EDÍCIA SKRÍPT

FYZIKÁLNA GEODÉZIA

Blažej Bucha

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
STAVEBNÁ FAKULTA

SPEKTRUM STU

FYZIKÁLNA GEODÉZIA

Blažej Bucha

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
2023

Recenzenti: Peter Vajda
Josef Sebera
Miloš Vaľko

Schválila Edičná rada Stavebnej fakulty STU v Bratislave.

ISBN 978-80-227-5368-5

Predslov

Mnohé geodetické úkony a merania využívajú pôsobenie tiažového poľa Zeme alebo sú ním ovplyvnené, od použitia olovnice až po určovanie polohy pomocou globálnych navigačných družicových systémov. Tieto skriptá sa zaoberajú tiažovým poľom s dôrazom na geodetický kontext. Určené sú predovšetkým pre študentov odboru Geodézia a kartografia Stavebnej fakulty Slovenskej technickej univerzity v Bratislave ako doplňujúci učebný text k predmetom *Fyzikálna geodézia 1* a *Fyzikálna geodézia 2*. Niektoré časti by azda mohli byť užitočné aj pre študentov príbuzných vedných odborov alebo jednoducho pre záujemcov o problematiku gravitačného a tiažového poľa.

Skriptá opisujú základné princípy gravitačného a tiažového poľa vychádzajúce z Newtonovho gravitačného zákona (kapitola 1), sférické a sféroidické harmonické funkcie (kapitoly 2 a 3), normálne tiažové pole (kapitola 4), poruchové pole a zvislicové odchýlky (kapitola 5) a na záver geoid (kapitola 6). Hoci intelektuálne potešenie zo spoznávania týchto tém je bezodné, predsa len si vyžaduje pokročilé matematické zručnosti a nepochybne aj isté zanietenie. Zvolili sme preto formu, ktorú na základe desaťročných skúseností s výučbou fyzikálnej geodézie považujeme za najvhodnejšiu pre zamýšľaných čitateľov, študentov geodézie a kartografie. Snažili sme sa o výklad, ktorý by bol jednoduchý, zrozumiteľný, úplný, nápomocný a súčasne i podnecujúci. Text sme na niektorých miestach doplnili o počítačový kód, ktorý prakticky demonštruje diskutovanú problematiku. Nádejame sa, že jeho vlastným štúdiom, testovaním a úpravou možno niektorým konceptom porozumieť jednoduchšie.

Pri písaní skrípt sme predpokladali, že čitateľ má znalosti zo sférickej trigonometrie a z vektorového, diferenciálneho a integrálneho počtu na úrovni prvého stupňa vysokoškolského štúdia. Poznatky zo sférickej trigonometrie si možno doplniť napríklad nahliadnutím do skrípt Husár (2017) alebo Minarechová a Macák (2019). Integrálny a diferenciálny počet je vysvetlený v skriptách Minarechová a Macák (2019) a Macák a Minarechová (2021). Podrobnosti o súradnicových systémoch a o transformáciách medzi nimi uvádzajú napríklad Melicher a kol. (1993), Kostelecký a kol. (2008), Melicher a Gerhátová (2009) a Husár (2017). Ďalšie informácie z oblasti fyzikálnej geodézie a gravimetrie sú dostupné v skriptách Janák a kol. (2006) a Janák (2010).

Aj keď napísaniu tejto práce bolo venované veľké úsilie, bolo by prekvapivé, ak by sa v nej nenašli časti, ktoré mohli byť spracované zrozumiteľnejšie, alebo témy, ktoré v nej obsiahnuté nie sú, no mohli, či mali byť diskutované. Skôr než za uzavretý študijný podklad považujeme tento učebný text za živý zdokonaľujúci sa materiál. Všetky zdrojové kódy sú preto voľne prístupné a pripomienkovateľné na adrese https://github.com/blazej-bucha/physical-geodesy-lecture-notes.

Práca bola napísaná v textovom editore Vim v9.0 s použitím typografického systému TEX. Skompilovaná bola programom `pdfTex` v3.141592653-2.6-1.40.24. Mapy boli pripravené v `GMT` v6.4.0. Obrázky boli zhotovené v programe `Inkscape` v1.2.2. Väčšina výpočtového kódu je napísaná v jazyku `Python` v3.11.2 s využitím modulov `NumPy` v1.24.3, `Matplotlib` v3.7.1 a `SciPy` v1.10.1. Časť výpočtov je napísaná v prostredí MATLAB R2021b. S týmito aplikáciami sme interagovali pod operačným systémom Debian GNU/Linux 12 (bookworm). S výnimkou programu MATLAB ide o slobodný softvér. Vyslovujeme preto vďaku a slová ocenenia veľkej komunite excelentných programátorov za to, že poskytujú prvotriedny slobodný softvér.

Úprimné slová vďaky ale patria v prvom rade blízkym, priateľom a kolegom, ktorí mi pomáhali počas písania práce. Za starostlivé prečítanie textu a za pripomienky, ktoré významne prispeli k zlepšeniu tejto práce, ďakujem recenzentom, Petrovi Vajdovi z Ústavu vied o Zemi Slovenskej akadémie vied, Josefovi Seberovi z Astronomického ústavu Akadémie vied Českej republiky a Milošovi Vaľkovi z Geodetického observatória Pecný Výskumného ústavu geodetického, topografického a kartografického. Zuzane Minarechovej ďakujem za neúnavné viacnásobné čítanie textu a za mnoho hodnotných postrehov a korekcií. Za cenné pripomienky k forme a k štylistike veľmi ďakujem Eme Nogovej. Jurajovi Janákovi a Martinovi Pitoňákovi ďakujem za obsahové komentáre, ktoré mi pomohli lepšie formovať štruktúru a obsah práce. Za cenné postrehy a za povzbudivé slová vďačím Pavlovi Zahorcovi. Za gramatické opravy ďakujem Júlii Sidor. Za mnohonásobné prečítanie, za hŕbu štylistických korektúr a za neutíchajúcu podporu ďakujem Saške.

Bratislava, máj 2023 — Blažej Bucha

Obsah

1 Gravitačné a tiažové pole **9**
1.1 Newtonov gravitačný zákon . . . 9
1.1.1 Gravitačné zrýchlenie . . . 10
1.1.2 Gravitačný potenciál . . . 13
1.2 Teória potenciálu . . . 18
1.2.1 Podmienka regularity . . . 19
1.2.2 Laplaceova rovnica v karteziánskych súradniciach . . . 19
1.2.3 Laplaceova rovnica vo sférických súradniciach . . . 21
1.2.4 Praktický význam Laplaceovej rovnice . . . 23
1.2.5 Harmonická funkcia . . . 23
1.2.6 Poissonova rovnica . . . 25
1.3 Odstredivé pole a tiažové pole . . . 25
1.3.1 Odstredivé a tiažové zrýchlenie . . . 26
1.3.2 Odstredivý a tiažový potenciál . . . 28
1.4 Homogénna rotujúca guľa . . . 31
1.4.1 Newtonov integrál vo sférických súradniciach . . . 31
1.4.2 Gravitačné pole homogénnej gule . . . 33
1.4.3 Tiažové pole na povrchu homogénnej rotujúcej gule . . . 40
1.5 Výšky . . . 41
1.5.1 Určovanie rozdielu tiažového potenciálu . . . 41
1.5.2 Ortometrická výška . . . 43
1.5.3 Dynamická výška . . . 45
1.5.4 Elipsoidická výška . . . 45
1.6 Časové variácie . . . 46

2 Sférický harmonický rozvoj **49**
2.1 Motivácia . . . 49
2.2 Rozvoj gravitačného potenciálu do radu sférických harmonických funkcií . 51
2.3 Legendreove polynómy . . . 54
2.4 Legendreove funkcie . . . 58
2.5 Sférické harmonické funkcie . . . 60
2.6 Normovanie . . . 63

2.6.1 Legendreove funkcie a sférické harmonické funkcie 63
2.6.2 Sférické harmonické koeficienty 64
2.7 Fyzikálny význam niektorých sférických harmonických koeficientov 65
2.8 Aplikácie sférického harmonického rozvoja 66
2.8.1 Gravitačné pole 66
2.8.2 Topografia 69
2.9 Konvergencia sférického harmonického rozvoja na povrchu Zeme 69

3 Sféroidický harmonický rozvoj 73
3.1 Redukované elipsoidické súradnice 73
3.2 Laplaceova rovnica v redukovaných elipsoidických súradniciach 75
3.3 Sféroidické harmonické funkcie 76
3.4 Rozvoj gravitačného potenciálu do radu sféroidických harmonických funkcií 80

4 Normálne tiažové pole 83
4.1 Voľba normálneho tiažového poľa 84
4.1.1 Homogénna rotujúca guľa 84
4.1.2 Ekvipotenciálny elipsoid 84
4.1.3 Sféroid 85
4.2 Ekvipotenciálny elipsoid 86
4.2.1 Ekvipotenciálny elipsoid GRS80 87
4.2.2 Ekvipotenciálny elipsoid WGS84 88
4.3 Normálny tiažový potenciál 89
4.3.1 Normálny tiažový potenciál v redukovaných elipsoidických súradniciach 90
4.3.2 Normálny tiažový potenciál vo sférických súradniciach 95
4.4 Normálne tiažové zrýchlenie 97
4.4.1 Normálne tiažové zrýchlenie v redukovaných elipsoidických súradniciach 97
4.4.2 Taylorov rozvoj normálneho tiažového zrýchlenia 98
4.4.3 Normálne tiažové zrýchlenie vo sférických súradniciach 101

5 Poruchové pole a zvislicové odchýlky 103
5.1 Poruchový potenciál 104
5.1.1 Sférický harmonický rozvoj poruchového potenciálu 105
5.2 Porucha tiažového zrýchlenia 108
5.2.1 Vzťah medzi skalárnou poruchou tiažového zrýchlenia a poruchovým potenciálom 109
5.2.2 Sférický harmonický rozvoj poruchy tiažového zrýchlenia 110
5.3 Anomália tiažového zrýchlenia 114

5.3.1 Vzťah medzi skalárnou anomáliou tiažového zrýchlenia a poruchovým potenciálom . . . 116
5.3.2 Sférický harmonický rozvoj anomálie tiažového zrýchlenia . . . 119
5.3.3 Anomálie tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu a Bouguerove anomálie tiažového zrýchlenia . . . 120
5.4 Zvislicové odchýlky . . . 122
5.4.1 Vzťah medzi zvislicovou odchýlkou a poruchovým potenciálom . . . 125
5.4.2 Sférický harmonický rozvoj zvislicovej odchýlky . . . 128

6 Geoid **131**
6.1 Okrajová úloha pre poruchový potenciál . . . 132
6.2 Stokesov integrál . . . 134
6.2.1 Stokesovo integračné jadro . . . 136
6.2.2 Stokesov integrál ako konvolučný integrál . . . 139
6.2.3 Sférická aproximácia v Stokesovom integráli . . . 140
6.3 Hotineov integrál . . . 140
6.4 Poissonov integrál . . . 142
6.5 Astronomicko-geodetická metóda určenia geoidu . . . 143
6.6 Ďalšie metódy určovania geoidu . . . 144
6.6.1 Numerické riešenie geodetických okrajových úloh . . . 144
6.6.2 Metódy založené na sférických harmonických funkciách . . . 145
6.6.3 Metódy remove-compute-restore . . . 146
6.7 Veningove Meineszove integrály . . . 148

A Numerická aplikácia operátora gradient **153**

B Operátor gradient v ortogonálnych súradnicových systémoch **155**
B.1 Operátor gradient vo sférickom súradnicovom systéme . . . 155
B.2 Operátor gradient v ortogonálnom súradnicovom systéme . . . 157

C Laplaceov operátor v ortogonálnych súradnicových systémoch **159**
C.1 Laplaceov operátor vo sférickom súradnicovom systéme . . . 159
C.2 Laplaceov operátor v ortogonálnom súradnicovom systéme . . . 160

D Výpočet a zobrazenie gravitačného potenciálu a veľkosti gravitačného zrýchlenia homogénnej gule **163**

E Výpočet a zobrazenie Legendreových polynómov **165**

F Výpočet a zobrazenie sférických harmonických funkcií **167**

G Ukážka modelu gravitačného poľa Zeme **169**

H Výpočet a zobrazenie sférického harmonického rozvoja zemskej topografie 171

I Diferenciál vzdialenosti vo sférických súradniciach 173

Úvod

Tvar Zeme možno definovať niekoľkými spôsobmi v závislosti od kontextu (Moritz, 1990). Azda najprirodzenejšie je definovať tvar Zeme jej skutočným fyzickým povrchom, ktorý je viditeľný voľným okom. Tento povrch obsahuje nespočetné množstvo zložitých terénnych útvarov, napríklad strmé útesy či rokliny. Hoci sú tieto oblasti krásne na pohľad, znemožňujú aplikáciu istej časti potrebného matematického aparátu. Takto chápaný zemský povrch je preto spravidla skúmaný až po istom vyhladení. Napriek vyhladeniu je to však stále veľmi zložitá plocha.

K definovaniu tvaru Zeme môžeme pristúpiť aj iným spôsobom. Približne dve tretiny zemského povrchu tvorí voda v podobe oceánov a morí. Existuje pritom fyzikálna veličina, ktorá má za istých okolností konštantnú hodnotou na povrchu vodnej hladiny. Táto vlastnosť by tak mohla umožniť akúsi predikciu morskej hladiny i na súši naprieč kontinentmi. V porovnaní s predošlým prístupom by sme získali geometricky jednoduchšiu a hladšiu plochu, navyše aj s istými, relatívne jednoducho uchopiteľnými fyzikálnymi vlastnosťami. Takáto definícia tvaru Zeme bola navrhnutá C. F. Gaussom (1777 až 1855) a podľa návrhu Gaussovho doktoranda J. B. Listinga (1808 až 1882) nazývame túto plochu *geoid*. Konštantnou veličinou na povrchu geoidu je *tiažový potenciál*.

Fyzikálna geodézia je vedná disciplína zaoberajúca sa určovaním tvaru Zeme, jej tiažového poľa a ich zmenami v čase. Študované sú oba vyššie opísané prístupy k tvaru Zeme, pričom historicky bol predmetom záujmu ako prvý geoid. Matematicky odvážna myšlienka určovať priamo fyzický povrch Zeme pochádza už od E. H. Brunsa (1848 až 1919), no do popredia záujmu ju dostal až M. S. Molodenskij (1909 až 1991) v polovici 20. storočia. Aj v tomto prípade je však tvar Zeme určovaný z informácie o tiažovom poli. Študovať tvar Zeme, čo je jedna zo základných úloh geodézie, teda znamená študovať aj tiažové pole Zeme.

Kapitola 1

Gravitačné a tiažové pole

1.1 Newtonov gravitačný zákon

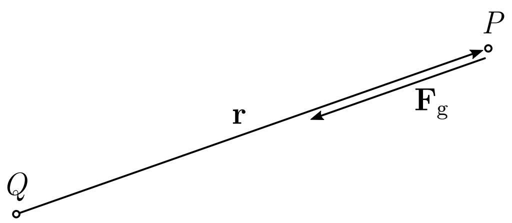
Dva hmotné body P a Q sa navzájom priťahujú *gravitačnou silou*

$$\mathbf{F}_\mathrm{g} = -G\frac{m_P\, m_Q}{\ell^3}\,\mathbf{r}. \tag{1.1}$$

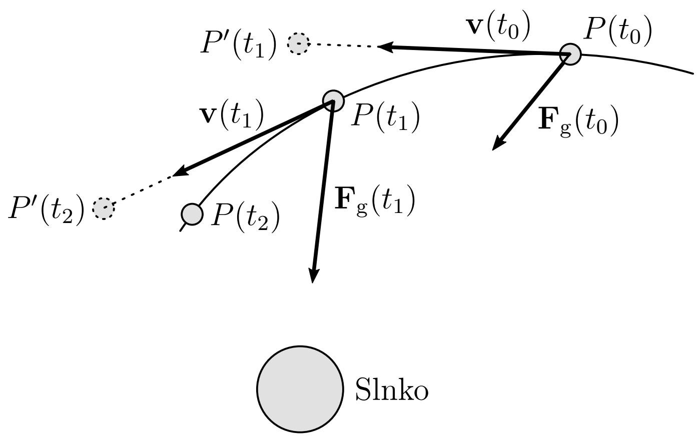
Symbol G označuje gravitačnú konštantu, m_P a m_Q predstavujú hmotnosti hmotných bodov, $\mathbf{r}$ je vektor spojnice bodov P a Q so začiatkom v bode Q a $\ell = \|\mathbf{r}\|$ je vzdialenosť medzi hmotnými bodmi. Záporné znamienko v rovnici znamená, že vektor sily má začiatok v bode P a smeruje do bodu Q (obrázok 1.1).

Rovnica (1.1) sa nazýva *gravitačný zákon* a bola publikovaná I. Newtonom (1642 až 1727) v roku 1687 v práci *PhilosophiæNaturalis Principia Mathematica*. Hovorí, že každý hmotný bod vo vesmíre priťahuje každý iný hmotný bod silou, ktorej veľkosť je priamo úmerná súčinu hmotností dvoch priťahovaných hmotných bodov a nepriamo úmerná štvorcu ich vzdialenosti; smer sily je daný spojnicou hmotných bodov (Kellogg, 1967). *Hmotný bod* je idealizovaný pojem predstavujúci časticu s nulovým rozmerom a konečnou nenulovou hmotnosťou bez akýchkoľvek ďalších vlastností či štruktúry. Hodnota gravitačnej konštanty odporúčaná od roku 2018 *Komisiou pre dáta vo vede a technológiách* (CODATA) je $G = (6.67430 \pm 0.00015) \times 10^{-11}\ \mathrm{m}^3\ \mathrm{kg}^{-1}\ \mathrm{s}^{-2}$.

Nech planéta obieha okolo Slnka (obrázok 1.2). Označme polohu planéty v čase t_0 symbolom $P(t_0)$ a vektor jej okamžitej rýchlosti symbolom $\mathbf{v}(t_0)$. Predpokladajme, že



Obrázok 1.1. Gravitačná sila $\mathbf{F}_\mathrm{g}$ pôsobiaca medzi hmotnými bodmi Q a P. Vektor $\mathbf{F}_\mathrm{g}$ je z vizualizačných dôvodov mierne odsadený od spojnice bodov P a Q.



Obrázok 1.2. Obeh planéty okolo Slnka.

planéta má v čase t_0 udelenú nenulovú rýchlosť, $\|\mathbf{v}(t_0)\| > 0$. Ak by od času t_0 nepôsobila na planétu žiadna sila, planéta by sa ďalej pohybovala rovnomerným priamočiarym pohybom v smere vektora $\mathbf{v}(t_0)$. Za istý čas by sa teda dostala do polohy $P'(t_1)$. Jediný spôsob, ako zmeniť túto dráhu, je pôsobiť na planétu silou. Z rovnice (1.1) vyplýva, že Slnko pôsobí v čase t_0 na planétu gravitačnou silou $\mathbf{F}_g(t_0)$, ktorej smer je daný spojnicou planéty a Slnka. Gravitačná sila preto priťahuje planétu v smere vektora $\mathbf{F}_g(t_0)$, čím mení hypotetickú trajektóriu, ktorou by sa planéta pohybovala bez pôsobenia tejto sily. V kombinácii s vektorom rýchlosti tak gravitačná sila spôsobí, že planéta sa v skutočnosti dostane do polohy $P(t_1)$. V čase t_1 sa opísaná situácia opakuje, pričom vektory rýchlosti a sily už majú iný smer a s vysokou pravdepodobnosťou aj inú veľkosť. Gravitačná sila Slnka teda udeľuje planéte zrýchlenie, a tým zakrivuje jej trajektóriu *v každom okamihu*.

Newtonovým gravitačným zákonom možno vysvetliť aj mnoho ďalších prírodných javov, napríklad príliv a odliv či zodpovedať otázku, prečo majú planéty približne sférický tvar. Je pozoruhodné, že hoci rovnica (1.1) bola odpozorovaná z pohybu nebeských telies, zhoduje sa i s experimentmi, ktoré boli vykonané na vzdialenosť niekoľkých desiatok mikrometrov (Lee a kol., 2020). Napriek uvedenému je azda potrebné spomenúť aj skutočnosť, že Newtonov gravitačný zákon je *nesprávny* (Feynman a kol., 2010). Predpokladá napríklad, že zmena hmotnosti či vzdialenosti má okamžitý gravitačný účinok, a to aj na telesá, ktoré sa nachádzajú vo veľkých vzdialenostiach. Tento predpoklad je ale v rozpore s experimentálne potvrdenou Einsteinovou špeciálnou teóriou relativity. Tá hovorí, že žiadny signál, ani gravitačný, sa nemôže šíriť rýchlejšie ako svetlo vo vákuu. Pre účely fyzikálnej geodézie sú však nepresnosti Newtonovho gravitačného zákona väčšinou zanedbateľné. Newtonova teória gravitácie tak aj dnes, viac ako tristo rokov po svojom vzniku, tvorí chrbtovú kosť fyzikálnej geodézie.

1.1.1 Gravitačné zrýchlenie

Gravitačná sila (1.1) pôsobiaca medzi hmotnými bodmi P a Q závisí od hmotností oboch hmotných bodov. Je preto výhodné normovať ju hmotnosťou toho hmotného bodu, v ktorom má vektor $\mathbf{F}_\mathrm{g}$ začiatok, v tomto prípade hmotnosťou m_P (pozri obrázok 1.1). Získame tým vektorovú veličinu, ktorú budeme nazývať *gravitačné zrýchlenie*. Označovať ju budeme symbolom $\mathbf{g}_\mathrm{g}$.

Nech P a Q sú dva hmotné body s hmotnosťami m_P a m_Q. Nech súradnice bodov P a Q sú x, y, z a x', y', z'. Gravitačné zrýchlenie v bode P je dané vzťahom

$$\mathbf{g}_\mathrm{g}(P) = \frac{\mathbf{F}_\mathrm{g}}{m_P} = -G\frac{m_Q}{\ell^3}\,\mathbf{r}, \tag{1.2}$$

kde vektor $\mathbf{r}$ je definovaný rozdielom polohových vektorov bodov P a Q,

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x - x' \\ y - y' \\ z - z' \end{bmatrix}, \tag{1.3}$$

a $\ell = \|\mathbf{r}\|$ je Euklidovská vzdialenosť medzi bodmi P a Q,

$$\ell = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}. \tag{1.4}$$

Rovnica (1.2) hovorí, že vektor $\mathbf{g}_\mathrm{g}(P)$ nezávisí od hmotnosti m_P, začiatok má v bode P a smeruje do hmotného bodu Q. V dôsledku nezávislosti gravitačného zrýchlenia (1.2) od hmotnosti hmotného bodu P tak môžeme pre jednoduchosť považovať P za geometrický bod bez fyzikálnych vlastností. Budeme hovoriť, že hmotný bod Q generuje gravitačné zrýchlenie $\mathbf{g}_\mathrm{g}$ v bode P. V poslednom výraze rovnice (1.2) vystupuje iba hmotnosť priťahujúceho hmotného bodu, preto ju budeme ďalej zapisovať v zjednodušenom tvare

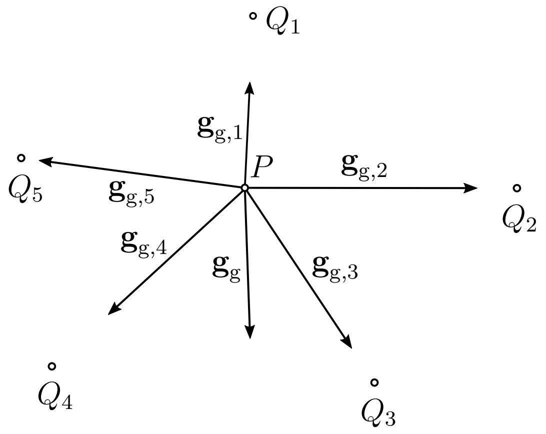
$$\mathbf{g}_\mathrm{g}(P) = -G\frac{m}{\ell^3}\,\mathbf{r}, \tag{1.5}$$

kde $m = m_Q$. Nezávislosť gravitačného zrýchlenia od hmotnosti priťahovaného telesa experimentálne potvrdil Gaileo Galilei (1564 až 1642).

Nájdime teraz vzťah pre gravitačné zrýchlenie, ktoré je generované sústavou N hmotných bodov (obrázok 1.3). Podľa Newtonovho gravitačného zákona „*[...] každý hmotný bod [...] priťahuje každý iný hmotný bod [...]*“ (kapitola 1.1), preto celkové gravitačné zrýchlenie v bode P je dané vektorovým súčtom čiastkových gravitačných zrýchlení, ktoré sú generované jednotlivými hmotnými bodmi. Táto vlastnosť sa nazýva *princíp superpozície* (Hotine, 1969). Gravitačné zrýchlenie generované N hmotnými bodmi tak získame vzťahom

$$\mathbf{g}_\mathrm{g}(P) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{g}_{\mathrm{g},i}(P) = -G\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{\ell_i^3}\,\mathbf{r}_i. \tag{1.6}$$

Newtonov gravitačný zákon (1.1) a rovnice (1.5) a (1.6) platia iba pre hmotné body. V tomto tvare môžu byť aplikované napríklad na popis pohybov, ktoré vykonávajú planéty slnečnej sústavy. Slnko a planéty sa totiž nachádzajú v takých veľkých vzájomných vzdialenostiach, že sa nedopustíme nerozumne veľkej chyby, ak ich nahradíme hmotnými bodmi. Menej priaznivá situácia nastáva vtedy, keď sa bod P nachádza v blízkosti telesa komplikovaného tvaru a hustoty (napríklad družica na nízkej obežnej dráhe Zeme).



Obrázok 1.3. Gravitačné zrýchlenie $\mathbf{g}_g$ v bode P generované sústavou piatich hmotných bodov Q_1 až Q_5 s rôznou hmotnosťou a polohou voči bodu P. Vektor $\mathbf{g}_g$ je daný vektorovým súčtom čiastkových gravitačných zrýchlení $\mathbf{g}_{g,1}$ až $\mathbf{g}_{g,5}$, ktoré sú generované príslušnými hmotnými bodmi.

V takom prípade nemôže byť teleso nahradené hmotným bodom. Aby sme dokázali vziať do úvahy všetky nepravidelnosti telesa z hľadiska jeho tvaru a hustoty, využijeme princíp superpozície. Teleso najprv rozdelíme na malé elementy a potom sčítame ich gravitačné príspevky. Na reprezentáciu týchto elementov už ale nemôžeme použiť hmotné body (rovnica 1.6), pretože tie sme definovali ako bezrozmerné (kapitola 1.1). Bezrozmernými bodmi nedokážeme aproximovať nenulový objem telesa.

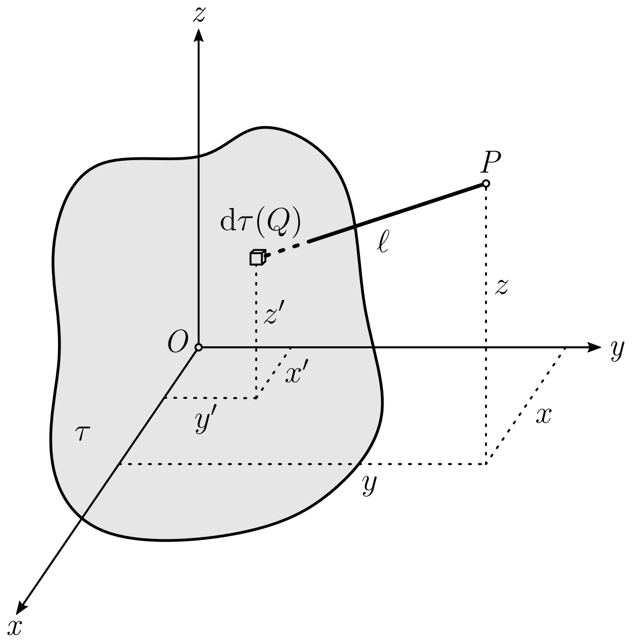
Zaveďme pojem všeobecné teleso. *Všeobecné teleso* má konečný objem τ a jeho hustota $\rho > 0$ je ohraničenou funkciou polohy (obrázok 1.4). Rozdeľme všeobecné teleso na diferenciálne hmotné elementy $\mathrm{d}m$ v zmysle integrálneho počtu, pričom

$$\mathrm{d}m = \rho \, \mathrm{d}\tau. \tag{1.7}$$

Hustota ρ sa medzi diferenciálnymi hmotnými elementmi $\mathrm{d}m$ môže meniť v závislosti od štruktúry telesa, ale nesmie sa meniť v rámci elementu samotného. Ďalej budeme predpokladať, že hmota diferenciálneho elementu $\mathrm{d}m$ je koncentrovaná v niektorom bode elementu (Kellogg, 1967). Diferenciál gravitačného zrýchlenia generovaný diferenciálnym hmotným elementom je po uvážení rovnice (1.7) daný vzťahom (porovnaj s rovnicou 1.5)

$$\mathrm{d}\mathbf{g}_g(P) = -G\frac{\mathbf{r}}{\ell^3}\,\mathrm{d}m = -G\frac{\mathbf{r}}{\ell^3}\rho\,\mathrm{d}\tau. \tag{1.8}$$

Keď aplikujeme Newtonov gravitačný zákon na diferenciálne hmotné elementy, je potrebné mať na pamäti, že tento zákon bol formulovaný pre hmotné body, nie pre diferenciálne hmotné elementy. Diferenciálne elementy $\mathrm{d}m$, akokoľvek sú malé, nikdy nie sú identické s hmotnými bodmi. Inými slovami, Newtonov gravitačný zákon neposkytuje spôsob výpočtu gravitačného účinku diferenciálneho hmotného elementu (Kellogg, 1967). Budeme preto musieť vysloviť ďalší predpoklad, a to, že tento zákon platí aj pre diferenciálne hmotné elementy v zmysle rovnice (1.8).



Obrázok 1.4. Všeobecné teleso.

Celkové gravitačné zrýchlenie generované všeobecným telesom získame využitím princípu superpozície, teda integráciou vzťahu (1.8),

$$\mathbf{g}_{\mathrm{g}}(P) = -G \iiint\limits_{\tau} \frac{\mathbf{r}}{\ell^3}\, \rho \, \mathrm{d}\tau. \tag{1.9}$$

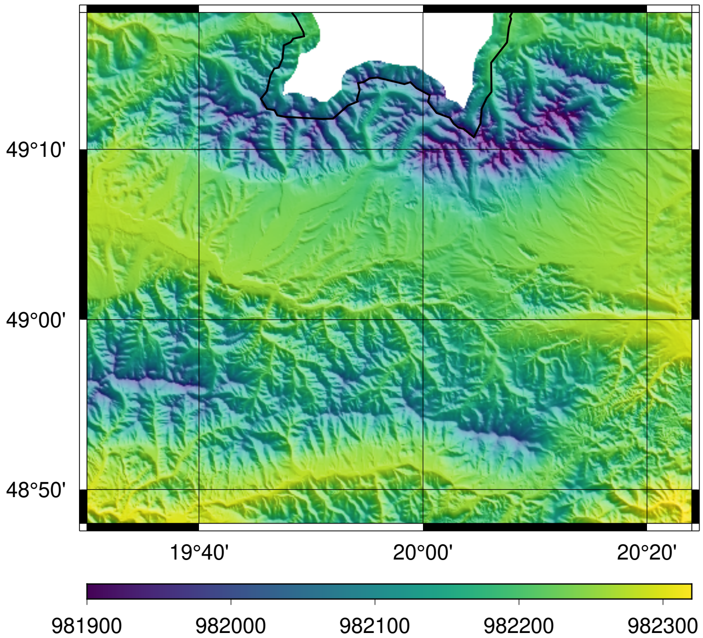
Rovnica (1.9) už môže byť korektne použitá na výpočet gravitačného zrýchlenia všeobecného telesa (napríklad Zeme) v ľubovoľnom bode P (napríklad v ťažisku družice), pretože správne zohľadňuje tvar telesa a rozloženie jeho hustoty.

V širšom zmysle možno gravitačné zrýchlenie odmerať, preto má pre fyzikálnu geodéziu kľúčový význam. V sústave jednotiek SI má jednotku m s^{-2}. Veľmi často sa stretneme aj s jednotkou 1 Gal = 10^{-2} m s^{-2}, ktorá je pomenovaná podľa Galilea Galileiho, prípadne s jej násobkami 1 mGal = 10^{-5} m s^{-2} a 1 µGal = 10^{-8} m s^{-2}.

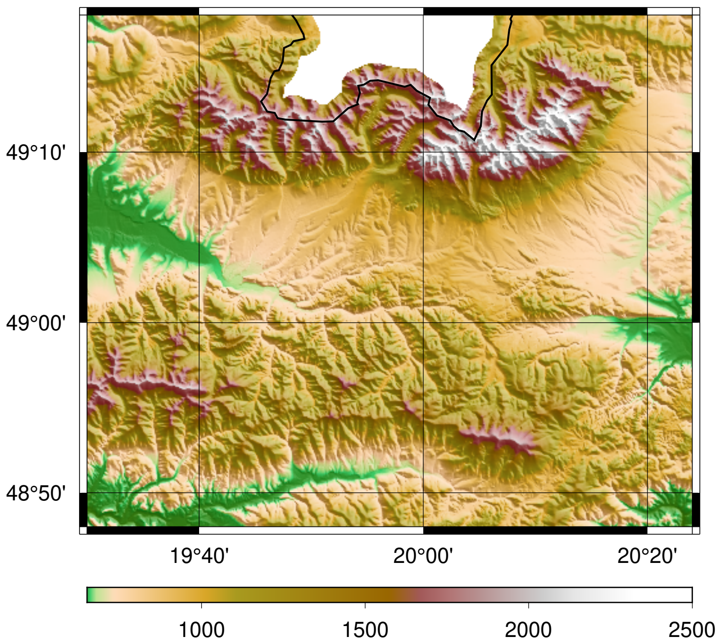
Obrázok 1.5 zobrazuje veľkosť gravitačného zrýchlenia v oblasti Vysokých a Nízkych Tatier. Z globálneho hľadiska je gravitačné zrýchlenie ovplyvnené najmä tvarom Zeme, jej hmotnosťou, sploštením a rozložením hustôt v jej vnútri. Na regionálnej úrovni možno pozorovať silnú závislosť od topografie (obrázok 1.6). Vidíme napríklad, že v miestach s veľkou nadmorskou výškou je veľkosť gravitačného zrýchlenia obvykle menšia ako v miestach s malou nadmorskou výškou. Je to spôsobené tým, že s narastajúcou výškou spravidla narastá aj vzdialenosť od hmôt. Táto vzdialenosť sa nachádza v menovateli rovnice (1.9), preto zmenšuje veľkosť gravitačného zrýchlenia.

1.1.2 Gravitačný potenciál

Gravitačné zrýchlenie je vektorová veličina, ktorá je v každom bode definovaná trojicou reálnych čísel. V niektorých situáciách je výhodnejšie pracovať so skalárnou veličinou, teda



Obrázok 1.5. Veľkosť gravitačného zrýchlenia $\|\mathbf{g}_{\mathrm{g}}\|$ na zemskom povrchu v oblasti Vysokých a Nízkych Tatier (jednotky mGal). Dáta sú prevzaté z modelu `grav-sr-2arcsec` (Bucha, 2019).



Obrázok 1.6. Topografia v oblasti Vysokých a Nízkych Tatier vyjadrená pomocou elipsoidickej výšky (jednotky m). Dáta sú prevzaté z modelu `grav-sr-2arcsec` (Bucha, 2019).

takou, ktorá je v každom bode definovaná práve jedným reálnym číslom. Tento prístup je mladší ako Newtonov gravitačný zákon zhruba o jedno storočie (MacMillan, 1930; Jekeli, 2015). Gravitáciu chápe ako *pole*, ktorého vlastnosti môžu byť popísané rôznymi vzájomne súvisiacimi veličinami. Ak by sme našli skalárnu veličinu gravitačného poľa, informáciu poskytnutú troma číslami v podobe gravitačného vektora by sme dokázali zredukovať na jedno jediné číslo bez straty informácie o poli samotnom. Podľa MacMillan (1930) prišiel s konceptom potenciálu poľa taliansky matematik a astronóm J. L. Lagrange (1736 až 1813). Skalárna veličina gravitačného poľa sa nazýva *gravitačný potenciál* a označuje sa symbolom V_{g}.

Gravitačný potenciál definujeme pomocou gravitačného zrýchlenia. Na pochopenie vzťahu medzi oboma veličinami najprv predstavíme diferenciálny operátor gradient a následne pristúpime k samotnej definícii gravitačného potenciálu.

Operátor gradient v karteziánskom súradnicovom systéme

Nech x, y, z je trojrozmerný karteziánsky súradnicový systém s jednotkovými vektormi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, ktoré sú rovnobežné so smerom súradnicových osí (obrázok 1.7),

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{1.10}$$

$$\|\mathbf{e}_i\| = 1, \quad i = 1, 2, 3. \tag{1.11}$$

Gradient skalárnej diferencovateľnej funkcie $f(x, y, z)$ je vektorová funkcia $\mathbf{f}(x, y, z)$, ktorá udáva *smer a veľkosť najväčšieho nárastu* funkcie f v bode so súradnicami x, y, z. V trojrozmernom karteziánskom súradnicovom systéme x, y, z je gradient funkcie f daný predpisom

$$\mathbf{f} = \nabla f = \operatorname{grad} f = \mathbf{e}_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial f}{\partial z} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}. \tag{1.12}$$

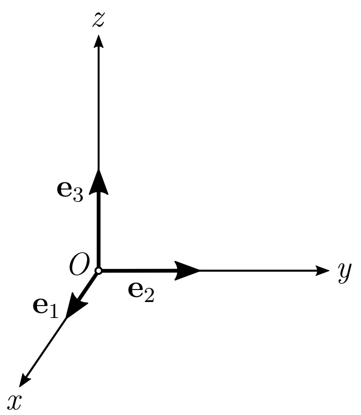
Symbol ∇, resp. grad označuje operátor gradient. Zložky vektora $\mathbf{f}(x, y, z)$ teda vyjadrujú zmenu skalárnej funkcie f v bode x, y, z v smere vektorov $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

Operátor gradient je *lineárny*, teda pre diferencovateľné funkcie f a g a konštantu c platí

$$\nabla (f + g) = \nabla f + \nabla g, \tag{1.13}$$

$$\nabla (c\, f) = c\, \nabla f. \tag{1.14}$$

Numerická ukážka aplikácie operátora gradient je uvedená v prílohe A.



Obrázok 1.7. Trojrozmerný karteziánsky súradnicový systém a jednotkové vektory.

Definícia gravitačného potenciálu

Gravitačný potenciál je skalárna funkcia, ktorá vyhovuje rovnici (Sansò a Sideris, 2013)

$$\mathbf{g}_{\mathrm{g}}(P) = \nabla V_{\mathrm{g}}(P) \tag{1.15}$$

a spĺňa podmienku

$$\lim_{P\to\infty} V_{\mathrm{g}}(P) = 0. \tag{1.16}$$

Vzťah (1.15) hovorí, že vektor $\mathbf{g}_{\mathrm{g}}(P)$ udáva smer a veľkosť najväčšieho nárastu gravitačného potenciálu v bode P. Rovnica (1.16) znamená, že v nekonečnej vzdialenosti od telesa nadobúda gravitačný potenciál nulovú hodnotu. Tento vzťah zabezpečuje, že existuje práve jedna funkcia V_{g}, ktorá vyhovuje rovnici (1.15) (Sansò a Sideris, 2013).

Poznamenajme, že bod s nulovým gravitačným potenciálom možno vybrať ľubovoľne, čo ale neznamená, že jeho voľba je nepodstatná. Práve naopak, miesto nulového gravitačného potenciálu ovplyvňuje hodnoty gravitačného potenciálu. Gravitačný potenciál je teda *relatívna* veličina. Často je preto dôležitejšie poznať relatívne vzťahy medzi gravitačným potenciálom v priestore, napríklad rozdiel potenciálu medzi dvoma bodmi, než je potrebné poznať absolútnu hodnotu gravitačného potenciálu v konkrétnom bode.

Gravitačný potenciál hmotného bodu s hmotnosťou m je daný vzťahom

$$V_{\mathrm{g}}(P) = \frac{G\,m}{\ell}. \tag{1.17}$$

Overme, či tento vzťah vyhovuje rovniciam (1.15) a (1.16). Aplikujme operátor gradient (1.12) na gravitačný potenciál (1.17). S využitím rovníc (1.3) a (1.4) dostaneme vzťah

$$\nabla V_{\mathrm{g}}(P) = \nabla\left(\frac{G\,m}{\ell}\right) = G\,m\,\nabla\left(\frac{1}{\ell}\right) = G\,m\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{\ell}\right)\\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{\ell}\right)\\ \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{1}{\ell}\right)\end{bmatrix} = -G\,m\begin{bmatrix}\dfrac{x-x'}{\ell^3},\\ \dfrac{y-y'}{\ell^3},\\ \dfrac{z-z'}{\ell^3}\end{bmatrix} = -G\,\frac{m}{\ell^3}\,\mathbf{r}. \tag{1.18}$$

Využili sme pritom vlastnosť operátora gradient (1.14), pretože $G\,m$ z rovnice (1.17) je konštanta. Vzťah (1.18) predstavuje gravitačné zrýchlenie $\mathbf{g}_\mathrm{g}(P)$ z rovnice (1.5), čím bola dokázaná rovnosť (1.15). Platnosť vzťahu (1.16) pre V_g z rovnice (1.17) je zrejmá,

$$\lim_{\ell\to\infty} \frac{G\,m}{\ell} = 0. \tag{1.19}$$

V sústave N hmotných bodov získame celkový gravitačný potenciál opäť princípom superpozície, teda súčtom čiastkových gravitačných príspevkov jednotlivých hmotných bodov,

$$V_\mathrm{g}(P) = \sum_{i=1}^{N} V_{\mathrm{g},i}(P) = G \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{\ell_i}. \tag{1.20}$$

Podobným spôsobom ako v rovnici (1.18) sa môžeme presvedčiť, že aplikovaním operátora gradient na gravitačný potenciál (1.20) získame gravitačné zrýchlenie (1.6). Rovnice (1.15) a (1.16) teda platia i v prípade gravitačného potenciálu, ktorý je generovaný sústavou N hmotných bodov.

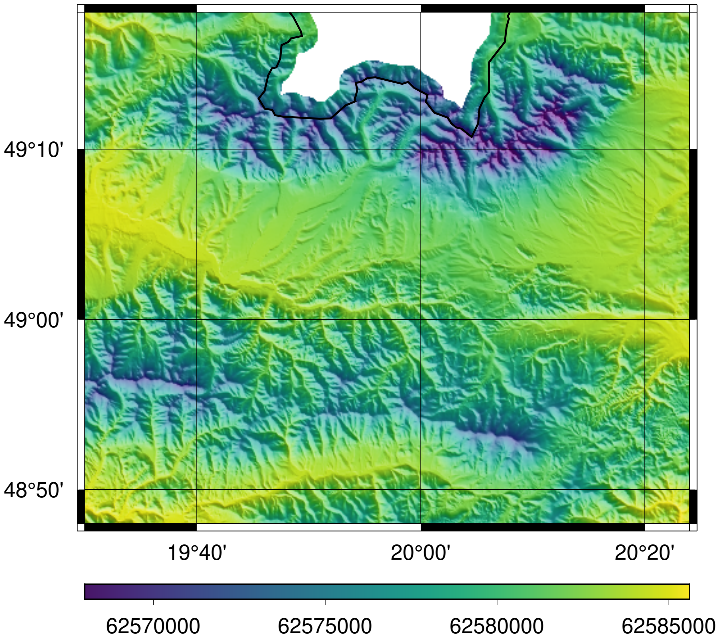
Od gravitačného potenciálu N hmotných bodov prejdeme ku gravitačnému potenciálu všeobecného telesa podobnou úvahou ako v kapitole 1.1.1. Teleso rozdelíme na diferenciálne hmotné elementy $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}\tau$ a gravitačný potenciál získame integráciou,

$$V_\mathrm{g}(P) = G \iiint\limits_{\tau} \frac{\rho}{\ell}\,\mathrm{d}\tau. \tag{1.21}$$

Dôkaz, že rovnica (1.21) vyhovuje prijatej definícii gravitačného potenciálu (rovnice 1.15 a 1.16) vynecháme, no je dostupný napríklad v MacMillan (1930).

K definícii a interpretácii gravitačného potenciálu možno pristúpiť aj z fyzikálneho hľadiska. Bez podrobného odvodenia sa obmedzíme na tvrdenie, že hodnota gravitačného potenciálu v bode P predstavuje prácu, ktorú musí vykonať gravitačné pole pri premiestnení hmotného bodu s hmotnosťou 1 kg z miesta s nulovým potenciálom (v geodézii nekonečno, pozri vzťah 1.16) do bodu P (MacMillan, 1930; Kellogg, 1967; Torge a Müller, 2012). *Práca* je dráhový účinok sily, v tomto prípade gravitačnej. Gravitačná sila má tú vlastnosť, že práca spôsobená jej silovým účinkom *nezávisí* od dráhy, dôležitý je iba začiatočný a koncový bod dráhy. Ak sú začiatočný a koncový bod totožné, práca je nulová. Bez tejto vlastnosti by nebolo možné nájsť skalárnu funkciu V_g, ktorá by vyhovovala rovnici (1.15).

Na rozdiel od gravitačného zrýchlenia, gravitačný potenciál nedokážeme priamo merať. Vo fyzikálnej geodézii často vystupuje ako neznáma funkcia, ktorú sa snažíme určiť, napríklad z gravitačného zrýchlenia. Gravitačný potenciál má v sústave SI fyzikálnu jednotku $\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-2}$. Obrázok 1.8 znázorňuje gravitačný potenciál v oblasti Vysokých a Nízkych Tatier.



Obrázok 1.8. Gravitačný potenciál V_g na zemskom povrchu v oblasti Vysokých a Nízkych Tatier (jednotky m^2 s^{-2}). Dáta sú prevzaté z modelu `grav-sr-2arcsec` (Bucha, 2019).

1.2 Teória potenciálu

Rovnica (1.21) sa v geovedách zvykne nazývať *Newtonov integrál*. Hovorí, že gravitačný potenciál telesa môže byť vypočítaný, ak poznáme tvar telesa a priestorové rozloženie hustoty v jeho vnútri. Newtonov integrál má vo fyzikálnej geodézii kľúčový význam, pretože gravitačný potenciál obsahuje informáciu o všetkých veličinách gravitačného poľa.

Newtonov integrál položil základy novej oblasti matematiky a matematickej fyziky s názvom *teória potenciálu*. Podľa MacMillan (1930) siahajú jej začiatky k francúzskemu matematikovi, fyzikovi, astronómovi a politikovi P. S. Laplaceovi (1749 až 1827). Ten si uvedomil, že gravitačný potenciál každého všeobecného telesa má spoločné určité vlastnosti. Na základe týchto spoločných vlastností možno potom definovať zaujímavú množinu funkcií, ktorá je hodná podrobnejšieho skúmania. Významnosť teórie potenciálu iba potvrdzuje skutočnosť, ktorá je známa približne od čias C. F. Gaussa, a to, že táto teória je aplikovateľná nielen na gravitačné pole, ale napríklad aj na magnetické či elektrostatické pole (spomeňme si na Coulombov zákon a porovnajme ho s Newtonovým gravitačným zákonom 1.1).

Teória potenciálu teda študuje vzťah (1.21) vo všeobecnom zmysle. Zaoberá sa pritom rozličnými zdrojmi poľa (hmotný bod, hmotná priamka, nekonečne tenká vrstva, všeobecné teleso a pod.) s rôznym priestorovým rozložením hustôt (napríklad konštantná, premenlivá či dokonca i záporná) a neobmedzuje sa iba na gravitačné pole. Táto úloha je nesmierne náročná. Čo sa napríklad stane, ak sa v rovniciach (1.9) a (1.21) nachádza výpočtový bod P vo vnútri telesa? Za takýchto okolností musí nevyhnutne dôjsť k situácii, v ktorej sú súradnice bodu P identické so súradnicami jedného diferenciálneho hmotného elementu $\mathrm{d}m$. Vzájomná vzdialenosť medzi bodom P a elementom $\mathrm{d}m$, ktorá vystupuje v menovateli, bude preto $\ell = 0$. Konvergujú alebo divergujú v takomto prípade integrály (1.9) a (1.21)? Jednou z mnohých ďalších výziev sú gravitačné polia objektov komplikovaných tvarov, napríklad Zeme, ktorej povrch obsahuje ostré hrany. Je preto prirodzené, že teória potenciálu pritiahla záujem brilantných matematikov, akými boli napríklad J. L. Lagrange, A.-M. Legendre (1752 až 1833), P. S. Laplace, britský samouk G. Green (1793 až 1841) či C. F. Gauss (pre diskusiu o Gaussovom prínose pozri napríklad Freeden a kol., 2018).

V nasledujúcich šiestich kapitolách (1.2.1 až 1.2.6) sa budeme zaoberať niektorými základnými vlastnosťami gravitačného potenciálu, ktoré vyplývajú z teórie potenciálu.

1.2.1 Podmienka regularity

Gravitačný potenciál hmotného bodu a gravitačný potenciál všeobecného telesa sú regulárne funkcie v nekonečne. Funkcia U je *regulárna v nekonečne*, ak platí (Kellogg, 1967; Pick a kol., 1973)

$$\lim_{\ell\to\infty} |\ell\, U| < C, \quad \lim_{\ell\to\infty} \left|\ell^2 \frac{\partial U}{\partial x}\right| < C, \quad \lim_{\ell\to\infty} \left|\ell^2 \frac{\partial U}{\partial y}\right| < C, \quad \lim_{\ell\to\infty} \left|\ell^2 \frac{\partial U}{\partial z}\right| < C, \tag{1.22}$$

kde ℓ je vzdialenosť od ľubovoľného pevného bodu a C je konštanta.

Na tomto mieste sa obmedzíme iba na dôkaz, že prvá limita (1.22) pre gravitačný potenciál hmotného bodu V_{g} z rovnice (1.17) je konečná. Vzdialenosť ℓ v nerovnostiach (1.22) môže byť uvažovaná od ľubovoľného pevného bodu v priestore. Ak za tento pevný bod zvolíme polohu hmotného bodu s hmotnosťou m, potom ℓ v rovnici (1.17) a v nerovnostiach (1.22) predstavuje tú istú vzdialenosť, teda

$$\lim_{\ell\to\infty} |\ell\, V_{\mathrm{g}}| = \lim_{\ell\to\infty} \left|\ell\, \frac{G\, m}{\ell}\right| = \lim_{\ell\to\infty} |G\, m| = G\, m. \tag{1.23}$$

Pre gravitačný potenciál všeobecného telesa (1.21) uvedieme bez dôkazu nasledujúcu rovnosť,

$$\lim_{\ell\to\infty} |\ell\, V_{\mathrm{g}}| = G\, M, \tag{1.24}$$

kde M je hmotnosť všeobecného telesa. Pre dôkaz, že gravitačný potenciál všeobecného telesa (1.21) vyhovuje nerovnostiam (1.22) pozri napríklad Pick a kol. (1973).

1.2.2 Laplaceova rovnica v karteziánskych súradniciach

Pierre-Simon Laplace zistil, že gravitačný potenciál každého všeobecného telesa spĺňa v priestore *mimo* hmôt rovnicu

$$\nabla^2 V_{\mathrm{g}} = \frac{\partial^2 V_{\mathrm{g}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_{\mathrm{g}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_{\mathrm{g}}}{\partial z^2} = 0. \tag{1.25}$$

Operátor ∇^2 sa nazýva *Laplaceov operátor* a rovnica (1.25) sa nazýva *Laplaceova rovnica* pre gravitačný potenciál. V niektorej literatúre sa Laplaceov operátor označuje symbolom Δ.

Aplikáciu Laplaceovho operátora ∇^2 na dvakrát diferencovateľnú funkciu f môžeme zapísať pomocou už známeho operátora gradient ∇, ktorý bol definovaný rovnicou (1.12) (Sansò a Sideris, 2013),

$$\begin{aligned}\nabla^2 f &= \nabla\cdot(\nabla f) = \left(\mathbf{e}_1\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{e}_2\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{e}_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\mathbf{e}_1\frac{\partial f}{\partial x}+\mathbf{e}_2\frac{\partial f}{\partial y}+\mathbf{e}_3\frac{\partial f}{\partial z}\right)\\ &= \mathbf{e}_1\cdot\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}+\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\mathbf{e}_1\cdot\frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}+\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+\cdots+\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2},\end{aligned} \tag{1.26}$$

kde symbol $\cdot$ označuje *skalárny súčin dvoch vektorov.*[1] Na získanie posledného výrazu v rovnici (1.26) sme využili nasledujúce vlastnosti jednotkových vektorov a skalárneho súčinu vektorov,

$$\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j = \|\mathbf{e}_i\|\,\|\mathbf{e}_j\|\,\cos(90^\circ) = 0,\quad i\neq j, \tag{1.27}$$

$$\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_i = \|\mathbf{e}_i\|\,\|\mathbf{e}_i\|\,\cos(0^\circ) = 1, \tag{1.28}$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial z} = \mathbf{0}. \tag{1.29}$$

Rovnica (1.27) vyplýva z *ortogonálnosti* jednotkových vektorov $\mathbf{e}_i$ a $\mathbf{e}_j$ pre $i\neq j$ (pozri obrázok 1.7). Rovnica (1.28) je dôsledkom vzťahu (1.11). Vzťahy (1.29) vyplývajú z definície jednotkových vektorov (1.10).

Laplaceov operátor je *lineárny*, teda pre dvakrát diferencovateľné funkcie f a g a konštantu c platí

$$\nabla^2(f+g) = \nabla^2 f + \nabla^2 g, \tag{1.30}$$

$$\nabla^2(c\,f) = c\,\nabla^2 f. \tag{1.31}$$

Overme, či gravitačný potenciál hmotného bodu (1.17) vyhovuje Laplaceovej rovnici (1.25). Budeme uvažovať vzdialenosť $\ell > 0$, pretože gravitačný potenciál hmotného bodu nie je definovaný pre $\ell = 0$. S využitím (1.17) a (1.31) dostaneme vzťah

$$\nabla^2 V_{\mathrm{g}} = \nabla^2\left(\frac{G\,m}{\ell}\right) = G\,m\,\nabla^2\left(\frac{1}{\ell}\right), \tag{1.32}$$

keďže $G\,m$ je konštanta. Postačuje preto dokázať rovnosť

$$\nabla^2\left(\frac{1}{\ell}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\ell}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{\ell}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{\ell}\right) = 0. \tag{1.33}$$

[1] Oblé zátvorky v rovnici (1.26) sú použité na určenie priority algebrických operácií násobenia a sčítania, nie na označenie prvkov vektorov. Prvky vektorov a matíc udávame vždy v hranatých zátvorkách.

Vypočítajme druhé parciálne derivácie funkcie $1/\ell$ v smere súradnicových osí s využitím rovnice (1.4),

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\ell}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x-x'}{\ell^3}\right) = \left(3\frac{(x-x')^2}{\ell^5} - \frac{1}{\ell^3}\right),\\
\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{\ell}\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y-y'}{\ell^3}\right) = \left(3\frac{(y-y')^2}{\ell^5} - \frac{1}{\ell^3}\right),\\
\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{\ell}\right) &= \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{z-z'}{\ell^3}\right) = \left(3\frac{(z-z')^2}{\ell^5} - \frac{1}{\ell^3}\right).
\end{aligned} \tag{1.34}$$

Súčet členov na pravej strane rovníc (1.34) je nulový, čím je dokázaná rovnosť (1.33). Gravitačný potenciál hmotného bodu (1.17) teda vyhovuje Laplaceovej diferenciálnej rovnici (1.25) pre $\ell > 0$.

Pomocou vzťahov (1.20), (1.30), (1.31) a (1.34) sa možno presvedčiť, že Laplaceovej rovnici vyhovuje i gravitačný potenciál, ktorý je generovaný sústavou N hmotných bodov,

$$\nabla^2\left(\sum_{i=1}^{N} V_{\mathrm{g},i}\right) = \sum_{i=1}^{N}\nabla^2 V_{\mathrm{g},i} = G\sum_{i=1}^{N} m_i \nabla^2\left(\frac{1}{\ell_i}\right) = 0. \tag{1.35}$$

Rovnica (1.35) platí opäť iba za predpokladu, že $\ell_i > 0$ pre $i = 1, 2, \ldots, N$. Táto podmienka je splnená, ak poloha bodu, v ktorom je Laplaceova rovnica počítaná, je rozdielna od polôh všetkých N hmotných bodov.

Podobne možno ukázať, že Laplaceova rovnica pre gravitačný potenciál všeobecného telesa platí vo všetkých bodoch *mimo* telesa,

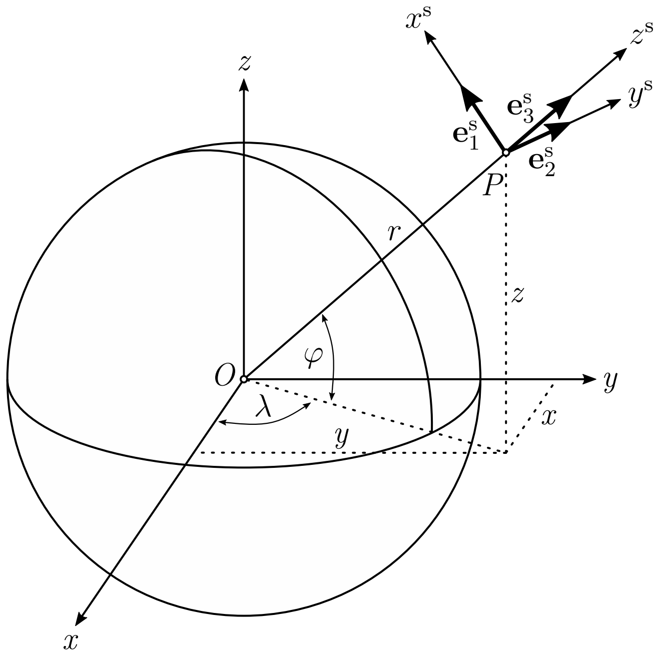
$$\nabla^2 V_{\mathrm{g}} = G\iiint\limits_{\tau}\rho\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\ell}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{\ell}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{\ell}\right)\right]\mathrm{d}\tau = 0. \tag{1.36}$$

1.2.3 Laplaceova rovnica vo sférických súradniciach

S ohľadom na približne sférický tvar Zeme je často výhodnejšie popisovať zemské gravitačné pole v krivočiarych sférických súradniciach než v karteziánskych súradniciach. Je preto potrebné nájsť tvar operátora gradient (rovnica 1.12) a Laplaceovho operátora (rovnica 1.26) aj vo sférických súradniciach. Zaujímavosťou je, že Laplace v skutočnosti prvýkrát publikoval rovnicu (1.25) práve v krivočiarych sférických súradniciach, a nie v karteziánskych súradniciach (MacMillan, 1930).

