riešeniu ideálnej škrupiny. S narastajúcou imperfekciou klesala únosnosť konštrukcie.

Z výsledkov prezentovaných v práci hodnotíme, že je nevyhnutnosťou používať nelineárny výpočet pri riešení stabilitných problémov štíhlych stien a plochých škrupín. Tento výpočet dokáže mapovať pôsobenie konštrukcie aj v pokritickom štádiu. Ďalšou veľkou výhodou tohto prístupu je možnosť analyzovať konštrukciu so začiatočnými imperfekciami, ktoré výrazné ovplyvňujú pôsobenie tenkostenných konštrukcií.

Zoznam použitej literatúry

ARBOCZ, J. – STARNES, J. H. 2002. Future directions and challenges in shell stability analysis. In *Thin-Walled Structures*. ISSN 0263-8231, 2002, vol. 40, no. 9, p. 729-754.

BATHE, K. J. 1982. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1982. 735 p. ISBN 0-133-173-054.

BATOZ, J. L. – DHATT, G. 1979. Incremental displacement algorithmus for non-linear problems. In *Int. J. Num. Meth. in Engng.* ISSN 1097-0207,1979, vol. 14,no. 8, p. 1262-1266.

BAŽANT, Z. P. – CEDOLIN, L. 1991. *Stability of Structures - Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories*. Oxford University Press, 1991. 985 p. ISBN 978-98-143-1703-0.

BITTNAR, Z. – ŠEJNOHA, J. 1992. *Numerické metody mechaniky 2*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 1992. 262 s. ISBN 978-80-010-0901-7.

BLOOM, F. – COFFIN, D. 2001. *Handbook of Thin Plate Buckling and Postbuckling*. 1st ed. Boca Raton, Florida: Chapman&Hall/CRC, 2001. 770 p. ISBN 1-58488-222-0.

BUSHNELL, D. 1985. *Computerized Buckling Analysis of Shells*. Dordrecht: Martinus Nijhoff, 1985. 423 p. ISBN 978-94-009-5063-4.

CRISFIELD, M. A. 1996. *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. London: Wiley&Sons, 1996. 345 p. ISBN 0-471-929-565.

EULERO, L. 1744. *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*. Laussane-Geneva. 1744.

HAMPE, E. 1983. *Rotationssymmetrische Flächentragwerke–Stabilität der Rotationsschalen*. Berlin: VEB Verlag fuer Bauwesen, 1983, 204 p. ISBN 978-34-330-0946-8.

HUSEYIN K. 1975. Nonlinear Theory of Elastic Stability. Leyden: Noordhoff Int., 1975. 220 p. ISBN 9789028603448.

KÁRMÁN T. – TSIEN. 1967. The Buckling of Thin Cylindrical Shells. In *Proceedings – Symposium of the Theory of Shells to Honor Lloyd Hamilton Donnell*. 1967.

KOITER, W.T. 1945. On the stability of elastic equilibrium. Delft, Holland, 1945.

KOLÁŘ, V. – NĚMEC, I. – KANICKÝ, V. 1997. *FEM – Principy a praxe metody konečných prvků*. Praha: Computer Press, 1997. 401 s. ISBN 80-7226-021-9.

MURÍN, J. – KUTIŠ, V. 2001. Solution of Non-Incremental FEM Equations of a Non-Linear Continuum. In *Strojnícky časopis*. ISSN 2450-5471, 2001, roč. 52, č. 6, s. 360-371.

MURRAY, D.W. – WILSON, E.L. 1969. Finite element postbuckling analysis of thin elastic plates. In *Am. Inst. of Aero. and Astro. J.* ISSN 0001-1452, 1969, vol. 7, no. 10, p. 1915-1920.

PSOTNÝ, M. – RAVINGER, J. 2005. Stable and Unstable Paths in the Post-Buckling Behavior. In *International Conference VSU´2005.* ISSN 1314-071X, 2005, p. 42-47.

PSOTNÝ, M. – RAVINGER, J. 2007. Post-Buckling Behaviour of Imperfect Slender Web. In *Engineering Mechanics*. ISSN (Online) 1805-4633, 2007, vol. 14, no. 6, p. 423-429.