Sférické súradnice budeme označovať symbolmi r, φ, λ, pričom r predstavuje sprievodič, φ je sférická šírka a λ je sférická dĺžka (obrázok 1.9). Transformácia sférických súradníc na karteziánske súradnice má tvar (obrázok 1.9)

$$\begin{aligned}
x &= r\,\cos\varphi\,\cos\lambda,\\
y &= r\,\cos\varphi\,\sin\lambda,\\
z &= r\,\sin\varphi.
\end{aligned} \tag{1.37}$$



Obrázok 1.9. Karteziánske súradnice x, y, z a sférické súradnice r, φ, λ bodu P. Symboly $\mathbf{e}_1^{\mathrm{s}}, \mathbf{e}_2^{\mathrm{s}}, \mathbf{e}_3^{\mathrm{s}}$ označujú jednotkové vektory lokálneho karteziánskeho súradnicového systému $x^{\mathrm{s}}, y^{\mathrm{s}}, z^{\mathrm{s}}$ s pohyblivým začiatkom v bode P.

Inverzná transformácia je daná vzťahmi (obrázok 1.9)

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \varphi &= \arctan \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \lambda &= \arctan \frac{y}{x}. \end{aligned} \tag{1.38}$$

Operátor gradient má vo sférických súradniciach tvar (pozri prílohu B.1)

$$\nabla f = \operatorname{grad} f = \mathbf{e}_1^{\mathrm{s}} \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_2^{\mathrm{s}} \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \mathbf{e}_3^{\mathrm{s}} \frac{\partial f}{\partial r} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \dfrac{1}{r \cos \varphi} \dfrac{\partial f}{\partial \lambda} \\ \dfrac{\partial f}{\partial r} \end{bmatrix}. \tag{1.39}$$

Symboly $\mathbf{e}_1^{\mathrm{s}}, \mathbf{e}_2^{\mathrm{s}}, \mathbf{e}_3^{\mathrm{s}}$ označujú jednotkové vektory súradnicových osí $x^{\mathrm{s}}, y^{\mathrm{s}}, z^{\mathrm{s}}$ lokálneho karteziánskeho súradnicového systému orientovaného na sever s pohyblivým začiatkom v bode P (obrázok 1.9). Os z^{s} je daná smerom sprievodiča prechádzajúceho bodom P a je orientovaná kladne vo vonkajšom smere. Os x^{s} leží v rovine meridiánu a je orientovaná kladne na sever. Os y^{s} dotvára pravouhlý *ľavotočivý* súradnicový systém. Aplikovaním operátora gradient (1.39) na gravitačný potenciál $V_{\mathrm{g}}(r, \varphi, \lambda)$ získame gravitačné zrýchlenie $\mathbf{g}_{\mathrm{g}}(r, \varphi, \lambda)$, ktorého prvky popisujú zmenu gravitačného potenciálu v bode P v smere súradnicových osí $x^{\mathrm{s}}, y^{\mathrm{s}}, z^{\mathrm{s}}$.

Laplaceova rovnica pre gravitačný potenciál má vo sférických súradniciach tvar (príloha C.1)

$$\nabla^2 V_g = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V_g}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial V_g}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\frac{\partial^2 V_g}{\partial\lambda^2} = 0. \tag{1.40}$$

Deriváciou oboch súčinov v zátvorkách môžeme zapísať Laplaceovu rovnicu aj v tvare

$$\nabla^2 V_g = \frac{\partial^2 V_g}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V_g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_g}{\partial\varphi^2} - \frac{\tan\varphi}{r^2}\frac{\partial V_g}{\partial\varphi} + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\frac{\partial^2 V_g}{\partial\lambda^2} = 0. \tag{1.41}$$

1.2.4 Praktický význam Laplaceovej rovnice

Jedným z cieľov fyzikálnej geodézie je určiť vonkajšie gravitačné pole Zeme z odmeraných veličín gravitačného poľa. Z praktických dôvodov ale dokážeme vykonávať merania iba v malej časti priestoru mimo Zeme, napríklad v bezprostrednej blízkosti zemského povrchu či na dráhe umelej družice Zeme. Preto ak chceme určiť gravitačné pole aj v iných oblastiach mimo Zeme, je potrebné porozumieť tomu, ako sa gravitačný potenciál v tomto priestore mení. Ak by nejaký princíp existoval a bol by objavený, znamenalo by to, že hoci naše merania sú dostupné iba v malej časti vonkajšieho priestoru Zeme, gravitačný potenciál mimo Zeme môže byť z týchto meraní vypočítaný aj v tých oblastiach, ktoré nie sú pokryté meraniami.

Tento princíp bol objavený a je ním práve Laplaceova rovnica. V kapitole 1.1 sme ukázali, ako Newtonov gravitačný zákon (1.1) vysvetľuje *princíp* (mechanizmus) pohybu planéty okolo Slnka. Vďaka tomuto princípu postačuje poznať niekoľko vstupných údajov v čase t_0 (polohu planéty, vektor rýchlosti planéty a vektor gravitačnej sily, ktorá pôsobí medzi Slnkom a planétou) a poloha planéty môže byť vypočítaná v ľubovoľnom čase v budúcnosti či v minulosti. Situácia je síce výrazne komplikovanejšia, ak uvážime prítomnosť ďalších nebeských telies, no aj táto úloha je riešiteľná v princípe rovnakým spôsobom. V prípade Laplaceovej rovnice je situácia veľmi podobná. Predpokladajme, že poznáme napríklad gravitačný potenciál či gravitačné zrýchlenie na celom povrchu Zeme a tiež predpokladajme, že tvar zemského povrchu je známy. Znalosť *princípu* zmeny gravitačného potenciálu[2] mimo Zeme v podobe Laplaceovej rovnice potom umožňuje zistiť hodnotu gravitačného potenciálu v ľubovoľnom bode tejto oblasti. Laplaceova rovnica má preto kľúčový význam pre určovanie vonkajšieho gravitačného poľa Zeme. Dodajme, že Laplaceova rovnica platí mimo Zeme až po matematickom odstránení alebo zanedbaní hmôt zemskej atmosféry (pozri napríklad Janák a kol., 2006).

1.2.5 Harmonická funkcia

Laplaceovej rovnici vyhovuje nielen gravitačný potenciál mimo telesa, ale nekonečné množstvo funkcií. Zaveďme preto pojem *harmonická funkcia*. Funkcia je harmonická v ob-

[2]Keďže Laplaceova rovnica (1.25) obsahuje druhé derivácie, presnejšie by azda bolo hovoriť o *zmene zmeny* gravitačného potenciálu.

lasti Ω trojrozmerného priestoru, ak vyhovuje Laplaceovej rovnici v každom bode oblasti Ω (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005). Ak oblasť Ω je vonkajším priestorom uzavretej plochy, potom musí navyše spĺňať podmienku regularity (pozri nerovnosti 1.22; Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005).

Harmonické funkcie majú niekoľko zaujímavých a dôležitých vlastností (pozri napríklad Kellogg, 1967; Pick a kol., 1973; Janák a kol., 2006). Spomeňme aspoň jednu z nich. Každá harmonická funkcia je *analytická* v oblasti, v ktorej vyhovuje Laplaceovej rovnici. To znamená, že každá harmonická funkcia je spojitá, má spojité všetky derivácie a v okolí každého bodu oblasti Ω ju možno rozvinúť do Taylorovho radu (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005). Táto vlastnosť je kľúčová, preto sa pri nej na chvíľku pristavme.

Nech $f(x)$ je analytická funkcia, ktorá je nekonečne diferencovateľná v bode x_0. *Taylorov rozvoj* funkcie $f(x)$ v okolí bodu x_0 má tvar

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^n. \tag{1.42}$$

Zápis $\left.\frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}\right|_{x=x_0}$ označuje hodnotu n-tej derivácie funkcie f podľa x v bode x_0. Pripomeňme, že $0! = 1$ a tiež, že nultá derivácia funkcie f je rovná samotnej funkcii f, teda $\left.\frac{\mathrm{d}^0 f(x)}{\mathrm{d}x^0}\right|_{x=x_0} = f(x_0)$.

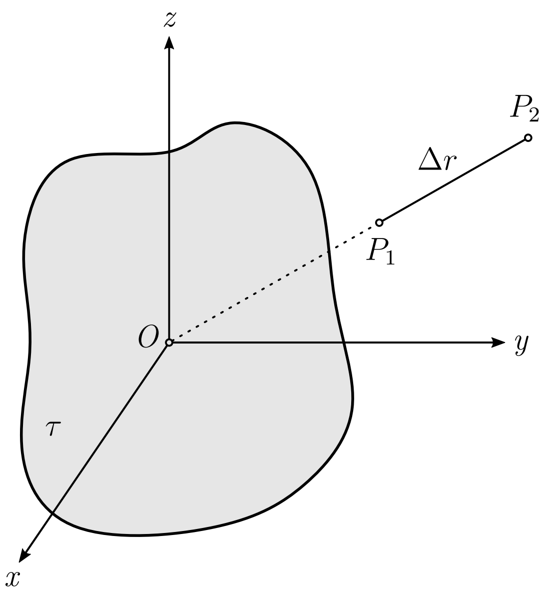
Uvažujme teraz všeobecné teleso. Nech sú dané dva body, $P_1(r, \varphi, \lambda)$ a $P_2(r + \Delta r, \varphi, \lambda)$, $\Delta r > 0$, nachádzajúce sa mimo tohto telesa a na tej istej spojnici so začiatkom súradnicového systému, ktorý sa nachádza v ťažisku telesa (obrázok 1.10). Keďže gravitačný potenciál je v oblasti mimo hmôt harmonická, a teda analytická funkcia, môžeme ho v okolí bodu P_1 rozvinúť do Taylorovho radu,

$$V_\mathrm{g}(P_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n V_\mathrm{g}}{\partial r^n} \right|_{P_1} \Delta r^n. \tag{1.43}$$

Rovnica (1.43) hovorí, že z lokálnych vlastností gravitačného potenciálu, ktoré sú obsiahnuté v deriváciách $\partial^n V_\mathrm{g} / \partial r^n$ v bode P_1, dokážeme určiť hodnotu gravitačného potenciálu v ľubovoľnom bode v radiálnom smere pre $\Delta r > 0$. Tento proces sa nazýva *analytické pokračovanie* gravitačného potenciálu nahor. Čím je vzdialenosť Δr väčšia, tým pomalšie rad (1.43) spravidla konverguje a naopak. Analyticky pokračovať možno aj v iných smeroch. V takom prípade je potrebné derivovať gravitačný potenciál v príslušnom smere. Rovnako tak môžu byť analyticky pokračované aj iné veličiny gravitačného poľa, napríklad gravitačné zrýchlenie,

$$\mathbf{g}_\mathrm{g}(P_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n \mathbf{g}_\mathrm{g}}{\partial r^n} \right|_{P_1} \Delta r^n. \tag{1.44}$$

Na záver dodajme, že situácia je výrazne komplikovanejšia, ak analyticky pokračujeme nadol z bodu P_2 do bodu P_1. Táto úloha je zle podmienená a numericky nestabilná (Sansò a Sideris, 2017). V praktických aplikáciách to znamená, že i malá zmena vo vstupných údajoch spôsobuje veľké zmeny vo výsledkoch.



Obrázok 1.10. Analytické pokračovanie gravitačného poľa medzi bodmi P_1 a P_2.

1.2.6 Poissonova rovnica

Z kapitoly 1.2.2 vieme, že Laplaceova rovnica pre gravitačný potenciál platí v každom bode mimo telesa. *Vo vnútri* telesa platí *Poissonova rovnica*,

$$\nabla^2 V_\mathrm{g}(P) = -4\pi\, G\, \rho(P), \tag{1.45}$$

kde $\rho(P)$ je hustota v bode P. Odvodenie Poissonovej rovnice uvádzajú napríklad MacMillan (1930), Kellogg (1967) a Sansò a Sideris (2013). Poissonovu rovnicu možno vnímať ako zovšeobecnenie Laplaceovej rovnice. Ak sa bod P vo vzťahu (1.45) nachádza mimo hmôt, potom $\rho(P) = 0$, čím dostávame Laplaceovu rovnicu (1.25). S. D. Poisson (1781 až 1840) bol francúzsky matematik a fyzik. Rovnicu (1.45) publikoval v roku 1813 v práci *Bulletin de la société philomatique*.

Posledná oblasť, v ktorej sa môže nachádzať bod P, no nie je pokrytá ani Laplaceovou, ani Poissonovou rovnicou, je *povrch* telesa. Druhé derivácie gravitačného potenciálu vystupujúce v operátore ∇^2 (pozri rovnice 1.25 a 1.41) nie sú vo všeobecnosti v takom prípade definované (Kellogg, 1967). Dôvodom je nespojitosť hustoty ρ, ktorá sa na povrchu telesa mení z $\rho > 0$ na 0, resp. naopak, v závislosti od smeru prechodu. Na povrchu telesa tak pre gravitačný potenciál neplatí ani Laplaceova rovnica (1.25), ani Poissonova rovnica (1.45).

1.3 Odstredivé pole a tiažové pole

Newtonov gravitačný zákon (1.1) platí v súradnicovom systéme, ktorý je v pokoji alebo je v stave rovnomerného priamočiareho pohybu. Takýto súradnicový systém sa nazýva *inerciálny súradnicový systém*.

Uvažujme trojrozmerný karteziánsky súradnicový systém so začiatkom v ťažisku Zeme a s osou z, ktorá je totožná s rotačnou osou Zeme. Os x nech leží v priesečníku rovín rovníka a Greenwichského meridiánu a os y nech dotvára pravotočivý súradnicový systém. Nech je tento súradnicový systém pevne spojený so Zemou. Takýto súradnicový systém nie je inerciálny, pretože voči inerciálnemu súradnicovému systému v ňom dochádza prinajmenšom k dvom nelineárnym pohybom (Sansò a Sideris, 2013). Prvý vzniká v dôsledku rotácie Zeme okolo vlastnej osi, druhý je spôsobený obehom Zeme okolo Slnka. Aby sme v takomto neinerciálnom súradnicovom systéme mohli študovať sily pôsobiace na Zemi pomocou druhého Newtonovho pohybového zákona, musíme uvážiť nielen gravitačnú silu, ale aj ďalšie sily. Na objekt, ktorý sa nachádza na rotujúcej Zemi, pôsobí okrem gravitačnej sily aj *odstredivá sila*. Ak je takýto objekt v pohybe, pôsobí naň aj *Coriolisova sila* (Torge, 1989; Jekeli, 2000b; Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005; Sansò a Sideris, 2013). Azda väčšina geodetických meracích zariadení je počas merania voči Zemi v pokoji, preto Coriolisovu silu nebudeme uvažovať. Ak sa uhlová rýchlosť rotácie mení v čase, je potrebné uvážiť *Eulerovu silu* (Torge, 1989; Sansò a Sideris, 2013). V tejto práci predpokladáme, že uhlová rýchlosť rotácie Zeme je konštantná, preto nebudeme ďalej uvažovať ani Eulerovu silu. Tieto tri sily, odstredivá, Coriolisova a Eulerova, sa zaraďujú medzi *zotrvačné sily*, niekedy tiež nazývané fiktívne sily. Zotrvačné sily sú zdanlivé sily, ktoré sú spôsobené neinerciálnosťou vzťažnej sústavy pozorovateľa, a teda nevznikajú vzájomným silovým pôsobením medzi objektmi.

Najvýznamnejšia zotrvačná sila vo fyzikálnej geodézii je spôsobená rotáciou Zeme a nazýva sa *odstredivá sila* $\mathbf{F}_\mathrm{c}$. Pole spôsobené rotáciou Zeme budeme nazývať *odstredivé pole*. Zatiaľ čo gravitačné pole Zeme je v zmysle Newtonovho gravitačného zákona (1.1) dôsledkom hmôt, ktoré tvoria zemské teleso, odstredivé pole Zeme je spôsobené neinerciálnosťou vyššie opísaného súradnicového systému. Uvážením spoločného pôsobenia gravitačného a odstredivého poľa získame *tiažové pole*. Formálne teda môžeme napísať vzťah

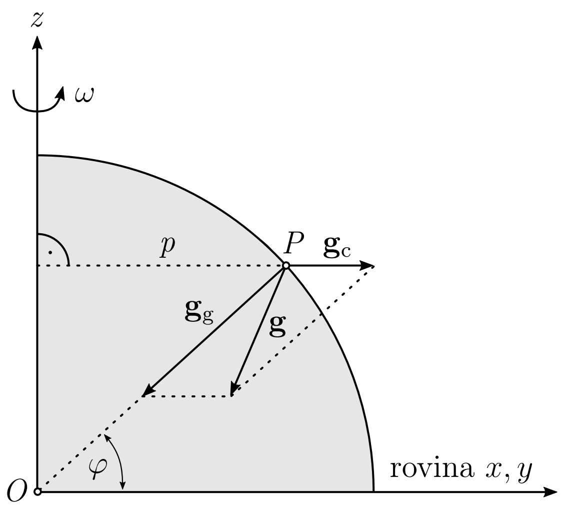
$$\text{gravitačné pole} + \text{odstredivé pole} = \text{tiažové pole}.$$

Tiažové pole má pre fyzikálnu geodéziu fundamentálny význam. Jedna z veličín tiažového poľa, tiažové zrýchlenie, je totiž jedným z prostredníkov, vďaka ktorým vieme získať a matematicky uchopiť informáciu o skutočnom tiažovom poli našej Zeme. Ďalšia z veličín tiažového poľa, tiažový potenciál, sa používa napríklad na definíciu fyzikálneho tvaru Zeme, teda geoidu (pozri úvodnú kapitolu).

V nasledujúcich dvoch kapitolách popíšeme veličiny odstredivého a tiažového poľa.

1.3.1 Odstredivé a tiažové zrýchlenie

Uvažujme neinerciálny súradnicový systém x, y, z v zmysle kapitoly 1.3. Odteraz však budeme navyše predpokladať, že uhlová rýchlosť rotácie Zeme ω je konštantná a tiež že rotačná os Zeme nemení svoju polohu voči súradnicovej osi z. Nech je daný hmotný bod $P(x, y, z)$ s hmotnosťou 1 kg kdekoľvek na Zemi alebo v jej vnútri. V dôsledku rotácie



Obrázok 1.11. Gravitačné zrýchlenie $\mathbf{g}_\mathrm{g}$, odstredivé zrýchlenie $\mathbf{g}_\mathrm{c}$ a tiažové zrýchlenie $\mathbf{g}$ v bode P na povrchu idealizovanej rotujúcej Zeme sférického tvaru a konštantnej hustoty.

Zeme a súradnicového systému, v ktorom vyjadrujeme polohu, je hmotnému bodu P udeľované *odstredivé zrýchlenie* $\mathbf{g}_\mathrm{c}(P)$,

$$\mathbf{g}_\mathrm{c}(P) = \omega^2\,\mathbf{p} = \omega^2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{1.46}$$

Veľkosť odstredivého zrýchlenia $\|\mathbf{g}_\mathrm{c}(P)\|$ sa mení iba so vzdialenosťou $p = \|\mathbf{p}\|$ od rotačnej osi (obrázok 1.11),

$$\|\mathbf{g}_\mathrm{c}(P)\| = \omega^2\,p = \omega^2\,\sqrt{x^2+y^2} = \omega^2\,r\,\cos\varphi. \tag{1.47}$$

Čím je vzdialenosť p väčšia, tým je väčšie i odstredivé zrýchlenie a naopak. Vektor $\mathbf{g}_\mathrm{c}(P)$ je kolmý na os rotácie (pozri vzťah 1.46 a obrázok 1.11). Uhlová rýchlosť rotácie Zeme je približne rovná $\omega = 7\,292\,115 \times 10^{-11}$ rad s^{-1} (Moritz, 2000).

V neinerciálnom súradnicovom systéme je výsledné zrýchlenie pôsobiace na hmotný bod s hmotnosťou 1 kg dané vektorovým súčtom gravitačného zrýchlenia $\mathbf{g}_\mathrm{g}(P)$ a odstredivého zrýchlenia $\mathbf{g}_\mathrm{c}(P)$.[3] Toto zrýchlenie sa nazýva *tiažové zrýchlenie* a označovať ho budeme symbolom $\mathbf{g}(P)$ (obrázok 1.11),

$$\mathbf{g}(P) = \mathbf{g}_\mathrm{g}(P) + \mathbf{g}_\mathrm{c}(P). \tag{1.48}$$

Meranie tiažového zrýchlenia

Tiažové zrýchlenie možno odmerať, vďaka čomu predstavuje ústrednú veličinu v procese určovania tvaru Zeme. Prístroj na meranie *veľkosti* tiažového zrýchlenia $\|\mathbf{g}(P)\|$ sa nazýva *absolútny gravimeter*. Merania absolútnymi gravimetrami sú časovo aj finančne náročné,

[3] Ostatné zrýchlenia (pozri kapitolu 1.3) sme v tejto práci s prijateľnou mierou aproximácie zanedbali.

preto sa využívajú aj *relatívne gravimetre*. Týmito prístrojmi je ale možné určiť iba rozdiel veľkostí tiažového zrýchlenia, či už medzi dvoma bodmi, alebo na jednom bode v rozdielnom čase. Presnosť určenia $\|\mathbf{g}(P)\|$ v súčasnosti dosahuje rádovo niekoľko mikroGalov. *Smer* vektora $\mathbf{g}(P)$ je daný astronomickou šírkou a astronomickou dĺžkou bodu P, a tak môže byť odmeraný astronomickým určením polohy bodu P (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005). Presnosť určenia astronomických súradníc sa v súčasnosti pohybuje približne v desatinách uhlovej sekundy. Vedný odbor zaoberajúci sa meraním tiažového zrýchlenia sa nazýva *gravimetria* (pozri napríklad Torge, 1989; Rozimant a kol., 1994 či Janák, 2010).

1.3.2 Odstredivý a tiažový potenciál

Podobne ako gravitačné zrýchlenie, i odstredivé a tiažové zrýchlenie možno definovať pomocou skalárnych veličín. Tieto skalárne veličiny sa nazývajú *odstredivý potenciál*,

$$V_c(P) = \frac{1}{2}\,\omega^2\,(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}\,\omega^2\,r^2\,\cos^2\varphi, \tag{1.49}$$

a *tiažový potenciál*,

$$W(P) = V_g(P) + V_c(P). \tag{1.50}$$

Príslušné zrýchlenia (1.46) a (1.48) získame aplikovaním operátora gradient na rovnice (1.49) a (1.50),

$$\mathbf{g}_c(P) = \nabla V_c(P), \tag{1.51}$$

$$\mathbf{g}(P) = \nabla W(P) = \nabla V_g(P) + \nabla V_c(P) = \mathbf{g}_g(P) + \mathbf{g}_c(P). \tag{1.52}$$

V zmysle vlastností operátora gradient (kapitola 1.1.2) udávajú vektory $\mathbf{g}_c(P)$ a $\mathbf{g}(P)$ veľkosť a smer najväčšieho nárastu odstredivého a tiažového potenciálu $V_c(P)$ a $W(P)$ v bode P. Rovnicu (1.51) možno overiť pomocou (1.12) a (1.49), čím získame (1.46). V rovnici (1.52) bola využitá lineárnosť operátora gradient (rovnice 1.13 a 1.14).

Odstredivý ani tiažový potenciál nedokážeme priamo odmerať. V sústave SI prislúcha obom veličinám jednotka $\mathrm{m}^2\ \mathrm{s}^{-2}$.

Ekvipotenciálna plocha

Plocha, na ktorej je tiažový potenciál W konštantný, sa nazýva *ekvipotenciálna plocha* alebo tiež *hladinová plocha* (obrázok 1.12). V úvodnej kapitole jeden z prístupov definuje tvar Zeme ako geoid, teda ako tú ekvipotenciálnu plochu, ktorá sa najlepšie približuje strednej hladine morí a oceánov. Pre fyzikálnu geodéziu majú preto ekvipotenciálne plochy veľký význam. Zamerajme sa na niektoré ich vlastnosti.

- Ekvipotenciálne plochy sú spojité. Táto vlastnosť vyplýva zo skutočnosti, že tiažový potenciál všeobecného telesa (rovnica 1.50) je spojitá funkcia v celom priestore (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005).
- Ekvipotenciálne plochy sú uzavreté (Vaníček a Krakiwsky, 1986).

- Ak sa celá ekvipotenciálna plocha nachádza mimo telesa, potom je táto plocha analytická. Ekvipotenciálne plochy nachádzajúce sa vo vnútri telesa alebo teleso pretínajúce nie sú vo všeobecnosti analytické, pretože ich krivosť sa môže nespojito meniť v závislosti od hustoty (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005).

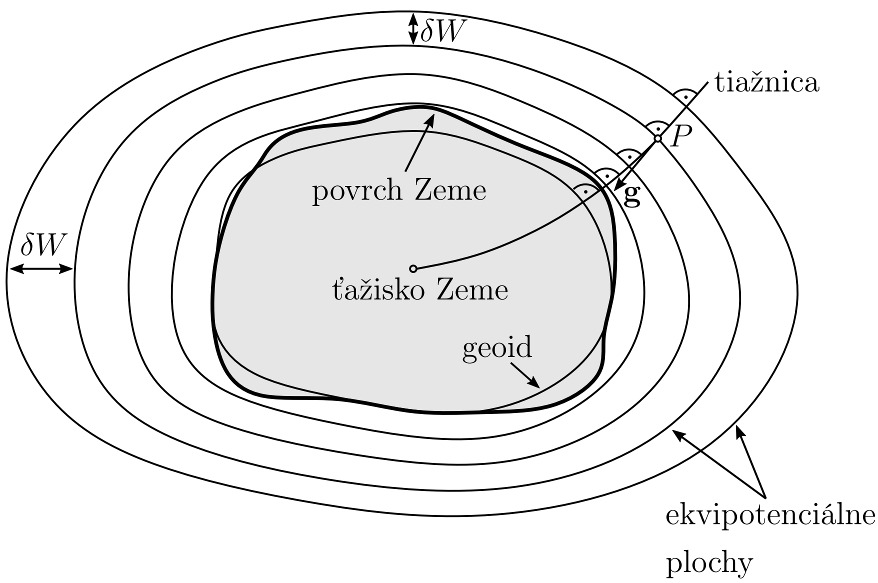
- Všetky ekvipotenciálne plochy sú hladké a neobsahujú hrany (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005).

- Ekvipotenciálne plochy sa nepretínajú. Tiažový potenciál W má v každom bode definované práve jednu hodnotu (skalárna veličina), preto sa ekvipotenciálne plochy nemôžu pretnúť (MacMillan, 1930).

- Smer tiažového zrýchlenia je v každom bode kolmý na ekvipotenciálnu plochu prechádzajúcu týmto bodom (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005). Toto tvrdenie vyplýva priamo z rovnice (1.52).

Ďalšie dôležité vlastnosti ekvipotenciálnych plôch popisujú napríklad Hofmann-Wellenhof a Moritz (2005) a Janák a kol. (2006).

Matematický popis tvaru ekvipotenciálnych plôch reálnych telies je náročný. Z Newtonovho integrálu (1.21) vieme, že gravitačné pole je dané tvarom a hustotou telesa. Zložité nepravidelné tvary či rozloženia hustoty spôsobujú lokálne zvlnenia ekvipotenciálnych plôch. Z globálneho pohľadu je tvar ekvipotenciálnych plôch daný celkovou geometriou telesa (napríklad sploštením Zeme) či rozsiahlymi hustotnými zmenami v jeho vnútri. Na regionálnej úrovni je zvlnenie ekvipotenciálnych plôch do veľkej miery spôsobené lokálnymi nepravidelnosťami v tvare telesa (napríklad pohoriami). Práve tieto skutočnosti výrazne komplikujú presný výpočet geoidu.



Obrázok 1.12. Ekvipotenciálne plochy s konštantným krokom tiažového potenciálu δW.

Obrázok 1.12 schematicky znázorňuje ekvipotenciálne plochy tiažového poľa Zeme s konštantným krokom tiažového potenciálu δW. Možno si všimnúť, že priestorový rozostup ekvipotenciálnych plôch je väčší v rovníkových oblastiach ako v polárnych oblastiach. Malý rozostup ekvipotenciálnych plôch znamená veľkú zmenu tiažového poľa, teda veľké tiažové zrýchlenie, a naopak. Veľkosť tiažového zrýchlenia $\|\mathbf{g}\|$ je tak väčšia v polárnych oblastiach ako v okolí rovníka.

Lokálny tvar ekvipotenciálnych plôch vplýva na mnohé geodetické merania. Horizontovaním geodetického prístroja zabezpečujeme, že jeho horizontálna os leží v rovine lokálneho horizontu, ktorý je dotykovou rovinou k ekvipotenciálnej ploche prechádzajúcej stredom libely. V rovine lokálneho horizontu sú merané napríklad vodorovné smery. Avšak z dôvodu približne sférického tvaru Zeme a pre zvlnenie ekvipotenciálnych plôch nemožno vo všeobecnosti predpokladať rovnobežnosť lokálnych horizontov na dvoch rôznych stanoviskách. Preto ak je vyžadovaná vysoká presnosť a záujmová lokalita je rozsiahla alebo má zložitú topografiu, môže byť potrebné korigovať niektoré geodetické merania o vplyv nerovnobežnosti lokálnych horizontov. Vzájomné vzťahy medzi lokálnymi horizontmi možno popísať práve pomocou tiažového poľa (pozri napríklad Vaníček a Krakiwsky, 1986 alebo Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005). V širšom zmysle môžeme povedať, že hoci sú mnohé geodetické merania postavené na geometrických princípoch, uskutočňujeme ich pod vplyvom tiažového poľa. V geodézii preto polohu bodov nemožno presne určovať bez znalosti tiažového poľa. Na druhej strane, údaje o tiažovom poli získavame z meraní v bodoch, ktorých presnú polohu musíme poznať. Túto polohu však určujeme opäť len tými istými geodetickými metódami, ktoré vyžadujú znalosť tiažového poľa. Táto cyklickosť demonštruje úzko prepojený vzťah medzi geodetickými meraniami a tiažovým poľom.

Tiažnica

Siločiara tiažového poľa sa nazýva *tiažnica*. Tiažnica je priestorová krivka, ktorá je kolmá na všetky ekvipotenciálne plochy (obrázok 1.12). Dotyčnica k tiažnici sa nazýva *zvislica*. Smer zvislice je totožný so smerom tiažového zrýchlenia (smer zavesenej olovnice).

Z pohľadu geodetických meraní je nutné, aby zvislá os prístroja (napríklad teodolitu) bola totožná s lokálnou zvislicou. Táto podmienka je splnená po zhorizontovaní prístroja za predpokladu, že vertikálna os prístroja je kolmá na horizontálnu os prístroja. K lokálnej zvislici sa vzťahujú napríklad merané vertikálne uhly. Približne sférický tvar Zeme a zvlnenie ekvipotenciálnych plôch spôsobujú, že vertikálne osi zhorizontovaných prístrojov nie sú medzi stanoviskami vo všeobecnosti rovnobežné. V úlohách, ktoré vyžadujú vysokú presnosť, môže byť preto potrebné korigovať geodetické merania o vplyv nerovnobežnosti lokálnych zvislíc.

V geodézii sa tiažnice využívajú napríklad na definovanie fyzikálnych (nadmorských) výšok (kapitola 1.5).

1.4 Homogénna rotujúca guľa

Homogénna guľa je teleso sférického tvaru s polomerom R a konštantnou hustotu ρ. Je to jedna z najjednoduchších aproximácií zemského telesa, preto ju využijeme na získanie hrubej predstavy o gravitačnom a tiažovom poli v okolí skutočnej Zeme.

Gravitačné pole homogénnej gule budeme študovať pomocou Newtonovho integrálu (1.21). Ten sme až dosiaľ zapisovali všeobecne s využitím integračného elementu $\mathrm{d}\tau$ a objemu telesa τ. V karteziánskom súradnicovom systéme možno objem diferenciálneho elementu $\mathrm{d}\tau$ (obrázok 1.4) vyjadriť jednoducho vzťahom

$$\mathrm{d}\tau(Q) = \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}z'. \tag{1.53}$$

Dosadením (1.53) do (1.21) tak získame Newtonov integrál v karteziánskom súradnicovom systéme,

$$V_{\mathrm{g}}(P) = G \iiint\limits_{\tau} \frac{\rho}{\ell}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}z'. \tag{1.54}$$

V tejto kapitole ale chceme skúmať gravitačné pole v okolí telesa sférického tvaru, preto bude výrazne jednoduchšie riešiť Newtonov integrál vo sférickom súradnicovom systéme. V kapitole 1.4.1 preto najprv vyjadríme Newtonov integrál (1.21) v krivočiarych sférických súradniciach. S využitím získaného vzťahu potom v kapitolách 1.4.2 a 1.4.3 popíšeme gravitačné a tiažové pole v okolí homogénnej gule.

1.4.1 Newtonov integrál vo sférických súradniciach

Odvodenie Newtonovho integrálu vo sférických súradniciach r, φ, λ z jeho náprotivku v karteziánskych súradniciach x, y, z (rovnica 1.54) nie je triviálne. Dôvod je ten, že jednotlivé karteziánske súradnice x, y, z v rovnici (1.54) závisia od viac, ako jednej sférickej súradnice, $x(r, \varphi, \lambda)$, $y(r, \varphi, \lambda)$, $z(r, \varphi)$ (pozri vzťahy 1.37). Túto úlohu vyriešime zámenou integračných premenných.

Zámenu troch integračných premenných možno formulovať nasledujúcim spôsobom. Nech sú dané súradnicové systémy x_1, x_2, x_3 a $u_1(x_1, x_2, x_3), u_2(x_1, x_2, x_3), u_3(x_1, x_2, x_3)$. Pre integrovateľnú funkciu $f(x_1, x_2, x_3)$ potom platí vzťah (napríklad Arfken a Weber, 2005; Olver a kol., 2010)

$$\begin{aligned} \iiint\limits_{\Omega} f(x_1, x_2, x_3)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 = \iiint\limits_{\Omega'} & f[x_1(u_1, u_2, u_3), x_2(u_1, u_2, u_3), x_3(u_1, u_2, u_3)] \\ & \times |\det(\mathbf{J})|\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3, \end{aligned} \tag{1.55}$$

kde $|\det(\mathbf{J})|$ je absolútna hodnota determinantu matice

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_3} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_3} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u_2} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u_3} \end{bmatrix}. \tag{1.56}$$

Maticu $\mathbf{J}$ budeme nazývať *Jacobiho matica*. Symbol Ω označuje zobrazenie oblasti Ω' v zmysle transformácie $(u_1, u_2, u_3) \to (x_1(u_1, u_2, u_3), x_2(u_1, u_2, u_3), x_3(u_1, u_2, u_3))$.

Vráťme sa teraz k Newtonovmu integrálu (1.54). Na získanie diferenciálneho elementu $\mathrm{d}\tau$ vo sférických súradniciach potrebujeme v zmysle zámeny troch integračných premenných najprv vyjadriť Jacobiho maticu. Tú získame pomocou rovníc (1.37) a (1.56),

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x'}{\partial r'} & \dfrac{\partial x'}{\partial \varphi'} & \dfrac{\partial x'}{\partial \lambda'} \\ \dfrac{\partial y'}{\partial r'} & \dfrac{\partial y'}{\partial \varphi'} & \dfrac{\partial y'}{\partial \lambda'} \\ \dfrac{\partial z'}{\partial r'} & \dfrac{\partial z'}{\partial \varphi'} & \dfrac{\partial z'}{\partial \lambda'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi' \, \cos\lambda' & -r' \, \sin\varphi' \, \cos\lambda' & -r' \, \cos\varphi' \, \sin\lambda' \\ \cos\varphi' \, \sin\lambda' & -r' \, \sin\varphi' \, \sin\lambda' & r' \, \cos\varphi' \, \cos\lambda' \\ \sin\varphi' & r' \, \cos\varphi' & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.57}$$

Determinant Jacobiho matice (1.57) vypočítame napríklad Sarrusovým pravidlom,

$$\det(\mathbf{J}) = -(r')^2 \, \cos\varphi'. \tag{1.58}$$

Pre diferenciál $\mathrm{d}\tau(Q)$ teda platí (pozri rovnicu 1.55)

$$\mathrm{d}\tau(Q) = \mathrm{d}x' \, \mathrm{d}y' \, \mathrm{d}z' = |\det(\mathbf{J})| \, \mathrm{d}r' \, \mathrm{d}\varphi' \, \mathrm{d}\lambda' = (r')^2 \, \cos\varphi' \, \mathrm{d}r' \, \mathrm{d}\varphi' \, \mathrm{d}\lambda'. \tag{1.59}$$

Všimnime si, že vo sférických súradniciach závisí diferenciál objemu $\mathrm{d}\tau(Q)$ od polohy integračného elementu. Je to spôsobené tým, že v poslednom výraze rovnice (1.59) sa nachádza člen $(r')^2 \cos\varphi'$, ktorý obsahuje súradnice r' a φ' bodu Q (pozri obrázok 1.4). V karteziánskych súradniciach (rovnica 1.53) takáto závislosť neexistuje.

Newtonov integrál vyjadríme vo sférických súradniciach pomocou vzťahov (1.54), (1.55) a (1.59),

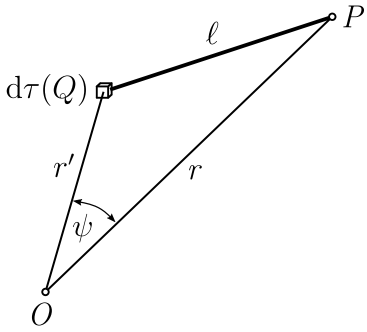
$$V_{\mathrm{g}}(P) = G \iiint_{\tau'} \frac{\rho}{\ell} \, (r')^2 \, \cos\varphi' \, \mathrm{d}r' \, \mathrm{d}\varphi' \, \mathrm{d}\lambda', \tag{1.60}$$

kde $P(r, \varphi, \lambda)$ je výpočtový bod, $\rho = \rho(r', \varphi', \lambda')$ je hustota diferenciálneho elementu $\mathrm{d}\tau(Q)$, $\ell = \ell(r, \psi, r')$ je vzdialenosť medzi P a Q (obrázok 1.4),

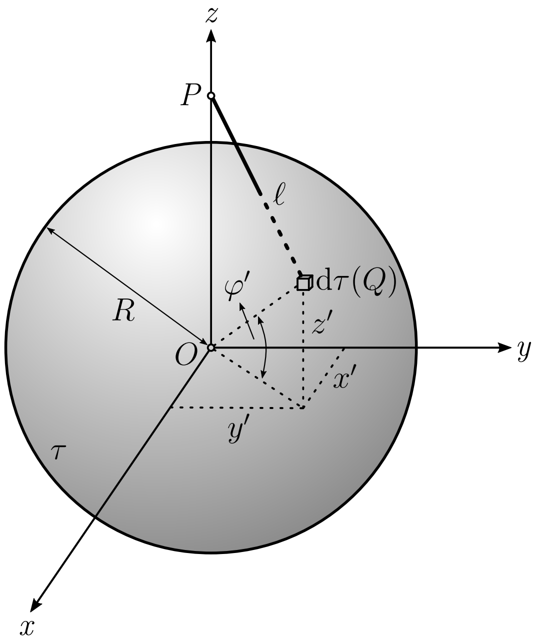
$$\ell = \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2\, r\, r' \, \cos\psi}, \tag{1.61}$$

a napokon $\psi = \psi(\varphi, \lambda, \varphi', \lambda')$ je uhol medzi spojnicami OQ a OP v rovinnom trojuholníku OPQ (obrázok 1.13),

$$\cos\psi = \sin\varphi \, \sin\varphi' + \cos\varphi \, \cos\varphi' \, \cos(\lambda - \lambda'). \tag{1.62}$$



Obrázok 1.13. Rovinný trojuholník OPQ z obrázku 1.4.



Obrázok 1.14. Výpočtový bod P mimo homogénnej gule s polomerom R.

1.4.2 Gravitačné pole homogénnej gule

V tejto kapitole popíšeme gravitačný potenciál a gravitačné zrýchlenie homogénnej gule v celom priestore.

Nech je daná homogénna guľa s polomerom R a konštantnou hustotou ρ (obrázok 1.14). Nech je ďalej daný trojrozmerný karteziánsky súradnicový systém x, y, z so začiatkom O v geometrickom strede gule. Z dôvodu konštantnej hustoty je geometrický stred homogénnej gule súčasne aj jej ťažiskom. Konštantná hustota ρ tiež umožňuje prepísať Newtonov integrál (1.60) do tvaru

$$V_{\mathrm{g}}(P) = G\,\rho \iiint\limits_{\tau'} \frac{1}{\ell}\,(r')^2\,\cos\varphi'\,\mathrm{d}r'\,\mathrm{d}\varphi'\,\mathrm{d}\lambda'. \tag{1.63}$$

Homogénna guľa je rotačne symetrické teleso, preto jej gravitačné pole nezávisí ani od sférickej šírky, ani od sférickej dĺžky výpočtového bodu. Sférickú šírku a sférickú dĺžku výpočtových bodov preto môžeme zvoliť tak, aby nám umožnili čo najjednoduchší výpočet. Vhodnou voľbou sa javia byť body ležiace na osi z. V celej tejto podkapitole budeme teda predpokladať, že výpočtový bod $P(r, \varphi, \lambda)$ leží na osi z, pokiaľ nebude uvedené inak. Vzťahy budeme hľadať pomocou Newtonovho integrálu (1.63) zvlášť v bodoch mimo gule ($r > R$), na povrchu gule ($r = R$) a na záver vo vnútri gule ($r < R$).

Gravitačné pole mimo homogénnej gule

Nech P je výpočtový bod, ktorý sa nachádza mimo homogénnej gule ($r > R$). Vzdialenosť medzi P a Q (obrázok 1.14) vyjadríme z rovnice (1.61),

$$\ell = \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2\,r\,r' \cos(90^\circ - \varphi')} = \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2\,r\,r' \sin(\varphi')}. \tag{1.64}$$

Vzdialenosť ℓ z predošlej rovnice nezávisí od sférickej dĺžky λ', preto vo vzťahu (1.63) môžeme ihneď vypočítať integrál cez sférickú dĺžku λ',

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{g}}(P) &= G\,\rho \int\limits_{r'=0}^{R} \int\limits_{\varphi'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{\lambda'=0}^{2\pi} \frac{1}{\ell}\,(r')^2 \cos\varphi'\,\mathrm{d}\lambda'\,\mathrm{d}\varphi'\,\mathrm{d}r' \\ &= G\,\rho \left[\lambda'\right]_0^{2\pi} \int\limits_{r'=0}^{R} \int\limits_{\varphi'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\ell}\,(r')^2 \cos\varphi'\,\mathrm{d}\varphi'\,\mathrm{d}r' \\ &= 2\pi\,G\,\rho \int\limits_{r'=0}^{R} \int\limits_{\varphi'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\ell}\,(r')^2 \cos\varphi'\,\mathrm{d}\varphi'\,\mathrm{d}r'. \end{aligned} \tag{1.65}$$

Integrand v poslednom výraze predošlej rovnice má pomerne zložitý tvar, pretože vzdialenosť ℓ, ktorá sa nachádza v menovateli, závisí od oboch integračných premenných v zmysle rovnice (1.64). Trik, ktorým si výrazne zjednodušíme integráciu, spočíva v zámene integračnej premennej φ' za premennú ℓ. Na vykonanie takejto zámeny potrebujeme nájsť vzťah medzi $\mathrm{d}\varphi'$ a $\mathrm{d}\ell$ a následne určiť hranice integrálu z pohľadu novej integračnej premennej ℓ. Derivujme vzťah (1.64) podľa sférickej šírky φ', pričom premenné r a r' budeme považovať za konštanty,

$$\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}\varphi'} = -\frac{r\,r'\,\cos\varphi'}{\ell}. \tag{1.66}$$

Po úprave dostaneme vzťah

$$\cos\varphi'\,\mathrm{d}\varphi' = -\frac{\ell\,\mathrm{d}\ell}{r\,r'}. \tag{1.67}$$

Dosadením poslednej rovnice do (1.65) získame integrál

$$V_{\mathrm{g}}(P) = -\frac{2\pi\,G\,\rho}{r} \int\limits_{r'=0}^{R} \int\limits_{\ell=\ell_1}^{\ell_2} \mathrm{d}\ell\,r'\,\mathrm{d}r', \tag{1.68}$$

ktorý už môže byť vyriešený pomocou základných tabuľkových integrálov. Zámenou integračnej premennej teda niekedy možno jednoduchým spôsobom vyriešiť integrály, ktoré majú inak komplikovaný tvar.

Teraz ostáva už len určiť integračné hranice ℓ_1 a ℓ_2. Tie získame dosadením pôvodných integračných hraníc $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ pre φ' z rovnice (1.65) do vzťahu (1.64). Dosaďme do (1.64) najprv spodnú hranicu $-\frac{\pi}{2}$,

$$\ell_1 = \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2\,r\,r'\,\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{r^2 + (r')^2 + 2\,r\,r'} = \sqrt{(r + r')^2} = r + r'. \quad (1.69)$$

Pre hornú hranicu $\frac{\pi}{2}$ získame dve riešenia,

$$\ell_{2,1} = \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2\,r\,r'\,\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2\,r\,r'} = \sqrt{(r - r')^2} = r - r', \quad (1.70)$$

$$\ell_{2,2} = \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2\,r\,r'\,\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2\,r\,r'} = \sqrt{(r' - r)^2} = r' - r. \quad (1.71)$$

O vzdialenosti ℓ z rovnice (1.64) vieme povedať, že musí byť nezáporná. Zo vzťahov (1.70) a (1.71) preto ponúka správne riešenie rovnica (1.70), pretože iba tá dáva kladnú vzdialenosť pre $r > R = \max(r')$ (predpoklad zo začiatku podkapitoly) a všetky diferenciálne elementy $\mathrm{d}\tau(Q)$ so sférickým sprievodičom r'. Teda $\ell_2 = \ell_{2,1}$.

Dosaďme vzťahy pre ℓ_1 a $\ell_{2,1}$ do (1.68) a vypočítajme oba integrály,

$$\begin{aligned} V_\mathrm{g}(P) &= -\frac{2\pi\,G\,\rho}{r} \int\limits_{r'=0}^{R} \int\limits_{\ell=r+r'}^{r-r'} \mathrm{d}\ell\, r'\,\mathrm{d}r' = \frac{2\pi\,G\,\rho}{r} \int\limits_{r'=0}^{R} \int\limits_{\ell=r-r'}^{r+r'} \mathrm{d}\ell\, r'\,\mathrm{d}r' \\ &= \frac{2\pi\,G\,\rho}{r} \int\limits_{0}^{R} [l]_{r-r'}^{r+r'}\, r'\,\mathrm{d}r' = \frac{4\pi\,G\,\rho}{r} \int\limits_{0}^{R} (r')^2\,\mathrm{d}r' \\ &= \frac{4\pi\,G\,\rho}{r} \left[\frac{(r')^3}{3}\right]_0^R = \frac{4}{3}\pi\,G\,\rho\,\frac{R^3}{r}. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Posledný výraz predošlej rovnice môžeme ďalej upraviť, keď si uvedomíme, že člen $\frac{4}{3}\,\pi\,R^3$ predstavuje objem gule s polomerom R. Výraz $\frac{4}{3}\,\pi\,R^3\,\rho$ tak udáva hmotnosť homogénnej gule s polomerom R a konštantnou hustotou ρ,

$$M = \frac{4}{3}\,\pi\,R^3\,\rho. \quad (1.73)$$

Dosadením (1.73) do (1.72) získame výsledný vzťah pre gravitačný potenciál homogénnej gule v bodoch *mimo* gule,

$$V_\mathrm{g}(P) = \frac{GM}{r}. \quad (1.74)$$

Všimnime si, že rovnica (1.74) je totožná so vzťahom pre gravitačný potenciál hmotného bodu (1.17). Dodajme tiež, že ak M predstavuje hmotnosť Zeme, potom súčin GM z rovnice (1.74) sa nazýva *geocentrická gravitačná konštanta*. Vo fyzikálnej geodézii sa častejšie stretávame s geocentrickou gravitačnou konštantou GM než so samotnou hmotnosťou Zeme M. Dôvod je ten, že geocentrickú gravitačnú konštantu GM dokážeme odmerať presnejšie ako hmotnosť Zeme M (Pick, 2000).

Overme, či gravitačný potenciál (1.74) vyhovuje Laplaceovej rovnici (1.25) v bodoch mimo gule ($r > R$). Nech x, y, z sú súradnice výpočtového bodu, ktorý tentokrát nemusí ležať iba na súradnicovej osi z. Vzdialenosť r zo vzťahu (1.74) vypočítame vzťahom

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{1.75}$$

Ak v rovnici (1.4) pre ℓ platí $x' = y' = z' = 0$, potom $r = \ell$. Platnosť Laplaceovej rovnice (1.25) tak dokážeme vzťahmi (1.33) a (1.34) rovnako ako v prípade hmotného bodu. Presvedčme sa teraz o platnosti Laplaceovej rovnice v lokálnom súradnicovom systéme $x^{\mathrm{s}}, y^{\mathrm{s}}, z^{\mathrm{s}}$ s pohyblivým začiatkom vo výpočtovom bode P (obrázok 1.9). Aplikujme Laplaceov operátor vo sférických súradniciach (C.3) na gravitačný potenciál (1.74),

$$\begin{aligned}\nabla^2 V_{\mathrm{g}} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V_{\mathrm{g}}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial V_{\mathrm{g}}}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{r^2\,\cos^2\varphi}\frac{\partial^2 V_{\mathrm{g}}}{\partial\lambda^2} \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V_{\mathrm{g}}}{\partial r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial GM}{\partial r} = 0.\end{aligned} \tag{1.76}$$

Gravitačný potenciál homogénnej gule (1.74) teda vyhovuje Laplaceovej rovnici (1.40) v bodoch mimo gule.

Predtým, než budeme hľadať vzťahy pre gravitačné zrýchlenie $\mathbf{g}_{\mathrm{g}}$, je potrebné uvedomiť si, že gravitačné zrýchlenie je vektorová veličina (kapitola 1.1.1). Prvky vektora $\mathbf{g}_{\mathrm{g}}$ preto závisia od súradnicového systému, v ktorom ich vyjadrujeme. Uvažujme lokálny karteziánsky súradnicový systém $x^{\mathrm{s}}, y^{\mathrm{s}}, z^{\mathrm{s}}$ s pohyblivým začiatkom v bode P (obrázok 1.9). Aplikáciou operátora gradient (1.39) na gravitačný potenciál (1.74) získame vzťah

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_{\mathrm{g}}(P) &= \nabla V_{\mathrm{g}}(P) = \mathbf{e}^{\mathrm{s}}_1\,\frac{1}{r}\frac{\partial V_{\mathrm{g}}}{\partial\varphi} + \mathbf{e}^{\mathrm{s}}_2\,\frac{1}{r\,\cos\varphi}\frac{\partial V_{\mathrm{g}}}{\partial\lambda} + \mathbf{e}^{\mathrm{s}}_3\,\frac{\partial V_{\mathrm{g}}}{\partial r} = \\ &= \mathbf{e}^{\mathrm{s}}_3\,\frac{\partial V_{\mathrm{g}}}{\partial r} = \mathbf{e}^{\mathrm{s}}_3\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{GM}{r}\right) = -\mathbf{e}^{\mathrm{s}}_3\,\frac{GM}{r^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dfrac{GM}{r^2}\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{1.77}$$

Nulové prvky v smere osí x^{s} a y^{s} znamenajú, že vektor $\mathbf{g}_{\mathrm{g}}(P)$ leží na osi z^{s}. Záporná hodnota tretieho prvku znamená, že smer vektora je opačný ako smer narastania súradnice z^{s} (pozri obrázok 1.9). Vektor $\mathbf{g}_{\mathrm{g}}(P)$ teda smeruje do ťažiska homogénnej gule (obrázok 1.11). Pre veľkosť vektora $\mathbf{g}_{\mathrm{g}}(P)$ platí vzťah

$$\|\mathbf{g}_{\mathrm{g}}(P)\| = \frac{GM}{r^2}, \tag{1.78}$$

pretože $\mathbf{e}^{\mathrm{s}}_3$ je jednotkový vektor (pozri vzťahy B.8),

$$\|\mathbf{e}^{\mathrm{s}}_3\| = \sqrt{\cos^2\varphi\,\cos^2\lambda + \cos^2\varphi\,\sin^2\lambda + \sin^2\varphi} = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1. \tag{1.79}$$

Vzťah (1.78) je totožný so vzťahom na výpočet veľkosti gravitačného zrýchlenia hmotného bodu. Overme toto tvrdenie. Nech je daný hmotný bod s hmotnosťou m. Nech polohu výpočtového bodu P voči hmotnému bodu udáva polohový vektor $\mathbf{r}$ s veľkosťou $r = \|\mathbf{r}\|$. Z rovnice pre gravitačné zrýchlenie hmotného bodu (1.5) potom vyplýva

$$\|\mathbf{g}_{\mathrm{g}}(P)\| = \left\| -G\frac{m}{r^3}\,\mathbf{r} \right\| = \frac{G\,m}{r^3}\|\mathbf{r}\| = \frac{G\,m}{r^2}. \tag{1.80}$$

Získaný vzťah je totožný so vzťahom (1.78).

Gravitačné pole na povrchu homogénnej gule

Nech P je výpočtový bod nachádzajúci sa na povrchu homogénnej gule ($r = R$). Obdobným odvodením ako v predošlej časti získame nasledujúce vzťahy,

$$V_{\mathrm{g}}(P) = \frac{GM}{R}, \tag{1.81}$$

$$\mathbf{g}_{\mathrm{g}}(P) = -\mathbf{e}_3^{\mathrm{s}}\,\frac{GM}{R^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dfrac{GM}{R^2} \end{bmatrix}, \tag{1.82}$$

$$\|\mathbf{g}_{\mathrm{g}}(P)\| = \frac{GM}{R^2}. \tag{1.83}$$

Gravitačné pole vo vnútri homogénnej gule

Uvažujme teraz výpočtový bod P vo vnútri homogénnej gule ($r < R$). Rozdeľme homogénnu guľu s polomerom R na dve telesá nasledujúcim spôsobom (obrázok 1.15). Prvé teleso bude homogénna guľa s polomerom, ktorý je rovný sprievodiču výpočtového bodu, teda r. Druhé teleso bude *homogénna sférická vrstva*, ktorá je zo spodnej časti ohraničená sférou s polomerom r a z vrchnej časti je ohraničená sférou s polomerom R. Takéto rozdelenie je možné na základe princípu superpozície (kapitola 1.1.1). Gravitačný potenciál homogénnej gule s polomerom r označme symbolom $V_{\mathrm{g},1}(P)$ a gravitačný potenciál homogénnej sférickej vrstvy označme $V_{\mathrm{g},2}(P)$. Môžeme teda napísať vzťah

$$V_{\mathrm{g}}(P) = V_{\mathrm{g},1}(P) + V_{\mathrm{g},2}(P), \tag{1.84}$$

pričom

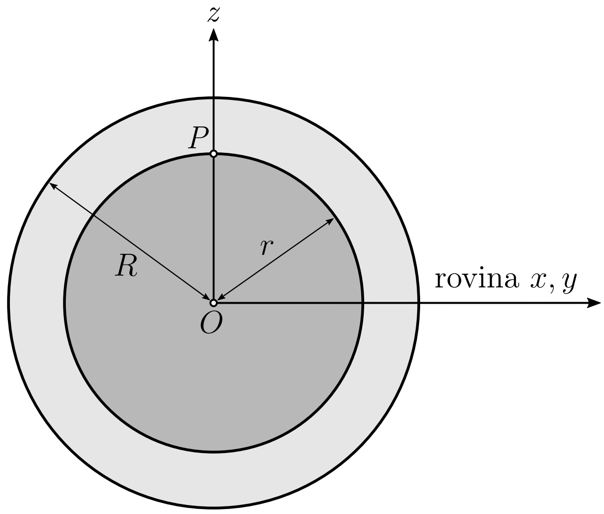
$$V_{\mathrm{g},1}(P) = G\,\rho \int\limits_{r'=0}^{r} \int\limits_{\varphi'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{\lambda'=0}^{2\pi} \frac{1}{\ell}\,(r')^2\,\cos\varphi'\,\mathrm{d}\lambda'\,\mathrm{d}\varphi'\,\mathrm{d}r' \tag{1.85}$$

a

$$V_{\mathrm{g},2}(P) = G\,\rho \int\limits_{r'=r}^{R} \int\limits_{\varphi'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{\lambda'=0}^{2\pi} \frac{1}{\ell}\,(r')^2\,\cos\varphi'\,\mathrm{d}\lambda'\,\mathrm{d}\varphi'\,\mathrm{d}r'. \tag{1.86}$$

Rovnicu pre $V_{\mathrm{g},1}(P)$ už poznáme z predchádzajúcej časti (rovnica 1.72). V tomto prípade je polomer gule rovný sprievodiču výpočtového bodu, $R = r$, teda

$$V_{\mathrm{g},1}(P) = \frac{4}{3}\pi\,G\,\rho\,r^2. \tag{1.87}$$



Obrázok 1.15. Výpočtový bod P so sprievodičom r vo vnútri homogénnej gule s polomerom $R > r$. Gravitačný účinok v bode P je daný súčtom gravitačného účinku homogénnej gule s polomerom r (tmavosivá oblasť) a gravitačného účinku homogénnej sférickej vrstvy (svetlosivá oblasť).

Gravitačný potenciál homogénnej sférickej vrstvy $V_{\mathrm{g},2}(P)$ vypočítame pomocou rovnice (1.68). Za hornú hranicu integrácie ℓ_2 potrebujeme použiť tú z rovníc (1.70) a (1.71), ktorá dáva nezápornú vzdialenosť pre uvažovaný výpočtový bod. V rovnici (1.86) uvažujeme diferenciálne elementy so sprievodičom $r \leq r' \leq R$, preto nezápornú vzdialenosť pre všetky diferenciálne elementy dáva iba rovnica (1.71). Dosadením integračných hraníc ℓ_1 a $\ell_{2,2}$ tak dostaneme vzťah

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{g},2}(P) &= -\frac{2\pi\, G\,\rho}{r} \int\limits_{r'=r}^{R} \int\limits_{\ell=r'+r}^{r'-r} \mathrm{d}\ell\, r'\, \mathrm{d}r' = \frac{2\pi\, G\,\rho}{r} \int\limits_{r'=r}^{R} \int\limits_{\ell=r'-r}^{r'+r} \mathrm{d}\ell\, r'\, \mathrm{d}r' \\ &= \frac{2\pi\, G\,\rho}{r} \int\limits_{r}^{R} [l]_{r'-r}^{r'+r}\, r'\, \mathrm{d}r' = 4\pi\, G\,\rho \int\limits_{r}^{R} r'\, \mathrm{d}r' = 4\pi\, G\,\rho \left[\frac{(r')^2}{2}\right]_r^R \\ &= 2\pi\, G\,\rho\,(R^2 - r^2). \end{aligned} \tag{1.88}$$

Kombináciou rovníc (1.84), (1.87) a (1.88) získame výsledný vzťah pre gravitačný potenciál *vo vnútri* homogénnej gule,

$$V_{\mathrm{g}}(P) = \frac{2}{3}\pi\, G\,\rho\,(3R^2 - r^2) = \frac{GM}{2}\left(\frac{3}{R} - \frac{r^2}{R^3}\right). \tag{1.89}$$

Presvedčme sa, či gravitačný potenciál (1.89) vyhovuje Poissonovej rovnici (1.45). Nech výpočtový bod P leží kdekoľvek vo vnútri gule ($r < R$), teda napríklad aj mimo súradnicovej osi z. Uvažujme najprv súradnicový systém x, y, z. Kombináciou (1.75) a (1.89) získame vzťah

$$V_{\mathrm{g}}(P) = \frac{2}{3}\pi\, G\,\rho\,\left(3R^2 - (x^2 + y^2 + z^2)\right). \tag{1.90}$$

Aplikáciou Laplaceovho operátora (1.26) na posledný výraz dostaneme

$$\begin{aligned}\nabla^2 V_\mathrm{g} &= \frac{\partial^2 V_\mathrm{g}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_\mathrm{g}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_\mathrm{g}}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{4}{3}\pi\, G\,\rho\, x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{4}{3}\pi\, G\,\rho\, y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{4}{3}\pi\, G\,\rho\, z\right) \\ &= -\frac{4}{3}\pi\, G\,\rho - \frac{4}{3}\pi\, G\,\rho - \frac{4}{3}\pi\, G\,\rho = -4\pi\, G\,\rho.\end{aligned} \tag{1.91}$$

Gravitačný potenciál vo vnútri gule teda vyhovuje Poissonovej rovnici (1.45). Zopakujme teraz výpočet v súradnicovom systéme $x^\mathrm{s}, y^\mathrm{s}, z^\mathrm{s}$ (obrázok 1.9). S využitím Laplaceovho operátora (C.3) dostaneme rovnaký výraz,

$$\begin{aligned}\nabla^2 V_\mathrm{g} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V_\mathrm{g}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial V_\mathrm{g}}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{r^2\,\cos^2\varphi}\frac{\partial^2 V_\mathrm{g}}{\partial\lambda^2} \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V_\mathrm{g}}{\partial r}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{4}{3}\pi\, G\,\rho\, r^3\right) = -4\pi\, G\,\rho.\end{aligned} \tag{1.92}$$

Gravitačné zrýchlenie *vo vnútri* homogénnej gule v súradnicovom systéme $x^\mathrm{s}, y^\mathrm{s}, z^\mathrm{s}$ získame aplikovaním operátora gradient (1.39) na rovnicu (1.89),

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_\mathrm{g}(P) = \nabla V_\mathrm{g}(P) &= \mathbf{e}^\mathrm{s}_1\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial V_\mathrm{g}}{\partial\varphi} + \mathbf{e}^\mathrm{s}_2\,\frac{1}{r\,\cos\varphi}\,\frac{\partial V_\mathrm{g}}{\partial\lambda} + \mathbf{e}^\mathrm{s}_3\,\frac{\partial V_\mathrm{g}}{\partial r} = \\ &= \mathbf{e}^\mathrm{s}_3\,\frac{\partial V_\mathrm{g}}{\partial r} = \mathbf{e}^\mathrm{s}_3\,\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{GM}{2}\left(\frac{3}{R} - \frac{r^2}{R^3}\right)\right] = -\mathbf{e}^\mathrm{s}_3\,\frac{GM}{R^3}\,r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dfrac{GM}{R^3}\,r \end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{1.93}$$

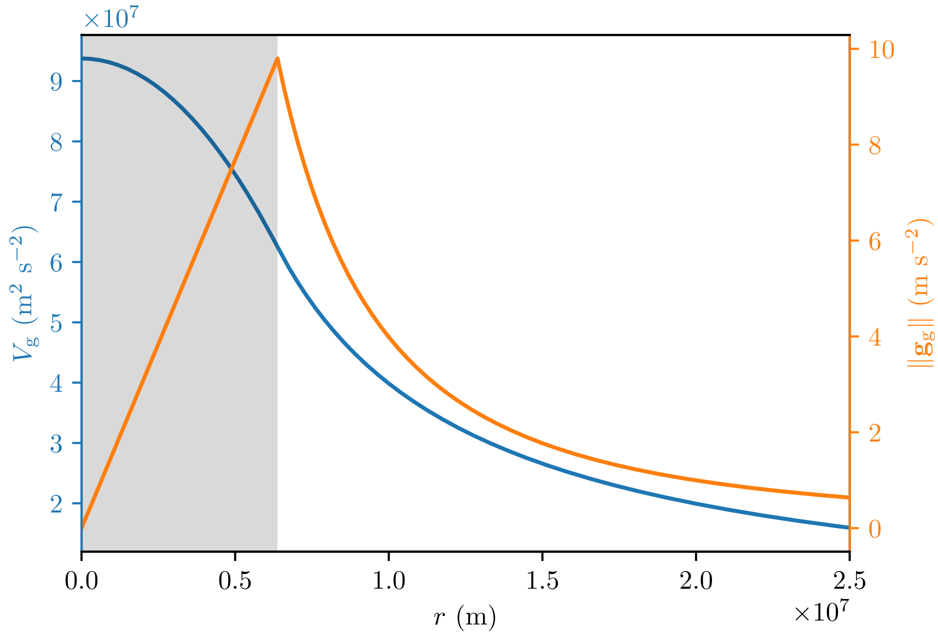
Pre veľkosť vektora $\mathbf{g}_\mathrm{g}(P)$ platí

$$\|\mathbf{g}_\mathrm{g}(P)\| = \frac{GM}{R^3}\,r. \tag{1.94}$$

Grafické zobrazenie V_g a $\|\mathbf{g}_\mathrm{g}\|$ v okolí homogénnej gule

Obrázok 1.16 znázorňuje gravitačný potenciál (modrá krivka) a veľkosť gravitačného zrýchlenia (oranžová krivka) vo vnútri, na povrchu a mimo homogénnej nerotujúcej gule. Vidíme, že gravitačný potenciál klesá s narastajúcou vzdialenosťou r od ťažiska gule a limitne sa blíži k nule (pozri rovnicu 1.16). V bode $r = R$ má inflexný bod, pretože funkcia sa mení z konkávnej ($r < R$) na konvexnú ($r > R$). Veľkosť gravitačného zrýchlenia nadobúda nulovú hodnotu v ťažisku homogénnej gule a potom lineárne narastá až po povrch gule, kde dosahuje maximum. Mimo homogénnej gule veľkosť tiažového zrýchlenia klesá s druhou mocninou vzdialenosti od ťažiska gule a limitne sa blíži k nule.

Obrázok 1.16 možno vnímať ako najjednoduchšiu aproximáciu gravitačného potenciálu a veľkosti gravitačného zrýchlenia v okolí Zeme. Presnejšou aproximáciou je model radiálne symetrickej Zeme, v ktorom je hustota funkciou vzdialenosti od ťažiska Zeme. Takýmto modelom je napríklad model PREM (angl. *Preliminary Reference Earth Model*;



Obrázok 1.16. Závislosť gravitačného potenciálu V_{g} a veľkosti gravitačného zrýchlenia $\|\mathbf{g}_{\mathrm{g}}\|$ homogénnej gule od vzdialenosti r meranej od ťažiska gule. Hmotnosť gule je rovná hmotnosti Zeme, $M = 5.9722 \times 10^{24}$ kg, a polomer gule je odvodený z rovníkového polomeru Zeme, $R = 6\,378\,137$ m. Tmavosivá plocha označuje oblasť vo vnútri gule. Obe veličiny majú samostatnú vertikálnu os. Obrázok bol pripravený zdrojovým kódom D.1 z prílohy D.

Dziewonski a Anderson, 1981). Ten ukazuje, že najväčšia veľkosť gravitačného zrýchlenia nie je na povrchu Zeme, ale v hĺbke približne 3000 km pod povrchom Zeme na rozhraní vonkajšieho jadra a plášťa (pozri napríklad Torge a Müller, 2012; Lowrie, 2007).

1.4.3 Tiažové pole na povrchu homogénnej rotujúcej gule

V tejto časti stručne popíšeme tiažový potenciál a tiažové zrýchlenie na povrchu homogénnej rotujúcej gule. Budeme predpokladať, že homogénna guľa s polomerom R rotuje okolo osi z konštantnou uhlovou rýchlosťou rotácie ω. Na rozdiel od kapitoly 1.4.2 budeme uvažovať, že výpočtový bod sa môže nachádzať kdekoľvek *na povrchu* gule.

Tiažový potenciál na povrchu homogénnej gule získame pomocou rovníc (1.49), (1.50) a (1.81),

$$W(P) = \frac{GM}{R} + \frac{1}{2}\,\omega^2\,R^2\,\cos^2\varphi. \tag{1.95}$$

Získaný vzťah je funkciou sférickej šírky φ, teda povrch homogénnej rotujúcej gule nie je ekvipotenciálna plocha. Najväčší tiažový potenciál je na rovníku a najmenší na póloch.

Tiažové zrýchlenie na povrchu gule získame *vektorovým* súčtom gravitačného a odstredivého zrýchlenia (pozri rovnicu 1.48 a obrázok 1.11). Upozornime však, že gravitačné zrýchlenie na povrchu gule zo vzťahu (1.82) je vyjadrené v súradnicovom systéme $x^{\mathrm{s}}, y^{\mathrm{s}}, z^{\mathrm{s}}$, zatiaľ čo odstredivé zrýchlenie (1.46) je vyjadrené v systéme x, y, z. Na výpočet tiažového zrýchlenia $\mathbf{g}$ vektorovým súčtom (1.48) je preto potrebné najprv vyjadriť oba vektory v rovnakom súradnicovom systéme. Ak postačuje vypočítať veľkosť tiažového zrýchlenia $\|\mathbf{g}\|$, potom môžu byť použité vzťahy (1.47) a (1.83). Je však potrebné uvážiť, že vektory $\mathbf{g}_\mathrm{g}$ a $\mathbf{g}_\mathrm{c}$ majú rozdielne smery, ktoré navyše závisia od sférickej šírky φ výpočtového bodu. Veľkosť tiažového zrýchlenia je najväčšia na póloch, pretože na póloch je odstredivé zrýchlenie nulové. Naopak, najmenšiu hodnotu dosahuje na rovníku, pretože odstredivé zrýchlenie je na rovníku najväčšie a súčasne má opačný smer ako gravitačné zrýchlenie (pozri obrázok 1.11).

1.5 Výšky

Výšky prepájajú geometrický aspekt geodetického určovania polohy s tiažovým poľom a naopak. Ak by sme o výškach uvažovali iba z pohľadu geometrie alebo iba z pohľadu tiažového poľa, v oboch prípadoch by sme získali výšky s výrazne obmedzeným praktickým využitím.

V kapitole 1.5.1 najprv vysvetlíme princíp určovania rozdielu tiažového potenciálu, ktorý priamo súvisí s teóriou výšok. V kapitolách 1.5.2 až 1.5.4 potom popíšeme vybrané typy výšok. Pre rozsiahlosť problematiky však nepôjde o vyčerpávajúce podanie, ale skôr o poskytnutie základných informácií, ktoré sú potrebné na pochopenie širšieho kontextu práce. Podrobnosti a ďalšie typy výšok možno nájsť napríklad v prácach Jekeli (2000a), Hofmann-Wellenhof a Moritz (2005) a Sansò a kol. (2019).

1.5.1 Určovanie rozdielu tiažového potenciálu

Hoci tiažový potenciál priamo odmerať nedokážeme (kapitola 1.3.2), *rozdiel* tiažového potenciálu dokážeme určiť nepriamo kombináciou nivelácie a gravimetrie. Popis tejto metódy začneme vysvetlením pojmu totálny diferenciál.

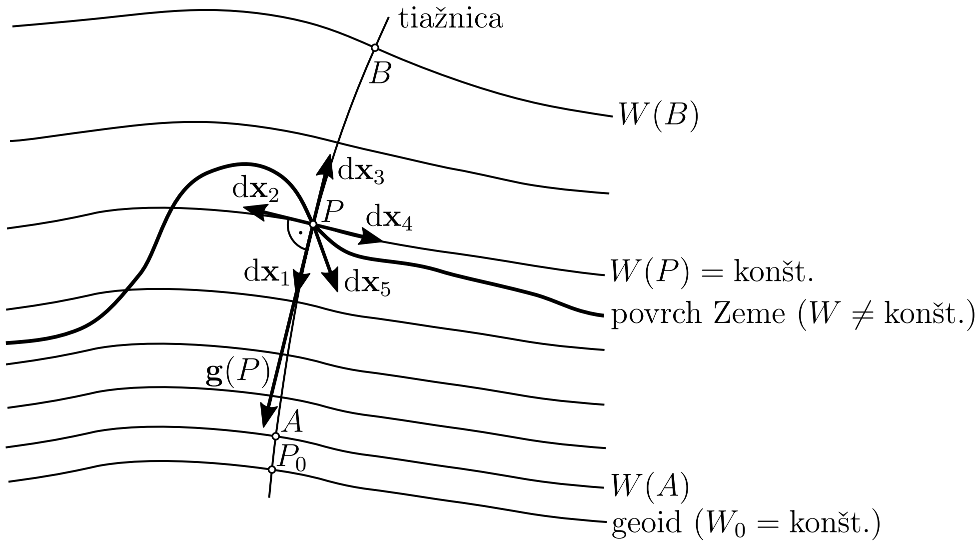
Totálny diferenciál

Ak sa poloha bodu P zmení o vektor $\delta\mathbf{x}$,

$$\delta\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix}, \tag{1.96}$$

potom tiažový potenciál $W(P)$ sa zmení o hodnotu $\delta W(P, \delta\mathbf{x})$. *Totálny diferenciál* $\mathrm{d}W(P, \mathrm{d}\mathbf{x})$ aproximuje skutočnú zmenu tiažového potenciálu $\delta W(P, \delta\mathbf{x})$ vzťahom

$$\begin{aligned} \delta W(P, \delta\mathbf{x}) \approx \mathrm{d}W(P, \mathrm{d}\mathbf{x}) &= \left.\frac{\partial W}{\partial x}\right|_P \mathrm{d}x + \left.\frac{\partial W}{\partial y}\right|_P \mathrm{d}y + \left.\frac{\partial W}{\partial z}\right|_P \mathrm{d}z \\ &= \nabla W(P) \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{g}(P) \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = \|\mathbf{g}(P)\| \, \|\mathrm{d}\mathbf{x}\| \cos\alpha, \end{aligned} \tag{1.97}$$



Obrázok 1.17. Totálny diferenciál $\mathrm{d}W(P, \mathrm{d}\mathbf{x})$ v bode P. Skúmaná je zmena tiažového potenciálu $W(P)$ po zmene súradníc bodu P o hodnoty $\mathrm{d}\mathbf{x}_1$ až $\mathrm{d}\mathbf{x}_5$. Vektory $\mathrm{d}\mathbf{x}_1$ a $\mathrm{d}\mathbf{x}_3$ sú kolmé na ekvipotenciálnu plochu $W(P) =$ konšt., vektory $\mathrm{d}\mathbf{x}_2$ a $\mathrm{d}\mathbf{x}_4$ ležia v jej dotykovej rovine a symbol $\mathrm{d}\mathbf{x}_5$ označuje vektor vo všeobecnom smere.

kde

$$\mathrm{d}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{bmatrix} \tag{1.98}$$

a α je uhol medzi vektormi $\mathbf{g}(P)$ a $\mathrm{d}\mathbf{x}$. Skracovaním vzdialenosti $\mathrm{d}\mathbf{x}$ možno zmenšiť aproximačnú chybu v rovnici (1.97) na ľubovoľne malú hodnotu. Vo všeobecnosti môžeme povedať, že totálny diferenciál (diferencovateľnej) funkcie f v bode P je najlepšia lineárna aproximácia funkcie f v okolí bodu P.

Ak k diferenciálnej zmene polohy $\mathrm{d}\mathbf{x}$ dochádza pozdĺž ekvipotenciálnej plochy, potom je totálny diferenciál $\mathrm{d}W$ nulový (pozri vektory $\mathrm{d}\mathbf{x}_2$ a $\mathrm{d}\mathbf{x}_4$ na obrázku 1.17). Toto tvrdenie môžeme vysvetliť tým, že vektor $\mathbf{g}$ je kolmý na ekvipotenciálnu plochu (a tým aj na vektor $\mathrm{d}\mathbf{x}$), preto $\mathrm{d}W = \|\mathbf{g}\|\,\|\mathrm{d}\mathbf{x}\|\,\cos(90°) = 0$. Naopak, k najväčšej zmene tiažového potenciálu dochádza vtedy, keď vektory $\mathbf{g}$ a $\mathrm{d}\mathbf{x}$ majú rovnaký smer, to znamená, keď vektor $\mathrm{d}\mathbf{x}$ je kolmý na ekvipotenciálnu plochu (pozri vektor $\mathrm{d}\mathbf{x}_1$ na obrázku 1.17). V takom prípade $\alpha = 0$, preto $\mathrm{d}W = \|\mathbf{g}\|\,\|\mathrm{d}\mathbf{x}\|\,\cos(0) = \|\mathbf{g}\|\,\|\mathrm{d}\mathbf{x}\|$.

Geopotenciálna kóta

Vráťme sa teraz k určovaniu rozdielu tiažového potenciálu. Ak dochádza k diferenciálnej zmene polohy $\mathrm{d}\mathbf{x}$ pozdĺž tiažnice v smere vektora $-\mathbf{g}$ (pozri vektor $\mathrm{d}\mathbf{x}_3$ na obrázku 1.17), potom medzi vektormi $\mathbf{g}$ a $\mathrm{d}\mathbf{x}$ je uhol 180° a totálny diferenciál tiažového potenciálu je daný vzťahom

$$\mathrm{d}W(P, \mathrm{d}\mathbf{x}) = \mathbf{g}(P) \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = g(P)\,\mathrm{d}H\,\cos(180°) = -g(P)\,\mathrm{d}H, \tag{1.99}$$

kde $g(P) = \|\mathbf{g}(P)\|$ je veľkosť tiažového zrýchlenia v bode P a $\mathrm{d}H = \|\mathrm{d}\mathbf{x}\|$ je diferenciálna dĺžka tiažnice. Integráciou rovnice (1.99) od bodu A po bod B (pozri obrázok 1.17) získame rozdiel tiažového potenciálu,

$$W(B) - W(A) = \int\limits_{W(A)}^{W(B)} \mathrm{d}W = -\int\limits_{P=A}^{B} g(P)\,\mathrm{d}H = -\int\limits_{A}^{B} g\,\mathrm{d}H, \tag{1.100}$$

kde symboly $W(A)$ a $W(B)$ označujú tiažový potenciál v bodoch A a B.

Osobitný význam pre fyzikálnu geodéziu má rozdiel tiažového potenciálu W_0 na geoide v bode P_0 a tiažového potenciálu $W = W(P)$ v bode P (obrázok 1.17). Táto veličina sa nazýva *geopotenciálna kóta* a je daná vzťahom

$$C = W_0 - W = \int\limits_{0}^{H} g\,\mathrm{d}H, \tag{1.101}$$

kde H je dĺžka tiažnice od bodu P_0 po bod P. Geopotenciálnu kótu možno určiť pomocou nivelácie ($\mathrm{d}H$) a gravimetrie (g). Namiesto jednotky $\mathrm{m}^2\ \mathrm{s}^{-2}$ sa niekedy zvykne udávať v geopotenciálnych jednotkách gpu,

$$1\ \mathrm{gpu} = 1\ \mathrm{kGal\ m} = 1000\ \mathrm{Gal\ m} = 10\ \mathrm{m}^2\ \mathrm{s}^{-2}. \tag{1.102}$$

V súčasnosti možno určiť rozdiel tiažového potenciálu s presnosťou približne ± 0.1 Gal m na vzdialenosť jedného kilometra (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005).

Rovnice (1.99) a (1.100) a ich rôzne obmeny sa spolu so vzťahom (1.101) využívajú na definíciu rozličných typov výšok (Jekeli, 2000a; Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005; Sansò a kol., 2019).

1.5.2 Ortometrická výška

Ak z rovnice (1.99) vyjadríme diferenciál $\mathrm{d}H$ a získanú rovnicu zintegrujeme od W_0 po W, dostaneme vzťah na výpočet dĺžky tiažnice od bodu P_0 na geoide po bod P (obrázok 1.17),

$$H = -\int\limits_{W_0}^{W} \frac{\mathrm{d}W}{g} = \int\limits_{0}^{C} \frac{\mathrm{d}C}{g}. \tag{1.103}$$

Pre praktické aplikácie je výhodné upraviť túto rovnicu nasledujúcim spôsobom. Prepíšme najprv rovnicu (1.101) do tvaru (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005)

$$C = H\,\frac{1}{H}\int\limits_{0}^{H} g\,\mathrm{d}H = H\,\bar{g}, \tag{1.104}$$

kde

$$\bar{g} = \frac{1}{H}\int\limits_{0}^{H} g\,\mathrm{d}H \tag{1.105}$$

je priemerná hodnota tiažového zrýchlenia pozdĺž tiažnice medzi bodmi P_0 a P. Z rovnice (1.104) potom získame vzťah

$$H = H^{\mathrm{O}} = \frac{C}{\bar{g}}, \tag{1.106}$$

Výška H^{O} definovaná rovnicou (1.106) sa nazýva *ortometrická výška* a udáva dĺžku tiažnice od geoidu po bod P (obrázky 1.12 a 1.17).

Z kapitoly 1.5.1 vieme, že geopotenciálnu kótu C možno nepriamo odmerať pomocou nivelácie a gravimetrie. Na výpočet ortometrickej výšky vzťahom (1.106) by preto malo postačovať určiť už iba priemernú hodnotu tiažového zrýchlenia $\bar{g}$ pozdĺž tiažnice od geoidu po bod, ktorého výšku chceme získať. Exaktný výpočet člena $\bar{g}$ vzťahom (1.105) je však nemožný. Dôvod je ten, že integrál (1.105) musí byť počítaný v hmotách, ktoré sa nachádzajú medzi geoidom a daným bodom. Na takýto výpočet by bolo potrebné poznať hustotu pozdĺž integračnej cesty (pozri hustotu ρ vystupujúcu vo vzťahu na výpočet gravitačného zrýchlenia v rovnici 1.9). Hustotné modely, ktoré by mohli byť použité na tento účel, sú v istej miere dostupné (napríklad Sheng a kol., 2019), no ich presnosť sa zdá byť ešte stále nepostačujúca. Praktická realizácia ortometrických výšok teda závisí od prijatého hustotného modelu.

Ďalšou nevýhodou ortometrických výšok je skutočnosť, že body na jednej ekvipotenciálnej ploche (za ideálnych podmienok napríklad na ustálenej vodnej hladine jazera) majú vo všeobecnosti *rôznu* ortometrickú výšku. Ortometrické výšky teda nedostatočne reflektujú smer tečenia vody. Tento problém majú všetky výšky okrem dynamických výšok (kapitola 1.5.3).

Helmertova ortometrická výška

Helmertova ortometrická výška je jedna z približných realizácií ortometrickej výšky. Definovaná je vzťahom

$$H^{\mathrm{HO}} = \frac{C}{g + 0.0424\ \mathrm{mGal\,m^{-1}}\ H^{\mathrm{HO}}}. \tag{1.107}$$

Výraz $g + 0.0424\ \mathrm{mGal\,m^{-1}}$ sa nazýva *Poincarého-Preyova* redukcia tiažového zrýchlenia a aproximuje skutočné tiažové zrýchlenie *v hmotách*. Symbol g označuje tiažové zrýchlenie na povrchu Zeme v bode, ktorého výšku určujeme. Konštanta $0.0424\ \mathrm{mGal\,m^{-1}}$ bola vypočítaná pre strednú hustotu hmôt nad geoidom $2670\ \mathrm{kg\ m^{-3}}$ (pre odvodenie pozri napríklad Jekeli, 2000a; Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005; Sansò a kol., 2019).

F. R. Helmert (1843 až 1917) bol nemecký geodet a štatistik. Je autorom napríklad 7-prvkovej podobnostnej transformácie medzi trojrozmernými karteziánskymi súradnicovými systémami.

1.5.3 Dynamická výška

Dynamická výška je definovaná ako podiel geopotenciálnej kóty bodu, ktorého výšku určujeme, a *zvolenej konštantnej* hodnoty tiažového zrýchlenia,

$$H^{\mathrm{D}} = \frac{C}{g_{\text{konšt.}}}. \tag{1.108}$$

Po uvážení vzťahov $C = W_0 - W$ (rovnica 1.101) a (1.108) je zrejmé, že body na tej istej ekvipotenciálnej ploche majú *konštantnú* dynamickú výšku. Mohlo by sa teda zdať, že dynamická výška rieši problém, ktorým sú zaťažené všetky ostatné typy výšok (pozri kapitolu 1.5.2). V skutočnosti je však azda najmenej praktická. Pre konštantnú hodnotu $g_{\text{konšt.}}$ je dynamická výška totiž iba akýmsi preškálovaním geopotenciálnej kóty z fyzikálnych jednotiek $\mathrm{m}^2\ \mathrm{s}^{-2}$ do jednotky dĺžky m. Neberie tak do úvahy skutočnosť, že body na dvoch rozdielnych ekvipotenciálnych plochách môžu byť od seba rozlične geometricky vzdialené (porovnaj vzdialenosti medzi ekvipotenciálnymi plochami v oblasti rovníka a v oblastiach pólov na obrázku 1.12). Dynamická výška je teda výhradne fyzikálna veličina, ktorá nemá geometrickú interpretáciu (Jekeli, 2000a).

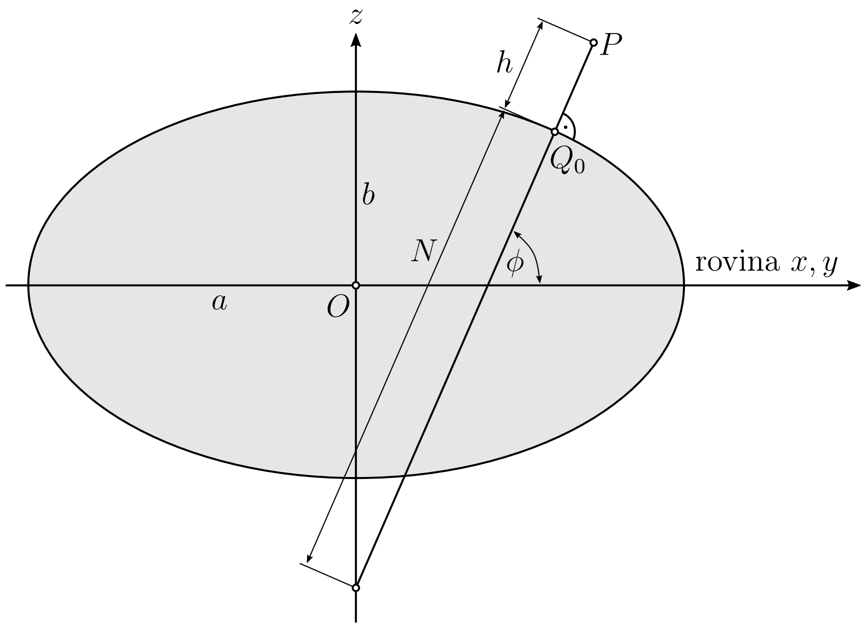
Vidíme, že koncept výšky bez uváženia geometrie je nepraktický. Takéto výšky sú použiteľné nanajvýš na regionálnej úrovni, kde dosahujú tieto nedostatky zanedbateľné vplyvy voči presnosti geodetických meraní. V nasledujúcej kapitole sa presvedčíme, že to isté platí aj o výškach, ktoré neberú do úvahy tiažové pole.

1.5.4 Elipsoidická výška

Nech je daný referenčný elipsoid s hlavnou polosou a a vedľajšou polosou b. Polohu bodu P voči tomuto referenčnému elipsoidu môžeme vyjadriť pomocou elipsoidických súradníc. Tieto súradnice budeme označovať symbolmi ϕ, λ, h, pričom ϕ je elipsoidická šírka, λ je elipsoidická dĺžka a h je elipsoidická výška (obrázok 1.18). *Elipsoidická výška* je vzdialenosť bodu P od referenčného elipsoidu meraná po normále k tomuto elipsoidu.

Elipsoidickú výšku možno jednoducho vypočítať z meraní, ktoré využívajú globálne navigačné družicové systémy (GNSS). Zatiaľ čo dynamická výška má výhradne fyzikálny význam, elipsoidická výška má výhradne geometrický význam. Pre aplikácie, ktoré vyžadujú uvážiť aspoň do určitej miery smer tečenia vody (resp. vplyv tiažového poľa), je elipsoidická výška preto nevhodná. Lepším riešením je použiť napríklad ortometrickú výšku (kapitola 1.5.2). Rozdiel medzi elipsoidickou výškou a ortometrickou výškou môže dosahovať až desiatky metrov a výrazne varíruje s polohou, dokonca i na regionálnej úrovni. V praktických aplikáciách sa elipsoidická výška vypočítaná z GNSS meraní často transformuje na inú výšku, napríklad na ortometrickú výšku. Vzťah medzi ortometrickou a elipsoidickou výškou bude diskutovaný neskôr v kapitole 6.

Pre úplnosť na záver doplňme transformáciu elipsoidických súradníc na karteziánske



Obrázok 1.18. Elipsoidická šírka ϕ a elipsoidická výška h bodu P. Elipsoidická dĺžka λ je totožná so sférickou dĺžkou (pozri obrázok 1.9), pretože referenčný elipsoid je dvojosový.

súradnice (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005)

$$\begin{aligned} x &= (N + h)\,\cos\phi\,\cos\lambda, \\ y &= (N + h)\,\cos\phi\,\sin\lambda, \\ z &= \left[N\,(1 - e^2) + h\right]\,\sin\phi, \end{aligned} \tag{1.109}$$

kde

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2\,\sin^2\phi}} \tag{1.110}$$

je *priečny polomer krivosti* a

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \tag{1.111}$$

je *prvá numerická excentricita*. Presná a efektívna inverzná transformácia je predmetom geodetického záujmu niekoľko dekád. Prehľad metód a príslušné vzťahy uvádzajú napríklad Fukushima (2006) a Claessens (2019).

1.6 Časové variácie

Z Newtonovho integrálu (1.21) vyplýva, že gravitačné pole závisí od tvaru telesa, rozloženia hustoty v jeho vnútri a od polohy výpočtového bodu voči telesu. Zmenou tvaru telesa, a tým aj polohy výpočtového bodu voči telesu, alebo zmenou hustoty telesa v čase dochádza k zmene gravitačného poľa v čase. Ak navyše teleso rotuje a polohu vyjadrujeme v neinerciálnom súradnicovom systéme, ktorý rotuje spolu s telesom, potom vzniká aj odstredivé pole. Časová zmena odstredivého poľa potom spôsobuje časovú zmenu tiažového poľa. V tejto kapitole spomenieme niektoré príčiny, ktoré spôsobujú časovú variáciu gravitačného a tiažového poľa v okolí Zeme.

V tiažovom zrýchlení odmeranom gravimetrickými metódami (pozri kapitolu 1.3.1 a najmä Janák, 2010) je obsiahnutý gravitačný účinok všetkých hmotných objektov vo vesmíre. Okrem samotnej Zeme majú merateľný gravitačný vplyv predovšetkým Mesiac a Slnko a v oveľa menšej miere aj Venuša, Jupiter a Mars. Gravitačné zrýchlenie, ktoré generujú nebeské telesá, budeme nazývať *slapové zrýchlenie* alebo tiež *priame slapy*. Na výpočet slapového zrýchlenia je potrebné poznať polohu bodu merania, polohu nebeských telies v okamihu merania a hmotnosť nebeských telies. Vďaka veľkej vzdialenosti od Zeme môžu byť nebeské telesá v tomto prípade považované za hmotné body. Podľa Torge (1989) dosahuje slapové zrýchlenie spôsobené Mesiacom a Slnkom na povrchu Zeme maximálne hodnoty približne 0.165 mGal a 0.075 mGal. Vzhľadom na súčasnú rádovo mikroGalovú presnosť gravimetrických meraní tak ide o nezanedbateľný vplyv.

V predošlom odseku sme uvažovali, že Zem je dokonale tuhé teleso, ktoré nie je deformované slapovými silami. V presnejšom priblížení je Zem pružné teleso, ktoré vplyvom slapových síl mení svoj tvar. V dôsledku zmeny tvaru pevnej a oceánskej časti zemského povrchu tak vznikajú *zemské* a *oceánske slapy*. Tento jav sa tiež nazýva *nepriame slapy*. Oceánske slapy vysvetlil I. Newton (Torge, 1989). Na zemské slapy poukázal William Thomson, známy skôr pod šľachtickým menom Lord Kelvin (1824 až 1907) (tamtiež). V dôsledku zemských slapov je potrebné zvýšiť súčet slapových efektov z predošlého odseku približne o 16 %, čím získame maximálny súhrnný efekt 0.280 mGal (Torge, 1989). V závislosti od lokality dosahujú oceánske slapy hodnoty približne 0.010 mGal až 0.001 mGal (Torge, 1989).

Rotačná os Zeme neustále mení svoju polohu voči Zemi. Jedným z dôsledkov je *pohyb pólu*, ktorý na povrchu Zeme dosahuje niekoľko metrov (desatín uhlovej sekundy) za rok (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005). Pohyb rotačnej osi následne spôsobuje zmenu súradníc bodov na povrchu Zeme, a tým aj zmenu odstredivého zrýchlenia (rovnica 1.46) a tiažového zrýchlenia (rovnica 1.48). Pohyb pólu má najväčší vplyv na tiažové zrýchlenie v oblastiach so zemepisnou šírkou 45°, kde nadobúda maximálnu hodnotu približne 0.008 mGal (Torge, 1989). Okrem polohy rotačnej osi sa mení aj uhlová rýchlosť rotácie Zeme. Jej vplyv na zmenu tiažového zrýchlenia však nie je väčší ako zhruba 0.0007 mGal (Torge, 1989).

Zmeny gravitačného a tiažového poľa v okolí Zeme môžu byť spôsobené aj mnohými ďalšími faktormi. Spomeňme aspoň pohyb magmy v zemskom plášti, postglaciálny zdvih, seizmické vlny, hydrologické zmeny či roztápanie ľadovcov. V literatúre sa niekedy diskutuje aj o časovej variácii Newtonovej gravitačnej konštanty G. Tento jav však nebol dosiaľ experimentálne potvrdený (Torge, 1989).

Kapitola 2

Sférický harmonický rozvoj

Newtonov integrál (1.21) nie je vhodný na priamy praktický výpočet gravitačného poľa Zeme. Predpokladá totiž, že poznáme dve matematické funkcie: jednu, ktorá definuje tvar Zeme, a druhú, ktorá opisuje jej hustotu. Problematická je obzvlášť hustota. Hoci približné hustotné modely zemského telesa existujú (napríklad Dziewonski a Anderson, 1981), pre ich nízku presnosť nedokážeme vzťahom (1.21) naplniť súčasné nároky na modelovanie gravitačného poľa Zeme. Postačujúce nie sú ani regionálne hustotné modely, a to napriek tomu, že sú presnejšie ako globálne modely. V tejto kapitole popíšeme jeden z praktických spôsobov modelovania gravitačného poľa Zeme *bez potreby priamej znalosti hustoty*.

2.1 Motivácia

Nech je daný trojrozmerný karteziánsky súradnicový systém so začiatkom v bode O a so súradnicovými osami x, y, z (obrázok 2.1). Symbolmi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ označme jednotkové vektory v smere súradnicových osí (rovnica 1.10). Nech $\mathbf{r}$ je ľubovoľný vektor v tomto priestore,

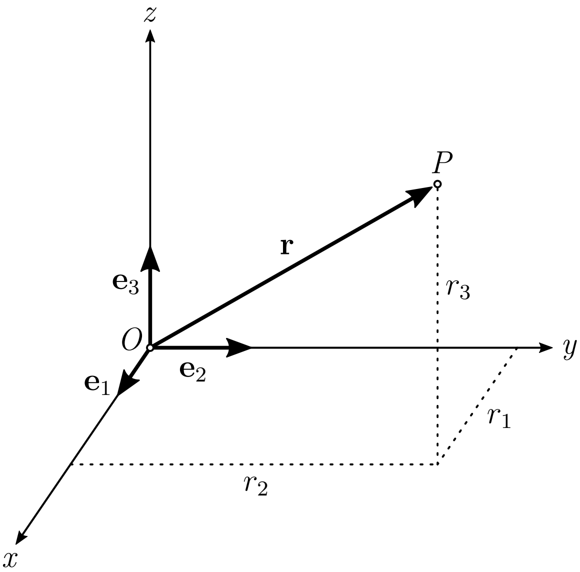
$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

Jednotkové vektory majú tú vlastnosť, že umožňujú vyjadriť ľubovoľný vektor $\mathbf{r}$ vzťahom

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3} r_i \, \mathbf{e}_i. \tag{2.2}$$

Koeficient r_i predstavuje váhu, ktorou sa jednotkový vektor $\mathbf{e}_i$ podieľa na lineárnej kombinácii (2.2). Môžeme tiež povedať, že koeficienty r_i sú súradnice koncového bodu vektora $\mathbf{r}$. Nie je náročné presvedčiť sa, že koeficient r_i je daný skalárnym súčinom vektora $\mathbf{r}$ a príslušného jednotkového vektora $\mathbf{e}_i$,

$$r_i = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_i. \tag{2.3}$$



Obrázok 2.1. Polohový vektor **r** bodu P v trojrozmernom karteziánskom súradnicovom systéme.

Povedané slovne, vzťah (2.2) hovorí, že ak poznáme koeficienty r_i, poznáme vektor **r**. Vzťah (2.3) hovorí, ako tieto koeficienty vypočítať z vektora **r**. Bolo by výhodné, ak by sme obdobným spôsobom dokázali vyjadriť aj gravitačný potenciál V_g, teda istým spôsobom ho rozložiť na súradnice a potom ho z týchto súradníc zrekonštruovať. Samozrejme, gravitačný potenciál nepatrí do vyššie opísaného trojrozmerného priestoru vektorov **r**. V abstraktnejšom chápaní slova priestor je však aj gravitačný potenciál súčasťou nejakého priestoru, napríklad priestoru funkcií, ktoré sú harmonické mimo Zeme. Vieme už, že medzi takéto funkcie patrí okrem gravitačného potenciálu napríklad aj funkcia $1/\ell$, pričom ℓ je v tomto prípade vzdialenosť bodu nachádzajúceho sa mimo Zeme od diferenciálneho hmotného elementu Zeme (pozri obrázok 1.4 a rovnice 1.33 a 1.34). Takýchto funkcií je nespočetné množstvo a v matematickom zmysle tvoria istý priestor. Podobne ako v trojrozmernom priestore vektorov **r**, i v tomto priestore možno nájsť matematické objekty, ktorými môžeme každý prvok patriaci do tohto priestoru, napríklad gravitačný potenciál, rozložiť na súradnice,

$$v_{nk} = \frac{N_{nk}^2}{4\pi} \iint\limits_\sigma V_\mathrm{g}(r,\varphi,\lambda)\, Y_{nk}(\varphi,\lambda)\, \mathrm{d}\sigma, \tag{2.4}$$

a potom ho spätne zrekonštruovať,

$$V_\mathrm{g}(r,\varphi,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^{n} v_{nk}\, Y_{nk}(\varphi,\lambda). \tag{2.5}$$

Koeficienty v_{nk} vo vzťahu (2.4) predstavujú súradnice gravitačného potenciálu $V_\mathrm{g}(r,\varphi,\lambda)$ vo vyššie opísanom abstraktom priestore harmonických funkcií mimo Zeme a symbol $Y_{nk}(\varphi,\lambda)$ označuje *sférické harmonické funkcie.* Koeficienty N_{nk} závisia iba od n a k a budú diskutované neskôr. Vzťah (2.4) je tak obdobou vzťahu (2.3), súradnice v_{nk} možno prirovnať k súradniciam r_i a sférické harmonické funkcie $Y_{nk}(\varphi, \lambda)$ možno prirovnať k jednotkovým vektorom $\mathbf{e}_i$. Samotný integrál na jednotkovej sfére σ možno chápať ako skalárny súčin funkcií V_g a Y_{nk}, ktorý je obdobou skalárneho súčinu vektorov $\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_i$. Pokiaľ ide o vzťah (2.5), ten plní podobnú úlohu ako rovnica (2.2), teda umožňuje zrekonštruovať gravitačný potenciál z jeho súradníc v_{nk}.

Je zrejmé, že v prípade gravitačného potenciálu (rovnice 2.4 a 2.5) je situácia komplikovanejšia ako v prípade polohových vektorov (rovnice 2.2 a 2.3). Súradníc v_{nk} je nekonečne veľa (pozri limity prvej sumácie vo vzťahu 2.5), sumácia je dvojitá a sférické harmonické funkcie $Y_{nk}(\varphi, \lambda)$ závisia od sférickej šírky φ a sférickej dĺžky λ. Napriek tomu však samotný princíp zostáva rovnaký a demonštruje, že ak poznáme súradnice v_{nk}, potom vieme vypočítať integrály (1.9) a (1.21) aj bez priameho použitia hustoty. Hustota Zeme je pritom obsiahnutá v súradniciach v_{nk}. Cieľom nasledujúcich strán je ukázať, akým spôsobom sa v nich táto hustota nachádza, ako možno upraviť rovnicu (1.21) do formálne veľmi odlišného tvaru (2.5) a tiež ukázať, ako môžu byť tieto súradnice vypočítané.

2.2 Rozvoj gravitačného potenciálu do radu sférických harmonických funkcií

V tejto kapitole odvodíme vzťah (2.5) z rovnice (1.21). Zavedených bude niekoľko nových pojmov, no aby sme pričasto neprerušovali prirodzený myšlienkový postup odvodenia, nové pojmy predstavíme len vo forme nevyhnutnej na pochopenie samotného odvodenia. Vrátime sa k nim v nasledujúcich kapitolách, podobne ako sa čitateľ môže neskôr vrátiť k tejto kapitole.

Nech je dané všeobecné teleso s objemom τ a hustotou ρ (obrázok 1.4). Hustota ρ sa môže v telese meniť, no budeme predpokladať, že je v každom diferenciálnom elemente $\mathrm{d}\tau(Q)$ konečná. Nech je ďalej daný bod P, ktorý sa nachádza *mimo* všeobecného telesa, teda v tej časti priestoru, v ktorom je gravitačný potenciál harmonický (kapitola 1.2.5). Trojicu sférických súradníc (obrázok 1.9) bodov P a Q označme symbolmi r, φ, λ a r', φ', λ'. Symbolom ℓ budeme označovať vzdialenosť medzi bodmi P a Q (rovnica 1.61 a obrázok 1.13).

Upravme člen $1/\ell$ z rovnice (1.21) pomocou vzťahu (1.61),

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ell} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + (r')^2 - 2\,r\,r'\,\cos\psi}} = \frac{1}{r\sqrt{1 + \left(\dfrac{r'}{r}\right)^2 - 2\dfrac{r'}{r}\cos\psi}} \\ &= \frac{1}{r}\left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r}\cos\psi\right]^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Ak by sme dosadili túto rovnicu do vzťahu (1.21), ďalšie matematické úpravy by sa vykonávali pomerne zložito, pretože hranatá zátvorka obsahuje tri sčítance umocnené na exponent $-\frac{1}{2}$. Výhodnejšie je rozvinúť tento člen do mocninového radu. Jeden zo spôsobov rozvinutia funkcie do mocninového radu je pomocou Taylorovho, resp. Maclaurinovho radu. *Maclaurinov rad* získame z Taylorovho radu (1.42), keď $x_0 = 0$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n} \right|_{x=0} x^n. \tag{2.7}$$

Zaveďme nasledujúce substitúcie pre niektoré členy z rovnice (2.6),

$$\alpha = \frac{r'}{r}, \tag{2.8}$$

$$t = \cos\psi, \tag{2.9}$$

$$H(\alpha, t) = \left(1 + \alpha^2 - 2\,\alpha\, t\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.10}$$

Ak

$$\alpha < 1, \tag{2.11}$$

potom funkcia $H(\alpha, t)$ môže byť rozvinutá do Maclaurinovho radu (2.7),

$$H(\alpha, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n H(\alpha, t)}{\partial \alpha^n} \right|_{\alpha=0} \alpha^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)\, \alpha^n, \tag{2.12}$$

kde

$$P_n(t) = \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n H(\alpha, t)}{\partial \alpha^n} \right|_{\alpha=0}. \tag{2.13}$$

Funkcie $P_n(t)$ sa nazývajú *Legendreove polynómy stupňa* n po francúzskom matematikovi A.-M. Legendreovi. Funkcia $H(\alpha, t)$ sa nazýva *generická funkcia pre Legendreove polynómy*. Dosadením (2.13), (2.12) a (2.10) do (2.6) a po uvážení substitúcií (2.8) a (2.9) získame rozvoj funkcie $1/\ell$ do radu Legendreových polynómov,

$$\frac{1}{\ell} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\psi) = \frac{1}{r'} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\psi). \tag{2.14}$$

Nekonečné rady (2.14) sú rovnomerne konvergentné pre $r > r'$. Podmienka $r > r'$ vyplýva zo vzťahov (2.8) a (2.11). Dosadením prostredného výrazu z rovnice (2.14) do (1.21) dostaneme vzťah

$$V_{\mathrm{g}}(P) = \frac{G}{r} \iiint_{\tau} \rho(r', \varphi', \lambda') \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\psi)\, \mathrm{d}\tau(Q). \tag{2.15}$$

Z pohľadu sférických súradníc je Legendreov polynóm $P_n(\cos\psi)$ vo vzťahu (2.15) zložená funkcia, pretože je funkciou $\cos\psi$, pričom samotná funkcia $\cos\psi$ závisí od uhlovej časti sférických súradníc bodov P a Q (pozri rovnicu 1.62). Bolo by preto vhodné nájsť taký vzťah pre Legendreov polynóm $P_n(\cos\psi)$, v ktorom by každá prípadná funkcia závisela iba od jednej z premenných $\varphi, \lambda, \varphi', \lambda'$, a nie od viacerých premenných, ako je to po dosadení (1.62) do (2.15). Nato slúži *dekompozičný vzorec pre Legendreove polynómy*, niekedy tiež nazývaný aj *adičný teorém* či *súčtová veta*. Podľa Hobson (1931) bol adičný teorém prvýkrát odvodený A.-M. Legendreom v roku 1782. Odvodenie pre zložitosť vynecháme, no možno ho nájsť napríklad v knihe Hobson (1931).

Dekompozičný vzorec pre Legendreove polynómy možno zapísať vo viacerých ekvivalentných formách, napríklad (Hobson, 1931; Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005; Sansò a Sideris, 2013)

$$\begin{aligned} P_n(\cos\psi) &= P_n(\sin\varphi)\, P_n(\sin\varphi') \\ &\quad + 2\sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}\, P_{nm}(\sin\varphi)\, P_{nm}(\sin\varphi')\, \cos\left[m(\lambda-\lambda')\right] \\ &= \sum_{m=0}^{n} (2-\delta_{m0})\, \frac{(n-m)!}{(n+m)!}\, \left[P_{nm}(\sin\varphi)\, \cos(m\lambda)\, P_{nm}(\sin\varphi')\, \cos(m\lambda')\right. \\ &\quad \left. + P_{nm}(\sin\varphi)\, \sin(m\lambda)\, P_{nm}(\sin\varphi')\, \sin(m\lambda')\right]. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Novozavedený člen $P_{nm}(t)$, $t \in [-1,1]$, sa nazýva *pridružená Legendreova funkcia prvého druhu* a je daný vzťahom

$$P_{nm}(t) = (1-t^2)^{m/2}\, \frac{\mathrm{d}^m P_n(t)}{\mathrm{d}t^m}. \tag{2.17}$$

Symbol m sa nazýva *rád* a môže nadobúdať hodnoty $m = 0, 1, \ldots, n$ (pozri druhú sumáciu vo vzťahu 2.16). Zo vzťahu (2.17) vidíme, že Legendreova funkcia stupňa n a rádu m súvisí s m-tou deriváciou Legendreoveho polynómu stupňa n podľa premennej t. Všimnime si, že Legendreova funkcia stupňa n a rádu $m = 0$ je totožná s Legendreovým polynómom stupňa n, $P_{n0}(t) = P_n(t)$. Vo vzťahu (2.16) pribudol ešte člen δ_{m0}, ktorý má názov Kroneckerovo delta. Všeobecná definícia pre m a ℓ má tvar

$$\delta_{m\ell} = \begin{cases} 1, & \text{ak} \quad m = \ell, \\ 0, & \text{ak} \quad m \neq \ell. \end{cases} \tag{2.18}$$

Dosadením (2.16) do (2.15) získame výsledný vzťah

$$V_\mathrm{g}(P) = G \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^{n} \left(C_{nm}\, \cos(m\lambda) + S_{nm}\, \sin(m\lambda)\right)\, P_{nm}(\sin\varphi), \tag{2.19}$$

kde

$$\left.\begin{matrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{matrix}\right\} = (2-\delta_{m0}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iiint_{\tau} \rho(r',\varphi',\lambda')\, (r')^n\, P_{nm}(\sin\varphi') \left\{\begin{matrix} \cos(m\lambda') \\ \sin(m\lambda') \end{matrix}\right\} \mathrm{d}\tau(Q). \tag{2.20}$$

Všimnime si, že vo vzťahu (2.19) sú premennými iba súradnice r, φ, λ výpočtového bodu P, v ktorom určujeme gravitačný potenciál (pozri obrázok 1.4). Naproti tomu, vo vzťahu (2.20) sú premenné iba súradnice r', φ', λ' diferenciálneho elementu $\mathrm{d}\tau(Q)$ (obrázok 1.4). Ďalej vidíme, že koeficienty C_{nm} a S_{nm} sú pre dané teleso *konštantné*. Ak teda poznáme koeficienty C_{nm} a S_{nm}, potom vďaka vzťahu (2.19) poznáme gravitačný potenciál V_{g} v (takmer) ľubovoľnom bode P mimo daného telesa. Nepripomína to situáciu z kapitoly 2.1, v ktorej sme tvrdili, že ak poznáme súradnice r_i vektora $\mathbf{r}$, potom poznáme vektor $\mathbf{r}$? Hoci to ešte nemusí byť na prvý pohľad zrejmé, koeficienty C_{nm} a S_{nm} sú v skutočnosti veľmi úzko spojené so súradnicami v_{nm} z rovnice (2.5).

Po nahradení nekonečna nezáporným celým číslom N možno vzťah (2.19) i prakticky vypočítať. V geovedách je takýto výpočet veľmi rozšírený a azda by sme mohli povedať, že patrí medzi základné metódy modelovania vonkajšieho gravitačného poľa Zeme a nebeských telies. Členy $P_{nm}(\sin\varphi)\,\cos(m\lambda)$ a $P_{nm}(\sin\varphi)\,\sin(m\lambda)$ z rovnice (2.19) sa nazývajú *plošné sférické harmonické funkcie stupňa n a rádu m* a členy C_{nm} a S_{nm} sa nazývajú sférické harmonické koeficienty. Vzťah (2.19) predstavuje *rozvoj gravitačného potenciálu do radu sférických harmonických funkcií.*

Na záver dodajme, že vzťah (2.19) možno odvodiť aj inými spôsobmi, napríklad riešením Laplaceovej diferenciálnej rovnice (1.40) metódou separácie premenných (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005; Janák a kol., 2006).

Na nasledujúcich stranách sa budeme podrobnejšie zaoberať vzťahom (2.19). Kapitoly 2.3, 2.4 a 2.5 budú venované Legendreovým polynómom, Legendreovým funkciám a sférickým harmonickým funkciám. Cieľom je nielen popísať základné vlastnosti týchto nových funkcií, ale i predstaviť ich v širšom kontexte. V kapitolách 2.6, 2.7 a 2.8 potom popíšeme normovanie sférických harmonických funkcií a sférických harmonických koeficientov, fyzikálny význam niektorých sférických harmonických koeficientov a praktické aplikácie rovnice (2.19).

2.3 Legendreove polynómy

Legendreove polynómy možno vypočítať priamo rovnicou (2.13), prípadne *Rodriguesovým vzorcom* (Sansò a Sideris, 2013)

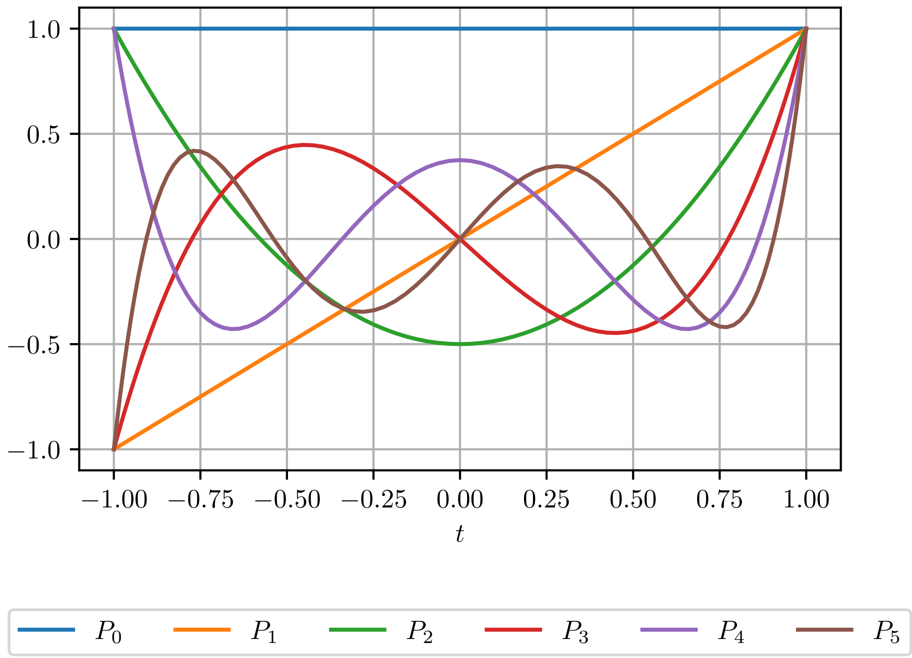
$$P_n(t) = \frac{1}{2^n\,n!}\,\frac{\mathrm{d}^n(t^2-1)^n}{\mathrm{d}t^n} \tag{2.21}$$

či explicitným vzťahom (Freeden a Schreiner, 2009)

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n}\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(-1)^s\frac{(2n-2s)!}{s!\,(n-s)!\,(n-2s)!}\,t^{n-2s}, \tag{2.22}$$

kde symbol $\lfloor\cdot\rfloor$ označuje zaokrúhlenie na najbližšie celé číslo smerom nadol. V numerických aplikáciách je však väčšinou najvýhodnejšie počítať Legendreove polynómy rekurentnými vzorcami, napríklad *Bonnetovým rekurentným vzorcom*

$$P_n(t) = \frac{2n-1}{n}\,t\,P_{n-1}(t) - \frac{n-1}{n}\,P_{n-2}(t), \quad n \geq 2, \quad t \in [-1,1]. \tag{2.23}$$



Obrázok 2.2. Legendreove polynómy $P_n(t)$ argumentu $t \in [-1,1]$ pre $n = 0,1,\ldots,5$. V úlohách súvisiacich s tiažovým poľom zvykne parameter t reprezentovať napríklad funkciu $\sin\varphi$ (rovnica 2.16 alebo vzťah 2.19 pre $m = 0$) alebo funkciu $\cos\psi$ (rovnica 2.14). Obrázok bol pripravený zdrojovým kódom E.1 z prílohy E.

Legendreove polynómy stupňov $n = 0,\ldots,5$ majú tvar (obrázok 2.2)

$$
\begin{aligned}
P_0(t) &= 1, \\
P_1(t) &= t, \\
P_2(t) &= \frac{1}{2}\left(3t^2 - 1\right), \\
P_3(t) &= \frac{1}{2}\left(5t^3 - 3t\right), \\
P_4(t) &= \frac{1}{8}\left(35t^4 - 30t^2 + 3\right), \\
P_5(t) &= \frac{1}{8}\left(63t^5 - 70t^3 + 15t\right).
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

Z rovnice (2.23) je zrejmé, že Legendreove polynómy párnych stupňov $n = 0,2,4,\ldots$ sú párne funkcie a Legendreove polynómy nepárnych stupňov $n = 1,3,5,\ldots$ sú nepárne funkcie (pozri tiež obrázok 2.2 a vzťahy 2.24). Legendreove polynómy $P_0(t) = 1$ a $P_1(t) = t$ môžu byť použité ako začiatočné hodnoty v Bonnetovom rekurentnom vzorci (2.23).