RAVINGER, J. – ÁROCH, R. – BAKALÍKOVÁ, D. 1990. Nelineárna analýza oblúkov a rámov. In *Stavebnícky časopis*. 1990, roč. 38, č. 3, s. 169-190.

RAVINGER, J. 1994. Vibration of imperfect thin-walled panel. Part 1: Theory and illustrative examples. Part 2: Numerical results and experiment. In *Thin-Walled Structures.* ISSN (Online) 0263-8231, 1994, vol. 19, no. 1, p. 1-36.

RAVINGER, J. – PSOTNÝ, M. 2007. *Analýza konštrukcií, nelineárne úlohy*. Bratislava: Vydavateľstvo STU, 2007. 174 s. ISBN 978-80-227-2713-6.

RAVINGER, J. 2012. *Stability and Vibration*. Bratislava: Nakladateľstvo STU, 2012. 135 p. ISBN 978-80-227-3703-6.

RAVINGER, J. 2014. *Numerical Methods in Theory of Structures*. Bratislava: Nakladateľstvo STU, 2014. 156 p. ISBN 978-80-227-4234-4.

RAVINGER, J. – VÉGHOVÁ I. 2015. *Pružnosť a plasticita*. Bratislava: Nakladateľstvo STU, 2015. 252 p. ISBN 978-80-227-4478-2.

RIKS, E. 1972. The application of Newton´s method to the problem of elastic stability. In *J. Appl. Mech.* ISSN 0021-8936, 1972, vol. 39, no. 4, p. 1060-1065.

SAIGAL, S. - YANG, I. 1985. Nonlinear Dynamic Analysis with 48 DOF Curved Thin Shell Element. In *International Journal for Numerical Methods in Engineering.* ISSN (Online) 1115-1128, 1985, vol. 21, no. 6, p. 1097-0207.

SAMUELSON, L.A. – EGGWERTZ, S. 1992. *Shell Stability Handbook*. London: Elsevier, 1998. 278 p. ISBN 978-18-516-6954-7.

SHARIFI, P. – POPOV, E. P. 1971. Nonlinear buckling analysis of sandwich arches. In *Proc. ASCE, J. Engng. Mech. Div*. ISSN 0044-7951, 1971, vol. 97, no. 5, p. 1397-1412.

SINGER, J. ET AL. 2002. Shells, built-up structures, composites and additional topics. In *Buckling Experimets: Experimental methods in Buckling of Thin-Walled Structures*. vol. 2. Wiley: Chichester, 2002. 1129 p.

TENG, J. G. – LUO, Y. F. 1998. A user-controlled arc-length method for convergence to predefined deformation states. In *Communications in Numerical Methods in Engineering*. ISSN (Online) 1099-0887, 1998, vol. 14, no. 1, p. 51–58.

TENG, J. G. – ROTTER, J. M. 2004. *Buckling of Thin Metal Shells*. London: Spon Press, 2004. 516 p. ISBN 978-04-192-4190-4.

TIMOSHENKO, S. P. – GERE, J. M. 1961. *Theory of Elastic Stability*. New York: McGraw-Hill, 1961. 541 p.

WASHIZU, K. 1982. *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. 3st ed. Oxford-New York: Pergamon Press, 1982. 630 p. ISBN 0-08-026723-8.

YAMAKI, N. 1984. *Elastic Stability of Circular Cylindrical Shells*. Amsterdam: North-Holland, 1984. 558 p. ISBN 978-04-445-9911-7.

Zoznam publikácií autora

Vedecké práce v zahraničných časopisoch

HAVRAN, J. – PSOTNÝ, M. 2015. Postbuckling Analysis of a Rectangular Plate Loaded in Compression. In *Transactions of the VŠB - Technical University of Ostrava*. ISSN 1804-4824, 2015, Vol. 15, no. 2, p. 37-42.

HAVRAN, J. – PSOTNÝ, M. 2016. Postbuckling of an Imperfect Plate Loaded in Compression. In *Mechanics and Mechanical Engineering*. ISSN 1428-1511, 2016, Vol. 20,

no. 2, p. 143-149.

HAVRAN, J. – PSOTNÝ, M. 2016. Snap-Through of the Very Shallow Shell with Initial Imperfection. In *Transactions of the VŠB - Technical University of Ostrava*. ISSN 1804-4824, 2016, Vol. 16, no. 2, p. 43-48.