V kapitole 2.1 sme ukázali, že ľubovoľný vektor $\mathbf{r}$ z trojrozmerného karteziánskeho súradnicového systému možno popísať pomocou jednotkových vektorov $\mathbf{e}_i$, $i = 1,2,3$. Obdobne umožňujú niektoré systémy funkcií popísať každú spojitú funkciu $f(t)$ na intervale $t \in [-1,1]$. Jeden z takýchto systémov funkcií predstavujú práve Legendreove polynómy $P_n(t)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Rovnica

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} f_n \, P_n(t), \quad t \in [-1, 1], \tag{2.25}$$

umožňuje rozvinúť každú spojitú funkciu $f(t)$ definovanú na intervale $t \in [-1, 1]$ do radu Legendreových polynómov pre ľubovoľné $t \in [-1, 1]$. Vzťah (2.25) možno vnímať aj ako analógiu vzťahu (2.2), pričom f_n sú súradnice funkcie $f(t)$ a Legendreove polynómy $P_n(t)$ plnia podobnú úlohu ako jednotkové vektory $\mathbf{e}_i$. Koeficienty f_n sú dané skalárnym súčinom funkcií $f(t)$ a $P_n(t)$ (porovnaj so skalárnym súčinom 2.3),

$$f_n = \int_{-1}^{1} f(t) \, P_n(t) \, \mathrm{d}t. \tag{2.26}$$

Dôkaz platnosti rovníc (2.25) a (2.26) uvádzajú napríklad Freeden a Schreiner (2009) a Sansò a Sideris (2013).

Pokračujme ďalej v analógii s jednotkovými vektormi. Podobne ako skalárny súčin dvoch rôznych jednotkových vektorov je nulový (rovnica 1.27), nulový je i skalárny súčin dvoch rôznych Legendreovych polynómov,

$$\int_{-1}^{1} P_n(t) \, P_\ell(t) \, \mathrm{d}t = 0, \quad n \neq \ell. \tag{2.27}$$

Hovoríme preto, podobne ako v súvislosti s jednotkovými vektormi, že *Legendreove polynómy sú ortogonálne* na intervale $t \in [-1, 1]$. Rovnicu (2.27) možno zovšeobecniť doplnením prípadu $n = \ell$ (napríklad Hobson, 1931),

$$\int_{-1}^{1} P_n(t) \, P_\ell(t) \, \mathrm{d}t = \frac{2}{2n+1} \, \delta_{n\ell}. \tag{2.28}$$

Vo fyzikálnej geodézii sú rovnice (2.25) a (2.26) využívané veľmi často a v istej miere sme sa s nimi stretli už v predchádzajúcej kapitole. Nech $f(t)$ je funkcia $1/\ell$ z rovnice (2.14), $f(t) = 1/\ell(t)$, $t = \cos\psi$, pričom r a r' sú konštanty, pre ktoré platí $r > r'$ (pozri nerovnosť 2.11). Koeficienty f_n z rovnice (2.26) potom získame vzťahmi (2.14) a (2.28),

$$f_n = \frac{2}{2n+1} \frac{1}{r'} \left(\frac{r'}{r} \right)^{n+1}. \tag{2.29}$$

Dosadením týchto koeficientov do rovnice (2.25) získame pôvodný vzťah (2.14). Hoci ide o triviálny príklad, demonštruje rozvinutie funkcie do radu Legendreových polynómov. Takéto rozvinutie je v istom zmysle obdobné vyjadreniu vektora $\mathbf{r}$ pomocou jednotkových vektorov $\mathbf{e}_i$ z kapitoly 2.1. Tento rozvoj je v mnohých situáciách výhodný, pretože môže napríklad zjednodušiť odvodenie vzťahov pre niektoré veličiny. Napokon, najlepšie to azda demonštruje samotná kapitola 2.2, v ktorej sme funkciu $1/\ell$ rozvinuli do radu Legendreových polynómov (rovnica 2.14) a potom do radu Legendreových funkcií, čím sme získali vzťah pre gravitačný potenciál (2.19).

V niektorých aplikáciách fyzikálnej geodézie (napríklad kapitola 4.4.3) sa stretávame aj s deriváciami Legendreových polynómov. Deriváciu

$$P_n'(t) = \frac{\mathrm{d}P_n(t)}{\mathrm{d}t} \tag{2.30}$$

môžeme vypočítať napríklad rekurentným vzťahom (Freeden a Schreiner, 2009)

$$P_n'(t) = n\,P_{n-1}(t) + t\,P_{n-1}'(t). \tag{2.31}$$

Začiatočné hodnoty $P_0'(t) = 0$ a $P_1'(t) = 1$ získame deriváciou rovníc (2.24) podľa premennej t. Častejšie než derivácie $\mathrm{d}P_n(t)/\mathrm{d}t$ však potrebujeme poznať derivácie zložených funkcií $\mathrm{d}P_n(\sin\varphi)/\mathrm{d}\varphi$ alebo $\mathrm{d}P_n(\cos\psi)/\mathrm{d}\psi$. Tie môžeme získať použitím nasledujúcich rekurentných vzťahov (Tscherning, 1976),

$$\frac{\mathrm{d}P_n(\sin\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} = (2n-1)\,\cos\varphi\,P_{n-1}(\sin\varphi) + \frac{\mathrm{d}P_{n-2}(\sin\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}, \tag{2.32}$$

$$\frac{\mathrm{d}P_n(\cos\psi)}{\mathrm{d}\psi} = -(2n-1)\,\sin\psi\,P_{n-1}(\cos\psi) + \frac{\mathrm{d}P_{n-2}(\cos\psi)}{\mathrm{d}\psi}. \tag{2.33}$$

Začiatočné hodnoty získame opäť z rovníc (2.24) po uvážení $t = \sin\varphi$ alebo $t = \cos\psi$,

$$\frac{\mathrm{d}P_0(\sin\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}P_1(\sin\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} = \cos\varphi, \tag{2.34}$$

$$\frac{\mathrm{d}P_0(\cos\psi)}{\mathrm{d}\psi} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}P_1(\cos\psi)}{\mathrm{d}\psi} = -\sin\psi. \tag{2.35}$$

Legendreove polynómy majú mnoho zaujímavých a užitočných vlastností. Uveďme aspoň niektoré z nich (Freeden a Schreiner, 2009),

$$P_n(1) = 1, \qquad n \geq 0, \tag{2.36}$$

$$P_n(-t) = (-1)^n\,P_n(t), \qquad n \geq 0, \tag{2.37}$$

$$|P_n(t)| \leq P_n(1) = 1, \qquad n \geq 0, \tag{2.38}$$

$$\int_{-1}^{1} P_n(t)\,\mathrm{d}t = 0, \qquad n \geq 1, \tag{2.39}$$

$$P_n'(1) = \frac{n\,(n+1)}{2}, \qquad n \geq 0. \tag{2.40}$$

Široká škála ďalších vlastností Legendreovych polynómov, ich derivácií a integrálov je dostupná napríklad v prácach Gradshteyn a Ryzhik (2007), Freeden a Schreiner (2009) a Olver a kol. (2010).

Na záver pre úplnosť dodajme, že vzťahy (2.25) a (2.26) možno aplikovať nielen na spojité funkcie, ale i na širšiu množinu funkcií. Podrobnosti sa dajú vyhľadať napríklad v prácach Freeden a Schreiner (2009) a Arfken a Weber (2005).

2.4 Legendreove funkcie

Dosadením Rodriguesovho vzorca (2.21) do (2.17) získame vzťah pre Legendreove funkcie,

$$P_{nm}(t) = \frac{1}{2^n\, n!}(1-t^2)^{m/2}\,\frac{\mathrm{d}^{n+m}(t^2-1)^n}{\mathrm{d}t^{n+m}}, \tag{2.41}$$

kde $n = 0, 1, \dots$ a $m = 0, 1, \dots n$. Existuje tiež explicitný vzťah (Freeden a Schreiner, 2009)

$$P_{nm}(t) = \frac{1}{2^n}(1-t^2)^{m/2} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor} (-1)^s\, \frac{(2n-2s)!}{s!\,(n-s)!\,(n-m-2s)!}\, t^{n-m-2s} \tag{2.42}$$

či mnoho rekurentných vzorcov, napríklad (Freeden a Schreiner, 2009)

$$P_{nm}(t) = \frac{2n-1}{n-m}\, t\, P_{n-1,m}(t) - \frac{n+m-1}{n-m}\, P_{n-2,m}(t), \quad n \geq 2. \tag{2.43}$$

Niekoľko prvých Legendreových funkcií má nasledujúci tvar (obrázok 2.3),

$$\begin{aligned} P_{0,0}(t) &= 1, \\ P_{1,0}(t) &= t, \\ P_{1,1}(t) &= \sqrt{1-t^2}, \\ P_{2,0}(t) &= \frac{1}{2}(3t^2-1), \\ P_{2,1}(t) &= 3t\,\sqrt{1-t^2}, \\ P_{2,2}(t) &= 3(1-t^2). \end{aligned} \tag{2.44}$$

Legendreove funkcie rôznych stupňov n, ℓ a rovnakého rádu m sú ortogonálne (Freeden a Schreiner, 2009),

$$\int_{-1}^{1} P_{nm}(t)\, P_{\ell m}(t)\, \mathrm{d}t = 0, \quad n \neq \ell. \tag{2.45}$$

Pre dve Legendreove funkcie rovnakého stupňa a rádu platí

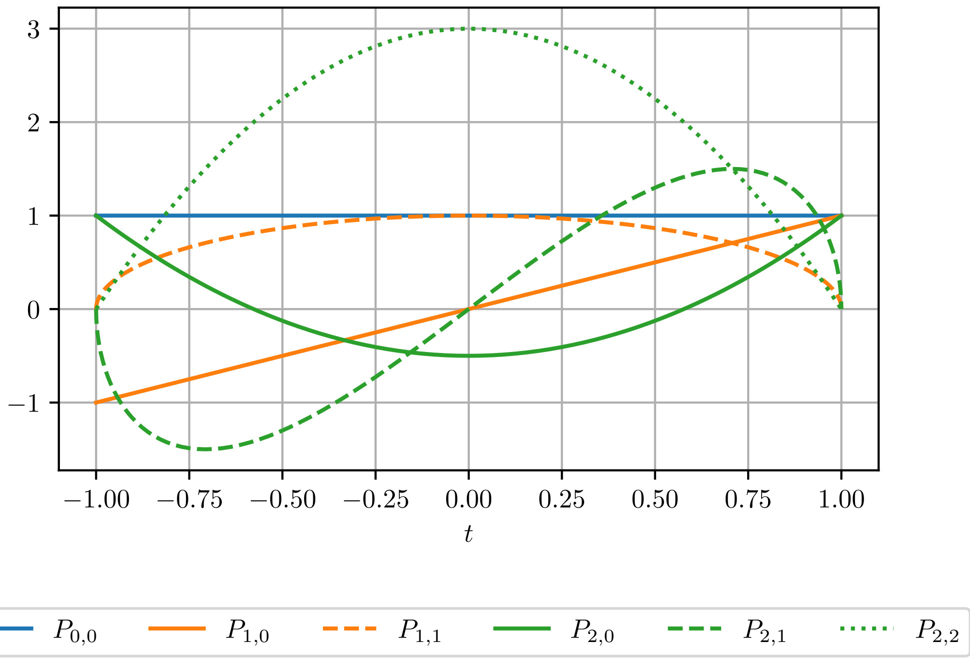
$$\int_{-1}^{1} \left(P_{nm}(t)\right)^2\, \mathrm{d}t = \frac{2}{2n+1}\,\frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \tag{2.46}$$

Legendreove funkcie vyhovujú diferenciálnej rovnici druhého rádu (Sansò a Sideris, 2013)

$$(1-t^2)\,\frac{\mathrm{d}^2 P_{nm}(t)}{\mathrm{d}t^2} - 2\,t\,\frac{\mathrm{d}P_{nm}(t)}{\mathrm{d}t} + \left[n\,(n+1) - \frac{m^2}{1-t^2}\right] P_{nm}(t) = 0. \tag{2.47}$$

Rovnica (2.47) sa nazýva *Legendreova diferenciálna rovnica*. Dosadením $m = 0$ do (2.47) získame diferenciálnu rovnicu druhého rádu pre Legendreove polynómy,

$$(1-t^2)\,\frac{\mathrm{d}^2 P_n(t)}{\mathrm{d}t^2} - 2\,t\,\frac{\mathrm{d}P_n(t)}{\mathrm{d}t} + n\,(n+1)\,P_n(t) = 0. \tag{2.48}$$



Obrázok 2.3. Legendreove funkcie $P_{nm}(t)$ argumentu $t \in [-1, 1]$ pre $n = 0, 1, 2$ a $m = 0, \ldots, n$. Symbol t môže označovať napríklad funkciu $\sin\varphi$ (rovnica 2.19).

Z ďalších vlastností Legendreových funkcií spomeňme aspoň dve,

$$P_{nm}(-t) = (-1)^{n+m} P_{nm}(t), \tag{2.49}$$

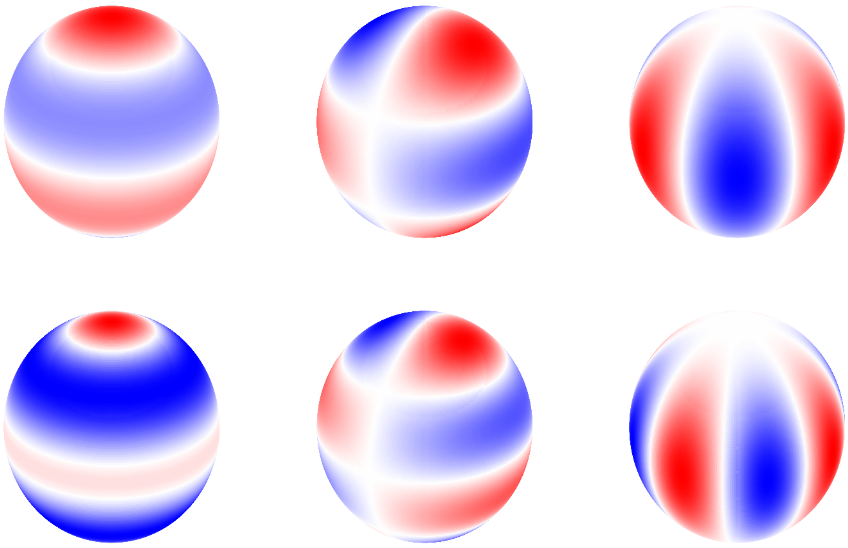
$$P_{nm}(\pm 1) = 0, \quad m \neq 0. \tag{2.50}$$

Na numerický výpočet Legendreových funkcií sa zvyčajne používajú rekurentné vzťahy. Ide však o netriviálnu úlohu, obzvlášť pre vysoké stupne a rády (Holmes a Featherstone, 2002; Fukushima, 2012a; Ishioka, 2018). Vlastnosť (2.49) je preto výhodná; ak potrebujeme vypočítať $P_{nm}(\sin\varphi)$ a $P_{nm}(\sin(-\varphi))$, rekurentné vzťahy môžeme aplikovať iba na získanie jedného z týchto členov a druhý člen dopočítame vzťahom (2.49). Rekurentné vzťahy pre derivácie Legendreových funkcií uvádzajú napríklad Tscherning (1976), Bosch (2000), Holmes a Featherstone (2002), Freeden a Schreiner (2009) a Fukushima (2012b).

Na záver dodajme, že v niektorých vedných odboroch, napríklad vo fyzike či v seizmológii, sa používa definícia Legendreových funkcií, ktorá obsahuje aj člen $(-1)^m$ (Wieczorek, 2015; Olver a kol., 2010),

$$\begin{aligned} P_n^m(t) &= (-1)^m \, (1-t^2)^{m/2} \, \frac{\mathrm{d}^m P_n(t)}{\mathrm{d}t^m} \\ &= \frac{(-1)^m}{2^n \, n!} (1-t^2)^{m/2} \, \frac{\mathrm{d}^{n+m} (t^2-1)^n}{\mathrm{d}t^{n+m}}. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Rád Legendreovej funkcie m sa v takom prípade zvykne zapisovať do horného indexu. Člen $(-1)^m$ sa nazýva *Condonov-Shortleyho fázový faktor*. Medzi $P_{nm}(t)$ (rovnica 2.41)



Obrázok 2.4. Plošné sférické harmonické funkcie $Y_{nk}(\varphi, \lambda)$. Záporné hodnoty sú zobrazené odtieňmi modrej farby, kladné hodnoty odtieňmi červenej farby. *Vrchný rad* (zľava): $Y_{3,0}(\varphi, \lambda)$, $Y_{3,1}(\varphi, \lambda)$, $Y_{3,3}(\varphi, \lambda)$. *Spodný rad* (zľava): $Y_{4,0}(\varphi, \lambda)$, $Y_{4,1}(\varphi, \lambda)$, $Y_{4,4}(\varphi, \lambda)$. Obrázok bol pripravený zdrojovým kódom F.1 z prílohy F.

a $P_n^m(t)$ (rovnica 2.51) platí vzťah

$$P_{nm}(t) = (-1)^m \, P_n^m(t). \tag{2.52}$$

Ďalej budeme používať výhradne Legendreove funkcie $P_{nm}(t)$, ktoré sú definované vzťahom (2.41) a neobsahujú Condonov-Shortleyho fázový faktor.

2.5 Sférické harmonické funkcie

Zaveďme v rovnici (2.19) substitúciu pre členy, ktoré závisia iba od uhlovej časti sférických súradníc,

$$Y_{nk}(\varphi, \lambda) = P_{n|k|}(\sin\varphi) \begin{cases} \cos(k\lambda), & \text{ak} \quad k \geq 0, \\ \sin(|k|\lambda), & \text{ak} \quad k < 0, \end{cases} \tag{2.53}$$

pričom $n = 0, 1, 2, \ldots$ a $k = -n, \ldots, n$. Funkcia $Y_{nk}(\varphi, \lambda)$ sa nazýva *plošná sférická harmonická funkcia stupňa n a rádu k.*[1]

Grafická reprezentácia sférických harmonických funkcií je uvedená na obrázkoch 2.4 a 2.5. Z obrázkov možno vypozorovať niekoľko vlastností sférických harmonických funkcií.

[1]Znamienko parametra k určuje, či plošná sférická harmonická funkcia $Y_{nk}(\varphi, \lambda)$ obsahuje trigonometrickú funkciu $\cos(k\lambda)$ alebo $\sin(|k|\lambda)$. Všimnime si, že v rovnici (2.53) je rád Legendreovej funkcie $P_{n|k|}(\sin\varphi)$ vždy nezáporný v súlade s definíciou Legendreových funkcií z rovnice (2.17). V ďalších častiach práce je potrebné rozlišovať medzi indexmi $m = 0, 1, \ldots, n$ (napríklad rovnica 2.19) a $k = -n, \ldots, n$ (napríklad rovnica 2.53).

- Ak $k = 0$ (ľavý stĺpec na obrázkoch), sférické harmonické funkcie menia n-krát znamienko v smere sférickej šírky a nezávisia od sférickej dĺžky. Obe vlastnosti môžu byť overené dosadením $k = 0$ do rovnice (2.53) (pozri tiež kapitolu 2.3 a obrázok 2.2),

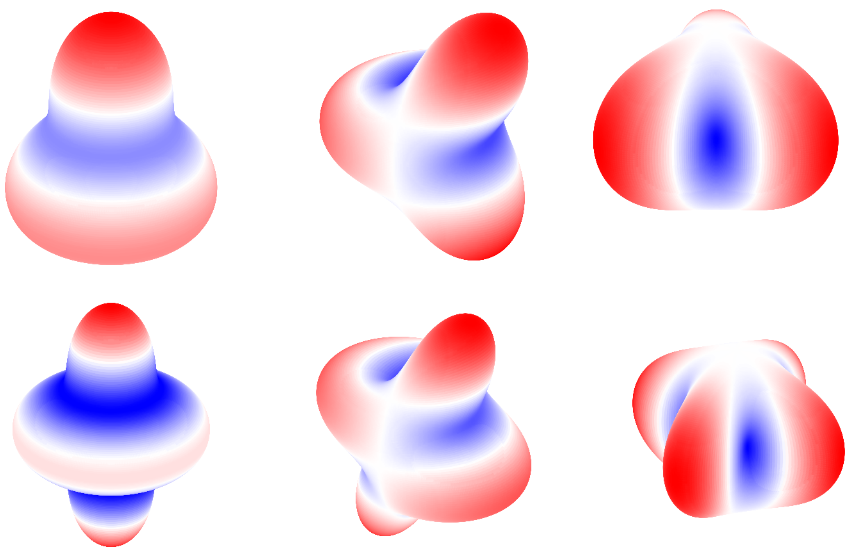
$$Y_{n0}(\varphi, \lambda) = P_n(\sin\varphi). \tag{2.54}$$

  Funkcia $Y_{n0}(\varphi, \lambda)$ je symetrická voči rovine rovníka, ak $n = 0, 2, 4, \ldots$ a nesymetrická, ak $n = 1, 3, 5, \ldots$ (pozri rovnicu 2.54 a vlastnosti Legendreových polynómov v kapitole 2.3). Funkcie $Y_{n0}(\varphi, \lambda)$ sa nazývajú *zonálne sférické harmonické funkcie*.

- Ak $0 < |k| < n$ (prostredný stĺpec na obrázkoch), sférická harmonická funkcia mení znamienko s oboma súradnicami. V smere sférickej šírky dochádza k $n - |k|$ zmenám znamienka. Počet $n-|k|$ vyplýva z $|k|$-tej derivácie Legendreovho polynómu $P_n(\sin\varphi)$ (pozri rovnice 2.17 a 2.41). Deriváciou polynómu sa znižuje jeho stupeň, a teda aj počet možností meniť znamienko. V smere sférickej dĺžky sa znamienko mení $2|k|$-krát, čo vyplýva z vlastností trigonometrických funkcií $\cos(k\lambda)$ a $\sin(|k|\lambda)$. Sférická harmonická funkcia rádu $0 < |k| < n$ má prívlastok *teserálna*.

- Ak $|k| = n$ (pravý stĺpec na obrázkoch), sférická harmonická funkcia mení znamienko 0-krát v smere sférickej šírky, pretože $n-|k| = n-n = 0$, a $2|k|$-krát v smere sférickej dĺžky. Takáto funkcia sa nazýva *sektorálna sférická harmonická funkcia*.

Podobne ako jednotkové vektory, Legendreove polynómy či Legendreove funkcie rovnakého rádu, i sférické harmonické funkcie sú ortogonálne. Táto vlastnosť vyplýva z nulového



Obrázok 2.5. Plošné sférické harmonické funkcie $Y_{nk}(\varphi, \lambda)$ z obrázku 2.4 zobrazené odľahlosťou nadobúdanej hodnoty od jednotkovej sféry. Obrázok bol pripravený zdrojovým kódom F.1 z prílohy F.

skalárneho súčinu dvoch rôznych sférických harmonických funkcií,

$$\iint_\sigma Y_{nk}(\varphi,\lambda)\, Y_{rs}(\varphi,\lambda)\, \mathrm{d}\sigma = 0, \tag{2.55}$$

pričom buď $n \neq r$, alebo $k \neq s$, alebo platia obe podmienky súčasne. Pre skalárny súčin dvoch rovnakých sférických harmonických funkcií platí vzťah

$$\iint_\sigma \left(Y_{nk}(\varphi,\lambda)\right)^2 \,\mathrm{d}\sigma = \frac{4\pi}{(2-\delta_{k0})\,(2n+1)}\,\frac{(n+|k|)!}{(n-|k|)!}. \tag{2.56}$$

Overenie vzťahov (2.55) a (2.56) ponecháme na čitateľa. Je potrebné použiť rovnice (2.45), (2.46), (2.53) a vypočítať integrály

$$\int_0^{2\pi} \cos(k\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \quad \text{a} \quad \int_0^{2\pi} \sin(|k|\lambda)\,\mathrm{d}\lambda. \tag{2.57}$$

Vo vzťahoch (2.45) a (2.46) je potrebné aplikovať zámenu integračnej premennej

$$\int_{-1}^{1} P_{nm}(t)\, P_{rs}(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} P_{nm}(\sin\varphi)\, P_{rs}(\sin\varphi)\, \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi. \tag{2.58}$$

Nech $f(\varphi,\lambda)$ je funkcia na jednotkovej sfére σ vyhovujúca nerovnosti

$$\iint_\sigma \left(f(\varphi,\lambda)\right)^2 \,\mathrm{d}\sigma < \infty. \tag{2.59}$$

Podmienku (2.59) spĺňa napríklad každá spojitá funkcia na jednotkovej sfére. Každú takúto funkciu $f(\varphi,\lambda)$ možno rozvinúť do radu sférických harmonických funkcií (napríklad Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005),

$$f(\varphi,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n} f_{nk}\, Y_{nk}(\varphi,\lambda). \tag{2.60}$$

Koeficienty f_{nk} získame nasledujúcim spôsobom. Vynásobme najprv rovnicu (2.60) sférickou harmonickou funkciou $Y_{rs}(\varphi,\lambda)$ a potom rovnicu zintegrujme na jednotkovej sfére σ. Použitím vzťahov (2.55) a (2.56) získame hľadané koeficienty

$$f_{nk} = \frac{(2-\delta_{k0})\,(2n+1)}{4\pi}\,\frac{(n-|k|)!}{(n+|k|)!}\iint_\sigma f(\varphi,\lambda)\, Y_{nk}(\varphi,\lambda)\,\mathrm{d}\sigma. \tag{2.61}$$

Vidíme teda, že ak je splnená podmienka (2.59), potom funkciu $f(\varphi,\lambda)$ možno pomocou sférických harmonických funkcií rozložiť na súradnice f_{nk} (rovnica 2.61) a potom ju z týchto súradníc spätne zrekonštruovať (vzťah 2.60). V priestore funkcií $f(\varphi,\lambda)$, ktoré sú definované na sfére a spĺňajú podmienku (2.59), plnia sférické harmonické funkcie $Y_{nk}(\varphi,\lambda)$ podobnú úlohu, akú plnia jednotkové vektory $\mathbf{e}_i$ v priestore trojrozmerných vektorov $\mathbf{r}$. Funkcia $f(\varphi, \lambda)$ môže byť napríklad gravitačný či magnetický potenciál telesa na sfére, ktorá obopína celé teleso, topografia Zeme či inej planéty a mnoho ďalších funkcií. Každú takúto funkciu možno rozvinúť do vlastného radu sférických harmonických funkcií (vzťah 2.60), pričom každá funkcia bude mať vlastné súradnice f_{nk}, podobne ako každý vektor $\mathbf{r}$ má vlastné súradnice r_i. Všimnime si, že ak označíme

$$N_{nk} = \sqrt{(2 - \delta_{k0})(2n + 1)\,\frac{(n - |k|)!}{(n + |k|)!}}, \tag{2.62}$$

potom vzťahy (2.61) a (2.60) sú totožné so vzťahmi (2.4) a (2.5) pre $r = 1$.

2.6 Normovanie

V praktických aplikáciách sa sférické harmonické funkcie zvyknú definovať tak, že sú vynásobené členom, ktorý závisí od sférického harmonického stupňa a rádu. Tento člen sa nazýva *norma* a jeho použitím dostaneme *normované sférické harmonické funkcie*. Normovaním získame niektoré vlastnosti, ktoré sú výhodné z teoretického aj z praktického hľadiska. Tieto vlastnosti budú podrobnejšie diskutované v kapitolách 2.6.1 a 2.6.2. Existuje niekoľko typov noriem, napríklad Schmidtova polovičná norma, ortonormálna norma či úplná norma (Wieczorek a Meschede, 2018). V geodézii sa používa takmer výhradne úplná norma, preto sa budeme venovať iba jej.

2.6.1 Legendreove funkcie a sférické harmonické funkcie

Pre skalárny súčin dvoch rovnakých jednotkových vektorov $\mathbf{e}_i$ platí vzťah (1.28). Z teoretického aj z praktického hľadiska by bolo výhodné, aby aj skalárny súčin dvoch rovnakých sférických harmonických funkcií bol rovný 1. Túto vlastnosť možno zabezpečiť vynásobením Legendreových funkcií $P_{nm}(\sin\varphi)$ členom N_{nk} (rovnica 2.62), ktorý nazývame *úplná norma*. Získame tým *úplne normované Legendreove funkcie*,

$$\bar{P}_{nm}(\sin\varphi) = N_{nm}\, P_{nm}(\sin\varphi), \quad n = 0, 1, \ldots, \quad m = 0, 1, \ldots, n, \tag{2.63}$$

a *úplne normované sférické harmonické funkcie*,

$$\bar{Y}_{nk}(\varphi, \lambda) = N_{nk}\, Y_{nk}(\varphi, \lambda) = \bar{P}_{n|k|}(\sin\varphi) \begin{cases} \cos(k\lambda), & \text{ak} \quad k \geq 0, \\ \sin(|k|\lambda), & \text{ak} \quad k < 0, \end{cases} \tag{2.64}$$
$$n = 0, 1, \ldots, \quad k = -n, \ldots, n.$$

V kapitole 2.5 sme uviedli, že vzťahmi (2.57) a (2.58) možno dokázať rovnosti (2.55) a (2.56). Ak použijeme navyše aj rovnicu (2.62), dá sa dokázať vzťah

$$\frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\sigma} \bar{Y}_{nk}(\varphi, \lambda)\, \bar{Y}_{rs}(\varphi, \lambda)\, \mathrm{d}\sigma = \delta_{nr}\, \delta_{ks}. \tag{2.65}$$

Skalárny súčin (2.65) dvoch rôznych úplne normovaných sférických harmonických funkcií je teda rovný 0 a skalárny súčin dvoch rovnakých úplne normovaných sférických harmonických funkcií je rovný 1. Prvá vlastnosť znamená, že funkcie $\bar{Y}_{nk}(\varphi, \lambda)$ sú ortogonálne a druhá vlastnosť znamená, že funkcie $\bar{Y}_{nk}(\varphi, \lambda)$ sú normované. Hovoríme preto, že úplne normované sférické harmonické funkcie $\bar{Y}_{nk}(\varphi, \lambda)$ sú *ortonormálne*.

Vzťahy (2.60) a (2.61) potom nadobudnú tvar

$$f(\varphi, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^{n} \bar{f}_{nk}\, \bar{Y}_{nk}(\varphi, \lambda), \tag{2.66}$$

$$\bar{f}_{nk} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} f(\varphi, \lambda)\, \bar{Y}_{nk}(\varphi, \lambda)\, \mathrm{d}\sigma. \tag{2.67}$$

Úplne normované sférické harmonické funkcie tiež umožňujú zapísať dekompozičný teorém (2.16) v tvare (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005)

$$P_n(\cos\psi) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} \bar{Y}_{nk}(\varphi, \lambda)\, \bar{Y}_{nk}(\varphi', \lambda') \tag{2.68}$$

a prevrátenú hodnotu vzdialenosti $1/\ell$ z rovnice (2.14) pre $r > r'$ v tvare

$$\frac{1}{\ell} = \frac{1}{r'} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{r'}{r}\right)^{n+1} \sum_{k=-n}^{n} \bar{Y}_{nk}(\varphi, \lambda)\, \bar{Y}_{nk}(\varphi', \lambda'). \tag{2.69}$$

Z numerického hľadiska je výpočet nenormovaných Legendreových funkcií problematický, a to už i pre stupne a rády presahujúce niekoľko stoviek. Dôvodom je ich pomerne rýchlo narastajúca hodnota, ktorá dokonca prekročí rozsah dvojitej presnosti. *Dvojitá presnosť* je v súčasnosti najčastejšie používaný štandard na počítačovú reprezentáciu čísel s pohyblivou desatinnou čiarkou. Číslo väčšie ako horný rozsah dvojitej presnosti je v dvojitej presnosti reprezentované nekonečnom. Z tohto dôvodu je z praktického hľadiska výhodnejšie pracovať s úplne normovanými Legendreovými funkciami. Pre opísané numerické problémy sa však nepočíta zvlášť norma N_{nm} a zvlášť nenormovaná Legendreova funkcia $P_{nm}(\sin\varphi)$, ale počítajú sa priamo úplne normované Legendreove funkcie $\bar{P}_{nm}(\sin\varphi)$ pomocou upravených rekurentných vzťahov (pozri napríklad Holmes a Featherstone, 2002 či Fukushima, 2012a).

Zo softvérových balíkov na výpočet vzťahov (2.66) a (2.67) spomeňme aspoň knižnice SHTns (napísaná v jazykoch C a Python; Schaeffer, 2013), ISPACK (Fortran; Ishioka, 2018), SHTOOLS (Fortran a Python; Wieczorek a Meschede, 2018) a CHarm (C a Python; Bucha, 2022).

2.6.2 Sférické harmonické koeficienty

Sférické harmonické koeficienty C_{nm} a S_{nm} zo vzťahu (2.19) sú zvyčajne normované dvakrát. Prvá norma zabezpečuje ich bezrozmernosť, druhá norma je potrebná v dôsledku normovania sférických harmonických funkcií (kapitola 2.6.1).

Fyzikálna jednotka koeficientov C_{nm} a S_{nm} z rovnice (2.20) je $\mathrm{m}^n\,\mathrm{kg}$ a závisí od stupňa n. Je preto výhodne koeficienty normovať tak, aby boli bezrozmerné. Norma zaužívaná v geodézii má tvar

$$\left.\begin{matrix}\tilde{C}_{nm}\\ \tilde{S}_{nm}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{M\,R^n}\begin{cases}C_{nm},\\ S_{nm},\end{cases} \tag{2.70}$$

kde M je hmotnosť telesa, ktoré generuje gravitačný potenciál a R je polomer najmenšej sféry, v ktorej sa nachádza celé teleso. Vzťah (2.19) potom prejde do tvaru

$$V_{\mathrm{g}}(P) = \frac{GM}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\sum_{m=0}^{n}\left(\tilde{C}_{nm}\,\cos(m\lambda) + \tilde{S}_{nm}\,\sin(m\lambda)\right)\,P_{nm}(\sin\varphi). \tag{2.71}$$

Ak sú sférické harmonické funkcie normované členom N_{nk} (rovnica 2.64), potom sférické harmonické koeficienty musia byť normou N_{nk} vydelené, aby sa zachovala rovnosť vo vzťahoch (2.19) a (2.71). Druhá norma sférických harmonických koeficientov je preto daná vzťahom

$$\left.\begin{matrix}\bar{C}_{nm}\\ \bar{S}_{nm}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{N_{nm}}\begin{cases}\tilde{C}_{nm},\\ \tilde{S}_{nm}.\end{cases} \tag{2.72}$$

Sférický harmonický rozvoj (2.71) následne prejde do tvaru

$$V_{\mathrm{g}}(P) = \frac{GM}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\sum_{m=0}^{n}\left(\bar{C}_{nm}\,\cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm}\,\sin(m\lambda)\right)\,\bar{P}_{nm}(\sin\varphi). \tag{2.73}$$

Ekvivalentný, no úspornejší zápis dosiahneme použitím substitúcie $\bar{Y}_{nk}(\varphi,\lambda)$,

$$V_{\mathrm{g}}(P) = \frac{GM}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\sum_{k=-n}^{n}\bar{v}_{nk}\,\bar{Y}_{nk}(\varphi,\lambda), \tag{2.74}$$

kde

$$\bar{v}_{nk} = \begin{cases}\bar{C}_{nk}, & \text{ak} \quad k \geq 0,\\ \bar{S}_{n|k|}, & \text{ak} \quad k < 0.\end{cases} \tag{2.75}$$

Koeficienty $\bar{C}_{nm}$ a $\bar{S}_{nm}$, resp. $\bar{v}_{nk}$ sa nazývajú *úplne normované sférické harmonické koeficienty*.

Podobne ako úplne normované Legendreove funkcie, ani sférické harmonické koeficienty sa nezvyknú počítať samostatne od normy. Namiesto toho sa vypočítajú úplne normované sférické harmonické funkcie $\bar{Y}_{nk}(\varphi,\lambda)$ a následne sa napríklad vzťahom (2.67) priamo získajú úplne normované sférické harmonické koeficienty.

2.7 Fyzikálny význam niektorých sférických harmonických koeficientov

Dosaďme $P_{0,0}(\sin\varphi)$ z rovnice (2.44) do rovnice (2.20) pre $n=0$ a $m=0$,

$$C_{0,0} = \iiint_{\tau}\rho(Q)\,\mathrm{d}\tau(Q) = M. \tag{2.76}$$

Nenormovaný koeficient $C_{0,0}$ má teda fyzikálny význam, je rovný hmotnosti telesa M. Ak obmedzíme nekonečné rady (2.19), (2.71), (2.73) či (2.74) na maximálny stupeň $N = 0$, získame vzťah

$$V_{\mathrm{g}}(P) = \frac{GM}{r}. \tag{2.77}$$

Tento vzťah je identický s rovnicou pre gravitačný potenciál hmotného bodu (1.17) a s rovnicou pre gravitačný potenciál homogénnej gule v bodoch mimo gule (1.74). Jedna z možných interpretácií obmedzenia nekonečných rozvojov (2.19), (2.71), (2.73) a (2.74) na maximálny stupeň $N = 0$ je teda taká, že získame gravitačný potenciál homogénnej gule, ktorá nahrádza skutočné teleso.

Vydeľme rovnicu (2.20) hmotnosťou M a zopakujme uvedený postup pre stupeň $n = 1$ a rády $m = 0, 1$. Po uvážení (1.37) získame

$$\begin{aligned} \frac{C_{1,0}}{M} &= \frac{1}{M} \iiint\limits_{\tau} \rho(Q)\, z'\, \mathrm{d}\tau(Q) = z_{\mathrm{c}}, \\ \frac{C_{1,1}}{M} &= \frac{1}{M} \iiint\limits_{\tau} \rho(Q)\, x'\, \mathrm{d}\tau(Q) = x_{\mathrm{c}}, \\ \frac{S_{1,1}}{M} &= \frac{1}{M} \iiint\limits_{\tau} \rho(Q)\, y'\, \mathrm{d}\tau(Q) = y_{\mathrm{c}}. \end{aligned} \tag{2.78}$$

Súradnice $x_{\mathrm{c}}, y_{\mathrm{c}}, z_{\mathrm{c}}$ predstavujú posun začiatku súradnicového systému, v ktorom vyjadrujeme polohu bodu P v rovniciach (2.19), (2.71), (2.73) a (2.74), voči ťažisku telesa. V praktických aplikáciách pracujeme veľmi často v geocentrickom súradnicovom systéme so začiatkom v ťažisku Zeme, preto všetky koeficienty stupňa $n = 1$ sú často nulové, $C_{1,0} = C_{1,1} = S_{1,1} = 0$.

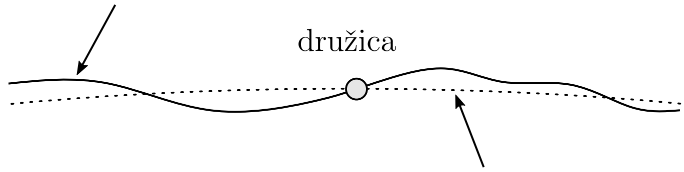
Dá sa ukázať (napríklad Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005), že koeficienty stupňa $n = 2$ súvisia s momentom zotrvačnosti Zeme. Koeficienty stupňov $n \geq 3$ už zrejme nemajú priamočiaru fyzikálnu interpretáciu.

2.8 Aplikácie sférického harmonického rozvoja

V tejto kapitole ukážeme dve aplikácie sférických harmonických rozvojov vo fyzikálnej geodézii: modelovanie vonkajšieho gravitačného poľa (kapitola 2.8.1) a modelovanie topografie približne sférických telies (kapitola 2.8.2).

2.8.1 Gravitačné pole

Koeficienty $\bar{C}_{nm}$ a $\bar{S}_{nm}$ môžu byť vypočítané napríklad z obežnej dráhy umelej družice Zeme. Tak ako Slnko ovplyvňuje dráhu planéty v príklade z kapitoly 1.1, podobne i Zem vplýva na dráhu družice prostredníctvom svojho gravitačného poľa. Tentokrát je ale situácia zložitejšia ako na obrázku 1.2, pretože družica obieha okolo Zeme vo výške približne 250 až 500 km nad jej povrchom. V takejto bezprostrednej blízkosti Zeme sú priestorové



Obrázok 2.6. Pohyb umelej družice Zeme.

variácie zemského gravitačného poľa dostatočne silné na to, aby ovplyvnili dráhu družice inak v oblasti so silným gravitačným poľom (napríklad nad masívnymi pohoriami) a inak v oblastiach so slabším gravitačným poľom. Skutočná dráha družice je preto komplikovaná priestorová krivka, ktorá reflektuje gravitačné pole v danej oblasti, a elipsa je len jej priblížením (obrázok 2.6). Ak by sme teda poznali skutočnú dráhu družice, mali by sme byť schopní inverzným spôsobom vypočítať to pole, ktoré je príčinou neeliptickej dráhy. Inými slovami, zo skutočnej dráhy družice možno vypočítať sférické harmonické koeficienty $\bar{C}_{nm}$ a $\bar{S}_{nm}$. Koeficienty $\bar{C}_{nm}$ a $\bar{S}_{nm}$ môžu byť vypočítané i z mnohých iných geodetických meraní, či už družicových, alebo pozemných. Podrobnejšie informácie o pohybe družíc v gravitačnom poli Zeme a o družicových misiách a technikách sú dostupné napríklad v prácach Seeber (2003), Hofmann-Wellenhof a Moritz (2005), Kostelecký a kol. (2008), Melicher a Gerhátová (2009) a Husár (2017).

V kapitole 1.2 sme uviedli, že gravitačný potenciál obsahuje informáciu o všetkých veličinách gravitačného poľa. Zo vzťahu (2.73) preto dokážeme vyťažiť oveľa viac ako len informáciu o gravitačnom potenciáli. Napríklad aplikovaním operátora gradient (1.39) na gravitačný potenciál (2.73) možno získať prvky gravitačného zrýchlenia v lokálnom karteziánskom súradnicovom systéme s pohyblivým začiatkom $x^{\mathrm{s}}, y^{\mathrm{s}}, z^{\mathrm{s}}$ (obrázok 1.9),

$$\begin{aligned} g_{x^{\mathrm{s}}}(P) &= \left.\frac{\partial V_{\mathrm{g}}}{\partial x^{\mathrm{s}}}\right|_P = \frac{1}{r}\left.\frac{\partial V_{\mathrm{g}}}{\partial \varphi}\right|_P \\ &= \frac{GM}{R^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}\sum_{m=0}^{n}\left(\bar{C}_{nm}\cos(m\lambda)+\bar{S}_{nm}\sin(m\lambda)\right)\frac{\mathrm{d}\bar{P}_{nm}(\sin\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}, \end{aligned} \tag{2.79}$$

$$\begin{aligned} g_{y^{\mathrm{s}}}(P) &= \left.\frac{\partial V_{\mathrm{g}}}{\partial y^{\mathrm{s}}}\right|_P = \frac{1}{r\cos\varphi}\left.\frac{\partial V_{\mathrm{g}}}{\partial \lambda}\right|_P \\ &= \frac{GM}{R^2\cos\varphi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}\sum_{m=0}^{n}\left(\bar{S}_{nm}\cos(m\lambda)-\bar{C}_{nm}\sin(m\lambda)\right)m\,\bar{P}_{nm}(\sin\varphi), \end{aligned} \tag{2.80}$$

$$\begin{aligned} g_{z^{\mathrm{s}}}(P) &= \left.\frac{\partial V_{\mathrm{g}}}{\partial z^{\mathrm{s}}}\right|_P = \left.\frac{\partial V_{\mathrm{g}}}{\partial r}\right|_P \\ &= -\frac{GM}{R^2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}\sum_{m=0}^{n}\left(\bar{C}_{nm}\cos(m\lambda)+\bar{S}_{nm}\sin(m\lambda)\right)\bar{P}_{nm}(\sin\varphi). \end{aligned} \tag{2.81}$$

Sférickými harmonickými rozvojmi teda môžeme vypočítať prakticky akúkoľvek veličinu gravitačného či tiažového poľa, od gravitačného potenciálu cez gravitačné zrýchlenie až po zvislicové odchýlky či geoid. Rovnice (2.79) až (2.81) tiež prakticky demonštrujú výhodnosť vyjadrenia operátora gradient vo sférických súradniciach (rovnica 1.39). Priamy výpočet derivácií $\partial V_{\mathrm{g}}/\partial x^{\mathrm{s}}, \partial V_{\mathrm{g}}/\partial y^{\mathrm{s}}, \partial V_{\mathrm{g}}/\partial z^{\mathrm{s}}$ vzťahu (2.73) by bol náročný.

ICGEM (angl. *International Centre for Global Earth Models*) je služba zriadená Medzinárodnou geodetickou asociáciou (angl. *International Association of Geodesy*, IAG). Jej cieľom je okrem iného zbierať, archivovať a poskytovať globálne modely gravitačného poľa Zeme, najčastejšie práve vo forme sférických harmonických koeficientov $\bar{C}_{nm}$ a $\bar{S}_{nm}$. Na domovskej stránke služby ICGEM[2] sú dostupné desiatky sád sférických harmonických koeficientov, ktoré boli získané z rôznych dát a rozličnými metódami výpočtu. Dostupné sú aj časovo premenlivé modely zemského gravitačného poľa (pozri kapitolu 1.6). Tieto modely zachytávajú časové variácie gravitačného poľa, ktoré sú spôsobené napríklad hydrologickými zmenami na regionálnej úrovni (napríklad Amazonský prales), presunom vodných más v oceánoch, úbytkom ľadovcov v Grónsku a v Antarktíde či zemetraseniami (Wahr, 2007). ICGEM tiež poskytuje službu na výpočet vzťahu (2.73) či modely gravitačného poľa nebeských telies (napríklad Mars, Venuša, Mesiac či asteroidy slnečnej sústavy).

Služba ICGEM poskytuje modely v štandardizovanom tvare v textových súboroch s príponou `gfc`. V prílohe G je uvedená ukážka modelu s názvom EIGEN-6C4 (Förste a kol., 2014). Na začiatku `gfc` súborov sú spravidla uvedené stručné informácie o poskytovanom modeli, najmä mená autorov modelu, dáta a metódy použité na jeho výpočet a odkazy na relevantnú odbornú literatúru. Riadky s kľúčovými slovami `earth_gravity_constant` a `radius` v hlavičke súboru udávajú hodnoty geocentrickej gravitačnej konštanty GM a referenčného polomeru R (pozri rovnicu 2.73). Tieto hodnoty sú spojené s daným modelom a medzi jednotlivými modelmi sa môžu líšiť. Všimnime si, že koeficient $\bar{C}_{0,0}$ modelu EIGEN-6C4 má hodnotu 1. Je to spôsobené tým, že nenormovaný koeficient $C_{0,0}$ je rovný hmotnosti Zeme (rovnica 2.76), avšak po aplikovaní prvej a druhej normy (rovnice 2.70 a 2.72) nadobudne hodnotu 1. Môžeme si tiež všimnúť, že všetky koeficienty stupňa $n = 1$ sú nulové, teda začiatok súradnicového systému modelu EIGEN-6C4 je vložený do ťažiska Zeme (pozri kapitolu 2.7).

Sférické harmonické koeficienty gravitačného poľa Zeme sú v súčasnosti dostupné približne do stupňa 2190. Získavané sú väčšinou kombináciou družicových meraní (približne do stupňa 250 až 300) a detailných pozemných gravimetrických meraní (približne do stupňa 720 až 2190). Existujú tiež modely, ktoré popisujú zemské gravitačné pole do vyšších stupňov ako 2190. Tieto vysoké harmonické stupne však nie sú založené na meraniach zemského gravitačného poľa, ale na modelovaní gravitačného účinku topografických hmôt (napríklad Ince a kol., 2020). *Topografické hmoty* sú hmoty, ktoré sa nachádzajú medzi geoidom a fyzickým povrchom Zeme.

[2] http://icgem.gfz-potsdam.de/home

2.8.2 Topografia

V kapitole 2.5 sme uviedli, že do radu sférických harmonických funkcií možno rozvinúť nielen gravitačný potenciál, ale každú funkciu, ktorá spĺňa podmienku (2.59). Rozviňme preto do stupňa N napríklad zemskú topografiu $H(\varphi, \lambda)$ (pozri vzťah 2.66),

$$H(\varphi, \lambda) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=-n}^{n} \bar{h}_{nk}\, \bar{Y}_{nk}(\varphi, \lambda). \tag{2.82}$$

Obrázok 2.7 znázorňuje vplyv parametra N na priestorové rozlíšenie funkcie $H(\varphi, \lambda)$. Koeficienty $\bar{h}_{nk}$ boli prevzaté z modelu DTM2006.0 (Pavlis a kol., 2007). Hoci sú všetky tri mapy vypočítané s rovnakým vzorkovaním (0.25° vo sférickej šírke a dĺžke), miera detailu stúpa od vrchnej mapy smerom nadol. Je to spôsobené tým, že maximálny stupeň N, ktorý udáva priestorové rozlíšenie funkcie $H(\varphi, \lambda)$, narastá postupne od 30 cez 90 až do 360. Odhad veľkosti najmenšieho priestorového prvku, ktorý môže byť reprezentovaný sférickým harmonickým rozvojom do stupňa N, získame vzťahom (Barthelmes, 2013)

$$l_{\min}(N) = \frac{\pi\, R}{N}, \tag{2.83}$$

kde $l_{\min}$ je sférická vzdialenosť v dĺžkových jednotkách na sfére s polomerom R. Zvyšovaním maximálneho stupňa N teda zvyšujeme priestorovú podrobnosť (rozlíšenie) funkcie $H(\varphi, \lambda)$.

Okrem modelu DTM2006.0 je voľne prístupný aj model Earth2014 (Hirt a Rexer, 2015). Earth2014 je kolekcia modelov zemskej topografie v rozličných variantoch, napríklad so zohľadnením výšky ľadovcov či s uvážením alebo bez uváženia batymetrie. Model DTM2006.0 je dostupný do stupňa 2190. Maximálny stupeň modelu Earth2014 je 10 800.

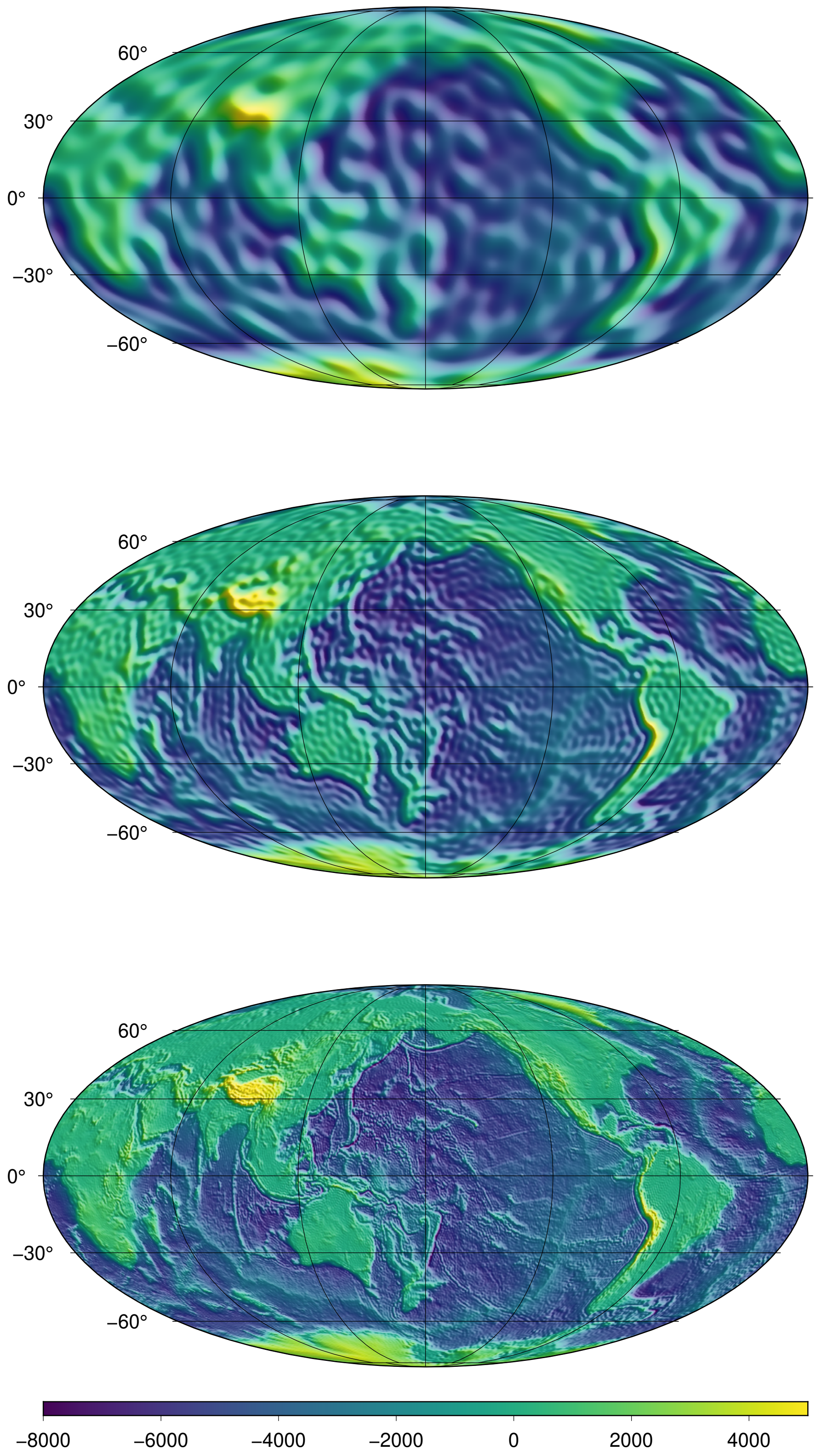
Zo sférických harmonických modelov topografie nebeských telies spomeňme aspoň model zemského Mesiaca do stupňa 2600 (Wieczorek, 2015) a model asteroidu Eros do stupňa 24 (Zuber a kol., 2000).

2.9 Konvergencia sférického harmonického rozvoja na povrchu Zeme

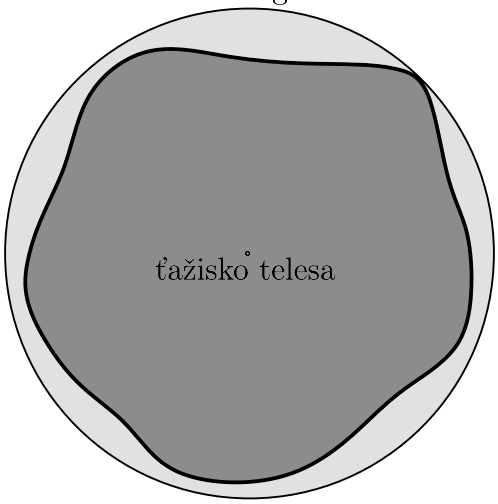
Pred rozvinutím generickej funkcie pre Legendreove polynómy do Maclaurinovho radu (vzťah 2.12) sme vyslovili predpoklad $\frac{r'}{r} < 1$ (vzťahy 2.8 a 2.11). Bez splnenia tejto podmienky nemusí rad (2.12) konvergovať. V takom prípade nie je možné pokračovať v odvodení z kapitoly 2.2, pretože zámena poradia integrácie a sumácie nie je možná.

Prepíšme nerovnosť $\frac{r'}{r} < 1$ do tvaru $r > r'$. Táto nerovnosť je splnená pre *všetky* diferenciálne elementy $\mathrm{d}\tau(r', \varphi', \lambda')$ iba vtedy, ak pre sprievodič r výpočtového bodu $P(r, \varphi, \lambda)$ platí

$$r > \max(r') = R, \tag{2.84}$$



Obrázok 2.7. Sférický harmonický rozvoj zemskej topografie (jednotky m) do stupňov $N = 30$ (vrchná mapa), 90 (prostredná mapa) a 360 (spodná mapa). Výpočet bol uskutočnený zdrojovým kódom H.1 z prílohy H.



Obrázok 2.8. Sférický harmonický rad (2.19) konverguje rovnomerne a absolútne vo vonkajšom priestore sféry konvergencie. Svetlosivá farba označuje oblasť, v ktorej nie je zaručená konvergencia. Tmavosivá farba predstavuje hmoty telesa, ktoré generuje gravitačné pole. V tejto oblasti rad (2.19) nepopisuje skutočný gravitačný potenciál.

kde R je sprievodič najvzdialenejšieho diferenciálneho elementu $\mathrm{d}\tau$ od začiatku súradnicového systému. Sféra s polomerom R sa nazýva sféra konvergencie (Hotine, 1969) (pozri obrázok 2.8). Vo vonkajšom priestore sféry konvergencie teda rad (2.19) konverguje rovnomerne a absolútne. Na tejto sfére ani v jej vnútri konvergencia zaručená nie je.

Nanešťastie, celý povrch Zeme, na ktorom často potrebujeme počítať rozvoj (2.19), sa nachádza v oblasti, v ktorej konvergencia nie je zaručená. Našťastie, zdá sa, že otázka konvergencie, resp. divergencie radu (2.19) nie je v súčasnosti z praktického hľadiska relevantná pre nízke až stredné stupne a svoju závažnosť nadobúda približne až od stupňa 10 800 (Hirt a kol., 2016; Rexer, 2017).

Konvergencia radu sférických harmonických funkcií na povrchu Zeme je často diskutovanou témou geodetickej literatúry (Hotine, 1969; Krarup, 1969; Moritz, 1980; L. Sjöberg, 1980; Jekeli, 1983; Sansò a Sideris, 2013). Dodajme, že funkcia $1/\ell$ môže byť rozvinutá do radu Legendreových polynómov a do radu sférických harmonických funkcií aj pre $r < r'$ (napríklad Martinec, 1998; Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005). Získame tým rozvoje, ktoré sú formálne podobné radom (2.14) a (2.69). Týmto spôsobom možno odvodiť iný typ sférického harmonického rozvoja gravitačného potenciálu, ktorý je konvergentný aj pre $r < R$, ak je v tejto oblasti gravitačný potenciál harmonický. V literatúre sa preto rozlišuje medzi vonkajšími (podmienka $r > R$) a vnútornými priestorovými sférickými harmonickými funkciami ($r < R$). Vonkajšie a vnútorné rozvoje sa zvyknú aj kombinovať, vďaka čomu dokážeme získať konvergentný sférický harmonický rozvoj gravitačného potenciálu aj v oblastiach so sprievodičom $r < R$, a to dokonca aj vo vnútri Zeme (napríklad L. Sjöberg, 1977; Jekeli, 1983; Grafarend a Engels, 1993; Wang, 1997; Martinec, 1998; Wang a X. Yang, 2013).

Kapitola 3

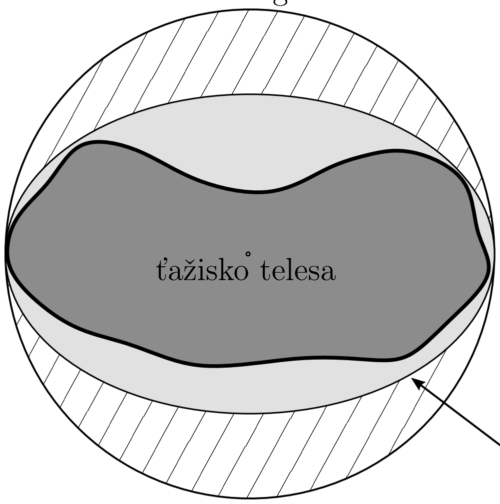
Sféroidický harmonický rozvoj

Fyzikálna geodézia skúma gravitačné polia objektov rozmanitých tvarov. Často pritom pracujeme so sploštenými telesami, napríklad so Zemou či s mnohými asteroidmi slnečnej sústavy (napríklad Eros, Castalia či Bennu; pozri Garmier a Barriot, 2001, Hu a Jekeli, 2015, Sebera a kol., 2016 či Reimond a Baur, 2016). Ak by sme rozvinuli gravitačný potenciál týchto telies do sférického harmonického radu (2.19), oblasť možnej divergencie v bezprostrednej blízkosti telesa môže byť rozsiahla (pozri kapitolu 2.9). V takýchto situáciách je výhodnejšie nerozvíjať gravitačný potenciál do radu harmonických funkcií vo sférických súradniciach, ale v súradniciach, ktoré sú istým spôsobom prirodzenejšie pre sploštené telesá. Použité môžu byť napríklad *redukované elipsoidické súradnice*, ktoré vedú k *sféroidickému harmonickému rozvoju* gravitačného potenciálu. Prívlastok *sféroidický* označuje, že harmonický rozvoj je vztiahnutý na sféroid, v tomto prípade na dvojosový elipsoid. Dvojosový elipsoid môže byť sploštený buď na póloch, alebo na rovníku. Pre modelovanie gravitačného poľa Zeme má však praktické využitie takmer výlučne len prvý z nich, preto sa ďalej preto budeme venovať iba elipsoidom, ktoré sú sploštené na póloch. Výhodou sféroidického harmonického rozvoja je spravidla väčšia oblasť konvergencie harmonického radu v porovnaní so sférickým rozvojom (pozri obrázok 3.1).

V tejto kapitole popíšeme redukované elipsoidické súradnice (kapitola 3.1), vyjadríme v nich operátor gradient a Laplaceovu rovnicu (kapitola 3.2), predstavíme sféroidické harmonické funkcie (kapitola 3.3) a na záver rozvinieme gravitačný potenciál do sféroidického harmonického radu (kapitola 3.4). Pre náročnosť nebudeme odvádzať sféroidické harmonické funkcie tak podrobne, ako sme odvodili sférické harmonické funkcie v kapitole 2. Namiesto toho sa budeme snažiť prirovnávať diskutované témy k problematike známej už z kapitoly 2. Získané poznatky využijeme neskôr v kapitole 4, v ktorej je študované tiažové pole s konštantným tiažovým potenciálom na povrchu dvojosového elipsoidu.

3.1 Redukované elipsoidické súradnice

Nech je daný dvojosový referenčný elipsoid s dĺžkou hlavnej polosi a a s dĺžkou vedľajšej polosi b. Parametre a a b sú volené tak, aby vhodne aproximovali tvar telesa, napríklad



Obrázok 3.1. Sféra a dvojosový elipsoid konvergencie harmonických radov (2.19) a (3.28). Oba rady konvergujú vo vonkajšom priestore svojej plochy konvergencie, no v jej vnútri ich konvergencia zaručená nie je. Oblasť konvergencie sféroidického harmonického radu je tak väčšia o vyšrafovanú oblasť.

v zmysle metódy najmenších štvorcov. Zaveďme ďalej pojem *lineárna excentricita* E. Parameter E označuje vzdialenosť medzi stredom elipsy, ktorá vznikne meridiánovým rezom elipsoidu, a jedným z jej ohnísk (obrázok 3.2). Z definície elipsy vyplýva, že lineárna excentricita je daná vzťahom

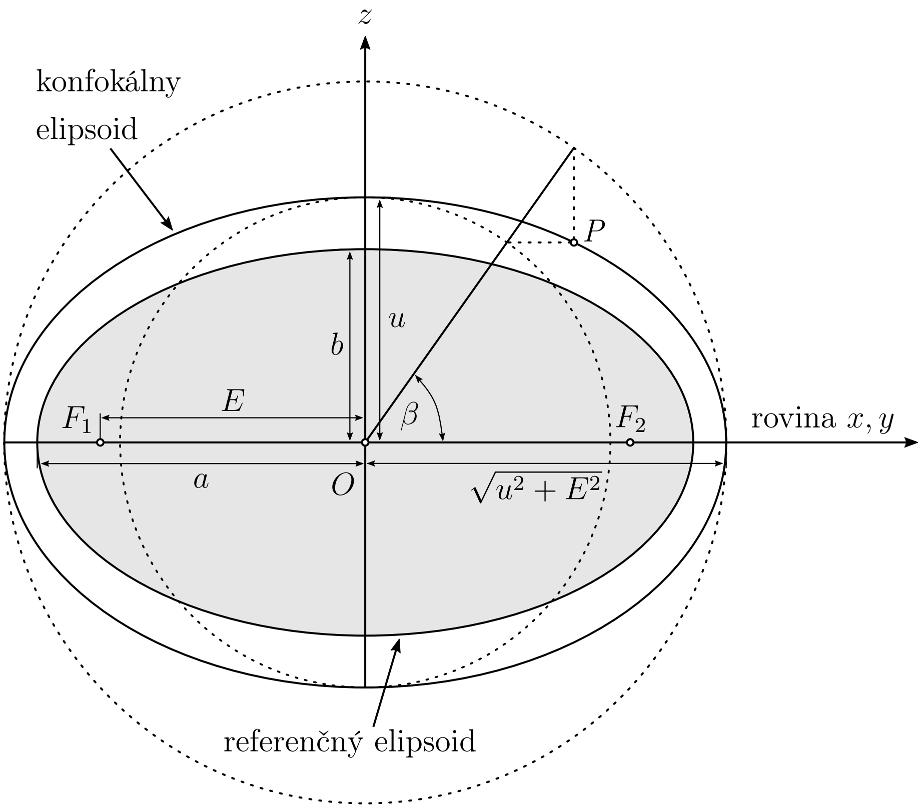
$$E = \sqrt{a^2 - b^2}. \tag{3.1}$$

Polohu ľubovoľného bodu P, ktorý sa nachádza na referenčnom elipsoide alebo nad ním, možno vyjadriť pomocou redukovaných elipsoidických súradníc u, β, λ (obrázok 3.2). Symbol u označuje malú polos konfokálneho elipsoidu, ktorý prechádza bodom P. *Konfokálny elipsoid* je taký elipsoid, ktorý má rovnakú lineárnu excentricitu E ako referenčný elipsoid. Ak sa bod P nachádza na referenčnom elipsoide, potom $u = b$. Symbol β predstavuje redukovanú elipsoidickú šírku. Redukovaná elipsoidická dĺžka λ je definovaná rovnako ako sférická dĺžka λ (pozri obrázok 1.9).

Jednoduchým spôsobom možno overiť, že medzi redukovanými elipsoidickými súradnicami a karteziánskymi súradnicami platia vzťahy (obrázok 3.2)

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{u^2 + E^2}\,\cos\beta\,\cos\lambda, \\ y &= \sqrt{u^2 + E^2}\,\cos\beta\,\sin\lambda, \\ z &= u\,\sin\beta, \end{aligned} \tag{3.2}$$

kde $\sqrt{u^2 + E^2}$ je dĺžka hlavnej polosi konfokálneho elipsoidu. Ak $E = 0$, teda ak referenčný elipsoid nie je sploštený, potom vzťahy (3.2) majú rovnaký tvar ako transformácia sférických súradníc na karteziánske súradnice (1.37). Pre transformáciu karteziánskych súradníc x, y, z na redukované elipsoidické súradnice u, β, λ pozri napríklad Hofmann-Wellenhof a Moritz (2005).



Obrázok 3.2. Redukované elipsoidické súradnice u a β bodu P vyjadrené pomocou referenčného elipsoidu s hlavnou polosou a a vedľajšou polosou b.

3.2 Laplaceova rovnica v redukovaných elipsoidických súradniciach

Z podobných dôvodov ako v kapitole 1.2.3 potrebujeme vyjadriť operátor gradient a Laplaceov operátor aj v systéme redukovaných elipsoidických súradníc. Príslušné vzťahy nájdeme postupom uvedeným v prílohách B.2 a C.2.

V súlade s prílohou B.2 definujme vektory (pozri vzťah B.14)

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_1^{\mathrm{r}} &= \frac{\partial \mathbf{r}(\beta, \lambda, u)}{\partial \beta}, \\ \hat{\mathbf{e}}_2^{\mathrm{r}} &= \frac{\partial \mathbf{r}(\beta, \lambda, u)}{\partial \lambda}, \\ \hat{\mathbf{e}}_3^{\mathrm{r}} &= \frac{\partial \mathbf{r}(\beta, \lambda, u)}{\partial u}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

kde

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x(\beta, \lambda, u) \\ y(\beta, \lambda, u) \\ z(\beta, u) \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

Funkcie $x(\beta, \lambda, u)$, $y(\beta, \lambda, u)$, $z(\beta, u)$ sú dané vzťahmi (3.2). Začiatok a smery vektorov $\hat{\mathbf{e}}_i^{\mathrm{r}}$, $i = 1, 2, 3$, definujú lokálny karteziánsky súradnicový systém $x^{\mathrm{r}}, y^{\mathrm{r}}, z^{\mathrm{r}}$ s pohyblivým začiatkom v bode P. Os z^{r} je daná smerom vonkajšej normály ku konfokálnemu elipsoidu v bode P. Os x^{r} leží v dotykovej rovine ku konfokálnemu elipsoidu a smeruje na sever. Os y^{r} dotvára pravouhlý *ľavotočivý* súradnicový systém. Pomocou rovníc (3.2) a (3.3) možno jednoducho ukázať, že pre $\|\hat{\mathbf{e}}_i^{\mathrm{r}}\|$, $i = 1, 2, 3$, platí

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathbf{e}}_1^{\mathrm{r}}\| &= \sqrt{u^2 + E^2 \sin^2\beta}, \\ \|\hat{\mathbf{e}}_2^{\mathrm{r}}\| &= \sqrt{u^2 + E^2}\,\cos\beta, \\ \|\hat{\mathbf{e}}_3^{\mathrm{r}}\| &= \sqrt{\frac{u^2 + E^2 \sin^2\beta}{u^2 + E^2}}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Kombináciou rovníc (B.13) a (3.5) získame operátor gradient v redukovaných elipsoidických súradniciach,

$$\begin{aligned} \nabla f = \mathrm{grad} f &= \mathbf{e}_1^{\mathrm{r}} \frac{1}{\sqrt{u^2 + E^2 \sin^2\beta}} \frac{\partial f}{\partial \beta} + \mathbf{e}_2^{\mathrm{r}} \frac{1}{\sqrt{u^2 + E^2}\,\cos\beta} \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \mathbf{e}_3^{\mathrm{r}} \sqrt{\frac{u^2 + E^2}{u^2 + E^2 \sin^2\beta}} \frac{\partial f}{\partial u} \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{u^2 + E^2 \sin^2\beta}} \dfrac{\partial f}{\partial \beta} \\ \dfrac{1}{\sqrt{u^2 + E^2}\,\cos\beta} \dfrac{\partial f}{\partial \lambda} \\ \sqrt{\dfrac{u^2 + E^2}{u^2 + E^2 \sin^2\beta}} \dfrac{\partial f}{\partial u} \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

kde

$$\mathbf{e}_i^{\mathrm{r}} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_i^{\mathrm{r}}}{\|\hat{\mathbf{e}}_i^{\mathrm{r}}\|}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{3.7}$$

sú jednotkové vektory v smere osí $x^{\mathrm{r}}, y^{\mathrm{r}}, z^{\mathrm{r}}$.

Laplaceovu rovnicu pre gravitačný potenciál dostaneme vzťahmi (3.5) a (C.14) (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005),

$$(u^2 + E^2) \frac{\partial^2 V_{\mathrm{g}}}{\partial u^2} + 2u \frac{\partial V_{\mathrm{g}}}{\partial u} + \frac{\partial^2 V_{\mathrm{g}}}{\partial \beta^2} - \tan\beta \frac{\partial V_{\mathrm{g}}}{\partial \beta} + \frac{u^2 + E^2 \sin^2\beta}{(u^2 + E^2)\cos^2\beta} \frac{\partial^2 V_{\mathrm{g}}}{\partial \lambda^2} = 0. \tag{3.8}$$

3.3 Sféroidické harmonické funkcie

V kapitole 2.2 sme uviedli, že rozvoj gravitačného potenciálu do radu sférických harmonických funkcií (rovnica 2.19) môžeme získať aj riešením Laplaceovej diferenciálnej rovnice vo sférických súradniciach (rovnica 1.40) metódou separácie premenných. Cieľom takéhoto prístupu je nájsť tri funkcie, $f_{\mathrm{s}}(r)$, $g_{\mathrm{s}}(\varphi)$ a $h_{\mathrm{s}}(\lambda)$. Dá sa ukázať, že tieto funkcie majú tvar (porovnaj s rovnicou 2.19)

$$f_{\mathrm{s}}(r) = \frac{1}{r^{n+1}}, \tag{3.9}$$

$$g_{\mathrm{s}}(\varphi) = P_{nm}(\sin\varphi), \tag{3.10}$$

$$h_{\mathrm{s}}(\lambda) = \begin{cases} \cos(m\,\lambda), \\ \sin(m\,\lambda), \end{cases} \tag{3.11}$$

kde $n = 0, 1, 2, \dots$ a $m = 0, 1, \dots, n$.[1]

Jeden z možných spôsobov získania sféroidických harmonických funkcií je práve riešením Laplaceovej diferenciálnej rovnice v redukovaných elipsoidických súradniciach (3.8) metódou separácie premenných. Získame tým funkcie (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005)

$$f_\mathrm{r}(u) = Q_{nm}\left(i\frac{u}{E}\right), \tag{3.12}$$

$$g_\mathrm{r}(\beta) = P_{nm}(\sin\beta), \tag{3.13}$$

$$h_\mathrm{r}(\lambda) = \begin{cases} \cos(m\,\lambda), \\ \sin(m\,\lambda), \end{cases} \tag{3.14}$$

kde $i^2 = -1$ je imaginárna jednotka.[2]

Člen $Q_{nm}\left(i\frac{u}{E}\right)$ v rovnici (3.12) sa nazýva *pridružená Legendreova funkcia druhého druhu*. Pre komplexný argument $z = i\frac{u}{E}$ je definovaná vzťahom (Moritz, 1990)

$$Q_{nm}(z) = (z^2-1)^{m/2}\,\frac{\mathrm{d}^m Q_n(z)}{\mathrm{d}z^m}, \tag{3.15}$$

kde

$$Q_n(z) = Q_{n0}(z) = \frac{1}{2}\,P_n(z)\,\ln\frac{z+1}{z-1} - \sum_{s=1}^{n}\frac{1}{s}\,P_{s-1}(z)\,P_{n-s}(z). \tag{3.16}$$

Pre reálny argument t je definovaná vzťahom[3] (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005)

$$Q_{nm}(t) = (1-t^2)^{m/2}\,\frac{\mathrm{d}^m Q_n(t)}{\mathrm{d}t^m}, \tag{3.17}$$

kde

$$Q_n(t) = Q_{n0}(t) = \frac{1}{2}\,P_n(t)\,\ln\frac{1+t}{1-t} - \sum_{s=1}^{n}\frac{1}{s}\,P_{s-1}(t)\,P_{n-s}(t). \tag{3.18}$$

Rovnica (3.17) je formálne podobná rovnici (2.17). Napriek tomu, v dôsledku rozdielnej definície derivovaných členov $Q_n(t)$ ide o funkcie s odlišným priebehom ako $P_{nm}(t)$. Uveďme pre názornosť explicitné vzťahy na výpočet funkcií $Q_0(t)$, $Q_1(t)$ a $Q_2(t)$ reálneho argumentu t a porovnajme ich s rovnicami (2.24) (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005),

$$Q_0(t) = \frac{1}{2}\,\ln\frac{1+t}{1-t} = \operatorname{arctanh}(t), \tag{3.19}$$

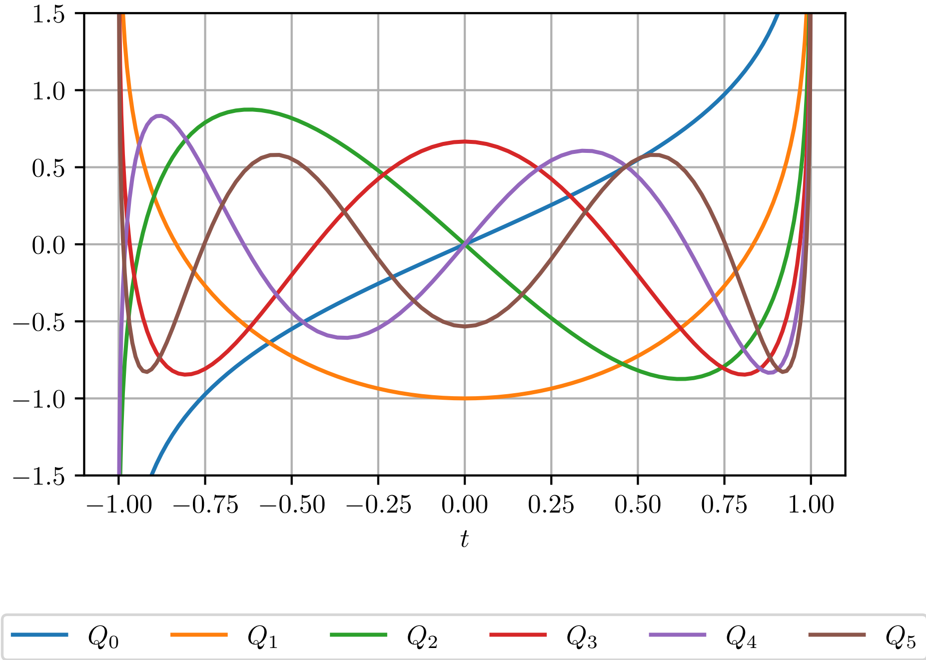
$$Q_1(t) = \frac{t}{2}\,\ln\frac{1+t}{1-t} - 1 = t\operatorname{arctanh}(t) - 1, \tag{3.20}$$

$$Q_2(t) = \left(\frac{3}{4}t^2 - \frac{1}{4}\right)\ln\frac{1+t}{1-t} - \frac{3}{2}t = \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right)\operatorname{arctanh}(t) - \frac{3}{2}t, \tag{3.21}$$

[1] Funkcia $f_\mathrm{s}(r)$ môže mať aj tvar $f_\mathrm{s}(r) = r^n$. Toto riešenie sa využíva na rozvoj *harmonickej* funkcie vo vnútri sféry (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005). Takáto situácia ale nie je predmetom tejto práce. Takisto funkcia $g_\mathrm{s}(\varphi)$ môže mať aj ďalší tvar $Q_{nm}(\sin\varphi)$, ktorý bude diskutovaný neskôr v tejto kapitole.

[2] Podobne ako v rovnici (3.9), funkcia $f_\mathrm{r}(u)$ môže mať ďalší tvar $f_\mathrm{r}(u) = P_{nm}\left(i\frac{u}{E}\right)$, ktorý sa využíva na rozvoj *harmonickej* funkcie vo vnútri referenčného elipsoidu. Druhý možný tvar funkcie $g_\mathrm{r}(\beta)$ z rovnice (3.13) je $Q_{nm}(\sin\beta)$.

[3] V niektorej literatúre sú Legendreove funkcie druhého druhu reálneho argumentu definované aj s použitím Condonovho-Shortleyho fázového faktora $(-1)^m$ (pozri kapitolu 2.4 a napríklad Olver a kol., 2010).



Obrázok 3.3. Legendreove polynómy $Q_n(t)$ druhého druhu reálneho argumentu $t \in (-1, 1)$ pre $n = 0, 1, \ldots, 5$. Z dôvodu singularity nie sú Legendreove polynómy vypočítané pre $t = -1$ a $t = 1$.

kde

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t} = \operatorname{arctanh}(t). \tag{3.22}$$

Zápis arctanh označuje inverznú funkciu k hyperbolickému tangensu tanh, ktorý je daný vzťahom (Gradshteyn a Ryzhik, 2007)

$$\tanh t = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}. \tag{3.23}$$

Funkcie $Q_{nm}(t)$ pre niekoľko prvých stupňov n a rádov m sú znázornené na obrázkoch 3.3 a 3.4 (porovnaj s obrázkami 2.2 a 2.3).

Funkcie $Q_0(z)$, $Q_1(z)$ a $Q_2(z)$ komplexného argumentu z majú tvar

$$Q_0(z) = \frac{1}{2}\ln\frac{z+1}{z-1} = \operatorname{arccoth}(z), \tag{3.24}$$

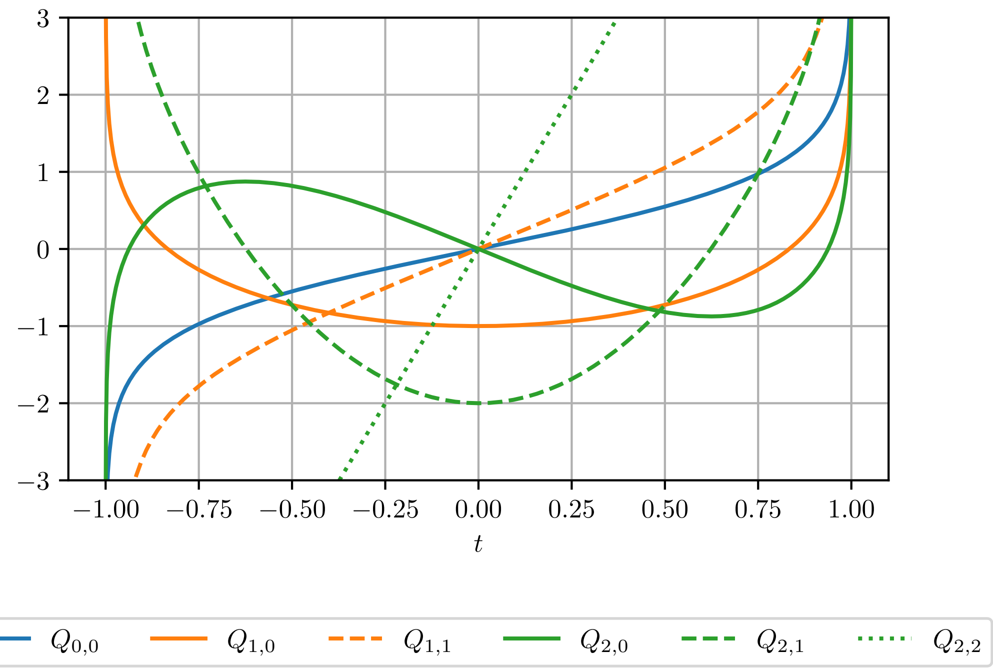
$$Q_1(z) = \frac{z}{2}\ln\frac{z+1}{z-1} - 1 = z\operatorname{arccoth}(z) - 1, \tag{3.25}$$

$$Q_2(z) = \left(\frac{3}{4}z^2 - \frac{1}{4}\right)\ln\frac{z+1}{z-1} - \frac{3}{2}z = \left(\frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{2}\right)\operatorname{arccoth}(z) - \frac{3}{2}z, \tag{3.26}$$

pričom arccoth je inverzná funkcia k hyperbolickému kotangensu coth (Gradshteyn a Ryzhik, 2007),

$$\coth z = \frac{1}{\tanh z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}. \tag{3.27}$$

Pre $Q_n(t)$ platia rovnaké rekurentné vzťahy ako pre $P_n(t)$ (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005). Podobne ako funkcie $P_{nm}(t)$, i funkcie $Q_{nm}(t)$ vyhovujú Legendreovej diferenciálnej rovnici druhého rádu (pozri rovnicu 2.47; Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005).



Obrázok 3.4. Legendreove funkcie druhého druhu $Q_{nm}(t)$ reálneho argumentu $t \in (-1, 1)$ pre $n = 0, 1, 2$ a $m = 0, \ldots, n$. Pre singularitu nie sú funkcie $Q_{nm}(t)$ vypočítané v koncových bodoch $t = -1$ a $t = 1$.

Všimnime si tiež, že pre $t \to \pm 1$, teda pre $\beta \to \pm\frac{\pi}{2}$, sa Legendreove funkcie druhého druhu blížia k $\pm\infty$ (pozri rovnice 3.16 a 3.18 a obrázky 3.3 a 3.4). Túto vlastnosť budeme nazývať *singularita*. Práve pre singularitu sa Legendreove funkcie druhého druhu nepoužívajú v praktických aplikáciách ako riešenie pre funkcie $g_{\mathrm{s}}(\varphi)$ a $g_{\mathrm{r}}(\beta)$ (rovnice 3.10 a 3.13), a to napriek tomu, že sú taktiež riešením Legendreovej diferenciálnej rovnice (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005).

Presný a efektívny numerický výpočet funkcií $Q_{nm}\left(i\frac{u}{E}\right)$ je náročný, obzvlášť pre vysoké stupne a rády. Z dôvodov, ktoré budú ozrejmené v kapitole 3.4, sa v praktických geodetických aplikáciách nezvyknú počítať členy $Q_{nm}\left(i\frac{u}{E}\right)$, ale iba podiely $Q_{nm}\left(i\frac{u}{E}\right) / Q_{nm}\left(i\frac{b}{E}\right)$. Samotný výpočet, či už funkcií $Q_{nm}\left(i\frac{u}{E}\right)$, alebo podielov $Q_{nm}\left(i\frac{u}{E}\right) / Q_{nm}\left(i\frac{b}{E}\right)$, je zvyčajne uskutočňovaný rekurentnými vzťahmi alebo rozvojmi do nekonečných radov (pozri napríklad Sebera a kol., 2012; Fukushima, 2013; Wang a X. Yang, 2013; Šprlák a kol., 2020).

3.4 Rozvoj gravitačného potenciálu do radu sféroidických harmonických funkcií

Gravitačný potenciál v bodoch mimo telesa môže byť rozvinutý do radu sféroidických harmonických funkcií vzťahom (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005)

$$V_{\mathrm{g}}(u,\beta,\lambda) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{Q_{n|k|}\left(i\dfrac{u}{E}\right)}{Q_{n|k|}\left(i\dfrac{b}{E}\right)} \bar{v}^{\mathrm{r}}_{nk}\, \bar{Y}_{nk}(\beta,\lambda), \tag{3.28}$$

kde $\bar{v}^{\mathrm{r}}_{nk}$ sú *úplne normované sféroidické harmonické koeficienty* gravitačného potenciálu. Rovnica (3.28) je lineárnou kombináciou funkcií (3.12), (3.13) a (3.14) (pozri tiež vzťah 2.64), ktoré boli získané riešením Laplaceovej diferenciálnej rovnice v redukovaných elipsoidických súradniciach metódou separácie premenných. Formálne je podobná vzťahu (2.74). Môže byť tiež jednoducho prepísaná do tvaru, ktorý využíva index $m = 0, 1, \ldots, n$ (porovnaj rovnice 2.73 a 2.74), či do radu nenormovaných sféroidických harmonických funkcií, podobne ako je to v rovniciach (2.19) a (2.71),

$$V_{\mathrm{g}}(u,\beta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{Q_{nm}\left(i\dfrac{u}{E}\right)}{Q_{nm}\left(i\dfrac{b}{E}\right)} \left(C^{\mathrm{r}}_{nm} \cos(m\lambda) + S^{\mathrm{r}}_{nm} \sin(m\lambda)\right) P_{nm}(\sin\beta). \tag{3.29}$$

Funkcia $Q_{n|k|}\left(i\frac{u}{E}\right)$ zo vzťahu (3.12) je komplexná funkcia. Vo sféroidických harmonických rozvojoch (3.28) a (3.29) je preto vydelená funkciou $Q_{n|k|}\left(i\frac{b}{E}\right)$ tak, aby výsledný podiel bol reálne číslo. Tým je zabezpečené, že i sféroidické harmonické koeficienty sú reálne čísla. Všimnime si tiež, že pred prvou sumáciou vo vzťahu (3.29) sa nenachádza Newtonova gravitačná konštanta G tak, ako je to vo vzťahu (2.19). Ide len o konvenciu, konštanta G je tým pádom obsiahnutá vo sféroidických harmonických koeficientoch C^{r}_{nm} a S^{r}_{nm}. Rovnice (3.28) a (3.29) konvergujú vo vonkajšom priestore elipsoidu konvergencie (pozri obrázok 3.1). Na povrchu elipsoidu konvergencie a/alebo v jeho vnútri konvergencia zaručená nie je.

Podiel $Q_{n|k|}\left(i\frac{u}{E}\right)/Q_{n|k|}\left(i\frac{b}{E}\right)$ v rovnici (3.28) má podobnú úlohu, akú má člen $\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}$ vo vzťahu (2.74), teda umožniť výpočet gravitačného potenciálu aj nad referenčným elipsoidom (v prípade sférického harmonického rozvoja nad referenčnou sférou s polomerom R). V súvislosti s rovnicou (3.2) sme uviedli, že pre $E = 0$ sú redukované elipsoidické súradnice u, β, λ totožné so sférickými súradnicami r, φ, λ. Pre $E \to 0$ tiež platí vzťah (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005)

$$\lim_{E\to 0} \frac{Q_{n|k|}\left(i\dfrac{u}{E}\right)}{Q_{n|k|}\left(i\dfrac{b}{E}\right)} = \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}. \tag{3.30}$$

Sférický harmonický rozvoj (2.74) preto možno považovať za špeciálny prípad zovšeobecneného sféroidického harmonického rozvoja (3.28).

Na záver dodajme, že Laplaceovu rovnicu možno riešiť aj v súradnicovom systéme, ktorý je vztiahnutý k trojosovému elipsoidu s polosami a, b, c. Získame tým rozvoj gravitačného potenciálu do radu elipsoidických harmonických funkcií (napríklad Garmier a Barriot, 2001; Hu a Jekeli, 2015; Reimond a Baur, 2016). Tento prístup je zložitejší ako sférické a sféroidické harmonické rozvoje a vo fyzikálnej geodézii sa využíva zriedkavo. Uplatnenie má najmä pri modelovaní gravitačného poľa v blízkosti asteroidov, ktoré majú komplikovaný tvar.

Kapitola 4

Normálne tiažové pole

Tvar Zeme v podobe *geometrickej* výšky nad zvolenou referenčnou plochou možno určiť geometrickými metódami, napríklad fotogrametriou, družicovou radarovou interferometriou či leteckým laserovým skenovaním (pozri napríklad Hirt, 2014). Na určenie *fyzikálnych* výšok je potrebné uvážiť nielen geometrickú, ale aj fyzikálnu časť výšky (kapitola 1.5). Fyzikálna geodézia preto určuje tvar Zeme z informácie o jej tiažovom poli, napríklad z tiažového potenciálu a z tiažového zrýchlenia na povrchu Zeme.

Určenie tvaru Zeme z jej tiažového poľa je neľahké, pretože vzťah medzi tiažovým poľom a hľadaným zemským povrchom je nelineárny. Spravidla sa preto pristupuje k linearizácii pomocou rozvoja do Taylorovho radu, pričom členy druhého rádu a vyšších rádov sa zanedbajú. *Normálne tiažové pole Zeme* je jednoduchý a súčasne dostatočne presný model skutočného tiažového poľa Zeme a slúži práve na výpočet približných hodnôt v linearizovaných úlohách fyzikálnej geodézie. Požiadavka jednoduchosti je odôvodnená potrebou prijateľne náročných výpočtov v normálnom poli, napríklad pomocou uzavretých vzťahov pre *normálne tiažové zrýchlenie* $\boldsymbol{\gamma}$ či *normálny tiažový potenciál* U. Dostatočná presnosť je potrebná nato, aby nelineárne členy Taylorovho rozvoja mohli byť s rozumnou mierou aproximácie zanedbané. Požiadavky jednoduchosti a presnosti si vzájomne odporujú, preto je potrebné nájsť medzi nimi vhodný kompromis.

Povedané inak, normálne tiažové pole Zeme umožňuje redukciu veličín skutočného tiažového poľa Zeme o približné hodnoty (napríklad skutočné tiažové zrýchlenie $\mathbf{g}$ zredukujeme o normálne tiažové zrýchlenie $\boldsymbol{\gamma}$). Získame tým rozličné reziduálne veličiny, ktoré majú praktické využitie nielen v geodézii, ale aj v mnohých iných geovedných disciplínach. Príkladom je geofyzika, ktorá využíva normálne tiažové pole Zeme okrem iného na štúdium hustotných kontrastov pod zemským povrchom. Veličiny, ktoré získame po redukcii skutočného tiažového poľa o normálne tiažové pole, budú popísané v kapitole 5. V tejto kapitole predstavíme koncept normálneho poľa.

4.1 Voľba normálneho tiažového poľa

4.1.1 Homogénna rotujúca guľa

Homogénna rotujúca guľa (kapitola 1.4) je jedno z najjednoduchších telies, ktoré by mohlo generovať normálne tiažové pole Zeme. Táto voľba je však nevhodná z dvoch dôvodov. Prvým je sférický tvar gule, ktorý nereprezentuje sploštený tvar Zeme dostatočne presne. Druhý dôvod je ten, že tiažový potenciál na povrchu homogénnej rotujúcej gule nie je konštantný (kapitola 1.4.3). Homogénna guľa je tu považovaná za tuhé teleso, ktoré v dôsledku vlastnej gravitácie a odstredivej sily nemení svoj tvar (Sansò a Sideris, 2013). Zem ale nie je tuhé teleso (kapitola 1.6), a tak pod vplyvom spomenutých síl mení svoj tvar, pričom sa snaží ustáliť v rovnovážnej polohe. Zmena tvaru zemského telesa v dôsledku vlastnej gravitácie a odstredivej sily je jednoducho predstaviteľná pre tekutú časť zemského povrchu. Tá má tendenciu ustáliť sa v rovnovážnej polohe, ktorou je plocha s konštantnou hodnotou skutočného tiažového potenciálu, teda geoid. Je preto vhodné požadovať od normálneho tiažového poľa, aby jeho referenčná plocha, ktorá aproximuje geoid nielen geometricky, ale aj fyzikálne, bola súčasne aj ekvipotenciálnou plochou.

Dodajme však, že v niektorých úlohách fyzikálnej geodézie je vplyv normálneho tiažového poľa dostatočné malý na to, aby bolo možné použiť *gravitačné* pole *nerotujúcej* homogénnej gule (Sansò a Sideris, 2013), ktorá má na svojom povrchu konštantný *gravitačný* potenciál (kapitola 1.4.2).

4.1.2 Ekvipotenciálny elipsoid

Ekvipotenciálny elipsoid je dvojosový rotačný elipsoid, ktorý má na svojom povrchu konštantný normálny tiažový potenciál. V súčasnosti je najčastejšou voľbou pre definíciu normálneho tiažového poľa Zeme.

Ekvipotenciálny elipsoid je vhodným praktickým riešením oboch problémov, ktoré sú spojené s normálnym tiažovým poľom homogénnej rotujúcej gule. V prvom rade, dvojosový rotačný elipsoid je vernejšou geometrickou aproximáciou sploštenej Zeme ako sféra, čím ponúka uspokojivejšie riešenie problému tvaru referenčnej plochy. Druhá požiadavka spojená s konštantnou hodnotou normálneho tiažového potenciálu na referenčnej ploche bola vyriešená jednoducho tým, že sme referenčný elipsoid vyhlásili za ekvipotenciálny. Nepotrebovali sme pritom vysloviť žiadny predpoklad o priestorovom rozložení hustôt v ekvipotenciálnom elipsoide. Dôvod je ten, že fyzikálna geodézia sa zaoberá určovaním tvaru a *vonkajšieho* tiažového poľa Zeme a normálne tiažové pole využíva predovšetkým na účely linearizácie. Zdá sa byť preto kľúčové najmä to, aby normálna ekvipotenciálna plocha s normálnym tiažovým potenciálom U_0 bola geometricky blízka geoidu, ďalej, aby normálny tiažový potenciál U_0 bol blízky skutočnému tiažovému potenciálu W_0 na geoide, a nakoniec, aby geometrická aj fyzikálna časť normálneho poľa boli jednoducho matematicky opísateľné. Vhodne definovaný ekvipotenciálny elipsoid spĺňa všetky tieto požiadavky. Pre niektoré príbuzné vedné odbory, napríklad pre geofyziku, je však znalosť hustoty v normálnom telese potrebná (Karcol a kol., 2017). V takýchto situáciách nemusí byť voľba ekvipotenciálneho elipsoidu tá najvýhodnejšia. Diskusia k možnostiam priestorového rozloženia hustoty vo vnútri ekvipotenciálneho elipsoidu sa nachádza napríklad v prácach Moritz (1990), Conway (2000), Torge a Müller (2012) a Karcol a kol. (2017).

Inými slovami, ani homogénna rotujúca guľa, ani ekvipotenciálny elipsoid nie sú ideálne riešenia, ktoré by boli fyzikálne odôvodniteľné. Z hľadiska fyzikálnej geodézie je však veľkou prednosťou ekvipotenciálneho elipsoidu skutočnosť, že ponúka dostatočne dobré praktické riešenie v zásade pre všetky súčasné úlohy fyzikálnej geodézie. V konečnom dôsledku, aj Newtonov gravitačný zákon je nesprávny a je iba priblížením skutočnosti (pozri úvodnú kapitolu). Mnohé úlohy fyzikálnej geodézie ale umožňuje riešiť dostatočne presne a relatívne jednoducho, preto ho napriek tomu používame.

Ekvipotenciálny elipsoid má navyše ďalšiu silnú stránku. Pre mnohé úlohy geodézie (napríklad určovanie polohy GNSS metódami) môže vďaka svojmu sploštenému tvaru súčasne plniť aj úlohu geometrického referenčného systému. Tým sa opäť prepája geometrická a fyzikálna zložka geodézie, ktoré sú potrebné na určovanie polohy aj na určovanie tiažového poľa (pozri kapitolu 1.3.2).

4.1.3 Sféroid

Ďalšou možnosťou voľby normálneho tiažového poľa je sférický harmonický rozvoj gravitačného potenciálu do vopred zvoleného konečného harmonického stupňa (rovnice 2.19, 2.71, 2.73 a 2.74). Plocha, na ktorej je takto definovaný normálny tiažový potenciál konštantný, sa nazýva *sféroid*.[1] Obmedzením rozvoja potenciálu na stupeň 2 získame *Brunsov sféroid* a obmedzením na stupeň 4 získame *Helmertov sféroid* (Heiskanen a Moritz, 1967). Oba sféroidy majú koeficienty stupňa 1 nulové, pretože začiatok súradnicového systému je vložený do geometrického stredu ekvipotenciálneho elipsoidu (pozri kapitolu 2.7). Helmertov sféroid má nulové navyše aj koeficienty stupňa 3, aby bola zabezpečená symetria normálneho poľa voči rovine rovníka (pozri geometrickú interpretáciu sférických harmonických funkcií v kapitole 2.5). V súčasnosti sa Brunsov ani Helmertov sféroid nezvyknú používať. Obe plochy sú totiž veľmi blízke dvojosovému rotačnému elipsoidu a dodatočná presnosť je získaná za cenu výrazne náročnejšieho matematického popisu oboch plôch. To odporuje požiadavke jednoduchosti z kapitoly 4. Navyše, dodatočná presnosť, ktorú získame použitím Brunsovho alebo Helmertovho sféroidu, zväčša nie je významná (Heiskanen a Moritz, 1967).

[1] V kapitole 3 sme za sféroid považovali dvojosový elipsoid. Ten je špeciálnym prípadom všeobecnejšie chápaného pojmu *sféroid* z tejto kapitoly.

4.2 Ekvipotenciálny elipsoid

Nech teleso s hmotnosťou M rotuje okolo pevnej osi konštantnou uhlovou rýchlosťou rotácie ω. Nech S je ekvipotenciálna plocha jeho tiažového poľa, ktorá obklopuje celé teleso. *Stokesov-Poincarého* teorém hovorí, že tiažový potenciál vo vonkajšom priestore plochy S je jednoznačne určený konštantami M a ω a parametrami, ktoré definujú plochu S (Torge a Müller, 2012). G. G. Stokes (1819 až 1903) bol írsko-anglický matematik a fyzik, ktorý významne prispel do viacerých vedných odvetví, napríklad do mechaniky tekutín (Navierova-Stokesova rovnica) či do optiky (polarizácia svetla). H. Poincaré (1854 až 1912) bol francúzsky matematik a teoretický fyzik. V geodézii je známy napríklad pre redukciu tiažového zrýchlenia z povrchu Zeme dovnútra Zeme (pozri kapitolu 1.5.2).

Na jednoznačné definovanie ekvipotenciálneho elipsoidu a jeho vonkajšieho tiažového poľa teda postačuje definovať štyri nezávislé *základné parametre*. Dva z týchto parametrov sú geometrické, resp. veľmi úzko súvisia s geometriou elipsoidu (napríklad hlavná polos a sploštenie elipsoidu), a dva parametre sú fyzikálne (hmotnosť a uhlová rýchlosť rotácie). Všetky ostatné parametre normálneho tiažového poľa sú počítané z týchto základných parametrov, či už ide o geometrické parametre (napríklad vedľajšia polos či lineárna excentricita elipsoidu), alebo o fyzikálne veličiny (normálny tiažový potenciál, normálne tiažové zrýchlenie a pod.). Parametre, ktoré sú vypočítané zo základných parametrov, budeme nazývať *odvodené parametre*. Teóriu ekvipotenciálneho elipsoidu rozpracovali taliansky geodet, astronóm, geofyzik a matematik P. Pizzetti (1860 až 1918) a taliansky matematik a matematický fyzik C. Somigliana (1860 až 1955) v prácach Pizzetti (1894) a Somigliana (1929).

Základné parametre ekvipotenciálnych elipsoidov sú v súčasnosti určované spravidla družicovými technikami a astronomickými meraniami. Historický prehľad geodetických referenčných systémov a spôsobov ich určenia je dostupný napríklad v prácach Torge a Müller (2012) a Hofmann-Wellenhof a Moritz (2005). Na nasledujúcich stranách najprv popíšeme dva najpoužívanejšie ekvipotenciálne elipsoidy (kapitoly 4.2.1 a 4.2.2). Potom odvodíme vzťahy na výpočet normálneho tiažového potenciálu pomocou rozvoja do radu sféroidických a sférických harmonických funkcií (kapitola 4.3). Na záver opíšeme spôsob výpočtu normálneho tiažového zrýchlenia (kapitola 4.4). Tieto poznatky budú dôležité neskôr v kapitole 6, ktorá sa zaoberá určovaním geoidu. Po celý čas je pritom vhodné mať na pamäti, že normálne tiažové pole Zeme je matematicko-fyzikálny model, ktorý je definovaný niekoľkými základnými parametrami. Všetky ostatné parametre, či už geometrické, alebo fyzikálne, sú odvodené zo základných parametrov. S výnimkou základných parametrov sa teda všetky veličiny normálneho tiažového poľa získavajú výpočtom, nie meraním, ako je to v prípade *skutočného* tiažového poľa Zeme.

4.2.1 Ekvipotenciálny elipsoid GRS80

Jednu z možných štvoríc základných parametrov ekvipotenciálneho elipsoidu tvorí

- hlavná polos a,
- dynamický koeficient $J_{2,0}$,
- geocentrická gravitačná konštanta GM a
- uhlová rýchlosť rotácie ω.

Týmito základnými parametrami je definovaný ekvipotenciálny elipsoid *GRS80* (angl. *Geodetic Reference System 1980*; Moritz, 2000). Základné parametre GRS80 (tabuľka 4.1) boli prijaté Medzinárodnou úniou geodézie a geofyziky (angl. *International Union of Geodesy and Geophysics*, IUGG) a Medzinárodnou asociáciou geodézie IAG na 17. generálnom zasadnutí IUGG v Canberra v decembri 1979.

Všimnime si, že medzi základnými parametrami sa nachádza geocentrická gravitačná konštanta GM a nie hmotnosť Zeme M, ktorá je podľa Stokesovho-Poincarého teorému postačujúca na jednoznačné definovanie tiažového potenciálu vo vonkajšom priestore ekvipotenciálneho elipsoidu (kapitola 4.2). Dôvod je ten, že konštantu GM dokážeme určiť presnejšie ako konštantu M (pozri kapitolu 1.4.2). Spomeňme tiež, že hodnota konštanty GM z tabuľky 4.1 zahŕňa hmotnosť Zeme aj hmotnosť zemskej atmosféry a koeficient $J_{2,0}$ nezahŕňa účinok permanentnej slapovej deformácie Zeme. Medzi koeficientmi $J_{2,0}$ (tabuľka 4.1), $C_{2,0}$ (rovnica 2.19) a $\bar{C}_{2,0}$ (rovnica 2.73) platia nasledujúce vzťahy (Heiskanen a Moritz, 1967; Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005),

$$C_{2,0} = -J_{2,0}, \tag{4.1}$$

$$\bar{C}_{2,0} = \frac{C_{2,0}}{\sqrt{5}} = -\frac{J_{2,0}}{\sqrt{5}}. \tag{4.2}$$

Tabuľka 4.2 uvádza číselné hodnoty niektorých odvodených geometrických a fyzikálnych parametrov ekvipotenciálneho elipsoidu GRS80. Medzi geometrické parametre sme zahrnuli okrem iných prvú numerickú excentricitu (vzťah 1.111), *druhú numerickú excentricitu*

$$e' = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \tag{4.3}$$

Tabuľka 4.1. Základné parametre ekvipotenciálneho elipsoidu GRS80 (Moritz, 2000).

Označenie	Hodnota	Jednotka	Popis
a	6 378 137	m	Hlavná polos
$J_{2,0}$	$108\,263 \times 10^{-8}$	Bezrozmerné	Dynamický faktor
GM	$3\,986\,005 \times 10^{8}$	$\mathrm{m^3\ s^{-2}}$	Geocentrická gravitačná konštanta
ω	$7\,292\,115 \times 10^{-11}$	$\mathrm{rad\ s^{-1}}$	Uhlová rýchlosť rotácie

Tabuľka 4.2. Vybrané odvodené parametre ekvipotenciálneho elipsoidu GRS80 (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005).

Typ parametra	Symbol	Hodnota	Jednotka	Popis
Geometrický	b	6 356 752.3141	m	Vedľajšia polos
	E	521 854.0097	m	Lineárna excentricita
	e^2	0.00669438002290	Bezrozmerné	Druhá mocnina prvej numerickej excentricity
	$(e')^2$	0.00673949677548	Bezrozmerné	Druhá mocnina druhej numerickej excentricity
	f	0.00335281068118	Bezrozmerné	Sploštenie
Fyzikálny	U_0	62 636 860.850	$m^2\ s^{-2}$	Normálny tiažový potenciál na elipsoide
	γ_a	9.7803267715	$m\ s^{-2}$	Normálne tiažové zrýchlenie na rovníku
	γ_b	9.8321863685	$m\ s^{-2}$	Normálne tiažové zrýchlenie na póle
	m	0.00344978600308	Bezrozmerné	Pomocná konštanta, $m = \omega^2 a^2 b/(GM)$

a *sploštenie*

$$f = \frac{a-b}{a}. \tag{4.4}$$

Vzťahy na výpočet odvodených fyzikálnych parametrov z tabuľky 4.2 budú uvedené neskôr.

Elipsoid GRS80 je oficiálny referenčný systém Medzinárodnej asociácie geodézie.

4.2.2 Ekvipotenciálny elipsoid WGS84

Ďalšou možnosťou definície ekvipotenciálneho elipsoidu je použiť sploštenie f (rovnica 4.4) namiesto koeficientu $J_{2,0}$. Týmto spôsobom je definovaný ekvipotenciálny elipsoid *WGS84* (angl. *World Geodetic System 1984*; National Imagery and Mapping Agency, 2000), ktorý vychádza z ekvipotenciálneho elipsoidu GRS80. Základné a vybrané odvodené parametre ekvipotenciálneho elipsoidu WGS84 sú uvedené v tabuľkách 4.3 a 4.4.

Z hľadiska tvaru sú oba elipsoidy podobné; dĺžka ich hlavnej polosi je 6 378 137 m a dĺžka vedľajšej polosi, vypočítaná zo základných parametrov, sa odlišuje iba o desatinu milimetra (porovnaj tabuľky 4.2 a 4.4). Z fyzikálneho hľadiska je už medzi elipsoidmi väčší rozdiel. Uhlová rýchlosť rotácie oboch elipsoidov je síce rovnaká, no odlišné hodnoty geocentrických gravitačných konštánt spôsobujú rozdielny normálny tiažový potenciál na elipsoide. Rozdiel medzi hodnotami normálneho tiažového potenciálu na elipsoide je približne o 5 rádov väčší ako v súčasnosti dosiahnuteľná presnosť určenia rozdielu skutočného

Tabuľka 4.3. Základné parametre ekvipotenciálneho elipsoidu WGS84 (National Imagery and Mapping Agency, 2000).

Označenie	Hodnota	Jednotka	Popis
a	6 378 137	m	Hlavná polos
$1/f$	298.257223563	Bezrozmerné	Prevrátená hodnota sploštenia
GM	$3\,986\,004.418 \times 10^8$	$\mathrm{m}^3\ \mathrm{s}^{-2}$	Geocentrická gravitačná konštanta
ω	$7\,292\,115 \times 10^{-11}$	rad s^{-1}	Uhlová rýchlosť rotácie

Tabuľka 4.4. Vybrané odvodené parametre ekvipotenciálneho elipsoidu WGS84 (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005).

Typ parametra	Symbol	Hodnota	Jednotka	Popis
Geometrický	b	6 356 752.3142	m	Vedľajšia polos
	E	521 854.0084	m	Lineárna excentricita
	e^2	0.00669437999014	Bezrozmerné	Druhá mocnina prvej numerickej excentricity
	$(e')^2$	0.00673949674228	Bezrozmerné	Druhá mocnina druhej numerickej excentricity
	$J_{2,0}$	$108262.982131 \times 10^{-8}$	Bezrozmerné	Dynamický faktor
Fyzikálny	U_0	62 636 851.715	$\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-2}$	Normálny tiažový potenciál na elipsoide
	γ_a	9.7803253359	$\mathrm{m\,s}^{-2}$	Normálne tiažové zrýchlenie na rovníku
	γ_b	9.8321849378	$\mathrm{m\,s}^{-2}$	Normálne tiažové zrýchlenie na póle
	m	0.00344978650684	Bezrozmerné	Pomocná konštanta, $m = \omega^2\, a^2\, b/(GM)$

tiažového potenciálu medzi dvoma bodmi, ktoré sú od seba vzdialené niekoľko kilometrov (pozri kapitolu 1.5.1).

4.3 Normálny tiažový potenciál

V mnohých situáciách, hoci rozhodne nie v každej situácii, sú preferované uzavreté matematické vzťahy pred nekonečnými rozvojmi. Uzavretý vzťah je taký vzťah, ktorý má konečný počet členov. Často umožňuje presnejší a rýchlejší číselný výpočet v porovnaní s jeho nekonečným náprotivkom, pretože ten musí byť vždy obmedzený na vhodne zvolený konečný počet členov. V kapitole 4.3.1 budeme preto hľadať uzavretý vzťah na výpočet normálneho tiažového potenciálu U v bodoch na povrchu ekvipotenciálneho elipsoidu a nad ním. Pracovať budeme v redukovaných elipsoidických súradniciach, ktoré sa prirodzene ponúkajú v súvislosti so splošteným rotačným elipsoidom. V kapitole 4.3.2 potom vyjadríme normálny tiažový potenciál vo sférických súradniciach, tentokrát už ale pomocou nekonečného rozvoja. Kapitola 4.3.1 je spracovaná podľa Moritz (1990).

4.3.1 Normálny tiažový potenciál v redukovaných elipsoidických súradniciach

Vzťah (3.29) popisuje vonkajší gravitačný potenciál všeobecného telesa. Ak k nemu pripočítame odstredivý potenciál, získame vzťah pre tiažový potenciál W všeobecného telesa (pozri rovnicu 1.50). Normálny tiažový potenciál U ekvipotenciálneho elipsoidu je však opísateľný jednoduchším spôsobom ako tiažový potenciál všeobecného telesa. Dôvodom sú dve symetrie normálneho poľa, jedna voči osi rotácie a druhá voči rovine rovníka. Prvá symetria spôsobuje, že všetky nezonálne sféroidické harmonické funkcie v rovnici (3.29) musia byť nulové, pretože závisia od dĺžky λ. Vďaka druhej symetrii sú nenulové iba párne zonálne sféroidické harmonické funkcie (pozri vlastnosti sférických harmonických funkcií v kapitole 2.5). Normálny tiažový potenciál ekvipotenciálneho elipsoidu teda môžeme zapísať v tvare

$$U(u,\beta) = U_{\mathrm{g}}(u,\beta) + U_{\mathrm{c}}(u,\beta), \tag{4.5}$$

pričom normálny gravitačný potenciál $U_{\mathrm{g}}(u,\beta)$ je daný vzťahom (pozri rovnicu 3.29)

$$U_{\mathrm{g}}(u,\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n\left(i\dfrac{u}{E}\right)}{Q_n\left(i\dfrac{b}{E}\right)} C_n^{\mathrm{r}}\, P_n(\sin\beta) \tag{4.6}$$

a normálny odstredivý potenciál $U_{\mathrm{c}}(u,\beta)$ je daný vzťahom (pozri rovnice 1.49 a 3.2)

$$U_{\mathrm{c}}(u,\beta) = \frac{1}{2}\,\omega^2\left(u^2 + E^2\right)\cos^2\beta. \tag{4.7}$$

Pre lepšiu názornosť nasledujúcich krokov sme do vzťahu (4.6) zahrnuli aj nepárne zonálne koeficienty C_n^{r} hoci sú nulové. Dodajme, že normálny gravitačný potenciál vyhovuje Laplaceovej rovnici vo vonkajšom priestore elipsoidu,

$$\nabla^2 U_{\mathrm{g}} = \frac{\partial^2 U_{\mathrm{g}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_{\mathrm{g}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_{\mathrm{g}}}{\partial z^2} = 0. \tag{4.8}$$

Z kapitoly 2 vieme, že ak chceme poznať $U(u,\beta)$ z rovnice (4.5), potom potrebujeme poznať koeficienty C_n^{r}. Zatiaľ čo v prípade skutočného poľa Zeme je potrebné koeficienty C_{nm} a S_{nm} (rovnica 2.19) vypočítať z meraní skutočného poľa (kapitola 2.8.1), koeficienty normálneho poľa C_n^{r} možno vypočítať zo základných parametrov ekvipotenciálneho elipsoidu. Hľadajme preto vzťah medzi sféroidickými harmonickými koeficientmi C_n^{r} a základnými parametrami ekvipotenciálneho elipsoidu.

Nech sa výpočtový bod nachádza na povrchu ekvipotenciálneho elipsoidu, teda $u = b$. Potom

$$\frac{Q_n\left(i\dfrac{u}{E}\right)}{Q_n\left(i\dfrac{b}{E}\right)} = 1, \quad u = b, \tag{4.9}$$

a rovnica (4.5) prejde do tvaru

$$U(b,\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\mathrm{r}}\, P_n(\sin\beta) + \frac{1}{2}\,\omega^2\,(b^2 + E^2)\,\cos^2\beta = U_0. \tag{4.10}$$

Rovnica (4.10) je formálne podobná vzťahu (2.25), avšak s dvoma rozdielmi. Po prvé, na ľavej strane rovnice nie je funkcia $f(t)$, ktorá by závisela od $t = \sin\beta$, ale konštanta $U(b,\beta) = U_0$ (normálny tiažový potenciál na ekvipotenciálnom elipsoide je z definície konštantný, pozri kapitolu 4.2). Po druhé, prostredná časť rovnice obsahuje člen $\cos^2\beta$, ktorý, podobne ako Legendreove polynómy $P_n(\sin\beta)$, závisí od $\sin\beta$, pretože $\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta$. Pomocou vzťahov (rovnica 3.1)

$$a^2 = b^2 + E^2 \tag{4.11}$$

a (rovnica 2.24)

$$P_2(\sin\beta) = \frac{3}{2}\,\sin^2\beta - \frac{1}{2} \tag{4.12}$$

preto prepíšme rovnicu (4.10) do tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\mathrm{r}}\, P_n(\sin\beta) + \frac{1}{3}\,\omega^2\,a^2 - \frac{1}{3}\,\omega^2\,a^2\,P_2(\sin\beta) - U_0 = 0. \tag{4.13}$$

Keďže $P_0(\sin\beta) = 1$ (rovnica 2.24), vzťah (4.13) môžeme ďalej upraviť do tvaru

$$\begin{aligned}&\left(C_0^{\mathrm{r}} + \frac{1}{3}\,\omega^2\,a^2 - U_0\right)\,P_0(\sin\beta) + C_1^{\mathrm{r}}\,P_1(\sin\beta) + \left(C_2^{\mathrm{r}} - \frac{1}{3}\,\omega^2\,a^2\right)\,P_2(\sin\beta)\\ &+ \sum_{n=3}^{\infty} C_n^{\mathrm{r}}\,P_n(\sin\beta) = 0.\end{aligned} \tag{4.14}$$

Tento vzťah predstavuje rozvoj podobný vzťahu (2.25), pričom členy pred jednotlivými Legendreovými polynómami sú súradnice konštantnej funkcie 0, ktorá sa nachádza na pravej strane rovnice (pozri diskusiu o súradniciach ku vzťahom 2.2, 2.25 a 2.61). Podobne ako rovnosť (pozri vzťah 2.2)

$$\sum_{i=1}^{3} r_i\,\mathbf{e}_i = \mathbf{0} \tag{4.15}$$

platí vtedy a iba vtedy, ak $r_i = 0$ pre všetky i, podobne aj vzťah (4.14) platí vtedy a iba vtedy, ak

$$\begin{aligned}C_0^{\mathrm{r}} + \frac{1}{3}\,\omega^2\,a^2 - U_0 &= 0,\\ C_1^{\mathrm{r}} &= 0,\\ C_2^{\mathrm{r}} - \frac{1}{3}\,\omega^2\,a^2 &= 0,\\ C_n^{\mathrm{r}} &= 0 \quad \text{pre} \quad n \geq 3.\end{aligned} \tag{4.16}$$

Z toho ale vyplýva, že

$$\begin{aligned} C_0^{\mathrm{r}} &= U_0 - \frac{1}{3}\,\omega^2\,a^2, \\ C_1^{\mathrm{r}} &= 0, \\ C_2^{\mathrm{r}} &= \frac{1}{3}\,\omega^2\,a^2, \\ C_n^{\mathrm{r}} &= 0 \quad \text{pre} \quad n \geq 3. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Dosadením (4.17) do (4.6) tak získame vzťah pre normálny gravitačný potenciál,

$$U_{\mathrm{g}}(u,\beta) = \left(U_0 - \frac{1}{3}\,\omega^2\,a^2\right)\,\frac{Q_0\left(i\dfrac{u}{E}\right)}{Q_0\left(i\dfrac{b}{E}\right)} + \frac{1}{3}\,\omega^2\,a^2\,\frac{Q_2\left(i\dfrac{u}{E}\right)}{Q_2\left(i\dfrac{b}{E}\right)}\,P_2(\sin\beta). \tag{4.18}$$

Všimnime si niektoré dôležité vlastnosti rovnice (4.18). Vzťahy pre $Q_0(z)$ a $Q_2(z)$ komplexného argumentu z sú konečné (pozri kapitolu 3.3). Dosadením (4.18) do (4.5) preto získame normálny tiažový potenciál vyjadrený pomocou konečného počtu členov, čo bol cieľ vytýčený na začiatku kapitoly. Ďalšia dôležitá vlastnosť je tá, že vzťah (4.18) platí nielen na elipsoide pre $u = b$, ale kdekoľvek na povrchu ekvipotenciálneho elipsoidu a v jeho vonkajšom priestore pre $u \geq b$.