Publikované príspevky na zahraničných vedeckých konferenciách

PSOTNÝ, M. – HAVRAN, J. 2014. Effect of a Flexural Rigidity on the Load-Displacement Path of Von Misses Truss. In *14th International Scientific Conference VSU´2014. Sofia, Bulgaria, 5. - 6. 6. 2014*. p. 107-112. ISSN 1314-071X.

PSOTNÝ, M. – HAVRAN, J. 2014. Effect of a Nonlinear Term in Axial Displacements on the Load-Displacement Path of Von Misses Truss. In *14th International Scientific Conference VSU´2014. Sofia, Bulgaria, 5. - 6. 6. 2014*. p. 113-118. ISSN 1314-071X.

HAVRAN, J. – PSOTNÝ, M. 2015. Non-Linear Analysis of Von Mises Truss. In *Juniorstav 2015: 17. odborná konference doktorského studia. Brno, ČR, 29. 1. 2015*. [7] s. ISBN 978-80-214-5091-2.

HAVRAN, J. – PSOTNÝ, M. 2015. Postbuckling Analysis of Rectangular Plate Loaded in Compression. In *Modelování v mechanice 2015. Ostrava, ČR, 28. - 29. 5. 2015*. [6] s. ISBN 978-80-248-3756-7.

HAVRAN, J. – PSOTNÝ, M. 2015. Postbuckling of a Slender Web Subjected to the Compression. In *15th International Scientific Conference VSU´2015. Sofia, Bulgaria, 4. - 5. 6. 2015*. p. 145-150. ISSN 1314-071X.

HAVRAN, J. – PSOTNÝ, M. 2016. Nelineárna analýza štíhlej steny namáhanej tlakom. In *Juniorstav 2016: 18. odborná konference doktorského studia. Brno, ČR, 28. 1. 2016*. [7] s. ISBN 978-80-214-5311-1.

HAVRAN, J. – PSOTNÝ, M. 2016. Snap-Through of the Shallow Shell with Initial Imperfection. In *Spolehlivost konstrukcí 2016 & Modelování v mechanice 2016.* [7] s. ISBN 978-80-248-3918-9.

PSOTNÝ, M. – HAVRAN, J. 2016. Snap-Through of the Shallow Shell of Translation. In *16th International scientific conference VSU´2016. Sofia, Bulgaria, 9. - 10. 6. 2016*. p. 312-317. ISSN 1314-071X.

HAVRAN, J. – PSOTNÝ, M. 2017. Nelineárna analýza plochej škrupiny s imperfekciou. In *Juniorstav 2017: 19. odborná konference doktorského studia. Brno, ČR, 26. 1. 2017.* [6] s. ISBN 978-80-214-5473-6.

Publikované príspevky na domácich vedeckých konferenciách

PSOTNÝ, M. – HAVRAN, J. 2013. Dynamická analýza výškovej budovy nepravidelného pôdorysu. In *New Trends in Statics and Dynamics of Buildings. Bratislava, 3. - 4. 10. 2013*. s.189-192. ISBN 978-80-227-4040-1.

PSOTNÝ, M. – HAVRAN, J. 2014. Effect of a stiffness on the load-displacement path of Von Misses truss. In *New Trends in Statics and Dynamics of Buildings. Bratislava, 16. - 17. 10. 2014*. [6] s. ISBN 978-80-227-4259-7.

HAVRAN, J. – PSOTNÝ, M. 2014. Effect of a nonlinear term in a geometric equation on the load-displacement path of Von Misses truss. In *New Trends in Statics and Dynamics of Buildings. Bratislava, 16. - 17. 10. 2014*. [6] s. ISBN 978-80-227-4259-7.

HAVRAN, J. – PSOTNÝ, M. 2014. Vplyv nelineárneho člena normálového premiestnenia na únosnosť vzperadla. In *39. celoštátny aktív pracovníkov odboru oceľových konštrukcií so zahraničnou účasťou. Zborník prednášok. Topoľčianky, SR, 16. - 17. 10. 2014*. [7] s. ISBN 978-80-227-4257-3.

HAVRAN, J. – PSOTNÝ, M. 2014. Vplyv ohybovej tuhosti na únosnosť vzperadla. In *39. celoštátny aktív pracovníkov odboru oceľových konštrukcií so zahraničnou účasťou. Zborník prednášok. Topoľčianky, SR, 16. - 17. 10. 2014*. [8] s. ISBN 978-80-227-4257-3.