Pokúsme sa teraz vyjadriť normálny gravitačný potenciál U_{g} z rovnice (4.18) pomocou základných parametrov ekvipotenciálneho elipsoidu a, b, GM a ω. V rovnici (4.18) totiž vystupuje normálny tiažový potenciál na elipsoide U_0, ktorý zvyčajne nepatrí medzi základné parametre ekvipotenciálneho elipsoidu (hoci aj takýto prístup existuje, pozri napríklad Torge a Müller, 2012).

Z kapitoly 3.4 vieme, že podiely Legendreových funkcií druhého druhu sú reálne čísla. Vyjadrime preto vzťah (4.18) v obore reálnych čísel. Keď uvážime vzťah (Heiskanen a Moritz, 1967)

$$\operatorname{arccoth}(i\,x) = \frac{1}{i}\operatorname{arccot} x = -i\,\arctan\frac{1}{x}, \tag{4.19}$$

potom Q_0 a Q_2 komplexného argumentu $i\frac{u}{E}$ z rovnice (4.18) môžeme prepísať do tvaru (pozri rovnice 3.24 a 3.26)

$$Q_0\left(i\,\frac{u}{E}\right) = -i\,\arctan\frac{E}{u}, \tag{4.20}$$

$$Q_2\left(i\,\frac{u}{E}\right) = \frac{i}{2}\left[\left(1 + 3\frac{u^2}{E^2}\right)\,\arctan\frac{E}{u} - 3\,\frac{u}{E}\right]. \tag{4.21}$$

Rovnicu (4.18) môžeme preto zapísať v obore reálnych čísel nasledujúcim spôsobom,

$$U_{\mathrm{g}}(u,\beta) = \left(U_0 - \frac{1}{3}\,\omega^2\,a^2\right)\,\frac{\arctan\dfrac{E}{u}}{\arctan\dfrac{E}{b}} + \frac{1}{3}\,\omega^2\,a^2\,\frac{q}{q_0}\,P_2(\sin\beta), \tag{4.22}$$

kde

$$q = \frac{1}{2}\left[\left(1 + 3\frac{u^2}{E^2}\right) \arctan\frac{E}{u} - 3\,\frac{u}{E}\right], \tag{4.23}$$

$$q_0 = \frac{1}{2}\left[\left(1 + 3\frac{b^2}{E^2}\right) \arctan\frac{E}{b} - 3\,\frac{b}{E}\right]. \tag{4.24}$$

Nech sa bod so súradnicami (u, β) nachádza vo veľkej vzdialenosti od ekvipotenciálneho elipsoidu. Vo vzťahoch (4.22) a (4.23) vystupuje funkcia arctan, ktorej argument závisí od súradnice u. Pre ďalšie úpravy je výhodné rozvinúť tieto funkcie do mocninového radu (Gradshteyn a Ryzhik, 2007),

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots, \quad x^2 \leq 1. \tag{4.25}$$

Keďže hodnota u je podľa nášho predpokladu veľmi veľká, po dosadení $x = \frac{E}{u}$ do (4.25) dostaneme vzťah

$$\arctan\frac{E}{u} = \frac{E}{u} + O\left(\frac{1}{u^3}\right). \tag{4.26}$$

Zápis $O\left(\frac{1}{u^3}\right)$ označuje členy tretieho rádu a vyšších rádov rozvoja (4.25).

Pre zjednodušenie ďalšieho odvodenia je dobré uvedomiť si, že ak u v rovnici (4.26) nadobúda veľké hodnoty, potom je jeho hodnota približne rovná sprievodiču r. Toto tvrdenie dokážeme nasledujúcim spôsobom. Z rovníc (3.2) vieme, že

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + E^2 \cos^2\beta, \tag{4.27}$$

a teda

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{E^2}{r^2}\cos^2\beta\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{4.28}$$

Rozvinutím zátvorky na pravej strane rovnice (4.28) spolu s jej exponentom do binomického rozvoja (pozri napríklad Gradshteyn a Ryzhik, 2007)

$$(1 + x)^q = 1 + q\,x + \frac{q\,(q-1)}{2!}\,x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{q}{k}x^k, \quad |x| < 1, \tag{4.29}$$

získame vzťah

$$\left[1 + \left(-\frac{E^2}{r^2}\cos^2\beta\right)\right]^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{E^2}{r^2}\cos^2\beta + \frac{3}{8}\,\frac{E^4}{r^4}\cos^4\beta + \ldots, \quad \left|-\frac{E^2}{r^2}\cos^2\beta\right| < 1. \tag{4.30}$$

Z rovníc (4.30) a (4.28) vidíme, že pre veľké hodnoty u a r platí

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{r} + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \tag{4.31}$$

a teda (rovnice 4.26 a 4.31)

$$\arctan\frac{E}{u} = \frac{E}{r} + O\left(\frac{1}{r^3}\right). \tag{4.32}$$

Skúsme teraz zistiť, či niektorý z dvoch sčítancov v rovnici (4.22) dominuje pre veľké hodnoty u, resp. r a ak áno, tak ktorý člen je ten dominantný. Dosadením rozvoja (4.25) pre $x = \frac{E}{u}$ do prvého sčítanca rovnice (4.22) ihneď vidíme v kombinácii so vzťahom (4.31), že prvý člen je rádu $O\left(\frac{1}{r}\right)$. V druhom sčítanci rovnice (4.22) vystupuje premenná u iba vo funkcii q, preto postačuje vyšetriť funkciu q. Pomocou rozvoja (4.25) a rovníc (4.23) a (4.31) sa môžeme jednoducho presvedčiť, že druhý člen v rovnici (4.22) je rádu $O\left(\frac{1}{r^3}\right)$,

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{2}\left[\arctan\frac{E}{u} + 3\frac{u^2}{E^2}\left(\frac{E}{u} - \frac{1}{3}\frac{E^3}{u^3} + \frac{1}{5}\frac{E^5}{u^5} - \dots\right) - 3\frac{u}{E}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\arctan\frac{E}{u} + \left(-\frac{E}{u} + \frac{3}{5}\frac{E^3}{u^3} - \dots\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\cancel{\frac{E}{u}} - \frac{1}{3}\frac{E^3}{u^3} + \frac{1}{5}\frac{E^5}{u^5} - \dots\right) + \left(\cancel{-\frac{E}{u}} + \frac{3}{5}\frac{E^3}{u^3} - \dots\right)\right] \\ &= O\left(\frac{1}{u^3}\right) = O\left(\frac{1}{r^3}\right). \end{aligned} \tag{4.33}$$

V rovnici (4.22) preto dominuje prvý člen, a tak ju môžeme prepísať do tvaru

$$U_\mathrm{g}(r) = \left(U_0 - \frac{1}{3}\,\omega^2\,a^2\right)\frac{E}{\arctan\dfrac{E}{b}}\,\frac{1}{r} + O\left(\frac{1}{r^3}\right). \tag{4.34}$$

Pre veľkú hodnotu r platí aj vzťah

$$U_g(r) = \frac{GM}{r} + O\left(\frac{1}{r^3}\right). \tag{4.35}$$

Rovnica (4.35) by nemala byť prekvapivá. Už v kapitole 1.1.1 sme spomenuli, že ak sa výpočtový bod nachádza veľmi ďaleko od zdroja gravitačného poľa, nedopustíme sa veľkej chyby, ak hmotnosť zdroja koncentrujeme do jeho ťažiska a zanedbáme tvar zdroja. V takom prípade môžeme gravitačný potenciál modelovať vzťahom (1.17), ktorý platí pre hmotný bod. Práve táto skutočnosť je vyjadrená rovnicou (4.35). Možno jej tiež porozumieť pomocou rovnice (2.19). Ak je začiatok súradnicového systému v ťažisku telesa, potom koeficienty $C_{1,0}$, $C_{1,1}$ a $S_{1,1}$ sú nulové (kapitola 2.7) a v rozvoji (2.19) dominuje vplyv koeficientu $C_{0,0} = M$. Členy tretieho rádu a vyšších rádov (teda harmonické stupne 2, 3, …) nadobúdajú pre veľké r zanedbateľné hodnoty v porovnaní s členom prvého rádu, čím sa opäť dostávame k rovnici (4.35). Z rovnice (4.35) tiež vyplýva vzťah (pozri aj 1.24)

$$\lim_{r\to\infty}(r\,U_\mathrm{g}) = GM, \tag{4.36}$$

pretože $r\,O\left(\frac{1}{r^3}\right) = O\left(\frac{1}{r^2}\right)$ sa limitne blíži k nule pre $r \to \infty$.

Vynásobme ďalej rovnice (4.34) a (4.35) sprievodičom r. Kombináciou oboch rovníc a výpočtom limity pre $r \to \infty$ získame rovnicu

$$GM = \lim_{r\to\infty}(r\,U_g(r)) = \left(U_0 - \frac{1}{3}\,\omega^2\,a^2\right)\frac{E}{\arctan\frac{E}{b}}. \tag{4.37}$$

Z rovnice (4.37) získame hľadaný vzťah pre normálny tiažový potenciál na povrchu ekvipotenciálneho elipsoidu

$$U_0 = \frac{GM}{E} \arctan \frac{E}{b} + \frac{1}{3}\,\omega^2 a^2, \tag{4.38}$$

ktorý je vyjadrený pomocou štyroch základných parametrov ekvipotenciálneho elipsoidu a, b (pretože $E = \sqrt{a^2 - b^2}$), GM, ω. Je dôležité spomenúť, že vzťah (4.38) je exaktný. Členy $O\left(\frac{1}{r^2}\right)$ neboli zanedbané, avšak pre $r \to \infty$ sa limitne blížia k nule.

Dosadením (4.38) spolu so vzťahom pre $P_2(\sin\beta)$ (pozri rovnicu 2.24) do (4.22) získame rovnicu

$$U(u,\beta) = \frac{GM}{E} \arctan \frac{E}{u} + \frac{1}{2}\,\omega^2\, a^2\, \frac{q}{q_0} \left(\sin^2\beta - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\,\omega^2 (u^2 + E^2)\,\cos^2\beta. \tag{4.39}$$

Rovnica (4.39) predstavuje hľadaný uzavretý vzťah na výpočet normálneho tiažového potenciálu v bodoch na povrchu ekvipotenciálneho elipsoidu a nad ním pomocou štyroch základných parametrov ekvipotenciálneho elipsoidu.

Okrajová úloha

Na problematiku tejto kapitoly sa môžeme pozrieť aj zo širšieho uhla pohľadu. Najprv sme definovali trojrozmernú uzavretú plochu, ktorú tvorí dvojosový rotačný elipsoid. Tento elipsoid sme v kapitole 4.2 vyhlásili za ekvipotenciálny, čím sme každému bodu na jeho povrchu priradili hodnotu normálneho tiažového potenciálu U_0. Na základe známej geometrie ekvipotenciálnej plochy a hodnoty normálneho tiažového potenciálu na nej sme následne v súlade so Stokesovým teorémom (kapitola 4.2) dokázali zistiť, čomu je rovný normálny tiažový potenciál v celom vonkajšom priestore tejto plochy (rovnica 4.39). Toto by nebolo možné bez znalosti *princípu* zmeny gravitačného potenciálu v priestore. Tento princíp je zachytený v Laplaceovej rovnici (pozri kapitolu 1.2.4), ktorej riešením v redukovaných elipsoidických súradniciach sú práve sféroidické harmonické funkcie nachádzajúce sa v rovnici (4.18). Preto riešenie (4.18), ktoré je ich lineárnou kombináciou s konečným počtom členov, je taktiež harmonická funkcia, keďže Laplaceov operátor je lineárny (pozri rovnice 1.30 a 1.31).

Povedané inými slovami, našli sme riešenie Laplaceovej diferenciálnej rovnice vo vonkajšom priestore ekvipotenciálneho elipsoidu so zadanou podmienkou U_0 = konšt. na jeho povrchu. Hľadanie takého riešenia diferenciálnej rovnice, ktoré vyhovuje zadanej podmienke, sa nazýva *okrajová úloha*. Okrajová úloha bola vyriešená už vzťahom (4.18). Zámerom úprav, ktoré nasledovali po tomto vzťahu, už bolo iba vyjadriť normálny tiažový potenciál pomocou štyroch základných parametrov ekvipotenciálneho elipsoidu.

4.3.2 Normálny tiažový potenciál vo sférických súradniciach

V praktických aplikáciách je dôležité dokázať vyjadriť normálny gravitačný potenciál U_g a normálny tiažový potenciál U aj vo sférických súradniciach. Jeden z dôvodov je ten, že normálny gravitačný potenciál $U_{\rm g}$ budeme potrebovať odčítať od skutočného gravitačného potenciálu $V_{\rm g}$, ktorý býva často aproximovaný sférickým harmonickým rozvojom (2.74) (pozri kapitolu 2.8). Sférický harmonický rozvoj potenciálu $U_{\rm g}$ by teda umožnil odčítavať a porovnávať oba rady člen po člene, nielen ich výsledné súčty.

Rozvoj normálneho gravitačného potenciálu do radu sférických harmonických funkcií uvedieme bez odvodenia (Heiskanen a Moritz, 1967),

$$U_{\rm g}(r,\varphi) = \frac{GM}{r}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n,0}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n} P_{2n}(\sin\varphi)\right], \tag{4.40}$$

kde

$$J_{2n,0} = (-1)^{n+1}\frac{3e^{2n}}{(2n+1)\,(2n+3)}\left(1 - n + 5n\,\frac{J_{2,0}}{e^2}\right). \tag{4.41}$$

Všimnime si, že podobne ako v prípade sféroidických harmonických funkcií, i tentokrát sú nenulové iba párne zonálne sférické harmonické koeficienty. Rozdiel voči sféroidickému harmonickému rozvoju je však ten, že sférický rozvoj je nekonečný. Táto situácia demonštruje, ako veľmi môže voľba súradnicového systému ovplyvniť tvar výslednej rovnice. Vzťah (4.40) môže byť získaný rozvojom člena arctan $\frac{u}{E}$ v rovniciach (4.39) a (4.23) do mocninového radu (4.25) a ďalšími úpravami. Podrobné odvodenie uvádzajú napríklad Heiskanen a Moritz (1967).

Rad (4.40) konverguje pre $r > E$ (Moritz, 1980), čiže v bodoch nachádzajúcich sa vo vonkajšom priestore sféry, ktorá má stred v bode O a prechádza ohniskami F_1 a F_2 (pozri obrázok 3.2). Pre zemské referenčné elipsoidy (napríklad GRS80 a WGS84) to znamená, že rad (4.40) konverguje dokonca aj v niektorých oblastiach vo vnútri ekvipotenciálneho elipsoidu. Je však dôležité spomenúť, že v takom prípade získame veličinu, ktorá predstavuje analytické (v tomto prípade harmonické) pokračovanie vonkajšieho normálneho gravitačného potenciálu dovnútra elipsoidu (pozri kapitolu 1.2.5). Táto veličina vyhovuje Laplaceovej rovnici (1.25) a je harmonickou funkciou. *Nereprezentuje* preto vnútorný normálny gravitačný potenciál v hmotách elipsoidu, keďže v tejto oblasti platí pre $U_{\rm g}$ Poissonova rovnica (1.45). V praktických aplikáciách postačuje počítať rad (4.40) do $n = 5$, nanajvýš $n = 10$, teda do sférických harmonických stupňov 10, resp. 20. Vyššie hodnoty parametra n už nezvyšujú numerickú presnosť výsledku, pokiaľ je na výpočet použitá dvojitá presnosť (pre vysvetlenie pojmu dvojitá presnosť pozri kapitolu 2.6.1).

Normálny odstredivý potenciál vo sférických súradniciach je daný vzťahom (1.49),

$$U_{\rm c}(r,\varphi) = \frac{1}{2}\,\omega^2\,r^2\,\cos^2\varphi. \tag{4.42}$$

Dosadením (4.40) a (4.42) do (4.5) získame výsledný vzťah pre normálny tiažový potenciál vo sférických súradniciach. Všimnime si, že v rovniciach (4.40) a (4.42) sú konštantami opäť iba základné parametre ekvipotenciálneho elipsoidu: a, $J_{2,0}$, GM a ω. Ide tak o ďalší výpočet odvodeného fyzikálneho parametra ekvipotenciálneho elipsoidu zo základných parametrov ekvipotenciálneho elipsoidu.

4.4 Normálne tiažové zrýchlenie

Tiažové zrýchlenie je jedna z veličín fyzikálnej geodézie, ktorú možno odmerať (kapitola 1.3.1). V mnohých úlohách je preto výhodné či dokonca potrebné modelovať ho jednoduchým a súčasne dostatočne presným spôsobom, napríklad kvôli výpočtu geoidu. Na tento účel slúži normálne tiažové zrýchlenie $\boldsymbol{\gamma}$. Vo fyzikálnej geodézii patrí normálne tiažové zrýchlenie medzi najčastejšie používané odvodené fyzikálne parametre ekvipotenciálneho elipsoidu.

V kapitole 4.4.1 ukážeme exaktný spôsob výpočtu normálneho tiažového zrýchlenia v redukovaných elipsoidických súradniciach. Táto metóda je v praktických aplikáciách využívaná zriedkavo, pretože poloha bodov merania zväčša nie je vyjadrovaná v redukovaných elipsoidických súradniciach (hoci do týchto súradníc môže byť jednoducho transformovaná; pre transformačné vzťahy pozri napríklad Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005). Tento prístup je ale dôležitý obzvlášť z teoretického hľadiska a z pohľadu numerických simulácií, keďže využíva uzavreté matematické vzťahy. V kapitole 4.4.2 potom uvedieme najpoužívanejší spôsob výpočtu pomocou Taylorovho rozvoja v elipsoidických súradniciach. Hoci táto metóda je iba približná, pretože nekonečný Taylorov rozvoj musí byť v číselných výpočtoch obmedzený na konečný počet členov, rýchla konvergencia radu umožňuje dosiahnuť vyžadovanú presnosť pomerne jednoducho. Na záver popíšeme v kapitole 4.4.3 výpočet pomocou rozvoja do radu sférických harmonických funkcií. Podobne ako sférický harmonický rozvoj normálneho tiažového potenciálu (kapitola 4.3.2), i tento rozvoj je nekonečný. Po obmedzení na konečný počet členov je preto aj tento prístup iba približný. Numerické chyby však možno opäť jednoduchým spôsobom eliminovať na spoľahlivo zanedbateľné hodnoty. Podobne ako v prípade normálneho tiažového potenciálu (kapitola 4.3.2), výhodou je opäť možnosť kombinácie so sférickým harmonickým rozvojom skutočného gravitačného zrýchlenia (kapitola 2.8.1). Porovnaním niekoľkých metód výpočtu normálneho tiažového zrýchlenia na území Slovenska sa zaoberá článok Vajda a Pánisová (2005).

4.4.1 Normálne tiažové zrýchlenie v redukovaných elipsoidických súradniciach

Normálne tiažové zrýchlenie v bode $P(u, \beta, \lambda)$ vyjadrené v súradnicovom systéme $x^{\mathrm{r}}, y^{\mathrm{r}}, z^{\mathrm{r}}$ (pozri kapitolu 3.2) získame aplikovaním operátora gradient (3.6) na normálny tiažový potenciál (4.39),

$$\boldsymbol{\gamma}(u,\beta) = \nabla U(u,\beta) = \begin{bmatrix} \gamma_{x^{\mathrm{r}}}(u,\beta) \\ \gamma_{y^{\mathrm{r}}}(u,\beta) \\ \gamma_{z^{\mathrm{r}}}(u,\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{u^2+E^2\sin^2\beta}} \dfrac{\partial U(u,\beta)}{\partial \beta} \\ \dfrac{1}{\sqrt{u^2+E^2}\cos\beta} \dfrac{\partial U(u,\beta)}{\partial \lambda} \\ \sqrt{\dfrac{u^2+E^2}{u^2+E^2\sin^2\beta}} \dfrac{\partial U(u,\beta)}{\partial u} \end{bmatrix}. \tag{4.43}$$

V dôsledku symetrie ekvipotenciálneho elipsoidu voči osi rotácie je normálne pole nezávislé od dĺžky λ (kapitola 4.3.1), preto $\partial U/\partial\lambda = 0$, a teda

$$\gamma_{y^{\mathrm{r}}}(u,\beta) = 0. \tag{4.44}$$

Člen $\gamma_{x^{\mathrm{r}}}(u,\beta)$ získame dosadením vzťahu (4.39) do (4.43),

$$\gamma_{x^{\mathrm{r}}}(u,\beta) = \frac{1}{\sqrt{u^2+E^2\sin^2\beta}}\left(\omega^2 a^2 \frac{q}{q_0} - \omega^2\left(u^2+E^2\right)\right)\cos\beta\,\sin\beta. \tag{4.45}$$

Podobným spôsobom dostaneme aj člen $\gamma_{z^{\mathrm{r}}}(u,\beta)$,

$$\gamma_{z^{\mathrm{r}}}(u,\beta) = \sqrt{\frac{u^2+E^2}{u^2+E^2\sin^2\beta}}\left[-\frac{GM}{u^2+E^2} - \frac{\omega^2 a^2 E}{u^2+E^2}\frac{q'}{q_0}\left(\frac{1}{2}\sin^2\beta - \frac{1}{6}\right) + \omega^2 u\cos^2\beta\right], \tag{4.46}$$

kde (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005)

$$q' = -\frac{u^2+E^2}{E}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}u} = 3\left(1+\frac{u^2}{E^2}\right)\left(1-\frac{u}{E}\arctan\frac{E}{u}\right) - 1. \tag{4.47}$$

Dodajme, že vo vzťahu (4.47) sme zaviedli člen q', v ktorom je derivácia $\mathrm{d}q/\mathrm{d}u$ vynásobená podielom $-\frac{u^2+E^2}{E}$, preto pre zachovanie rovnosti musí byť prostredný člen rovnice (4.46) vynásobený podielom $-\frac{E}{u^2+E^2}$. Novozavedený člen q' využijeme neskôr. Rovnice (4.44), (4.45) a (4.46) predstavujú uzavreté vzťahy pre hľadané prvky vektora $\boldsymbol{\gamma}$ v redukovaných elipsoidických súradniciach. Podobne ako v prípade normálneho tiažového potenciálu (4.39), ide o sféroidické harmonické rozvoje s konečným počtom členov.

Všimnime si, že na ekvipotenciálnom elipsoide ($u = b$) je nulový nielen prvok $\gamma_{y^{\mathrm{r}}}(b,\beta)$ (rovnica 4.44), ale aj prvok $\gamma_{x^{\mathrm{r}}}(b,\beta)$ (rovnica 4.45). Dôvod je ten, že vo vzťahu (4.45) platia pre $u = b$ rovnosti $q/q_0 = 1$ a $u^2+E^2 = b^2+E^2 = a^2$. Nulové hodnoty prvkov $\gamma_{x^{\mathrm{r}}}(b,\beta)$ a $\gamma_{y^{\mathrm{r}}}(b,\beta)$ možno vysvetliť aj tým, že referenčný elipsoid je ekvipotenciálna plocha s konštantnou hodnotou normálneho tiažového potenciálu $U(b,\beta) = U_0 =$ konšt. (kapitola 4.2). V bodoch na ekvipotenciálnom elipsoide musí byť preto vektor $\boldsymbol{\gamma}(b,\beta) = \nabla U(b,\beta)$ kolmý na elipsoid (kapitola 1.3.2). Z kapitoly 3.2 súčasne vieme, že na elipsoid s malou polosou $u = b$ je kolmá aj os z^{r} lokálneho súradnicového systému $x^{\mathrm{r}}, y^{\mathrm{r}}, z^{\mathrm{r}}$ s pohyblivým začiatkom ležiacim na elipsoide. Smer vektora $\boldsymbol{\gamma}(b,\beta)$ je teda totožný so smerom osi z^{r}. Inými slovami, zložky $\gamma_{x^{\mathrm{r}}}(b,\beta)$ a $\gamma_{y^{\mathrm{r}}}(b,\beta)$ ležiace v dotykovej rovine k ekvipotenciálnemu elipsoidu $x^{\mathrm{r}}, y^{\mathrm{r}}$ sú nulové, pretože diferenciálna zmena tiažového potenciálu v dotykovej rovine k ekvipotenciálnej ploche je nulová (kapitola 1.5.1). Pre $u > b$ je člen $\gamma_{x^{\mathrm{r}}}(u,\beta)$ vo všeobecnosti nenulový, pretože konfokálne elipsoidy s malou polosou $u > b$ nie sú ekvipotenciálne plochy (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005).

4.4.2 Taylorov rozvoj normálneho tiažového zrýchlenia

Poloha bodov gravimetrických meraní je v súčasnosti určovaná spravidla GNSS metódami a často býva vyjadrená v elipsoidických súradniciach (pre definíciu elipsoidických súradníc pozri kapitolu 1.5.4). V tejto kapitole odvodíme vzťahy na výpočet normálneho tiažového zrýchlenia na povrchu ekvipotenciálneho elipsoidu a nad ním v elipsoidických súradniciach.

Somiglianov vzťah

Najprv budeme hľadať vzťah pre veľkosť normálneho tiažového zrýchlenia na povrchu ekvipotenciálneho elipsoidu. Kapitola je spracovaná podľa Hofmann-Wellenhof a Moritz (2005).

Z predchádzajúcich častí vieme, že na povrchu ekvipotenciálneho elipsoidu platí $\gamma_{x^{\mathrm{r}}} = \gamma_{y^{\mathrm{r}}} = 0$. Na výpočet veľkosti normálneho tiažového zrýchlenia na elipsoide preto potrebujeme iba poslednú z rovníc (4.44) až (4.46). S využitím (3.1) a $u = b$ upravme člen $u^2 + E^2 \sin^2\beta$ z rovnice (4.46) nasledujúcim spôsobom,

$$\begin{aligned} b^2 + E^2 \sin^2\beta &= b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2\beta = a^2 \sin^2\beta + b^2 (1 - \sin^2\beta) \\ &= a^2 \sin^2\beta + b^2 \cos^2\beta . \end{aligned} \tag{4.48}$$

Pre veľkosť normálneho tiažového zrýchlenia na elipsoide tak získame vzťah

$$\begin{aligned} \gamma(b,\beta) &= \|\boldsymbol{\gamma}(b,\beta)\| = \sqrt{\gamma_{x^{\mathrm{r}}}^2(b,\beta) + \gamma_{y^{\mathrm{r}}}^2(b,\beta) + \gamma_{z^{\mathrm{r}}}^2(b,\beta)} = |\gamma_{z^{\mathrm{r}}}(b,\beta)| \\ &= \frac{GM}{a\sqrt{a^2\sin^2\beta + b^2\cos^2\beta}} \left[1 + \frac{\omega^2 a^2 E}{GM}\frac{q_0'}{q_0}\left(\frac{1}{2}\sin^2\beta - \frac{1}{6}\right) - \frac{\omega^2 a^2 b}{GM}\cos^2\beta\right], \end{aligned} \tag{4.49}$$

kde člen q_0' je daný rovnicou (4.47) pre $u = b$. Zavedením substitúcie

$$m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM} \tag{4.50}$$

a s využitím (4.3) možno prepísať (4.49) do tvaru

$$\gamma(b,\beta) = \frac{GM}{a\sqrt{a^2\sin^2\beta + b^2\cos^2\beta}} \left[\left(1 + \frac{m}{3}\frac{e'\,q_0'}{q_0}\right)\sin^2\beta + \left(1 - m - \frac{m}{6}\frac{e'\,q_0'}{q_0}\right)\cos^2\beta\right]. \tag{4.51}$$

Ak do rovnice (4.51) dosadíme redukovanú šírku $\beta = 0$, dostaneme vzťah na výpočet veľkosti normálneho tiažoveho zrýchlenia na rovníku,

$$\gamma_a = \frac{GM}{ab}\left(1 - m - \frac{m}{6}\frac{e'\,q_0'}{q_0}\right). \tag{4.52}$$

Pre $\beta = \pm 90°$ získame veľkosť normálneho tiažového zrýchlenia na póloch,

$$\gamma_b = \frac{GM}{a^2}\left(1 + \frac{m}{3}\frac{e'\,q_0'}{q_0}\right). \tag{4.53}$$

Použitím substitúcií (4.52) a (4.53) môžeme upraviť vzťah (4.51) do tvaru

$$\gamma(b,\beta) = \frac{a\,\gamma_b \sin^2\beta + b\,\gamma_a\cos^2\beta}{\sqrt{a^2\sin^2\beta + b^2\cos^2\beta}}. \tag{4.54}$$

Hľadaný ekvivalent vzťahu (4.54) v elipsoidických súradniciach získame transformáciou redukovanej elipsoidickej šírky β na elipsoidickú šírku ϕ (napríklad Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005),

$$\tan\beta = \frac{b}{a}\,\tan\phi. \tag{4.55}$$

S využitím (4.55) prejde (4.54) do konečného tvaru

$$\gamma(\phi, h=0) = \gamma_0(\phi) = \frac{a\,\gamma_a\,\cos^2\phi + b\,\gamma_b\,\sin^2\phi}{\sqrt{a^2\,\cos^2\phi + b^2\,\sin^2\phi}}. \tag{4.56}$$

Rovnica (4.56) sa nazýva *Somiglianov vzťah* a umožňuje vypočítať normálne tiažové zrýchlenie na povrchu ekvipotenciálneho elipsoidu zo základných parametrov ekvipotenciálneho elipsoidu. Jedinou premennou vo vzťahu (4.56) je elipsoidická šírka ϕ.

Somiglianov vzťah (4.56) možno prepísať do tvaru (Moritz, 2000)

$$\gamma_0(\phi) = \gamma_a\,\frac{1 + k\,\sin^2\phi}{\sqrt{1 - e^2\,\sin^2\phi}}, \tag{4.57}$$

kde

$$k = \frac{b\,\gamma_b}{a\,\gamma_a} - 1. \tag{4.58}$$

Hoci rovnice (4.56) a (4.57) sú ekvivalentné, v číselných výpočtoch je spravidla presnejší vzťah (4.57).

Taylorov rozvoj

Na rozdiel od rovnice (4.43), ktorá umožňuje výpočet vektora $\boldsymbol{\gamma}(u,\beta)$ na povrchu ekvipotenciálneho elipsoidu aj nad ním, Somiglianov vzťah (4.56) možno použiť iba na ekvipotenciálnom elipsoide a iba na výpočet veľkosti normálneho tiažového zrýchlenia $\|\boldsymbol{\gamma}(\phi, h=0)\|$ (smer vektora $\boldsymbol{\gamma}(\phi, h = 0)$ je daný normálou k elipsoidu). Jeden zo spôsobov získania $\|\boldsymbol{\gamma}(\phi, h>0)\|$ v priestore nad ekvipotenciálnym elipsoidom s využitím elipsoidických súradníc je analytickým pokračovaním nahor (kapitola 1.2.5). Tento prístup je založený na rozvoji normálneho tiažového zrýchlenia do Taylorovho radu, preto je potrebné určiť plochu, z ktorej bude normálne tiažové zrýchlenie pokračované nahor. Vhodnou plochou je ekvipotenciálny elipsoid, pretože na tejto ploche dokážeme relatívne jednoducho odvodiť a potom aj vypočítať derivácie normálneho tiažového zrýchlenia, ktoré vystupujú v Taylorovom rozvoji. Normálne tiažové zrýchlenie vo výške $h \geq 0$ (bod P na obrázku 1.18) tak získame Taylorovým rozvojom (porovnaj s rovnicou 1.44)

$$\begin{aligned}\gamma(\phi,h) = \|\boldsymbol{\gamma}(\phi,h)\| &= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\,\frac{\partial^i\gamma(\phi,h)}{\partial h^i}\bigg|_{h=0} h^i\\ &= \gamma(\phi,0) + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i!}\,\frac{\partial^i\gamma(\phi,h)}{\partial h^i}\bigg|_{h=0} h^i\\ &\approx \gamma_0(\phi) + \delta\gamma_h(\phi),\end{aligned} \tag{4.59}$$

kde jednotlivé derivácie normálneho tiažového zrýchlenia sú dané v bodoch na ekvipotenciálnom elipsoide pre príslušnú elipsoidickú šírku ϕ (bod Q_0 na obrázku 1.18). Nultý člen Taylorovho rozvoja $\gamma_0(\phi)$ možno vypočítať Somiglianovým vzťahom (4.56). Člen $\delta\gamma_h(\phi)$ sa nazýva *redukcia normálneho tiažového zrýchlenia z výšky* a v číselných výpočtoch býva vypočítaný približne, zväčša uvážením členov sumácie po $i = 1$, prípadne aj $i = 2$.

Bez podrobnejšieho odvodenia uvedieme často používaný tvar redukcie normálneho tiažového zrýchlenia z výšky $\delta\gamma_h(\phi)$ (pozri napríklad Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005),

$$\delta\gamma_h(\phi) = -\frac{2\gamma_0(\phi)}{a}\,(1 + f + m - 2f\,\sin^2\phi)\,h + \frac{3\gamma_0(\phi)}{a^2}\,h^2. \tag{4.60}$$

Členy

$$\frac{\partial\gamma_0(\phi)}{\partial h} = -\frac{2\gamma_0(\phi)}{a}\,(1 + f + m - 2f\,\sin^2\phi), \tag{4.61}$$

$$\frac{\partial^2\gamma_0(\phi)}{\partial h^2} \approx \frac{6\gamma_0(\phi)}{a^2} \tag{4.62}$$

predstavujú prvú a druhú deriváciu normálneho tiažového zrýchlenia na ekvipotenciálnom elipsoide. Vzťah (4.62) je približný, no pre mnohé aplikácie postačuje.

Ak je vyžadovaná vysoká presnosť, Taylorov rozvoj (4.59) môže byť vypočítaný až do $i = 4$ podľa Pick (2000). Naopak, v úlohách, ktoré nevyžadujú vysokú presnosť, býva člen $\delta\gamma_h(\phi)$ niekedy aproximovaný dokonca iba približnou hodnotou derivácie $\partial\gamma_0(\phi)/\partial h$,

$$\delta\gamma_h \approx \frac{\partial\gamma_0}{\partial h}\,h \approx -0.3086\ \mathrm{mGal\ m^{-1}}\,h. \tag{4.63}$$

Tento vzťah je užitočné poznať, pretože normálne tiažové pole je volené tak, aby $\partial\gamma/\partial h \approx \partial g/\partial h$. Vzťah (4.63) tak umožňuje vypočítať približnú zmenu skutočného tiažového zrýchlenia g s výškou h na povrchu Zeme. Pre názornosť uveďme, že podľa rovnice (4.63) klesne skutočné tiažové zrýchlenie na povrchu Zeme s narastajúcou výškou napríklad 1 cm približne o 3 μGal, čo je približne na úrovni presnosti súčasných terénnych relatívnych gravimetrov (pozri kapitolu 1.3.1). Spomeňme tiež ale, že veličina $\partial g/\partial h$, ktorá sa nazýva *vertikálny gradient tiažového zrýchlenia*, môže v teréne výrazne varírovať, obzvlášť v oblastiach so zložitou topografiou (Zahorec a kol., 2018). V takýchto podmienkach môže aproximácia $\partial g/\partial h \approx -0.3086$ mGal m^{-1} spôsobovať relatívnu chybu až na úrovni 80 % z hodnoty gradientu skutočného tiažového zrýchlenia (Vajda a kol., 2020b).

Výhodou Taylorovho rozvoja (4.59) je jeho jednoduchosť a veľké praktické využitie. Za nevýhodu možno v niektorých situáciách považovať to, že umožňuje vypočítať iba veľkosť vektora $\|\boldsymbol{\gamma}(\phi, h)\|$, a nie celý vektor $\boldsymbol{\gamma}(\phi, h)$, resp. jeho jednotlivé prvky.

4.4.3 Normálne tiažové zrýchlenie vo sférických súradniciach

Aplikovaním operátora gradient vo sférických súradniciach (rovnica 1.39) na normálny gravitačný a odstredivý potenciál (rovnice 4.40 a 4.42) získame sférický harmonický rozvoj normálneho tiažového zrýchlenia v lokálnom kareziánskom súradnicovom systéme $x^{\mathrm{s}}, y^{\mathrm{s}}, z^{\mathrm{s}}$ s pohyblivým začiatkom v bode $P(r, \varphi, \lambda)$ (pozri obrázok 1.9),

$$\boldsymbol{\gamma}(r,\varphi) = \nabla U_{\mathrm{g}}(r,\varphi) + \nabla U_{\mathrm{c}}(r,\varphi) = \begin{bmatrix} \gamma_{x^{\mathrm{s}}}(r,\varphi) \\ \gamma_{y^{\mathrm{s}}}(r,\varphi) \\ \gamma_{z^{\mathrm{s}}}(r,\varphi) \end{bmatrix}, \tag{4.64}$$

kde

$$\begin{aligned} \gamma_{x^{\mathrm{s}}}(r,\varphi) &= -\frac{GM}{r^2} \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n,0} \left(\frac{a}{r}\right)^{2n} \frac{\mathrm{d}P_{2n}(\sin\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} - \omega^2\, r\, \cos\varphi\, \sin\varphi, \\ \gamma_{y^{\mathrm{s}}}(r,\varphi) &= 0, \\ \gamma_{z^{\mathrm{s}}}(r,\varphi) &= -\frac{GM}{r^2} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n,0}\,(2n+1) \left(\frac{a}{r}\right)^{2n} P_{2n}(\sin\varphi)\right] + \omega^2\, r\, \cos^2\varphi. \end{aligned} \tag{4.65}$$

Derivácie Legendreových polynómov $\mathrm{d}P_{2n}(\sin\varphi)/\mathrm{d}\varphi$ môžeme vypočítať napríklad rekurentným vzťahom (2.32). Podobne ako v kapitole 4.3.2, vo väčšine numerických aplikácií postačuje počítať rozvoje (4.65) do $n = 5$, prípadne $n = 10$.

Vzťahy (4.65) (bez odstredivej zložky) umožňujú napríklad kombináciu so sférickým harmonickým rozvojom skutočného gravitačného zrýchlenia (2.79) až (2.81), a to nielen vo forme výsledných súčtov, ale aj člen po člene. Túto vlastnosť využijeme v nasledujúcej kapitole.

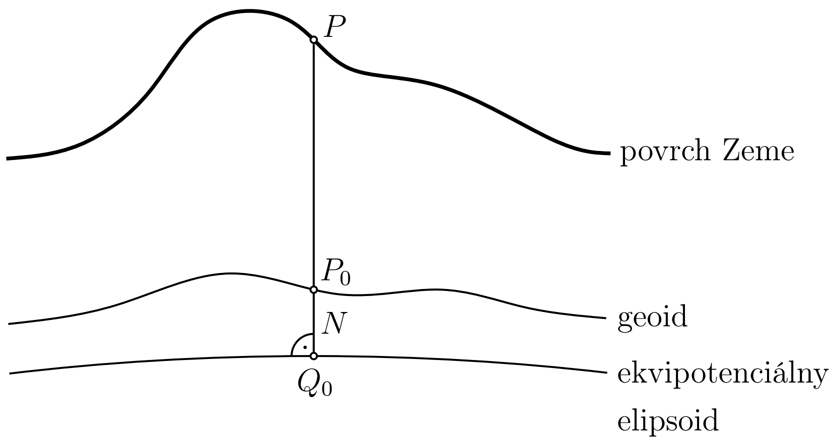
Kapitola 5

Poruchové pole a zvislicové odchýlky

Poruchové (anomálne) pole je rozdiel medzi skutočným tiažovým poľom a normálnym tiažovým poľom. V procese určovania geoidu a vonkajšieho tiažového poľa Zeme hrá poruchové pole kľúčovú úlohu, pretože v praktických aplikáciách nie je spravidla vhodné pracovať priamo s veličinami skutočného tiažového poľa. Dôvod je ten, že priamy výpočet tvaru Zeme a jej tiažového poľa, napríklad z tiažového zrýchlenia a z tiažového potenciálu na povrchu Zeme, je nesmierne náročný (pozri napríklad Hörmander, 1976; Sansò a Sideris, 2017). Úlohy podobného typu môžu byť našťastie často vyriešené približne, napríklad iteráciami či linearizáciou pomocou rozvoja do Taylorovho radu. Tieto metódy však zvyčajne vyžadujú dostupnosť približných hodnôt, ktoré s dostatočnou presnosťou aproximujú veličiny skutočného tiažového poľa Zeme. Na získanie približných hodnôt sa využíva normálne tiažové pole. Veličiny poruchového poľa potom popisujú práve hľadané odchýlky skutočného poľa od normálneho poľa.

Príkladom linearizácie je určenie výšky geoidu nad ekvipotenciálnym elipsoidom (obrázok 5.1). Ekvipotenciálny elipsoid tu slúži ako verná aproximácia geoidu z geometrického hľadiska (elipsoidický tvar) aj z fyzikálneho hľadiska ($U_0 = W_0$) (pozri kapitolu 4.1). Keďže geometrickú aj fyzikálnu zložku ekvipotenciálneho elipsoidu poznáme (kapitola 4), ostáva už len určiť malé geometrické prírastky N k ekvipotenciálnemu elipsoidu. Prírastok N sa nazýva *výška geoidu nad ekvipotenciálnym elipsoidom* a spravidla sa určuje práve z veličín poruchového poľa. Pohybuje sa v rozsahu približne od -100 m do 100 m, teda nadobúda o 4 rády menšie hodnoty ako stredný polomer Zeme 6 371 000 m.

V tejto kapitole popíšeme najdôležitejšie veličiny poruchového poľa (kapitoly 5.1 až 5.3) a zvislicové odchýlky (kapitola 5.4). Po celý čas budeme pritom predpokladať, že hmoty zemskej atmosféry boli adekvátnym matematickým spôsobom odstránené (pozri napríklad Janák a kol., 2006), teda že gravitačný potenciál Zeme spĺňa Laplaceovu rovnicu (1.25) v priestore mimo Zeme.



Obrázok 5.1. Výška geoidu N nad ekvipotenciálnym elipsoidom meraná od bodu Q_0 po bod P_0 po normále k elipsoidu, ktorá prechádza bodom P.

5.1 Poruchový potenciál

Poruchový potenciál budeme označovať symbolom T. V zmysle definície poruchového poľa je daný vzťahom

$$\begin{aligned} T(P) &= W(P) - U(P) = (V_\mathrm{g}(P) + V_\mathrm{c}(P)) - (U_\mathrm{g}(P) + U_\mathrm{c}(P)) \\ &= V_\mathrm{g}(P) - U_\mathrm{g}(P), \end{aligned} \tag{5.1}$$

pričom P je bod na povrchu Zeme alebo mimo Zeme. Na získanie vzťahu (5.1) sme využili predpoklad

$$V_\mathrm{c}(P) = U_\mathrm{c}(P). \tag{5.2}$$

Vzhľadom na súčasnú presnosť určenia poruchového potenciálu (približne 0.1 $\mathrm{m^2\,s^{-2}}$ podľa Sansò a Sideris, 2013) môžeme spoľahlivo považovať rovnosť (5.2) za splnenú. Malé rozdiely medzi $V_\mathrm{c}(P)$ a $U_\mathrm{c}(P)$ sú dôsledkom faktorov, ktoré nie sú zahrnuté v normálnom poli. Medzi tieto faktory patrí napríklad premenlivá rýchlosť rotácie Zeme či pohyb zemského pólu.

Pomocou rovníc (1.25), (1.30), (4.8) a (5.1) možno jednoducho ukázať, že poruchový potenciál je harmonická funkcia v priestore mimo hmôt,

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \tag{5.3}$$

Poruchový potenciál je aj regulárna funkcia v nekonečne (kapitola 1.2.1). Z nerovností (1.22) dokážeme iba prvú,

$$\begin{aligned} \lim_{r\to\infty} |r\,T| &= \lim_{r\to\infty} |r\ (V_\mathrm{g} - U_\mathrm{g})| = \lim_{r\to\infty} |r\,V_\mathrm{g} - r\,U_\mathrm{g}| \\ &\le \lim_{r\to\infty} (|r\,V_\mathrm{g}| + |r\,U_\mathrm{g}|) = \lim_{r\to\infty} |r\,V_\mathrm{g}| + \lim_{r\to\infty} |r\,U_\mathrm{g}| = GM + GM_\mathrm{e} < C, \end{aligned} \tag{5.4}$$

kde M je hmotnosť Zeme, M_e je hmotnosť, ktorá je pripísaná ekvipotenciálnemu elipsoidu, a C je vhodne zvolená konštanta. Vo vzťahu (5.4) sme využili nerovnosť $|a-b| \le |a| + |b|$ a rovnicu (1.24).

Pre poruchový potenciál ďalej platí,

$$\lim_{P\to\infty} T(P) = \lim_{P\to\infty} (V_g(P) - U_g(P)) = \lim_{P\to\infty} V_g(P) - \lim_{P\to\infty} U_g(P) = 0, \tag{5.5}$$

$$\lim_{r\to\infty} r\,T = \lim_{r\to\infty} r\,(V_g - U_c) = \lim_{r\to\infty} r\,V_g - \lim_{r\to\infty} r\,U_g = GM - GM_e = G\,\delta M, \tag{5.6}$$

kde $\delta M = M - M_e$. Vo vzťahu (5.5) sme využili rovnicu (1.16), ktorá platí aj pre U_g. V rovnici (5.6) sme použili rovnicu (1.24). Ak $M = M_e$, potom

$$\lim_{r\to\infty} r\,T = 0. \tag{5.7}$$

Ak je navyše súradnicový systém geocentrický, potom (Pick a kol., 1973)

$$\lim_{r\to\infty} r^2\,T = 0. \tag{5.8}$$

Poruchový potenciál možno definovať aj v bode P_0 na geoide (obrázok 5.1),

$$T(P_0) = W(P_0) - U(P_0) = V_g(P_0) - U_g(P_0), \tag{5.9}$$

ako aj v celom priestore nad geoidom. Toto je však možné iba za predpokladu, že gravitačný účinok topografických a atmosférických hmôt na gravitačný potenciál V_g bol matematicky odstránený.[1] Odstránenie gravitačného účinku topografických a atmosférických hmôt sa nazýva *regularizácia zemského telesa*. Tento postup je podrobne diskutovaný v práci Janák a kol. (2006).

5.1.1 Sférický harmonický rozvoj poruchového potenciálu

V praktických aplikáciách sa veľmi často stretneme so sférickým harmonickým rozvojom poruchového potenciálu. Tento rozvoj získame použitím rovnice (5.1) a radov (2.74) a (4.40). Aby sme mohli výhodne skombinovať oba rady do *jedného* rozvoja, musíme vziať do úvahy dva aspekty.

1. Rozvoj (2.74) je založený na úplne normovaných sférických harmonických funkciách, zatiaľ čo rovnica (4.40) predstavuje rad nenormovaných sférických harmonických funkcií.

2. Konštanty ekvipotenciálneho elipsoidu GM a a z rovnice (4.40), ktoré budeme ďalej označovať symbolmi GM^e a a^e, sa môžu líšiť od konštánt GM a R z rovnice (2.74).

Nekonzistenciu spôsobenú rozličnými normami odstránime normovaním sférických harmonických funkcií a sférických harmonických koeficientov v rovnici (4.40). Druhú nekonzistenciu odstránime preškálovaním sférických harmonických koeficientov normálneho tiažového poľa z pôvodných konštánt GM^e a a^e na konštanty GM a R (pozri napríklad

[1] Definícia topografických hmôt je uvedená na strane 68.

Barthelmes, 2013). Nie je zložité presvedčiť sa, že po týchto úpravách možno zapísať rozvoj poruchového potenciálu v tvare

$$T(P) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{k=-n}^{n} \bar{t}_{nk} \, \bar{Y}_{nk}(\varphi, \lambda), \tag{5.10}$$

kde

$$\bar{t}_{nk} = \begin{cases} \Delta\bar{C}_{nk}, & \text{ak} \quad k \geq 0, \\ \Delta\bar{S}_{n|k|}, & \text{ak} \quad k < 0, \end{cases} \tag{5.11}$$

a

$$\begin{aligned} \Delta\bar{C}_{nm} &= \bar{C}_{nm} - \bar{C}^{\mathrm{e}}_{nm} \, \frac{GM^{\mathrm{e}}}{GM} \left(\frac{a^{\mathrm{e}}}{R}\right)^{n}, \\ \Delta\bar{S}_{nm} &= \bar{S}_{nm} - \bar{S}^{\mathrm{e}}_{nm} \, \frac{GM^{\mathrm{e}}}{GM} \left(\frac{a^{\mathrm{e}}}{R}\right)^{n} = \bar{S}_{nm}. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Pre koeficienty normálneho poľa $\bar{C}^{\mathrm{e}}_{nm}$, $\bar{S}^{\mathrm{e}}_{nm}$ platia vzťahy (pozri rovnice 2.62, 2.72, 4.1, 4.2 a 4.41 a tiež kapitoly 4.3.1 a 4.3.2)

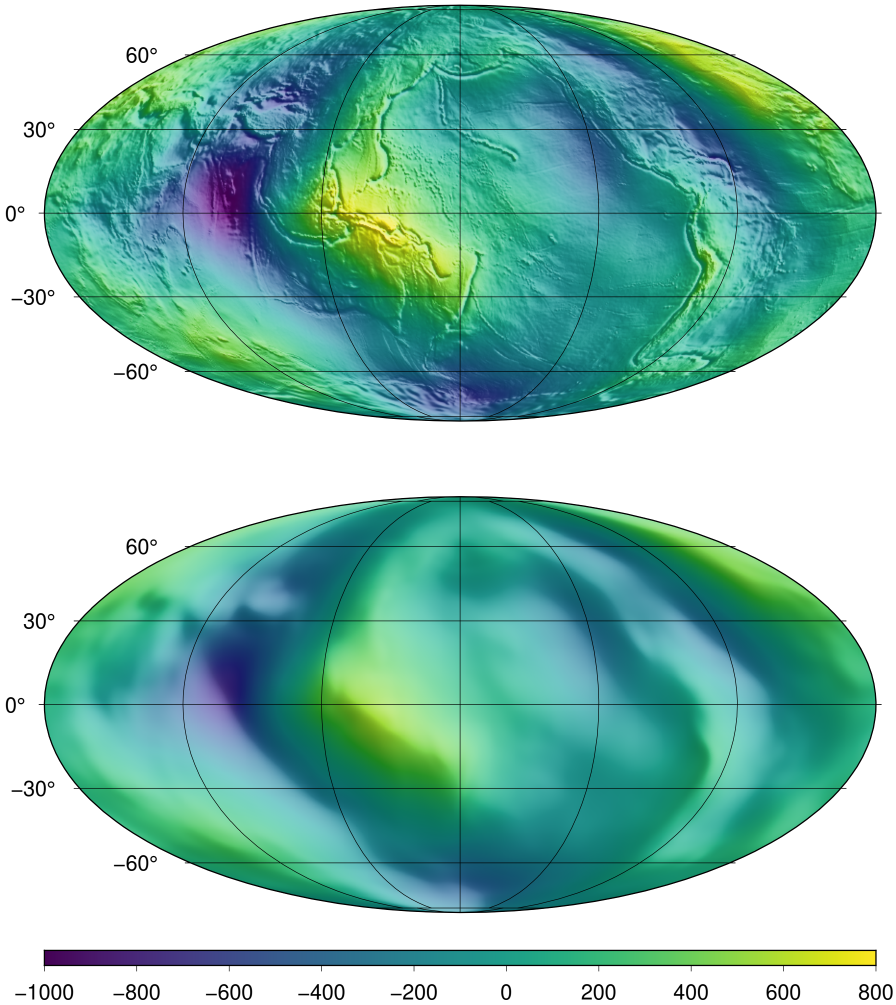
$$\bar{C}^{\mathrm{e}}_{2n',0} = (-1)^{n'} \frac{3e^{2n'}}{(2n'+1)\,(2n'+3)\,\sqrt{4n'+1}} \left(1 - n' - 5^{3/2}\, n' \, \frac{\bar{C}^{\mathrm{e}}_{2,0}}{e^2}\right), \quad n' = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned} \bar{C}^{\mathrm{e}}_{2n',m} &= 0, \quad n' = 0, 1, 2, \ldots, \quad m = 1, 2, \ldots, 2n', && (5.14) \\ \bar{C}^{\mathrm{e}}_{2n'+1,m} &= 0, \quad n' = 0, 1, 2, \ldots, \quad m = 0, 1, \ldots, 2n'+1, && (5.15) \\ \bar{S}^{\mathrm{e}}_{nm} &= 0, \quad n \ = 0, 1, 2, \ldots, \quad m = 0, 1, \ldots, n. && (5.16) \end{aligned}$$

Z koeficientov normálneho poľa sú teda nenulové iba párne zonálne sférické harmonické koeficienty $\bar{C}^{\mathrm{e}}_{0,0}$, $\bar{C}^{\mathrm{e}}_{2,0}$, $\bar{C}^{\mathrm{e}}_{4,0}, \ldots$ Koeficienty $\bar{C}_{2,0}$ a $\bar{C}^{\mathrm{e}}_{2,0}$ v rovniciach (4.2) a (5.13) sú totožné. Pripomeňme, že sférický harmonický rád vo vzťahoch (5.12) až (5.16) musí byť v zmysle rovnice (2.73) nezáporný.

Podobným spôsobom možno získať kombináciou rovníc (3.28) a (4.18) sféroidický harmonický rozvoj poruchového potenciálu.

Poruchový potenciál sa udáva vo fyzikálnej jednotke $\mathrm{m}^2\ \mathrm{s}^{-2}$ a nadobúda hodnoty približne od $-1000\ \mathrm{m}^2\ \mathrm{s}^{-2}$ do $1000\ \mathrm{m}^2\ \mathrm{s}^{-2}$. V porovnaní s gravitačným potenciálom (napríklad obrázok 1.8) sú tieto hodnoty menšie zhruba o 4 rády. Vrchná mapa na obrázku 5.2 znázorňuje poruchový potenciál na povrchu ekvipotenciálneho elipsoidu GRS80. Pozorujeme jednak dlhovlnný trend, napríklad v okolí minima v Indickom oceáne a maxima v Indonézii, ale tiež krátkovlnné prvky, napríklad premenlivé pole v oblasti tektonických zlomov v Tichom oceáne na rozhraní Pacifickej platne a okolitých platní (Severoamerická, Filipínska a Austrálska platňa) či v oblastí Himalájí a Ánd. Mapa tiež demonštruje, že odčítanie normálneho gravitačného potenciálu od skutočného gravitačného potenciálu

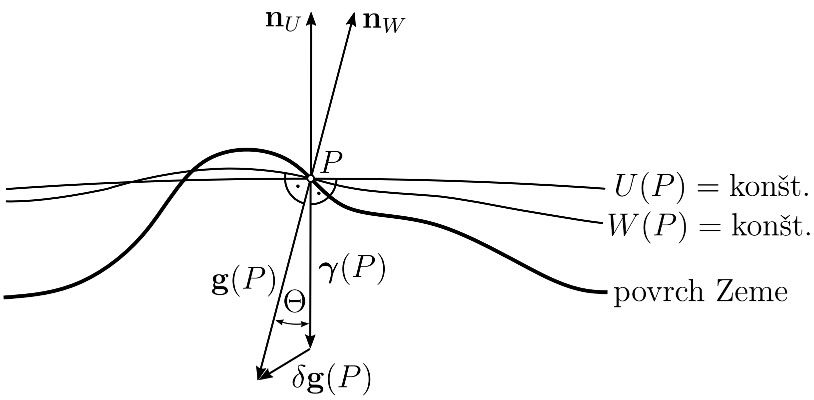


Obrázok 5.2. Poruchový potenciál (jednotky m^2 s^{-2}) zemského gravitačného poľa vypočítaný zo sférického harmonického modelu EIGEN-6C4 do stupňa 720 na povrchu elipsoidu GRS80 (vrchná mapa) a vo výške 450 km nad elipsoidom GRS80 (spodná mapa). Normálne tiažové pole je predpísané ekvipotenciálnym elipsoidom GRS80.

výrazne eliminuje globálny trend. Ten je spôsobený obzvlášť nultým členom GM/r rozvoja (5.10) a šírkovou závislosťou, ktorá je dôsledkom sploštenia Zeme. Odčítaním týchto vplyvov tak vystúpia do popredia jemné nepravidelnosti gravitačného poľa.

Spodná mapa na obrázku 5.2 znázorňuje poruchový potenciál vo výške 450 km nad elipsoidom GRS80. Hodnota 450 km približne zodpovedá výške obežnej dráhy niektorých nízko letiacich družíc nad zemským povrchom (pozri napríklad Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005). Z porovnania máp na obrázku 5.2 je zrejmé, že poruchový potenciál klesá s narastajúcou vzdialenosťou od Zeme (pozri rovnicu 5.5) a súčasne sa jeho priebeh vyhladzuje (pozri člen $\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}$ v rovnici 5.10).