HAVRAN, J. 2014. Prelomenie vzperadla ako príklad geometrickej nelinearity. In *Advances in architectural, civil and environmental engineering, Bratislava*. 2014, s. 82-89. ISBN 978-80-227-4301-3.

HAVRAN, J. – PSOTNÝ, M. 2015. Effect of a Nonlinear Term in a Strain-Displacement Relationship on the Load-Displacement Path of Von Mises Truss. In *Applied Mechanics and Materials : Trends in Statics and Dynamic of Construction, Bratislava.* ISSN 1660-9336, 2015, Vol. 769, (2015), p. 85-90.

PSOTNÝ, M. – HAVRAN, J. 2015. Effect of a Bending Stiffness on the Load-Displacement Path of Von Mises Truss. In *Applied Mechanics and Materials : Trends in Statics and Dynamic of Construction, Bratislava*. ISSN 1660-9336, 2015, Vol. 769, p. 43-48.

HAVRAN, J. – PSOTNÝ, M. 2015. Stable Paths in the Postbuckling of an Imperfect Plate Loaded in Compression. In *New Trends in Statics and Dynamics of Buildings. Bratislava, 15. - 16. 10. 2015*. [6] s. ISBN 978-80-227-4463-8.

HAVRAN, J. – PSOTNÝ, M. 2015. Stabilné vetvy v pokritickom pôsobení tlačenej steny s imperfekciou. In *Zborník prednášok zo 40. aktívu pracovníkov odboru oceľových konštrukcií : Oščadnica, SR, 22. - 23. 10. 201*, s. 121-126. ISBN 978-80-89619-01-6.

HAVRAN, J. 2015. Stabilné vetvy v pokritickom pôsobení štíhlej steny namáhanej tlakom. In *Advances in architectural, civil and environmental engineering, Bratislava, SR, 28. 10. 2015*. s. 102-108. ISBN 978-80-227-4514-7.

HAVRAN, J. – PSOTNÝ, M. 2016. Stable Paths in the Postbuckling of an Imperfect Slender Web Loaded in Compression. In *Applied Mechanics and Materials: Trends in Statics and Dynamics of Construction, Bratislava.* ISSN 1660-9336, 2016, Vol. 837, p. 28-33.

HAVRAN, J. – PSOTNÝ, M. 2016. Stability Analysis of a Shallow Shell. In *SPACE 2016. Structural and Physical Aspects of Construction Engineering, High Tatras, Štrbské Pleso, Slovakia, November 9 - 11, 2016*. [2] s. ISBN 978-80-553-2643-6.

HAVRAN, J. – PSOTNÝ, M. 2016. Prelomenie plochej škrupiny s počiatočnou imperfekciou. In *New Trends in Statics and Dynamics of Buildings. Bratislava,13. - 14. 10. 2016*. [6] s. ISBN 978-80-227-4613-7.

HAVRAN, J. 2016. Prelomenie plochej oceľovej škrupiny s imperfekciou. In *Advances in Architectural, Civil and Environmental Engineering, 26. October 2016, Bratislava*. s. 99-103. ISBN 978-80-227-4645-8.

PSOTNÝ, M. – HAVRAN, J. 2017. Stability analysis of an open shallow cylindrical shell with imperfection under external pressure. In *Dynamics of Civil Engineering and Transport Structures and Wind Engineering – DYN-WIND´2017, 21-25. May 2017, Trstená*. p. 6.

Odborné práce v zahraničných zborníkoch

HAVRAN, J. – PSOTNÝ, M. 2015. Postbuckling of Imperfect Plate Loaded in Compression. In *Stability of Structures XIV-th Symposium : proceedings. Zakopane, Poland, 8. - 12. 6.2015*. p. 45-46. ISBN 83-914019-8-7.

Abstrakty odborných prác zo zahraničných podujatí

PSOTNÝ, M. – HAVRAN, J. 2016. Stability Analysis of the Very Shallow Shell with Imperfection. In *SOLMECH 2016: abstracts. 40th Solid Mechanics Conference. 29. 08. - 2. 09. 2016, Warsaw, Poland*. [2] s.