Poruchový potenciál vystupuje vo fyzikálnej geodézii väčšinou ako neznáma funkcia, pretože gravitačný ani tiažový potenciál, a teda v širšom zmysle ani poruchový potenciál, nedokážeme jednoducho odmerať (kapitola 1.3.2). Poruchový potenciál ale priamo súvisí



Obrázok 5.3. Vektorová porucha tiažového zrýchlenia $\delta\mathbf{g}(P) = \mathbf{g}(P) - \boldsymbol{\gamma}(P)$ na povrchu Zeme a zvislicová odchýlka Θ medzi vektormi $\mathbf{g}(P)$ a $\boldsymbol{\gamma}(P)$. Symboly $\mathbf{n}_W$ a $\mathbf{n}_U$ označujú jednotkové vektory normál k ekvipotenciálnym plochám $W(P) =$ konšt. a $U(P) =$ konšt.

s výpočtom geoidu, preto sa ho snažíme určiť z iných merateľných veličín. V nasledujúcich kapitolách 5.2 až 5.4 predstavíme veličiny poruchového poľa, ktoré dokážeme odmerať.

5.2 Porucha tiažového zrýchlenia

Vektorová porucha tiažového zrýchlenia je definovaná vzťahom

$$\delta\mathbf{g}(P) = \mathbf{g}(P) - \boldsymbol{\gamma}(P) = \nabla W(P) - \nabla U(P) = \nabla T(P), \tag{5.17}$$

kde P je bod na povrchu Zeme alebo mimo nej (obrázok 5.3). Vektorovú poruchu tiažového zrýchlenia $\delta\mathbf{g}$ možno v širšom zmysle považovať za merateľnú veličinu, pretože skutočné tiažové zrýchlenie $\mathbf{g}$ je merateľné (kapitola 1.3.1) a normálne tiažové zrýchlenie $\boldsymbol{\gamma}$ možno vypočítať (kapitola 4.4).

Z kapitoly 1.3.1 vieme, že veľkosť vektora $\mathbf{g}(P)$ sa dá získať gravimetrickými meraniami a jeho smer astronomickým určením zemepisných súradníc bodu P. Astronomické merania sú ale spravidla náročné. Aj z tohto dôvodu sa vo fyzikálnej geodézii často stretávame so *skalárnou poruchou tiažového zrýchlenia*,

$$\delta g(P) = \|\mathbf{g}(P)\| - \|\boldsymbol{\gamma}(P)\| = g(P) - \gamma(P), \tag{5.18}$$

ktorá zanedbáva rozdielny smer vektorov $\mathbf{g}(P)$ a $\boldsymbol{\gamma}(P)$.[2] Ak odhliadneme od ojedinelej situácie, v ktorej majú vektory $\mathbf{g}(P)$ a $\boldsymbol{\gamma}(P)$ totožný smer, potom *v zmysle vzťahov (5.17) a (5.18)* platí

$$\|\delta\mathbf{g}(P)\| \neq \delta g(P). \tag{5.19}$$

[2] Ak majú dva vektory rozdielny smer (v tomto prípade vektory $\mathbf{g}(P)$ a $\boldsymbol{\gamma}(P)$), veľkosť vektora, ktorý vznikne ich rozdielom ($\|\delta\mathbf{g}(P)\|$), nie je možné získať rozdielom veľkostí týchto vektorov ($\|\mathbf{g}(P)\| - \|\boldsymbol{\gamma}(P)\|$).

Skalárna porucha tiažového zrýchlenia má najmä praktický význam, pretože určiť $\delta g(P)$ je výrazne jednoduchšie ako určiť $\delta\mathbf{g}(P)$. V ďalšom texte je potrebné rozlišovať medzi veličinami $\|\delta\mathbf{g}(P)\|$ a $\delta g(P)$.

Uhol medzi vektormi $\mathbf{g}(P)$ a $\boldsymbol{\gamma}(P)$ je spravidla nenulový, pretože smer vektora $\mathbf{g}(P)$ sa mení v závislosti od tvaru a rozloženia hmôt Zeme v okolí bodu P (pozri kapitolu 1.1.1), avšak vektor $\boldsymbol{\gamma}(P)$ túto zmenu nezachytáva z dôvodu jednoduchosti definície normálneho tiažového poľa (pozri kapitolu 4). Uhol medzi vektormi $\mathbf{g}(P)$ a $\boldsymbol{\gamma}(P)$ sa označuje symbolom Θ a nazýva sa *zvislicová odchýlka*. Najväčšie hodnoty dosahuje (zriedkavo) na úrovni približne 2 uhlových minút (Hirt a kol., 2013). Aj vďaka malej hodnote uhla Θ preto platí, že rozdiel $\|\delta\mathbf{g}(P)\| - \delta g(P)$ je dostatočne malý na to, aby mohol byť v mnohých úlohách fyzikálnej geodézie zanedbaný.

Vektorová a skalárna porucha tiažového zrýchlenia môžu byť definované aj v bode P_0 na geoide (obrázok 5.1),

$$\delta\mathbf{g}(P_0) = \mathbf{g}(P_0) - \boldsymbol{\gamma}(P_0), \tag{5.20}$$

$$\delta g(P_0) = g(P_0) - \gamma(P_0). \tag{5.21}$$

Prirodzene, tiažové zrýchlenie na geoide $\mathbf{g}(P_0)$ nedokážeme odmerať, ako to vyžadujú rovnice (5.20) a (5.21). Hodnotu $\mathbf{g}(P_0)$ získavame matematickou redukciou tiažového zrýchlenia $\mathbf{g}(P)$ o gravitačný účinok hmôt, ktoré sa nachádzajú nad geoidom (pozri Janák a kol., 2006). Po tejto redukcii je porucha tiažového zrýchlenia definovaná aj na geoide a v celom priestore nad ním.

5.2.1 Vzťah medzi skalárnou poruchou tiažového zrýchlenia a poruchovým potenciálom

Z predchádzajúcich kapitol vieme, že skalárna porucha tiažového zrýchlenia je merateľná veličina, zatiaľ čo poruchový potenciál je spravidla určovaná veličina. Je preto potrebné nájsť vzťah medzi týmito veličinami.

Nech $\mathbf{n}_W$ a $\mathbf{n}_U$ sú jednotkové vektory vonkajších normál k ekvipotenciálnym plochám $W(P) =$ konšt. a $U(P) =$ konšt. v bode P (pozri obrázok 5.3). Nech symboly n_W a n_U reprezentujú smery týchto vektorov. Z kapitol 1.1.1 a 1.3.2 vieme, že vektor $\mathbf{g}(P) = \nabla W(P)$ je kolmý na skutočnú ekvipotenciálnu plochu v bode P, no má opačný smer ako jednotkový vektor $\mathbf{n}_W$ z obrázku 5.3, teda

$$\|\mathbf{g}(P)\| = \|\nabla W(P)\| = -\left.\frac{\partial W}{\partial n_W}\right|_P . \tag{5.22}$$

Podobne platí

$$\|\boldsymbol{\gamma}(P)\| = \|\nabla U(P)\| = -\left.\frac{\partial U}{\partial n_U}\right|_P . \tag{5.23}$$

Vzťah (5.18) tak môžeme prepísať do tvaru

$$\begin{aligned}\delta g(P) = \|\mathbf{g}(P)\| - \|\boldsymbol{\gamma}(P)\| &= -\left(\frac{\partial W}{\partial n_W}\bigg|_P - \frac{\partial U}{\partial n_U}\bigg|_P\right) \approx -\left(\frac{\partial W}{\partial n_W}\bigg|_P - \frac{\partial U}{\partial n_W}\bigg|_P\right)\\ &= -\frac{\partial (W-U)}{\partial n_W}\bigg|_P = -\frac{\partial T}{\partial n_W}\bigg|_P \approx -\frac{\partial T}{\partial h}\bigg|_P \approx -\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_P .\end{aligned} \tag{5.24}$$

Aproximácia v prvom riadku vzťahu (5.24) je spôsobená nahradením derivácie $-\partial U/\partial n_U$ deriváciou $-\partial U/\partial n_W$, čo je prípustné vzhľadom na malé hodnoty uhla Θ (pozri obrázok 5.3). Ďalej sme nahradili deriváciu poruchového potenciálu v smere n_W deriváciou v smere elipsoidickej normály h, ktorá prechádza bodom P. Táto veličina sa zvykne nazývať *elipsoidická aproximácia skalárnej poruchy tiažového zrýchlenia*. Posledná približná rovnosť predstavuje *sférickú aproximáciu skalárnej poruchy tiažového zrýchlenia*. Táto veličina je definovaná deriváciou poruchového potenciálu v smere sférického sprievodiča r, ktorý prechádza bodom P.

Na záver spomeňme, že veličiny $-\left(\partial T/\partial n_W\right)|_P$, $-\left(\partial T/\partial h\right)|_P$ a $-\left(\partial T/\partial r\right)|_P$ nemusia byť vždy chápané len ako aproximácie rovnice (5.18). V niektorých situáciách môže byť napríklad potrebné definovať skalárnu poruchu tiažového zrýchlenia práve vzťahom $\delta g(P) = -\left(\partial T/\partial r\right)|_P$ a pod. Pri čítaní literatúry preto treba pozorne vnímať kontext, v ktorom sa porucha tiažového zrýchlenia vyskytuje.

5.2.2 Sférický harmonický rozvoj poruchy tiažového zrýchlenia

Dosadením (5.10) do poslednej rovnosti vzťahu (5.17) a s využitím (1.39) získame sférický harmonický rozvoj vektorovej poruchy tiažového zrýchlenia v lokálnom karteziánskom súradnicovom systéme $x^{\mathrm{s}}, y^{\mathrm{s}}, z^{\mathrm{s}}$ s pohyblivým začiatkom v bode P (pozri obrázok 1.9),

$$\delta\mathbf{g}(P) = \begin{bmatrix}\delta g_{x^{\mathrm{s}}}(P)\\ \delta g_{y^{\mathrm{s}}}(P)\\ \delta g_{z^{\mathrm{s}}}(P)\end{bmatrix}, \tag{5.25}$$

kde

$$\delta g_{x^{\mathrm{s}}}(P) = \frac{\partial T}{\partial x^{\mathrm{s}}}\bigg|_P = \frac{1}{r}\,\frac{\partial T}{\partial \varphi}\bigg|_P = \frac{GM}{R^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}\sum_{k=-n}^{n}\bar{t}_{nk}\,\frac{\partial \bar{Y}_{nk}(\varphi,\lambda)}{\partial\varphi}, \tag{5.26}$$

$$\delta g_{y^{\mathrm{s}}}(P) = \frac{\partial T}{\partial y^{\mathrm{s}}}\bigg|_P = \frac{1}{r\,\cos\varphi}\,\frac{\partial T}{\partial \lambda}\bigg|_P = \frac{GM}{R^2\,\cos\varphi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}\sum_{k=-n}^{n}\bar{t}_{nk}\,\frac{\partial \bar{Y}_{nk}(\varphi,\lambda)}{\partial\lambda}, \tag{5.27}$$

$$\delta g_{z^{\mathrm{s}}}(P) = \frac{\partial T}{\partial z^{\mathrm{s}}}\bigg|_P = \frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_P = -\frac{GM}{R^2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}\sum_{k=-n}^{n}\bar{t}_{nk}\,\bar{Y}_{nk}(\varphi,\lambda). \tag{5.28}$$

Derivácie $\partial\bar{Y}_{nk}(\varphi,\lambda)/\partial\varphi$ a $\partial\bar{Y}_{nk}(\varphi,\lambda)/\partial\lambda$ z rovníc (5.26) a (5.27) sú vyjadrené vo vzťahoch (2.79) a (2.80). Rovnice (5.26) a (5.27) sú singulárne (pozri kapitolu 3.3) na póloch. Rovnica (5.26) je singulárna pre člen $\mathrm{d}P_{nk}(\sin\varphi)/\mathrm{d}\varphi$ (pozri 2.79); singularitu v rovnici (5.27) spôsobuje člen $1/\cos\varphi$. Výpočtu rovníc (5.26) a (5.27) v oblastiach pólov je preto potrebné venovať osobitnú pozornosť. Použiť možno napríklad nesingulárne metódy výpočtu z prác Petrovskaya a Vershkov (2012), Sebera a kol. (2013) a Ivanov a kol. (2018).

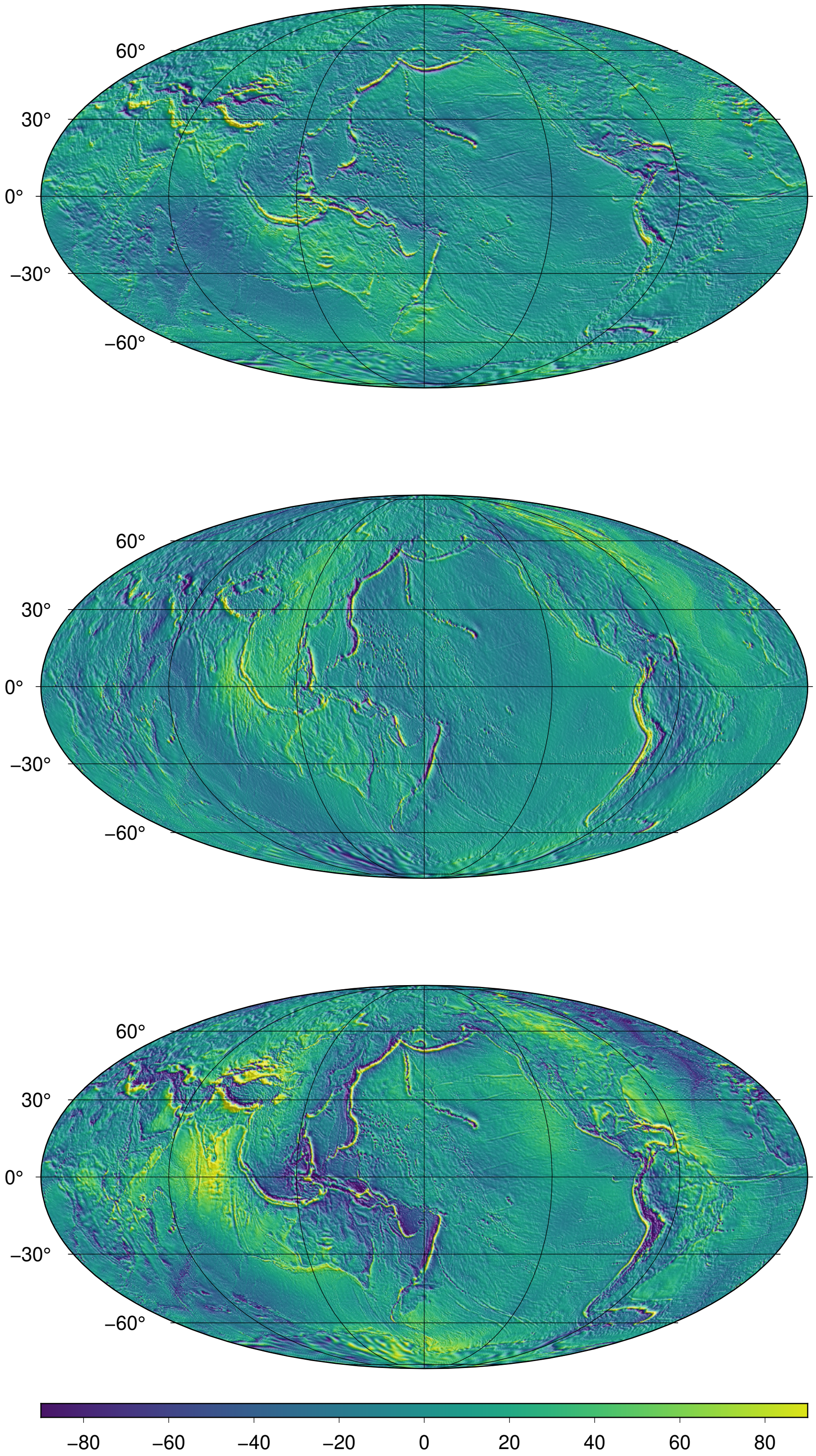
Použitím príslušných rotačných matíc môže byť vektor $\delta\mathbf{g}(P)$ transformovaný do iného súradnicového systému (pozri napríklad National Imagery and Mapping Agency, 2000). Takýmto spôsobom dokážeme vypočítať napríklad sférický harmonický rozvoj elipsoidickej aproximácie skalárnej poruchy tiažového zrýchlenia $-\partial T/\partial h$ či vektor $\delta\mathbf{g}(P)$ v súradnicovom systéme $x^{\mathrm{r}}, y^{\mathrm{r}}, z^{\mathrm{r}}$ (pozri kapitolu 3.2). Vektor $\delta\mathbf{g}(P)$ môže byť vypočítaný v súradnicovom systéme $x^{\mathrm{r}}, y^{\mathrm{r}}, z^{\mathrm{r}}$ i priamo pomocou sféroidického harmonického rozvoja. Z porovnania rovníc (5.24) a (5.28) je tiež zrejmé, že sférický harmonický rozvoj sférickej aproximácie skalárnej poruchy tiažového zrýchlenia $\delta g(P)$ je daný vzťahom

$$\delta g(P) = -\delta g_{z^{\mathrm{s}}}(P). \tag{5.29}$$

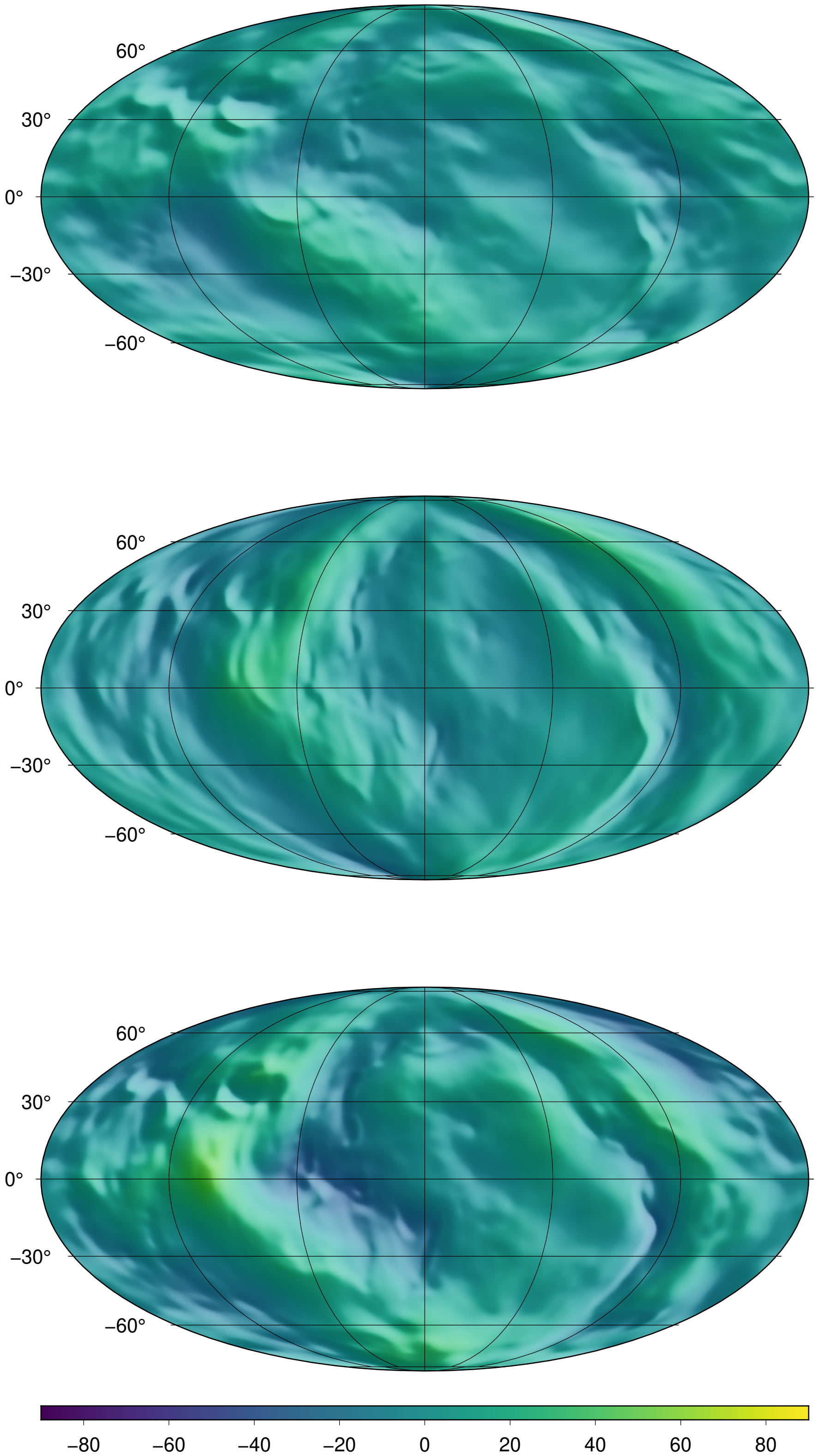
Na obrázku 5.4 je znázornený priebeh prvkov vektora $\delta\mathbf{g}(P)$ v súradnicovom systéme $x^{\mathrm{s}}, y^{\mathrm{s}}, z^{\mathrm{s}}$ (rovnice 5.26 až 5.28) na povrchu ekvipotenciálneho elipsoidu GRS80. Na mape elementu $\delta g_{x^{\mathrm{s}}}$ vidíme prvky gravitačného poľa prevažne v smere sférickej dĺžky, teda v smere kolmom na smer derivovania (pozri rovnicu 5.26). Podobne na mape $\delta g_{y^{\mathrm{s}}}$ vystupujú do popredia najmä prvky v smere sférickej šírky (pozri rovnicu 5.27). Na základe porovnania s poruchovým potenciálom na vrchnej mape obrázku 5.2 tiež možno konštatovať, že krátkovlnné prvky poruchy tiažového zrýchlenia sú výrazne silnejšie ako krátkovlnné prvky samotného poruchového potenciálu. Toto pozorovanie vysvetlíme rovnicami (5.26) až (5.28). Ako príklad si vezmime prvok $\delta g_{z^{\mathrm{s}}}$ a rovnicu (5.28). V tejto rovnici sa nachádza člen $(n+1)$, ktorý s narastajúcim stupňom n zosilňuje sférické harmonické koeficienty $\bar{t}_{nk}$ (porovnaj s rovnicou 5.10). Tým sa v porovnaní s poruchovým potenciálom zosilňuje vplyv (váha) sférických harmonických funkcií vyšších stupňov a rádov. Z kapitoly 2.5 vieme, že s narastajúcim stupňom narastá aj oscilácia sférických harmonických funkcií, čo vysvetľuje silnejšiu prítomnosť krátkovlnných prvkov v poruche tiažového zrýchlenia v porovnaní s poruchovým potenciálom.

Obrázok 5.5 znázorňuje prvky poruchy tiažového zrýchlenia vo výške 450 km nad elipsoidom GRS80. Z obrázku je zrejmé, že porucha tiažového zrýchlenia sa citeľne vyhladzuje s narastajúcou vzdialenosťou od Zeme. Toto vyhladzovanie je dokonca rýchlejšie ako v prípade poruchového potenciálu (porovnaj obrázky 5.4 a 5.5 s vrchnou a spodnou mapou na obrázku 5.2), pretože gravitačné zrýchlenie klesá s druhou mocninou vzdialenosti (rovnica 1.9), zatiaľ čo gravitačný potenciál klesá s prvou mocninou vzdialenosti výpočtového bodu od diferenciálneho hmotného elementu (rovnica 1.21).

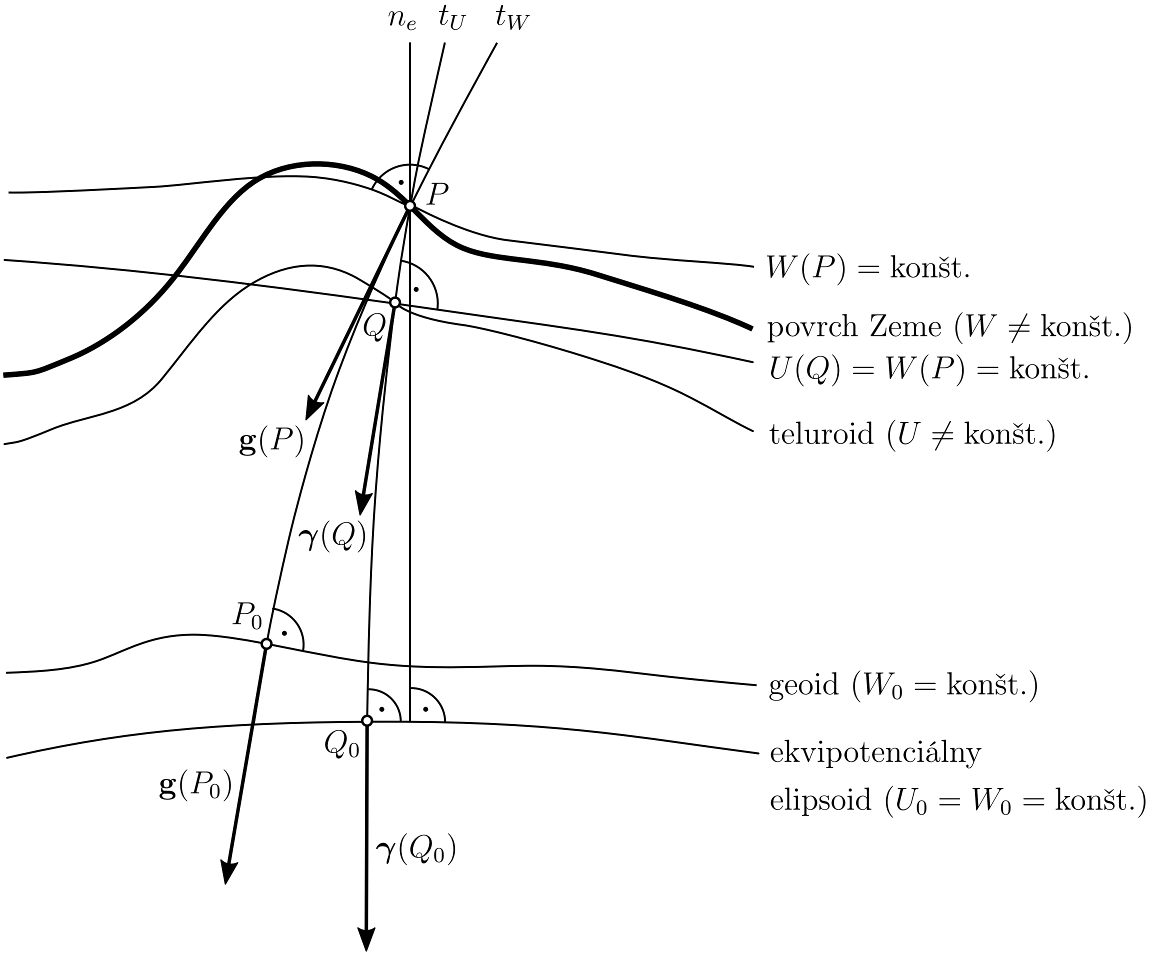
Porucha tiažového zrýchlenia sa spravidla udáva v jednotke mGal a nadobúda hodnoty v rozsahu od -400 mGal do 1000 mGal (hrubý odhad na základe modelu EIGEN-6C4). Vo fyzikálnej geodézii vystupuje zväčša ako meraná veličina, z ktorej sa snažíme určiť poruchový potenciál a v ďalšom kroku priebeh geoidu. Jedným z cieľov je preto vyjadriť poruchový potenciál T z rovníc (5.17) a (5.24).



Obrázok 5.4. Prvky vektorovej poruchy tiažového zrýchlenia $\delta g_{x^{\mathrm{s}}}$ (vrchná mapa), $\delta g_{y^{\mathrm{s}}}$ (prostredná mapa) a $\delta g_{z^{\mathrm{s}}}$ (spodná mapa) zemského gravitačného poľa vypočítané zo sférického harmonického modelu EIGEN-6C4 do stupňa 720 na povrchu elipsoidu GRS80 (jednotky mGal). Normálne tiažové pole je predpísané ekvipotenciálnym elipsoidom GRS80.



Obrázok 5.5. Prvky vektorovej poruchy tiažového zrýchlenia $\delta g_{x^{\mathrm{s}}}$ (vrchná mapa), $\delta g_{y^{\mathrm{s}}}$ (prostredná mapa) a $\delta g_{z^{\mathrm{s}}}$ (spodná mapa) získané rovnakým spôsobom ako na obrázku 5.4, avšak vo výške 450 km nad elipsoidom GRS80 (jednotky mGal). Na oboch obrázkoch je použitá rovnaká farebná škála.



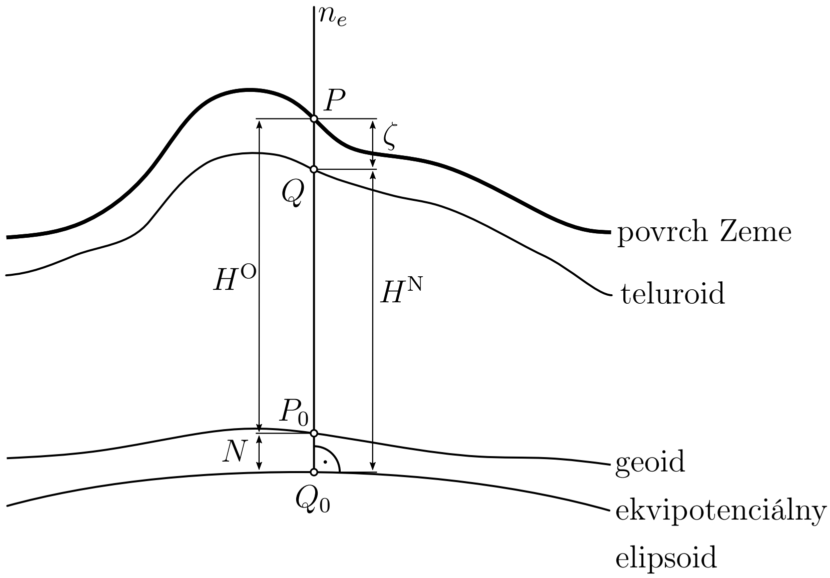
Obrázok 5.6. Vektorová anomália tiažového zrýchlenia na povrchu Zeme, $\Delta\mathbf{g}(P) = \mathbf{g}(P) - \boldsymbol{\gamma}(Q)$, a na geoide, $\Delta\mathbf{g}(P_0) = \mathbf{g}(P_0) - \boldsymbol{\gamma}(Q_0)$. Skutočná tiažnica t_W a normálna tiažnica t_U sú z vizualizačných dôvodov výrazne zakrivené voči normále k elipsoidu n_e. V skutočnosti majú všetky tri línie blízky priebeh.

5.3 Anomália tiažového zrýchlenia

Okrem poruchy tiažového zrýchlenia $\delta\mathbf{g}(P)$ (kapitola 5.2) je s tiažovým zrýchlením spojená aj anomália tiažového zrýchlenia $\Delta\mathbf{g}(P)$. *Vektorová anomália tiažového zrýchlenia* je daná rozdielom skutočného tiažového zrýchlenia $\mathbf{g}(P)$ v bode P na povrchu Zeme alebo mimo nej a normálneho tiažového zrýchlenia $\boldsymbol{\gamma}(Q)$ *v bode* Q (obrázok 5.6),

$$\Delta\mathbf{g}(P) = \mathbf{g}(P) - \boldsymbol{\gamma}(Q). \tag{5.30}$$

Bod Q získame nasledujúcim postupom. Nech bodom P prechádza normálna tiažnica t_U. Bod Q je taký bod na tiažnici t_U, pre ktorý platí $U(Q) = W(P)$. Vzdialenosť medzi bodmi Q a P meraná v aproximácii po normále n_e (obrázok 5.6) sa nazýva *výšková anomália* a označovať ju budeme symbolom ζ (obrázok 5.7). Keď zostrojíme výškovú anomáliu pre každý bod na zemskom povrchu, získame plochu, ktorú budeme nazývať *teluroid*. Teluroid predstavuje aproximáciu zemského povrchu. Výšková anomália ζ nado-



Obrázok 5.7. Ortometrická výška H^{O} a normálna výška podľa Molodenského H^{N} merané v elipsoidickej aproximácii po normále k elipsoidu prechádzajúcej bodom P. Ortometrická výška H^{O} je v skutočnosti dĺžka skutočnej tiažnice t_W medzi bodmi P_0 a P a normálna výška podľa Molodenského je dĺžka normálnej tiažnice t_U medzi bodmi Q_0 a Q (pozri obrázok 5.6).

búda celosvetovo hodnoty približne od -100 m do 100 m, podobne ako výška geoidu nad referenčným elipsoidom (pozri kapitolu 5). *Teluroid nie je ekvipotenciálna plocha.*

Dôvod zavedenia anomálie tiažového zrýchlenia je najmä historický. Na určenie *poruchy tiažového zrýchlenia* v bode P je potrebné poznať jednak tiažové zrýchlenie $g(P)$, ale tiež elipsoidickú šírku a elipsoidickú výšku bodu P. Znalosť polohy je nutná na výpočet normálneho tiažového zrýchlenia v bode merania (kapitola 4). V súčasnosti už môže byť elipsoidická výška jednoducho určená pomocou GNSS meraní. V preddružicovej ére však bolo možné použiť iba niveláciu, ktorou určujeme fyzikálne výšky, napríklad výšku definovanú dĺžkou normálnej tiažnice t_U medzi bodmi Q_0 a Q (obrázok 5.6). Táto výška sa nazýva *normálna výška podľa Molodenského* H^{N} (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005).[3] Normálne tiažové zrýchlenie tak nebolo možné vypočítať vo výške h nad ekvipotenciálnym elipsoidom (bod P), ale iba vo výške H^{N} (bod Q), čím vznikla *anomália tiažového zrýchlenia*. Vzhľadom na súčasnú dostupnosť GNSS je možné očakávať, že v budúcnosti bude vo fyzikálnej geodézii dominovať porucha tiažového zrýchlenia (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005). V súčasnosti sa bežne stretávame s poruchou tiažového zrýchlenia aj s anomáliou tiažového zrýchlenia.

Hoci rovnica (5.30) predpokladá vektory $\mathbf{g}$ a $\boldsymbol{\gamma}$ v dvoch rôznych bodoch, vektor $\Delta\mathbf{g}$ budeme formálne pripisovať bodu P, čomu zodpovedá zápis $\Delta\mathbf{g}(P)$.

Vektorová anomália tiažového zrýchlenia môže byť definovaná aj na geoide (obrázok 5.6),

$$\Delta\mathbf{g}(P_0) = \mathbf{g}(P_0) - \boldsymbol{\gamma}(Q_0). \tag{5.31}$$

[3] Niveláciou možno určiť aj iné typy fyzikálnych výšok (pozri Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005).

Aj v tomto prípade platí rovnosť $U(Q_0) = W(P_0)$ (pozri kapitolu 4), podobne ako platí rovnosť $U(Q) = W(P)$ v súvislosti s rovnicou (5.30). Pre diskusiu o získaní hodnoty tiažového zrýchlenia na geoide $\mathbf{g}(P_0)$ pozri kapitolu 5.2.

Okrem vektorovej anomálie tiažového zrýchlenia sa často stretávame aj so *skalárnou anomáliou tiažového zrýchlenia* (pozri tiež kapitolu 5.2), či už na povrchu Zeme alebo mimo nej,

$$\Delta g(P) = \|\mathbf{g}(P)\| - \|\boldsymbol{\gamma}(Q)\| = g(P) - \gamma(Q), \tag{5.32}$$

alebo na geoide,

$$\Delta g(P_0) = \|\mathbf{g}(P_0)\| - \|\boldsymbol{\gamma}(Q_0)\| = g(P_0) - \gamma(Q_0). \tag{5.33}$$

Podobne ako v súvislosti so skalárnou poruchou tiažového zrýchlenia (kapitola 5.2), aj tentokrát platí

$$\|\Delta\mathbf{g}(P)\| \neq \Delta g(P), \tag{5.34}$$

$$\|\Delta\mathbf{g}(P_0)\| \neq \Delta g(P_0). \tag{5.35}$$

Anomália tiažového zrýchlenia sa udáva väčšinou v jednotke mGal. Spolu s poruchou tiažového zrýchlenia patrí medzi základné merateľné veličiny fyzikálnej geodézie, z ktorých určujeme tvar Zeme. Veličiny $\Delta\mathbf{g}(P)$, $\Delta g(P)$, $\delta\mathbf{g}(P)$, $\delta g(P)$ sa využívajú prevažne na určenie výškovej anomálie ζ, ktorá je spätá s normálnou výškou podľa Molodenského H^{N}. Veličiny $\Delta\mathbf{g}(P_0)$, $\Delta g(P_0)$, $\delta\mathbf{g}(P_0)$, $\delta g(P_0)$ sa využívajú najmä na určovanie geoidu, ktorý je referenčnou plochou pre *ortometrickú výšku* H^{O} (pozri kapitolu 1.5.2).

5.3.1 Vzťah medzi skalárnou anomáliou tiažového zrýchlenia a poruchovým potenciálom

Nájdime teraz vzťah medzi skalárnou anomáliou tiažového zrýchlenia a poruchovým potenciálom, podobne ako sme našli vzťah medzi skalárnou poruchou tiažového zrýchlenia a poruchovým potenciálom (rovnica 5.24). Tentokrát situáciu komplikuje rozdielna poloha bodov P a Q, resp. P_0 a Q_0 a zakrivenie normálnej tiažnice (obrázok 5.6). Úlohu si výrazne zjednodušíme linearizáciou problému a s využitím elipsoidickej aproximácie z obrázku 5.7. Obe aproximácie sú postačujúce pre praktické aplikácie (Moritz, 1980). Následne odvodíme vzťah medzi oboma veličinami vo sférickej aproximácii. Exaktné riešenie bolo nájdené v prácach Meissl (1971) a Krarup (1973) (pozri tiež napríklad Moritz, 1980; Janák a kol., 2006).

Elipsoidická aproximácia

Hľadať budeme najprv vzťah medzi $\Delta g(P_0)$ a $T(P_0)$ v bode P_0 na geoide. Rozviňme normálne tiažové zrýchlenie γ v okolí bodu Q_0 do Taylorovho radu a následne zanedbajme členy druhého rádu a vyšších rádov, pretože ich vplyv je malý,

$$\gamma(P_0) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left.\frac{\partial^i \gamma}{\partial h^i}\right|_{Q_0} N^i \approx \gamma(Q_0) + \left.\frac{\partial \gamma}{\partial h}\right|_{Q_0} N. \tag{5.36}$$

Dosadením (5.36) do (5.33) dostaneme v kombinácii s (5.24) vzťah

$$\begin{aligned}\Delta g(P_0) &= g(P_0) - \gamma(P_0) + \left.\frac{\partial\gamma}{\partial h}\right|_{Q_0} N = \delta g(P_0) + \left.\frac{\partial\gamma}{\partial h}\right|_{Q_0} N \\ &= -\left.\frac{\partial T}{\partial h}\right|_{P_0} + \left.\frac{\partial\gamma}{\partial h}\right|_{Q_0} N.\end{aligned} \tag{5.37}$$

Rovnica (5.37) popisuje vzťah medzi skalárnou poruchou a skalárnou anomáliou tiažového zrýchlenia v elipsoidickej aproximácii. Výšku geoidu nad referenčným elipsoidom N získame rozvojom normálneho tiažového potenciálu U v okolí bodu Q_0 do Taylorovho radu,

$$U(P_0) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left.\frac{\partial^i U}{\partial h^i}\right|_{Q_0} N^i \approx U(Q_0) + \left.\frac{\partial U}{\partial h}\right|_{Q_0} N = U(Q_0) - \gamma(Q_0)\, N. \tag{5.38}$$

S uvážením $W(P_0) = U(Q_0)$ (pozri kapitolu 4) a vzťahu (5.1) môžeme prepísať rovnicu (5.38) do tvaru

$$N = \frac{T(P_0)}{\gamma(Q_0)}. \tag{5.39}$$

Vzťah (5.39) sa nazýva *Brunsov vzorec* a umožňuje vypočítať *geometrický parameter* (výšku geoidu nad referenčným elipsoidom N) *z fyzikálnych parametrov* (poruchový potenciál $T(P_0)$ na geoide a normálne tiažové zrýchlenie $\gamma(Q_0)$ na ekvipotenciálnom elipsoide). Brunsov vzorec je základom určovania geoidu. Dodajme, že zanedbanie členov druhého rádu a vyšších rádov v rovnici (5.38) spôsobuje chyby v určení N na úrovni niekoľko málo milimetrov (Jekeli, 2015; L. Sjöberg a Bagherbandi, 2017), teda o rád menšie, ako je súčasná (približne centimetrová) presnosť určenia geoidu. Je potrebné tiež zdôrazniť, že vzťah (5.39) bol získaný za predpokladu $U_0 = W_0$. V praktickej realizácii je pomerne náročné splniť túto podmienku (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005). Preto ak $U_0 \neq W_0$, je potrebné zohľadniť túto nerovnosť v procese odvodenia vzťahu pre N (pozri napríklad Vaníček a Krakiwsky, 1986 alebo Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005).

Dosadením (5.39) do (5.37) získame hľadaný vzťah medzi anomáliou tiažového zrýchlenia a poruchovým potenciálom,

$$\Delta g(P_0) = -\left.\frac{\partial T}{\partial h}\right|_{P_0} + \frac{1}{\gamma(Q_0)} \left.\frac{\partial\gamma}{\partial h}\right|_{Q_0} T(P_0). \tag{5.40}$$

Rovnica (5.40) sa nazýva *základná rovnica fyzikálnej geodézie.*

Podobným spôsobom možno získať základnú rovnicu fyzikálnej geodézie pre anomáliu tiažového zrýchlenia na povrchu Zeme alebo mimo Zeme,

$$\begin{aligned}\Delta g(P) &= -\left.\frac{\partial T}{\partial h}\right|_{P} + \left.\frac{\partial\gamma}{\partial h}\right|_{Q} \zeta \\ &= -\left.\frac{\partial T}{\partial h}\right|_{P} + \frac{1}{\gamma(Q)} \left.\frac{\partial\gamma}{\partial h}\right|_{Q} T(P).\end{aligned} \tag{5.41}$$

Na získanie poslednej rovnosti vo vzťahu (5.41) sme využili *zovšeobecnený Brunsov vzorec*

$$\zeta = \frac{T(P)}{\gamma(Q)}, \tag{5.42}$$

ktorý sme získali podobným spôsobom ako vzťah (5.39).

Pre kvantifikáciu efektu linearizácie na anomáliu tiažového zrýchlenia pozri napríklad Claessens (2006).

Je vhodné zdôrazniť, že rôznym bodom P, ktoré sa nachádzajú na povrchu Zeme alebo mimo nej a súčasne ležia na tej istej normále k elipsoidu, prislúcha rozličná hodnota výškovej anomálie ζ. Dôvod je ten, že skutočný tiažový potenciál $W(P)$ a normálny tiažový potenciál $U(Q)$ klesajú s narastajúcou elipsoidickou výškou rozlične, teda $\frac{\partial W}{\partial h}\big|_P \neq \frac{\partial U}{\partial h}\big|_Q$, $\frac{\partial^2 W}{\partial h^2}\big|_P \neq \frac{\partial^2 U}{\partial h^2}\big|_Q$ atď.

Sférická aproximácia

Aproximujme deriváciu v smere elipsoidickej normály $\partial/\partial h$ v rovnici (5.41) deriváciou v smere sprievodiča $\partial/\partial r$,

$$\Delta g(P) = -\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_P + \frac{1}{\gamma(Q)}\left.\frac{\partial \gamma}{\partial r}\right|_Q T(P). \tag{5.43}$$

V predošlej rovnici nadobúda člen

$$\frac{1}{\gamma(Q)}\left.\frac{\partial \gamma}{\partial r}\right|_Q \tag{5.44}$$

malé hodnoty. Aby sme získali jednoduchšie matematické vzťahy, môžeme na jeho výpočet využiť gravitačné pole *nerotujúcej* homogénnej gule (alebo ekvivalentne hmotného bodu, pozri poznámku v kapitole 2.7), ktoré v tomto prípade dostatočne presne aproximuje normálne tiažové pole ekvipotenciálneho elipsoidu (pozri kapitolu 4.1.1). Zo vzťahu pre gravitačný potenciál nerotujúcej homogénnej gule (1.74) potom vyplýva

$$U \approx U_g = \frac{GM}{r}, \tag{5.45}$$

$$\gamma = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{GM}{r^2}, \tag{5.46}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial r} = -2\frac{GM}{r^3}, \tag{5.47}$$

a tak môžeme rovnicu (5.44) prepísať do tvaru

$$\frac{1}{\gamma(Q)}\left.\frac{\partial \gamma}{\partial r}\right|_Q \approx \frac{r^2}{GM}\left.\left(-2\frac{GM}{r^3}\right)\right|_Q = -\left.\frac{2}{r}\right|_Q. \tag{5.48}$$

Sférická aproximácia anomálie tiažového zrýchlenia je potom daná vzťahom

$$\Delta g(P) = -\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_P - \left.\frac{2}{r}\right|_P T(P), \tag{5.49}$$

pričom sme pre zjednodušenie využili približnú rovnosť

$$\left.\frac{2}{r}\right|_Q T(P) \approx \left.\frac{2}{r}\right|_P T(P). \tag{5.50}$$

Podobným spôsobom získame sférickú aproximáciu skalárnej anomálie tiažového zrýchlenia na geoide,

$$\Delta g(P_0) = -\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{P_0} - \left.\frac{2}{r}\right|_{P_0} T(P_0). \tag{5.51}$$

Sférická aproximácia skalárnej anomálie a skalárnej poruchy tiažového zrýchlenia spôsobuje chybu v určení výšky geoidu nad referenčným elipsoidom N približne na úrovni $0.003\,N$ (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005). Pri dosahovaných hodnotách N zhruba od -100 m do 100 m ide o chybu v určení geoidu na úrovni niekoľkých desatín metra. V súčasnosti tak na presný výpočet geoidu už sférická aproximácia nepostačuje.

5.3.2 Sférický harmonický rozvoj anomálie tiažového zrýchlenia

Presný rozvoj anomálie tiažového zrýchlenia do radu sférických harmonických funkcií je pre zložitosť jej definície náročný (pozri napríklad Barthelmes, 2013). Uvedieme preto iba rozvoj skalárnej anomálie tiažového zrýchlenia vo sférickej aproximácii. Dosadením (5.10) do (5.49) získame

$$\Delta g(P) = \frac{GM}{R^2}\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}\sum_{k=-n}^{n}\bar{t}_{nk}\,\bar{Y}_{nk}(\varphi,\lambda). \tag{5.52}$$

Vo sférickej aproximácii sa tak anomália tiažového zrýchlenia (5.52) odlišuje od poruchy tiažového zrýchlenia (5.29 a 5.28) iba v člene $(n-1)$, ktorý nahradil člen $(n+1)$. Všimnime si, že koeficienty $\bar{t}_{nk}$ stupňa $n = 1$ neovplyvňujú anomáliu tiažového zrýchlenia v dôsledku nulového člena $(n-1)$.

Anomália tiažového zrýchlenia a porucha tiažového zrýchlenia nadobúdajú podobné hodnoty, preto sme vyobrazenie anomálie tiažového zrýchlenia vynechali (pozri priebeh poruchy tiažového zrýchlenia na obrázkoch 5.4 a 5.5).

Dve poznámky k anomálii tiažového zrýchlenia

V súvislosti s odvodením Brunsovho vzorca a základnej rovnice fyzikálnej geodézie je vhodné opäť zdôrazniť dôležitosť voľby normálneho poľa. Ak by bolo normálne pole zvolené nevhodne, teda rozdiely medzi skutočným a normálnym poľom by s ohľadom na súčasnú presnosť nemohli byť považované za lineárne, nebolo by možné obmedziť rozvoje (5.36) a (5.38) iba na prvé dva členy. Pridanie už i len kvadratického člena výrazne komplikuje úlohu.

Druhá poznámka sa týka anomálií tiažového zrýchlenia na geoide $\Delta g(P_0)$. Anomálie tiažového zrýchlenia sú, samozrejme, merané na povrchu Zeme vo forme $\Delta g(P)$ a na geoid sú redukované matematickými metódami až po odmeraní. V rámci tejto redukcie je potrebné v prvom kroku matematicky odstrániť gravitačný účinok topografických hmôt na tiažové zrýchlenie.[4] Tým zabezpečíme jednak to, že v priestore nad geoidom bude platiť Laplaceova rovnica, ale tiež to, že bod P bude takpovediac visieť vo vzduchu. Absencia hmôt medzi geoidom a zemským povrchom tak umožní v ďalšom kroku analyticky pokračovať tiažové zrýchlenie nadol z bodu P do bodu P_0 (pre analytické pokračovanie nadol pozri kapitolu 1.2.5). Táto úloha je však numericky nestabilná. To znamená, že v princípe ju nie je možné vyriešiť bez nejakej formy stabilizácie. Tou môže byť napríklad mierne vyhladenie dát či zníženie ich rozlíšenia. Stabilizácia ale spôsobí, že v skutočnosti získame riešenie inej úlohy ako tej, ktorá bola formulovaná (Sansò a Sideris, 2017), hoci získané riešenie môže byť rozumne blízke hľadanému riešeniu. Aby bolo možné potlačiť odchýlky od hľadaného riešenia, je potrebné zvyšovať presnosť a rozlíšenie vstupných údajov, čo je v praktických aplikáciách problematické pre náročnosť získavania meraných dát. Redukcia anomálií tiažového zrýchlenia zo zemského povrchu na geoid tak patrí medzi najnáročnejšie časti určovania geoidu.

5.3.3 Anomálie tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu a Bouguerove anomálie tiažového zrýchlenia

Anomália tiažového zrýchlenia, ktorú sme definovali vzťahmi (5.30) a (5.32), sa v literatúre nazýva aj *povrchová anomália tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu* (Sansò a Sideris, 2013). V tejto kapitole ju budeme označovať symbolom $\Delta g_{\mathrm{vv}}(P)$. Okrem nej sa môžeme často stretnúť aj s *anomáliou tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu na geoide* $\Delta g_{\mathrm{vv}}(P_0)$ a s *Bouguerovou anomáliou tiažového zrýchlenia* $\Delta g_{\mathrm{B}}(P)$. V tejto kapitole stručne popíšeme nové veličiny $\Delta g_{\mathrm{vv}}(P_0)$ a $\Delta g_{\mathrm{B}}(P)$.

Na získanie anomálie tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu na geoide $\Delta g_{\mathrm{vv}}(P_0)$ budeme predpokladať, že nad geoidom nie sú hmoty (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005). Bod P sa teda nachádza *vo voľnom vzduchu* (pozri obrázok 5.6), a tak tiažové zrýchlenie nad geoidom môžeme rozvinúť do Taylorovho radu. Po zanedbaní nelineárnych členov rozvoja a po nahradení gradientu skutočného tiažového zrýchlenia gradientom normálneho tiažového zrýchlenia získame vzťah

$$g(P) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial^i g}{\partial H^i}\bigg|_{P_0} H^i \approx g(P_0) + \frac{\partial g}{\partial H}\bigg|_{P_0} H \approx g(P_0) + \frac{\partial \gamma}{\partial h}\bigg|_{Q_0} H = g(P_0) - F. \tag{5.53}$$

Táto rovnica predstavuje analytické pokračovanie tiažového zrýchlenia nahor z bodu P_0 do bodu P (pozri kapitolu 1.2.5). Tiažové zrýchlenie na geoide potom získame vzťahom

$$g(P_0) \approx g(P) + F, \tag{5.54}$$

[4] Popis redukcie tiažového zrýchlenia na geoid s využitím regularizácie zemského telesa sa nachádza v práci Janák a kol. (2006).

ktorý reprezentuje analytické pokračovanie tiažového zrýchlenia nadol z bodu P do bodu P_0.[5] Člen F teda *približne* redukuje skutočné tiažové zrýchlenie z bodu P na povrchu Zeme do bodu P_0 na geoide. Použitím rovníc (5.33) a (5.54) získame výsledný vzťah pre anomáliu tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu na geoide

$$\Delta g_{\mathrm{vv}}(P_0) = g(P) + F - \gamma(Q_0). \tag{5.55}$$

Pre nízku presnosť sa rovnica (5.55) už v súčasnosti prakticky nepoužíva. Namiesto toho sa anomálie tiažového zrýchlenia na geoide získavajú napríklad pomocou regularizácie zemského telesa (pozri kapitolu 5.1).

Druhá veličina, *Bouguerova anomália tiažového zrýchlenia* $\Delta g_{\mathrm{B}}(P)$ (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005), dostala názov po P. Bouguerovi (1698 až 1758), francúzskom matematikovi, geofyzikovi, geodetovi a astronómovi. Využíva sa najmä v geofyzike na detekciu podpovrchových hustotných kontrastov. Na jej získanie je potrebné vypočítať gravitačný účinok topografických hmôt[6] na tiažové zrýchlenie a odstrániť ho z povrchovej anomálie tiažového zrýchlenia. Bouguerove anomálie tak majú výrazne hladší priebeh ako povrchové anomálie, ktoré sú veľmi závislé od lokálnych hmôt. V geodézii často využívame hladký priebeh Bouguerových anomálií nasledujúcim spôsobom. Povrchové anomálie tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu sú v teréne odmerané spravidla v sieti nepravidelne rozmiestnených bodov. Na numericky efektívne určovanie tvaru Zeme je ale potrebné, aby boli dáta dostupné v pravidelnej sieti bodov. Povrchové anomálie preto často potrebujeme interpolovať do pravidelnej siete. Avšak povrchové anomálie majú komplikovaný priebeh, podobne ako samotný zemský povrch, preto nie sú vhodné na interpoláciu. Namiesto toho môžeme v bodoch nepravidelnej siete vypočítať najprv Bouguerove anomálie a tie potom interpolovať do pravidelnej siete bodov. Vďaka hladkému priebehu Bouguerových anomálií sa takouto interpoláciou dopustíme menších chýb, ako keby sme interpolovali priamo povrchové anomálie. Povrchové anomálie napokon získame v bodoch pravidelnej siete spätným výpočtom z interpolovaných Bouguerových anomálií. V geodézii sa teda Bouguerove anomálie využívajú najmä ako pomocná veličina.

Podrobnosti o gravitačnom účinku topografických hmôt, o anomáliách tiažového zrýchlenia, o Bouguerových anomáliách tiažového zrýchlenia a o ich historickom pozadí sa nachádzajú napríklad v publikáciách Meurers (2017), Mikuška a kol. (2017) a Vajda a kol. (2020a).

[5] Je vhodné pripomenúť, že analytické pokračovanie *nadol* je numericky nestabilná úloha (pozri kapitolu 1.2.5). Stabilizácia je v tomto prípade vykonaná zanedbaním nelineárnych členov Taylorovho rozvoja (5.53) a nahradením gradientu $\left.\frac{\partial g}{\partial H}\right|_{P_0}$ gradientom $\left.\frac{\partial \gamma}{\partial h}\right|_{Q_0}$. Pre diskusiu o presnosti aproximácie $\frac{\partial g}{\partial H} \approx \frac{\partial \gamma}{\partial h}$ pozri kapitolu 4.4.2.

[6] Definícia pojmu topografické hmoty sa nachádza na strane 68.

5.4 Zvislicové odchýlky

V kapitolách 5.2 a 5.3 sme videli, že jedna z merateľných veličín fyzikálnej geodézie, tiažové zrýchlenie, súvisí s poruchovým potenciálom, a teda aj s určovaným tvarom Zeme (pozri rovnicu 5.39). Medzi časté geodetické merania ale patrí aj určovanie polohy bodu na povrchu Zeme pomocou astronomických a GNSS meraní. Je preto výhodné nájsť vzťah aj medzi týmito meraniami a poruchovým potenciálom, pretože nám to umožní určovať tvar Zeme z ďalšieho typu geodetických dát. Hoci to na prvý pohľad nemusí byť zrejmé, takýto vzťah naozaj existuje. Na jeho nájdenie zavedieme veličinu, ktorú budeme nazývať zvislicová odchýlka.

Zvislicová odchýlka je uhol medzi skutočnou zvislicou (pozri kapitolu 1.3.2) a zvoleným referenčným smerom (Torge a Müller, 2012). Referenčný smer často závisí od aplikácie, preto sa v literatúre môžeme stretnúť s rozličnými definíciami zvislicových odchýlok (obrázok 5.8).

- *Helmertova zvislicová odchýlka* Θ^{Helmert} je uhol medzi skutočnou zvislicou z_W^P prechádzajúcou bodom P na povrchu Zeme a normálou k elipsoidu n_e^P prechádzajúcou bodom P. Táto zvislicová odchýlka sa tiež zvykne nazývať *astronomicko-geodetická zvislicová odchýlka* (Jekeli, 1999).

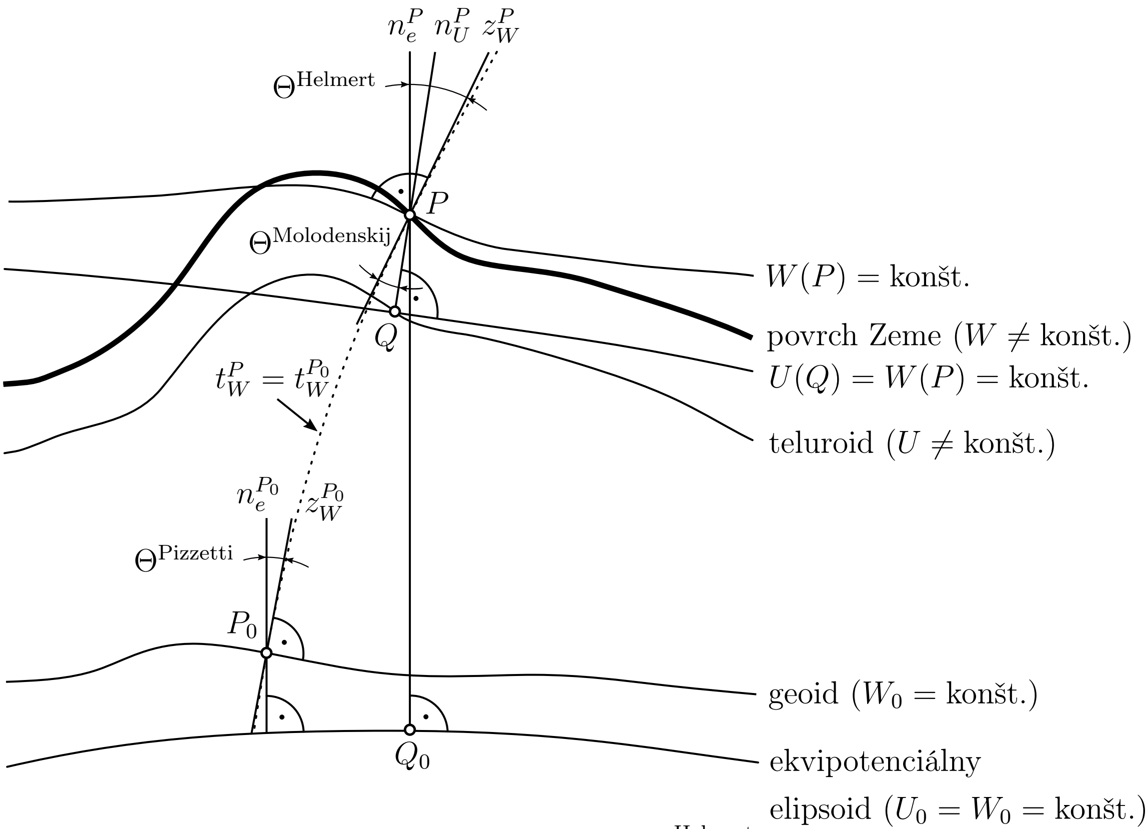
- *Molodenského zvislicová odchýlka* $\Theta^{\text{Molodenskij}}$ je uhol medzi skutočnou zvislicou z_W^P prechádzajúcou bodom P na povrchu Zeme alebo mimo nej a normálou n_U^P k takej normálnej ekvipotenciálnej ploche $U(Q) = \text{konšt.}$, ktorej normálny tiažový potenciál $U(Q)$ je rovný skutočnému tiažovému potenciálu $W(P)$, pričom normála n_U^P prechádza bodom P.

- *Pizzettiho zvislicová odchýlka* Θ^{Pizzetti} je uhol medzi skutočnou zvislicou $z_W^{P_0}$ prechádzajúcou bodom P_0 na povrchu geoidu a normálou k elipsoidu $n_e^{P_0}$ prechádzajúcou bodom P_0.

- *Gravimetrická zvislicová odchýlka* Θ^{grav} je uhol medzi vektormi $\mathbf{g}(P)$ a $\boldsymbol{\gamma}(P)$ v bode P na povrchu Zeme alebo mimo nej (obrázok 5.3).[7] Po regularizácii zemského telesa (kapitola 5.1) možno definovať gravimetrické zvislicové odchýlky aj na geoide a v jeho vonkajšom priestore.

Rozdiel medzi Helmertovou a Molodenského zvislicovou odchýlkou je spôsobený zakrivením normálnej tiažnice (Jekeli, 1999). Zvislicové odchýlky Θ nadobúdajú hodnoty od 0 v rovinatom teréne do približne $2'$ v blízkosti najväčších pohorí na Zemi (Hirt a kol., 2013), zvyčajne však najviac niekoľko desiatok uhlových sekúnd.

[7] Vzhľadom na malé zakrivenie normálnej tiažnice a vzhľadom na krátku vzdialenosť medzi bodmi P a Q je uhol medzi vektormi $\mathbf{g}(P)$ a $\boldsymbol{\gamma}(Q)$ (obrázok 5.6) veľmi podobný uhlu medzi vektormi $\mathbf{g}(P)$ a $\boldsymbol{\gamma}(P)$ (obrázok 5.3). V mnohých situáciách preto nie je potrebné rozlišovať, či gravimetrická zvislicová odchýlka je daná vektormi $\mathbf{g}(P)$ a $\boldsymbol{\gamma}(P)$ alebo $\mathbf{g}(P)$ a $\boldsymbol{\gamma}(Q)$.

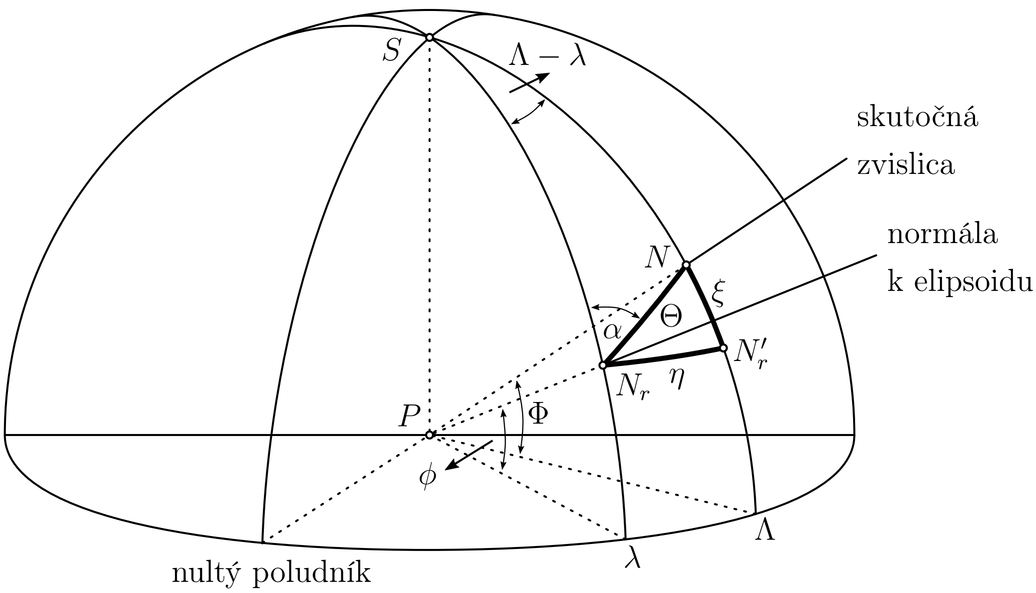


Obrázok 5.8. Helmertova zvislicová odchýlka Θ^{Helmert}, Molodenského zvislicová odchýlka $\Theta^{\text{Molodenskij}}$ a Pizzettiho zvislicová odchýlka Θ^{Pizzetti}. Symbol t_W^P označuje skutočnú tiažnicu prechádzajúcu bodom P na povrchu Zeme. Tiažnica t_W^P je identická so skutočnou tiažnicou $t_W^{P_0}$, ktorá prechádza bodom P_0 na geoide. Symboly z_W^P a $z_W^{P_0}$ označujú skutočné zvislice v bodoch P a P_0. Zvislicou rozumieme dotyčnicu k tiažnici, v tomto prípade v bodoch P a P_0 (pozri kapitolu 1.3.2). Symbol n označuje normálu, pričom dolný index označuje plochu, na ktorú je normála kolmá (e pre elipsoid, U pre normálnu ekvipotenciálnu plochu U = konšt.), a horný index označuje bod, cez ktorý normála prechádza. Poznamenajme, že normála n_U^P nie je totožná s *normálnou* zvislicou z_U^Q, hoci sú si veľmi blízke.

Nech je daný súradnicový systém, v ktorom je smer skutočnej zvislice daný astronomickými súradnicami Φ a Λ. Nech je ďalej daný referenčný elipsoid, voči ktorému sú určované súradnice Φ^{Ref} a Λ^{Ref} (napríklad sférické alebo elipsoidické) referenčného smeru zvislicovej odchýlky. Predpokladajme, že osi z oboch súradnicových systémov sú rovnobežné a rovnako tak sú rovnobežné aj roviny ich nultých poludníkov (Torge a Müller, 2012).[8] Rovnobežným posunutím takýchto súradnicových systémov do bodu P, v ktorom určujeme zvislicovú odchýlku, získame situáciu znázornenú na obrázku 5.9.

Zvislicovú odchýlku možno popísať rozličnými spôsobmi, z ktorých dva sú obzvlášť

[8] Realizácia súčasných súradnicových systémov zabezpečuje splnenie týchto podmienok s dostatočnou presnosťou. Riešenie pre súradnicové systémy, ktoré tieto podmienky nespĺňajú, sa nachádza napríklad v práci Pick (2000).



Obrázok 5.9. Zvislicová odchýlka na jednotkovej sfére so stredom v bode P, v ktorom je určovaná zvislicová odchýlka. Zvislicová odchýlka je znázornená pomocou 1) veľkosti $\Theta = \|\boldsymbol{\Theta}\|$ a azimutu α a 2) pravouhlých priemetov ξ a η do meridiánovej roviny a do roviny prvého vertikálu. Symboly Φ a Λ označujú astronomické súradnice bodu P, v ktorom je určovaná zvislicová odchýlka (pozri obrázok 5.8). Symboly ϕ a λ označujú elipsoidickú šírku a elipsoidickú dĺžku bodu P. Referenčným smerom na tomto obrázku je teda normála k elipsoidu, ktorá prechádza bodom P.

výhodné (obrázok 5.9). Prvý prístup využíva veľkosť uhlového vychýlenia Θ medzi skutočnou zvislicou a referenčným smerom a azimut α, ktorý udáva smer vychýlenia v rovine lokálneho horizontu. Druhý spôsob rozkladá zvislicovú odchýlku do dvoch kolmých smerov. Jedna zložka ξ popisuje priemet zvislicovej odchýlky do roviny meridiánu a druhá zložka η popisuje priemet zvislicovej odchýlky do roviny prvého vertikálu.

Zložky ξ a η získame z obrázku 5.9,

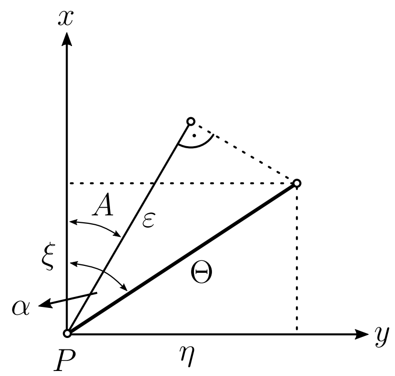
$$\begin{aligned} \xi &= \Phi - \phi, \\ \eta &= (\Lambda - \lambda)\, \cos\phi. \end{aligned} \tag{5.56}$$

Veľkosť zvislicovej odchýlky Θ môžeme vypočítať aplikovaním sférickej kosínusovej vety vo sférickom trojuholníku N, N_r a N_r' (obrázok 5.9). Keďže ale uhly Θ, ξ a η nadobúdajú malé hodnoty (v absolútnej hodnote nanajvýš približne $2'$), s dostatočnou presnosťou môžeme použiť kosínusovú vetu pre rovinný trojuholník,

$$\Theta \approx \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - 2\,\xi\,\eta\,\cos 90^\circ} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}. \tag{5.57}$$

Použitím vzťahov sférickej trigonometrie (napríklad Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005),

$$\begin{aligned} \sin\Theta\,\cos\alpha &= \cos\phi\,\sin\Phi - \sin\phi\,\cos\Phi\,\cos(\Lambda - \lambda), \\ \sin\Theta\,\sin\alpha &= \cos\Phi\,\sin(\Lambda - \lambda), \end{aligned} \tag{5.58}$$



Obrázok 5.10. Priemet zvislicovej odchýlky $\Theta = [\xi, \eta]^\top$ v bode P do spojnice s azimutom A v rovinnej aproximácii.

získame azimut zvislicovej odchýlky (obrázok 5.9),

$$\tan\alpha = \frac{\cos\Phi \, \sin(\Lambda - \lambda)}{\cos\phi \, \sin\Phi - \sin\phi \, \cos\Phi \, \cos(\Lambda - \lambda)}. \tag{5.59}$$

Zvislicovú odchýlku môžeme chápať aj ako dvojrozmerný rovinný vektor $\boldsymbol{\Theta} = [\xi, \eta]^\top$, ktorý má veľkosť $\Theta = \|\boldsymbol{\Theta}\|$ (rovnica 5.57) a smer α (rovnica 5.59). Pomocou známej hodnoty meridiánovej a priečnej zložky zvislicovej odchýlky môžeme tiež zvislicovú odchýlku premietnuť do ľubovoľného smeru, ktorý je daný azimutom A (obrázok 5.10),

$$\varepsilon = \xi \, \cos A + \eta \, \sin A. \tag{5.60}$$

Okrem určovania tvaru Zeme majú zvislicové odchýlky praktické využitie aj v ďalších geodetických úlohách. Geodetické prístroje ako teodolit či nivelačný prístroj sa horizontujú preto, aby sa ich vertikálna os stotožnila so skutočnou zvislicou. Merané vodorovné smery, vertikálne uhly či vertikálne prevýšenia sú tak vztiahnuté ku skutočnej zvislici, resp. skutočnému lokálnemu horizontu. Skutočné zvislice prechádzajúce dvoma rôznymi bodmi nie sú ale vo všeobecnosti rovnobežné, preto si môžu niektoré geodetické merania vyžadovať korekciu týchto efektov, obzvlášť ak je vyžadovaná presnosť vysoká. Na výpočet takýto korekcií slúžia práve zvislicové odchýlky. Ďalšie využitie zvislicových odchýlok je napríklad na navigáciu inerciálnych navigačných systémov (pozri napríklad Jekeli, 2000b).

5.4.1 Vzťah medzi zvislicovou odchýlkou a poruchovým potenciálom

Na získanie vzťahu medzi zvislicovými odchýlkami a poruchovým potenciálom budeme uvažovať gravimetrickú zvislicovú odchýlku pre jej priamočiaru súvislosť s tiažovým poľom. V tejto kapitole budeme pre jednoduchosť označovať zvislicové odchýlky a ich zložky symbolmi Θ, ξ, η bez horného indexu. Zvislicové odchýlky budeme určovať v bode P na povrchu Zeme alebo mimo nej. Po regularizácii zemského telesa (kapitola 5.1) možno získať rovnaké vzťahy aj pre zvislicové odchýlky na geoide a mimo neho.

Gravimetrickú zvislicovú odchýlku sme definovali ako uhol medzi skutočnou a normálnou zvislicou v bode P. Smer zvislice je totožný so smerom normály k ekvipotenciálnej ploche, preto trojrozmerný vektor zvislicovej odchýlky je daný vzťahom (Sansò a Sideris, 2013),

$$\boldsymbol{\varepsilon}(P) = \mathbf{n}_W(P) - \mathbf{n}_U(P), \tag{5.61}$$

kde $\mathbf{n}_W(P)$ a $\mathbf{n}_U(P)$ sú jednotkové vektory *vonkajších* normál ku skutočnej a normálnej ekvipotenciálnej ploche v bode P (pozri obrázok 5.3). Horizontálne zložky ε_x, ε_y vektora $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z]^\top$ predstavujú zložky ξ a η vektora $\boldsymbol{\Theta} = [\xi, \eta]^\top$ (pozri kapitolu 5.4), teda

$$\begin{aligned} \xi &= \varepsilon_x, \\ \eta &= \varepsilon_y. \end{aligned} \tag{5.62}$$

Z definície operátora gradient vyplýva, že jednotkové vektory $\mathbf{n}_W(P)$ a $\mathbf{n}_U(P)$ sú dané vzťahmi

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_W(P) &= -\frac{\nabla W(P)}{\|\nabla W(P)\|} = -\frac{\nabla W(P)}{g(P)}, \\ \mathbf{n}_U(P) &= -\frac{\nabla U(P)}{\|\nabla U(P)\|} = -\frac{\nabla U(P)}{\gamma(P)}. \end{aligned} \tag{5.63}$$

Po dosadení (5.63) do (5.61) tak získame rovnicu

$$\boldsymbol{\varepsilon}(P) = -\frac{\nabla W(P)}{g(P)} + \frac{\nabla U(P)}{\gamma(P)}. \tag{5.64}$$

S využitím vzťahov (1.13), (5.1), (5.18) a (5.63) môžeme ďalej upraviť túto rovnicu do tvaru

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(P) &= -\frac{\nabla W(P) - \nabla U(P)}{\gamma(P)} - \frac{\gamma(P) - g(P)}{\gamma(P)} \frac{\nabla W(P)}{g(P)} \\ &= -\frac{\nabla T(P)}{\gamma(P)} + \frac{\delta g(P)}{\gamma(P)} \frac{\nabla W(P)}{g(P)} \\ &= -\frac{\nabla T(P)}{\gamma(P)} - \frac{\delta g(P)}{\gamma(P)} \mathbf{n}_W(P). \end{aligned} \tag{5.65}$$

Po uvážení (5.62) tak získame vzťahy

$$\begin{aligned} \xi &= -\frac{1}{\gamma(P)} \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_P + \frac{1}{g(P)} \frac{\delta g(P)}{\gamma(P)} \left.\frac{\partial W}{\partial x}\right|_P = -\frac{T_x(P)}{\gamma(P)} + \frac{\delta g(P)}{\gamma(P)} \frac{W_x(P)}{g(P)}, \\ \eta &= -\frac{1}{\gamma(P)} \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_P + \frac{1}{g(P)} \frac{\delta g(P)}{\gamma(P)} \left.\frac{\partial W}{\partial y}\right|_P = -\frac{T_y(P)}{\gamma(P)} + \frac{\delta g(P)}{\gamma(P)} \frac{W_y(P)}{g(P)}. \end{aligned} \tag{5.66}$$

Rovnica (5.66) popisuje vzťah medzi lokálnymi charakteristikami tiažového poľa v bode P na jednej strane a zvislicovými odchýlkami v bode P na strane druhej.

Zložky ε_x a ε_y z rovnice (5.62) sme zámerne opísali vágnym prívlastkom *horizontálne* bez toho, aby sme bližšie špecifikovali, na ktorú zvislicu či normálu je horizontálna rovina kolmá (pozri obrázok 5.8). Voľba horizontálnej roviny môže byť totiž vynútená okolnosťami, a tak sa môžeme stretnúť s rozličnými tvarmi rovnice (5.66). Definujme lokálny karteziánsky súradnicový systém $x^{\mathrm{a}}, y^{\mathrm{a}}, z^{\mathrm{a}}$ s pohyblivým začiatkom v bode P nasledujúcim spôsobom. Os z^{a} je daná smerom skutočnej zvislice v bode P (pozri z_W^P na obrázku 5.8) a je orientovaná kladne vo vonkajšom smere. Os x^{a} leží v rovine meridiánu a je orientovaná kladne na sever. Os y^{a} dotvára pravouhlý *ľavotočivý* súradnicový systém. Horizontálna rovina $x^{\mathrm{a}}, y^{\mathrm{a}}$ je teda kolmá na vektor $\mathbf{n}_W(P)$, preto $W_{x^{\mathrm{a}}}(P) = W_{y^{\mathrm{a}}}(P) = 0$. Rovnice (5.66) potom prejdú do tvaru (Krarup, 1969)

$$\begin{aligned} \xi &= -\frac{T_{x^{\mathrm{a}}}(P)}{\gamma(P)}, \\ \eta &= -\frac{T_{y^{\mathrm{a}}}(P)}{\gamma(P)}. \end{aligned} \tag{5.67}$$

V praktických výpočtoch sa ale tieto vzťahy používajú zriedkavo, pretože vyžadujú znalosť smeru skutočnej zvislice v bode P (obrázok 5.8). Ten možno získať určením astronomických súradníc Φ, Λ bodu P.

V praxi sa horizontálna rovina zvykne voliť tak, aby bola kolmá na normálu k elipsoidu n_e^P (pozri obrázok 5.8). Definujme teda lokálny karteziánsky súradnicový systém $x^{\mathrm{e}}, y^{\mathrm{e}}, z^{\mathrm{e}}$ s pohyblivým začiatkom v bode P podobne ako súradnicový systém $x^{\mathrm{a}}, y^{\mathrm{a}}, z^{\mathrm{a}}$, avšak s tým rozdielom, že os z^{e} je tentokrát daná smerom normály k elipsoidu n_e^P. Rovina $x^{\mathrm{e}}, y^{\mathrm{e}}$ je tak kolmá na normálu n_{e}^P a prechádza bodom P. Horizontálne zložky vektora $\boldsymbol{\varepsilon}$ v rovine $x^{\mathrm{e}}, y^{\mathrm{e}}$ predstavujú *elipsoidickú aproximáciu* gravimetrickej zvislicovej odchýlky (Jekeli, 1999),

$$\begin{aligned} \xi &\approx -\frac{1}{\gamma(P)} \left. \frac{\partial T}{(M+h)\,\partial\phi} \right|_P, \\ \eta &\approx -\frac{1}{\gamma(P)} \left. \frac{\partial T}{(N+h)\,\cos\phi\,\partial\lambda} \right|_P. \end{aligned} \tag{5.68}$$

V rovnici (5.68) označuje symbol M meridiánový polomer krivosti (Torge a Müller, 2012),

$$M = \frac{a\,(1-e^2)}{\left(1-e^2\,\sin^2\phi\right)^{3/2}}, \tag{5.69}$$

N označuje priečny polomer krivosti (rovnica 1.110) a ϕ je elipsoidická šírka (kapitola 1.5.4). Približný charakter rovníc (5.68) je spôsobený zanedbaním členov $\frac{\delta g(P)}{\gamma(P)} \frac{W_{x^{\mathrm{e}}}(P)}{g(P)}$ a $\frac{\delta g(P)}{\gamma(P)} \frac{W_{y^{\mathrm{e}}}(P)}{g(P)}$ (pozri 5.66). Ich vplyv však nepresahuje zhruba $0.5''$ pre zložku ξ a $0.1''$ pre zložku η (hrubý odhad pomocou modelu EIGEN-6C4). Maximálna chyba zo zanedbania týchto členov je väčšia v zložke ξ ako v zložke η, pretože $\max(|W_{x^{\mathrm{e}}}|) > \max(|W_{y^{\mathrm{e}}}|)$ v dôsledku významného trendu v člene $W_{x^{\mathrm{e}}}$, ktorý je spôsobený sploštením Zeme v smere elipsoidickej šírky.

V praktických aplikáciách je niekedy potrebné vykonať ďalšie priblíženie rovnice (5.68) zavedením *sférickej aproximácie*. Jeden z dôvodov je ten, že poruchový potenciál T z rovnice (5.68) je veľmi často aproximovaný sférickým harmonickým rozvojom (5.10). Výpočet parciálnej derivácie poruchového potenciálu podľa elipsoidickej šírky ϕ je potom náročný, pretože rozvoj (5.10) je vyjadrený pomocou sférickej šírky φ (elipsoidická a sférická dĺžka sú totožné).[9] Uvažujme teraz súradnicový systém $x^{\mathrm{s}}, y^{\mathrm{s}}, z^{\mathrm{s}}$ z obrázku 1.9 a jeho horizontálnu rovinu $x^{\mathrm{s}}, y^{\mathrm{s}}$. Sférická aproximácia gravimetrických zvislicových odchýlok má tvar (Jekeli, 1999)

$$\begin{aligned} \xi &\approx -\frac{1}{\gamma(P)} \frac{1}{r} \left.\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right|_P = -\frac{\delta g_{x^{\mathrm{s}}}(P)}{\gamma(P)}, \\ \eta &\approx -\frac{1}{\gamma(P)} \frac{1}{r \cos\varphi} \left.\frac{\partial T}{\partial \lambda}\right|_P = -\frac{\delta g_{y^{\mathrm{s}}}(P)}{\gamma(P)}, \end{aligned} \tag{5.70}$$

pretože z prílohy B.1 vieme, že horizontálne derivácie sú v súradnicovom systéme $x^{\mathrm{s}}, y^{\mathrm{s}}, z^{\mathrm{s}}$ dané vzťahmi $\frac{\partial}{\partial x^{\mathrm{s}}} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}$ a $\frac{\partial}{\partial y^{\mathrm{s}}} = \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial \lambda}$. Chyba spôsobená zanedbaním člena $\frac{\delta g(P)}{\gamma(P)} \frac{W_{x^{\mathrm{s}}}(P)}{g(P)}$ z rovnice (5.66) dosahuje približne $0.8''$ pre ξ. Chyba v dôsledku zanedbania člena $\frac{\delta g(P)}{\gamma(P)} \frac{W_{y^{\mathrm{s}}}(P)}{g(P)}$ je rovnaká ako v prípade elipsoidickej aproximácie, pretože $y^{\mathrm{s}} = y^{\mathrm{e}}$. Pravá strana rovníc (5.70) vyplýva z rovníc (5.26) a (5.27). Zložky gravimetrickej zvislicovej odchýlky ξ a η sú teda dané ako záporný podiel horizontálnych zložiek vektorovej poruchy tiažového zrýchlenia a veľkosti normálneho tiažového zrýchlenia. To isté platí aj pre rovnice (5.67) a (5.68), avšak s použitím príslušného lokálneho súradnicového systému ($x^{\mathrm{a}}, y^{\mathrm{a}}, z^{\mathrm{a}}$ alebo $x^{\mathrm{e}}, y^{\mathrm{e}}, z^{\mathrm{e}}$).

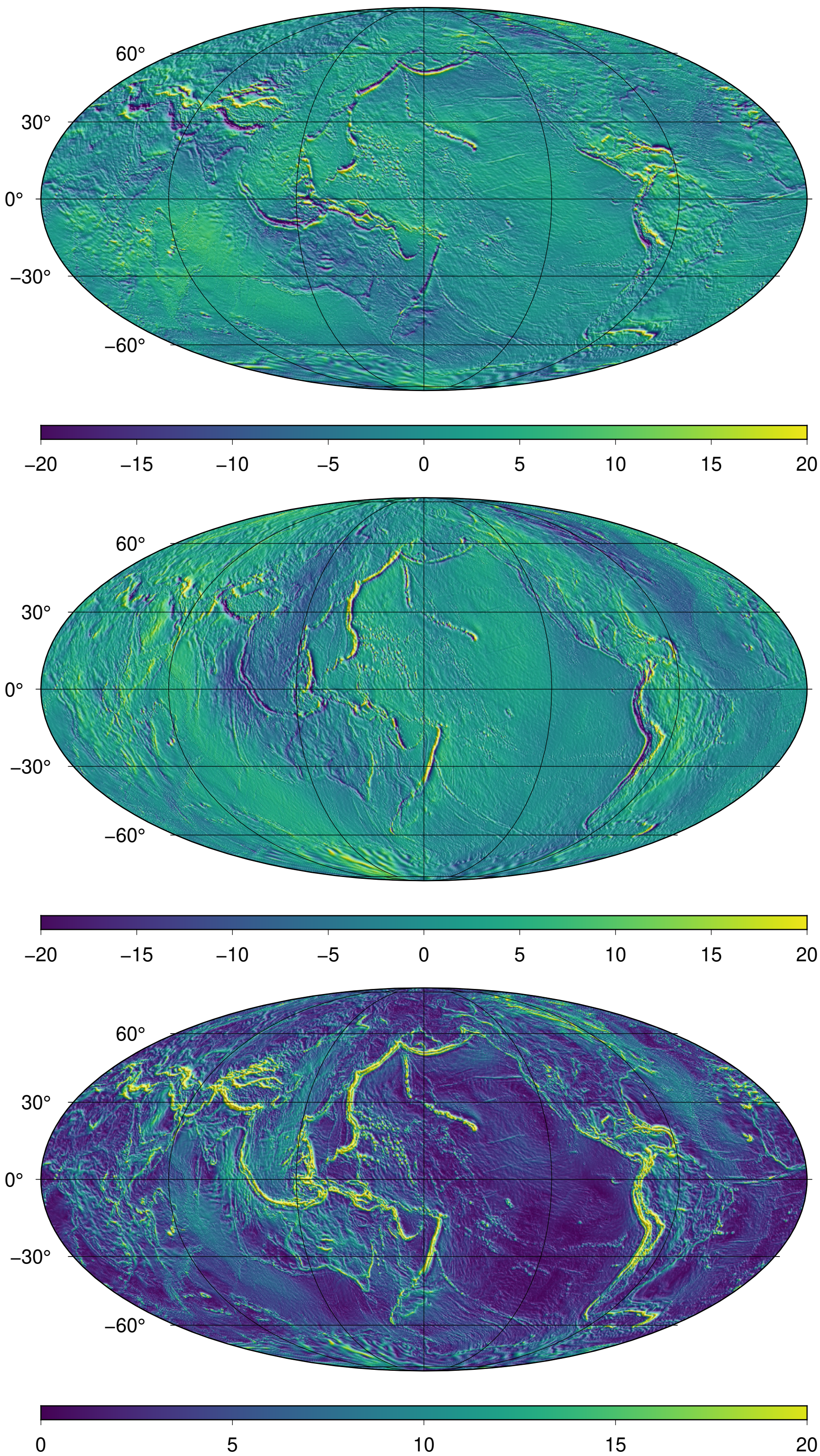
5.4.2 Sférický harmonický rozvoj zvislicovej odchýlky

Sférický harmonický rozvoj gravimetrickej zvislicovej odchýlky vo sférickej aproximácii získame z rovníc (5.10), (5.26), (5.27) a (5.70),

$$\begin{aligned} \xi(P) &= -\frac{\delta g_{x^{\mathrm{s}}}(P)}{\gamma(P)} = -\frac{1}{r\,\gamma(P)} \left.\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right|_P = -\frac{GM}{R^2\,\gamma(P)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+2} \sum_{k=-n}^{n} \bar{t}_{nk} \frac{\partial \bar{Y}_{nk}(\varphi,\lambda)}{\partial \varphi}, \\ \eta(P) &= -\frac{\delta g_{y^{\mathrm{s}}}(P)}{\gamma(P)} = -\frac{1}{r\cos\varphi\,\gamma(P)} \left.\frac{\partial T}{\partial \lambda}\right|_P \\ &= -\frac{GM}{R^2\cos\varphi\,\gamma(P)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+2} \sum_{k=-n}^{n} \bar{t}_{nk} \frac{\partial \bar{Y}_{nk}(\varphi,\lambda)}{\partial \lambda}. \end{aligned} \tag{5.71}$$

Z obrázku 5.11 vidíme, že zvislicové odchýlky dosahujú hodnoty zväčša na úrovni niekoľkých desiatok uhlových sekúnd a len zriedkavo hodnoty väčšie ako uhlová minúta. Najväčšie vychýlenie skutočnej tiažnice nastáva v oblastiach, v ktorých dochádza k prudkej horizontálnej zmene poruchového potenciálu, napríklad v oblastiach pohorí či tektonických zlomov. Toto pozorovanie možno vysvetliť tým, že vo vzťahoch (5.71) vystupujú horizontálne prvky vektorovej poruchy tiažového zrýchlenia, teda horizontálne derivácie poruchového potenciálu. Vidíme tak výraznú podobnosť medzi vrchnými dvoma mapami poruchy tiažového zrýchlenia na obrázku 5.4 a zvislicovej odchýlky na obrázku 5.11.

[9]Pre vzťah na výpočet derivácie $\frac{1}{M+h}\frac{\partial}{\partial \phi}$ pomocou sférických derivácií $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}$ a $\frac{\partial}{\partial r}$ pozri napríklad publikáciu Jekeli (1999).



Obrázok 5.11. Zložky zvislicovej odchýlky ξ (vrchná mapa), η (prostredná mapa) a celková zvislicová odchýlka Θ (spodná mapa) pre zemské gravitačné pole vypočítané vzťahmi (5.57) a (5.71) zo sférického harmonického modelu EIGEN-6C4 do stupňa 720 na povrchu elipsoidu GRS80 (jednotky $''$). Normálne tiažové pole je predpísané ekvipotenciálnym elipsoidom GRS80.

Kapitola 6

Geoid

V úvodnej kapitole sme načrtli dva prístupy k definícii tvaru Zeme. V zmysle prvej definície je tvar Zeme daný jej skutočným fyzickým povrchom. Určovaním takto chápaného tvaru Zeme a jej vonkajšieho tiažového poľa sa zaoberá Molodenského teória (Molodensky a kol., 1962; Krarup, 1973; Moritz, 1980; Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005). V druhom prístupe je tvar Zeme definovaný geoidom, teda ekvipotenciálnou plochou. Na týchto stranách sa budeme bližšie zaoberať iba druhým prístupom.[1]

Z kapitol 5.2 až 5.4 vieme, že medzi merateľné veličiny fyzikálnej geodézie patria najmä (no nielen) porucha tiažového zrýchlenia δg, anomália tiažového zrýchlenia Δg a zvislicové odchýlky ξ, η. Geoid preto určujeme spravidla z týchto veličín. Z rovnice (5.39) ďalej vieme, že na určenie výšky geoidu N nad referenčným elipsoidom (obrázok 5.1) postačuje určiť poruchový potenciál na geoide $T(P_0)$.[2] *Linearizované* vzťahy medzi merateľnými veličinami fyzikálnej geodézie a neznámym poruchovým potenciálom už poznáme (vzťahy 5.24, 5.40, 5.41, 5.49, 5.51, 5.67, 5.68, 5.70). Všimnime si však, že v týchto rovniciach síce vystupuje poruchový potenciál, ktorý potrebujeme určiť, ale nachádza sa v nich vo forme *derivácie*, či už vertikálnej, alebo horizontálnej.

Nech $\mathcal{D}_{\Delta g}$ a $\mathcal{D}_{\delta g}$ sú *diferenciálne operátory*, ktoré transformujú poruchový potenciál na anomáliu a poruchu tiažového zrýchlenia Δg a δg. Vo sférickej aproximácii majú tvar (rovnice 5.51 a 5.24)

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\Delta g} &= -\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r}, \\ \mathcal{D}_{\delta g} &= -\frac{\partial}{\partial r}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Anomáliu a poruchu tiažového zrýchlenia vo sférickej aproximácii potom môžeme zapísať v tvare

$$\begin{aligned} \Delta g &= \mathcal{D}_{\Delta g} T, \\ \delta g &= \mathcal{D}_{\delta g} T. \end{aligned} \tag{6.2}$$

[1] Pre Molodenského teóriu pozri napríklad Janák a kol. (2006).

[2] Normálne tiažové zrýchlenie $\gamma(Q_0)$, ktoré vystupuje v rovnici (5.39), môžeme vypočítať jednoducho Somiglianovým vzťahom (4.56).

Aby sme dokázali vypočítať poruchový potenciál, na ktorý v rovniciach (6.2) pôsobia diferenciálne operátory, potrebujeme nájsť *integrálne operátory* $\mathcal{I}_{\Delta g}$ a $\mathcal{I}_{\delta g}$. Tie následne aplikujeme na anomálie a poruchy tiažového zrýchlenia na geoide, Δg_0 a δg_0, čím získame hľadaný poruchový potenciál kdekoľvek na geoide alebo v jeho vonkajšom priestore,

$$\begin{aligned} T &= \mathcal{I}_{\Delta g} \Delta g_0, \\ T &= \mathcal{I}_{\delta g} \delta g_0. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Integrálne vzťahy (6.3) budeme hľadať pomocou okrajových úloh pre poruchový potenciál. S pojmom okrajová úloha sme sa už čiastočne stretli v kapitole 4.3.1 a nepriamo aj v kapitole 1.2.4.

V kapitole 6.1 najprv načrtneme princíp určovania poruchového potenciálu pomocou okrajových úloh. V kapitolách 6.2 až 6.4 potom popíšeme rôzne typy okrajových úloh, s ktorými sa vo fyzikálnej geodézii často stretávame. Pri čítaní týchto kapitol si všimnime, že vonkajšie tiažové pole Zeme určujeme bez potreby priamej znalosti hustoty, podobne ako v kapitole 2. Okrajové úlohy budú totiž formulované tak, že informácia o hustote Zeme bude zachytená vo vstupných anomáliách, resp. poruchách tiažového zrýchlenia (vzťahy 6.3). Tie v praxi získavame gravimetrickým meraním veľkosti tiažového zrýchlenia (kapitola 1.3.1), ktoré túto informáciu implicitne obsahuje (kapitola 1.1.1). Pripomeňme, že na získanie poruchového potenciálu sa sústredíme preto, lebo výpočet výšky geoidu nad referenčným elipsoidom zo známeho poruchového potenciálu na geoide je jednoduchý (vzťah 5.39).

K výpočtu geoidu zo zvislicových odchýlok pristúpime iným spôsobom. Zatiaľ čo poruchy a anomálie tiažového zrýchlenia možno chápať skôr fyzikálne, pretože priamo súvisia s *veľkosťou* tiažového zrýchlenia, zvislicové odchýlky možno vnímať geometricky (obrázok 5.8), pretože sú spojené so *smerom* tiažového zrýchlenia (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005). Na výpočet geoidu zo zvislicových odchýlok využijeme v kapitole 6.5 práve geometrickú interpretáciu zvislicových odchýlok.

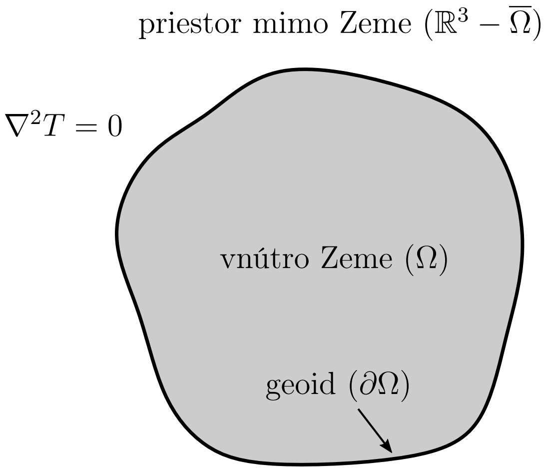
V kapitole 6.6 spomenieme ďalšie metódy určovania geoidu a na záver v kapitole 6.7 pre úplnosť uvedieme spôsob výpočtu zvislicových odchýlok z gravimetrických dát.

6.1 Okrajová úloha pre poruchový potenciál

Nech Ω je vnútorná časť zemského telesa ohraničená povrchom $\partial\Omega$, v tomto prípade geoidom (obrázok 6.1). O hranici $\partial\Omega$ budeme predpokladať, že je dostatočne hladká.[3] Táto podmienka je splnená, pretože geoid je ekvipoteciálna plocha (pozri vlastnosti ekvipotenciálnych plôch v kapitole 1.3.2). Symbolom $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ budeme označovať zemské teleso spolu s jeho povrchom. Nech sa mimo telesa $\overline{\Omega}$ nenachádzajú hmoty, teda napríklad ani nebeské telesá, ani zemská atmosféra, ani topografické hmoty.[4] Túto vonkajšiu oblasť

[3] Pozri napríklad Sansò a Sideris (2013).

[4] Matematickému odstráneniu gravitačného účinku topografických a atmosférických hmôt sa venujú napríklad Janák a kol. (2006).



Obrázok 6.1. Geometrické znázornenie oblastí vystupujúcich v okrajovej úlohe pre poruchový potenciál Zeme.

označme $\mathbb{R}^3 - \overline{\Omega}$.

Naším cieľom je nájsť vzťahy na výpočet poruchového potenciálu na hranici $\partial\Omega$ a v celej oblasti $\mathbb{R}^3 - \overline{\Omega}$ z porúch alebo anomálií tiažového zrýchlenia, ktoré sú známe (odmerané) na hranici $\partial\Omega$. Túto úlohu by nebolo možné vyriešiť bez toho, aby sme vedeli dostatočne veľa o tom, ako sa *mení* poruchový potenciál vo vonkajšom priestore hranice $\partial\Omega$. Potrebnú informáciu o zmene poruchového potenciálu v priestore mimo Zeme poskytuje Laplaceova rovnica (5.3).[5] *Okrajovou úlohou pre poruchový potenciál* teda rozumieme hľadanie takého riešenia diferenciálnej rovnice (5.3), ktoré v oblasti $\mathbb{R}^3 - \overline{\Omega}$ vyhovuje rovnici (5.3) a na hranici $\partial\Omega$ reprodukuje zadanú podmienku. Podmienku zadanú na hranici $\partial\Omega$ nazývame *okrajová podmienka*. Okrajová podmienka musí byť v nejakom vzťahu voči hľadanému poruchovému potenciálu. Okrajová podmienka tak môže byť zadaná napríklad pomocou niektorej z nasledujúcich veličín:

- lineárna kombinácia poruchového potenciálu T a jeho prvej derivácie v smere vonkajšej normály v podobe anomálie tiažového zrýchlenia $\mathcal{D}_{\Delta g} T$ (rovnica 5.51) (táto okrajová podmienka sa zvykne nazývať *Newtonova okrajová podmienka*; kapitola 6.2),
- prvá derivácia poruchového potenciálu v smere vonkajšej normály v podobe poruchy tiažového zrýchlenia $\mathcal{D}_{\delta g} T$ (rovnica 5.24) (*Neumannova okrajová podmienka*; kapitola 6.3),
- samotný poruchový potenciál T (*Dirichletova okrajová podmienka*; kapitola 6.4),
- druhá vertikálna derivácia poruchového potenciálu $\partial^2 T / \partial r^2$ (táto okrajová úloha nie je predmetom tejto práce) atď.

V praxi závisí voľba okrajovej podmienky najmä od typu dostupných dát.

[5] Diskusia o význame Laplaceovej rovnice pre fyzikálnu geodéziu sa nachádza v kapitole 1.2.4.

Vzťahy (6.3) označujú všeobecný zápis riešenia získaného z prvých dvoch uvedených okrajových úloh. Na pravej strane týchto rovníc vystupujú okrajové podmienky na hranici $\partial\Omega$ (odmerané vstupné dáta Δg_0 alebo δg_0 na geoide) a na ľavej strane vystupuje hľadaný poruchový potenciál T, ktorý možno vypočítať nielen na hranici $\partial\Omega$, ale aj v oblasti $\mathbb{R}^3 - \overline{\Omega}$. Spomeňme, že poruchový potenciál získaný z každej z týchto okrajových úloh je totožný, teda napríklad

$$T = \mathcal{I}_{\Delta g} \Delta g_0 = \mathcal{I}_{\delta g} \delta g_0. \tag{6.4}$$

Rozdielne sú iba okrajové podmienky, a tým aj integrálne operátory $\mathcal{I}_{\Delta g}$ a $\mathcal{I}_{\delta g}$.

Poznámka k okrajovým a počiatočným úlohám

V matematike je *okrajová úloha* všeobecný pojem, ktorý označuje riešenie diferenciálnej rovnice so zadanou okrajovou podmienkou. Okrajová podmienka sa spravidla vzťahuje k priestoru (napríklad povrch telesa) a diferenciálna rovnica je riešená v priestore. Pojmom *počiatočná úloha* označujeme riešenie diferenciálnej rovnice so zadanou počiatočnou podmienkou. Počiatočná podmienka sa zvyčajne vzťahuje k časovému okamihu. Počiatočné úlohy sa teda zaoberajú vývojom diferenciálnej rovnice v čase. Podrobnejšie informácie o okrajových a počiatočných úlohách, o ich klasifikácii a o metódach ich riešenia uvádzajú napríklad Janák a kol. (2006) a Macák a Minarechová (2021).

6.2 Stokesov integrál

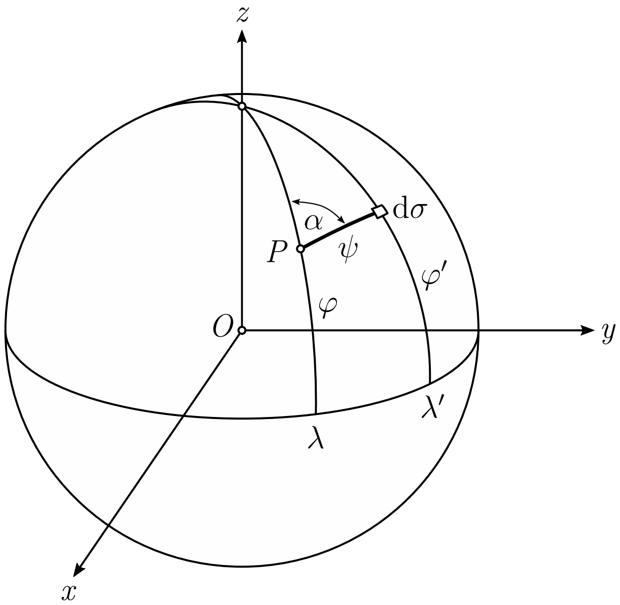
Definujme okrajovú úlohu pre poruchový potenciál s využitím okrajovej podmienky vo forme sférickej aproximácie anomálie tiažového zrýchlenia:

$$\nabla^2 T(P) = 0, \qquad P \in \mathbb{R}^3 - \overline{\Omega}, \tag{6.5}$$

$$\Delta g(P) = -\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_P - \left.\frac{2}{r}\right|_P T(P), \qquad P \in \partial\Omega, \tag{6.6}$$

$$T(P) \to 0 \qquad \text{pre} \quad P \to \infty. \tag{6.7}$$

Vzťah (6.5) špecifikuje diferenciálnu rovnicu, ktorá je predmetom riešenia okrajovej úlohy na oblasti $\mathbb{R}^3 - \overline{\Omega}$. Rovnica (6.6) udáva konkrétny typ okrajovej podmienky, ktorá platí na geoide $\partial\Omega$. Vzťah (6.7) dodáva ďalšiu informáciu o poruchovom potenciáli; hovorí, že s narastajúcou vzdialenosťou bodu P od Zeme $\overline{\Omega}$ sa poruchový potenciál T blíži k nule (pozri vzťah 5.5). Bez rovníc (6.6) a (6.7) by mala diferenciálna rovnica (6.5) nekonečne veľa riešení. Rovnice (6.6) a (6.7) tak zabezpečujú, že získame práve jedno riešenie rovnice (6.5). Odvodenie riešenia okrajovej úlohy vynecháme a zameriame sa skôr na popis získanej rovnice. Podrobné odvodenie uvádzajú napríklad Hofmann-Wellenhof a Moritz (2005) a Janák a kol. (2006).



Obrázok 6.2. Výpočtový bod $P(\varphi, \lambda)$ premietnutý na jednotkovú sféru a diferenciálny integračný element $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}\sigma(P')$ na jednotkovej sfére. Symbol ψ označuje sférickú vzdialenosť medzi P a $\mathrm{d}\sigma$ a symbol α označuje azimut spojnice P a $\mathrm{d}\sigma$.

Riešením okrajovej úlohy (6.5) až (6.7) je vzťah

$$T(P) = \frac{R}{4\pi} \iint_\sigma S(P, P')\, \Delta g(P')\, \mathrm{d}\sigma(P'), \quad P \in \left(\mathbb{R}^3 - \overline{\Omega}\right) \cup \partial\Omega, \quad P' \in \partial\Omega, \tag{6.8}$$

ktorý sa nazýva *Stokesov integrál.* Symbol $P(r, \varphi, \lambda)$ označuje bod, v ktorom je počítaný poruchový potenciál (obrázok 6.2), $P'(R, \varphi', \lambda')$ je bod na geoide, S je *Stokesovo integračné jadro* (niekedy tiež nazývané *Stokesova funkcia*), R označuje polomer referenčnej sféry (napríklad stredný či rovníkový polomer Zeme), σ je jednotková sféra a $\mathrm{d}\sigma(P')$ je jej diferenciál v bode P',

$$\mathrm{d}\sigma(P') = \cos\varphi'\, \mathrm{d}\varphi'\, \mathrm{d}\lambda'. \tag{6.9}$$

Stokesovo jadro S závisí iba od vzájomnej polohy bodov P a P' a má tvar (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005)

$$\begin{aligned} S(P, P') &= S(r, \psi) \\ &= \frac{2R}{\ell} + \frac{R}{r} - 3\frac{R\,\ell}{r^2} - \frac{R^2}{r^2} \cos\psi \left(5 + 3 \ln \frac{r - R\cos\psi + \ell}{2\,r}\right), \end{aligned} \tag{6.10}$$

kde ℓ a ψ sú Euklidovská a sférická vzdialenosť medzi bodmi P a P' (rovnice 1.61 a 1.62).

Stokesov integrál (6.8) umožňuje vypočítať poruchový potenciál kdekoľvek v oblasti $\left(\mathbb{R}^3 - \overline{\Omega}\right) \cup \partial\Omega$. Osobitne zaujímavý je prípad, v ktorom výpočtový bod leží na rovnakej sfére ako anomálie tiažového zrýchlenia, teda keď $r = R$. Všeobecný tvar Stokesovho jadra (6.10) potom prejde do tvaru, ktorý závisí iba od sférickej vzdialenosti ψ

(Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005),

$$S(\psi) = \frac{1}{\sin\dfrac{\psi}{2}} - 6\,\sin\frac{\psi}{2} + 1 - 5\,\cos\psi - 3\,\cos\psi\,\ln\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right). \tag{6.11}$$

Stokesov integrál sa v takom prípade zvykne zapisovať v zjednodušenej forme

$$T = \frac{R}{4\pi}\iint\limits_{\sigma} S(\psi)\,\Delta g_0\,\mathrm{d}\sigma, \tag{6.12}$$

pričom $T = T(P)$, $P(R,\varphi,\lambda) \in \partial\Omega$, $\Delta g_0 = \Delta g_0(P')$, $P'(R,\varphi',\lambda') \in \partial\Omega$ a $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}\sigma(P')$. Symbol Δg_0 označuje anomálie tiažového zrýchlenia na geoide (pozri kapitolu 5.3).

Dosadením rovnice (6.12) do Brunsovho vzorca (5.39) získame vzťah na výpočet výšky geoidu nad referenčným elipsoidom z anomálií tiažového zrýchlenia na geoide, teda v širšom zmysle z meraného tiažového zrýchlenia,

$$N = \frac{R}{4\pi\,\gamma_0}\iint\limits_{\sigma} S(\psi)\,\Delta g_0\,\mathrm{d}\sigma, \tag{6.13}$$

kde $\gamma_0 = \gamma(Q_0)$. Rovnica (6.13) predstavuje jednu zo základných rovníc fyzikálnej geodézie.

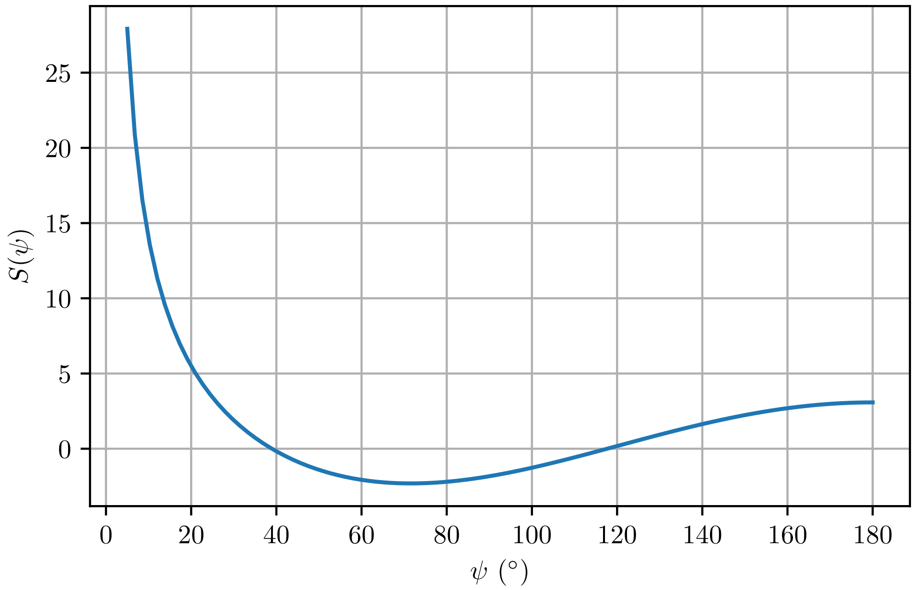
Dodajme, že zo vzťahu (6.8) vyplýva tvar hľadaného integrálneho operátora $\mathcal{I}_{\Delta g}$ z rovnice (6.3),

$$\mathcal{I}_{\Delta g}(\,\cdot\,)(P) = \frac{R}{4\pi}\iint\limits_{\sigma} S(P,P')(\,\cdot\,)(P')\,\mathrm{d}\sigma(P'), \tag{6.14}$$

kde symbol $(\,\cdot\,)$ označuje funkciu, na ktorú je integrálny operátor aplikovaný.

6.2.1 Stokesovo integračné jadro

Význam Stokesovej funkcie vo vzťahu (6.12) lepšie pochopíme z jej grafického znázornenia. Na obrázku 6.3 vidíme, že Stokesova funkcia klesá s narastajúcou sférickou vzdialenosťou ψ až po $\psi \approx 72°$ a následne mierne stúpa. V súvislosti s rovnicou (6.12) to znamená, že na hodnotu poruchového potenciálu $T(P)$ majú najväčší vplyv anomálie tiažového zrýchlenia $\Delta g(P')$, ktoré sa nachádzajú v blízkosti výpočtového bodu P. Inými slovami, anomálie tiažového zrýchlenia $\Delta g(P')$ v blízkom okolí výpočtového bodu sú v rovnici (6.12) násobené (*vážené*) väčšími hodnotami Stokesovej funkcie S ako tie anomálie, ktoré sa nachádzajú ďaleko od výpočtového bodu; ich relatívny prínos do hodnoty poruchového potenciálu je tak väčší ako v prípade veľkých vzdialeností medzi P a $\mathrm{d}\sigma$ (obrázok 6.2). Na obrázku 6.3 ďalej vidíme, že Stokesovo integračné jadro nadobúda nulové hodnoty pre sférické vzdialenosti približne 39° a 117° (Torge a Müller, 2012). Príspevok anomálií tiažového zrýchlenia, ktoré sa nachádzajú v týchto vzdialenostiach voči výpočtovému bodu, je preto nulový.



Obrázok 6.3. Stokesova funkcia $S(\psi)$ (vzťah 6.11) na intervale $[5°, 180°]$.

Stokesova funkcia má niekoľko ďalších zaujímavých vlastností.

- *Singularita.* Pre $P(r, \varphi, \lambda) \to P'(R, \varphi', \lambda')$ sa hodnota Stokesovej funkcie (6.10) blíži k nekonečnu (pre pojem singularita pozri tiež kapitolu 3.3),

$$\lim_{P \to P'} S(P, P') = \infty. \tag{6.15}$$

  K singularite Stokesovej funkcie dochádza vtedy, keď integrál (6.8) je počítaný na tej sfére, na ktorej je zadaná okrajová podmienka v podobe anomálií tiažového zrýchlenia ($r = R$) a súčasne keď výpočtový bod je totožný s integračným elementov ($(\varphi, \lambda) = (\varphi', \lambda')$). Napriek singularite Stokesovho integračného jadra však bude výsledok integrácie (6.8), teda poruchový potenciál v bode P, nadobúdať *konečnú* hodnotu (pre podobnú situáciu v súvislosti s Newtonovým integrálom pozri tiež diskusiu zo záveru kapitoly 1.2). V numerických výpočtoch je ale i tak potrebné venovať singularite osobitnú pozornosť a použiť vhodné matematické úpravy Stokesovho integrálu (pozri napríklad Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005 či van Hees, 1991). Dodajme, že vo všeobecnosti neplatí, že každé singulárne integračné jadro vedie ku konečným hodnotám integrálu. To, či je hodnota integrálu konečná alebo nie, závisí od typu singularity.

- *Homogénnosť.* Hodnota Stokesovho integračného jadra nezávisí od polohy bodov P a P' v priestore za predpokladu, že r a ψ ostávajú nezmenené. Ak sa napríklad body P a P' nachádzajú na tej istej sfére a na tom istom meridiáne, hodnota Stokesovej funkcie (6.11) je rovnaká bez ohľadu na to, v ktorej časti meridiánu a na ktorom meridiáne sa body P a P' nachádzajú, pokiaľ ich vzdialenosť ψ ostáva nezmenená.

- *Izotropnosť*. Hodnota Stokesovho integračného jadra nezávisí od azimutu α spojnice bodov P a P' (pozri obrázok 6.2).

Stokesova funkcia môže byť ekvivalentne vyjadrená aj rozvojom do radu Legendreových polynómov (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005),

$$S(r,\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\psi). \tag{6.16}$$

Ide pritom o rozvoj typu (2.25). Rovnice (6.10) a (6.11) nazývame *priestorový tvar* Stokesovho integračného jadra. Vzťah (6.16) nazývame *spektrálny tvar* Stokesovho integračného jadra. To, ktorý tvar je výhodnejšie použiť, často závisí od aplikácie. Ak boli anomálie tiažového zrýchlenia Δg nachádzajúce sa v integráli (6.8) získané meraním, môže byť vhodnejšie použiť priestorový tvar. Je to preto, lebo odmerané gravitačné, resp. tiažové zrýchlenie zahŕňa vplyv všetkých harmonických stupňov (pozri nekonečné sumácie vo vzťahoch 2.79, 2.80 a 2.81), rovnako ako priestorový tvar Stokesovho jadra (6.10) implicitne obsahuje všetky harmonické stupne zo spektrálneho tvaru (6.16) (pravá strana rovnice 6.10 sa rovná pravej strane rovnice 6.16). Výpočet Stokesovho jadra spektrálnym tvarom by bol v tejto situácii nevhodný, pretože nekonečný rad by musel byť v praktickom výpočte obmedzený na konečný počet členov, čo by spôsobilo aproximačné chyby. Ak ale boli anomálie tiažového zrýchlenia Δg vypočítané z konečného sférického harmonického radu vzťahom (5.52) do stupňa N, potom môže byť výhodnejšie použiť spektrálny tvar (6.16) rozvinutý do identického maximálneho stupňa N.[6]

Všimnime si, že vo vzťahoch (6.10), (6.11) a (6.16) sa *nenachádza* vplyv nultého harmonického stupňa (sumácia v rovnici 6.16 začína od stupňa 2 a pravé strany týchto rovníc sú si rovné). S uvážením nultého harmonického stupňa nadobudne Stokesovo integračné jadro nasledujúce tvary,

$$S(r,\psi) = \frac{2R}{\ell} - 3\frac{R\,\ell}{r^2} - \frac{R^2}{r^2}\cos\psi\left(5 + 3\ln\frac{r - R\cos\psi + \ell}{2\,r}\right), \tag{6.17}$$

$$S(\psi) = \frac{1}{\sin\frac{\psi}{2}} - 6\sin\frac{\psi}{2} - 5\cos\psi - 3\cos\psi\ln\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right), \tag{6.18}$$

$$S(r,\psi) = \sum_{n=0,\,n\neq 1}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\psi). \tag{6.19}$$

Tieto rovnice je potrebné použiť vtedy, keď anomálie tiažového zrýchlenia vo vzťahu (6.8) obsahujú aj vplyv nultého harmonického člena z rovnice (5.52). Všimnime si tiež, že stupeň n v rovnici (6.19) nesmie byť rovný 1 (aby bolo zamedzené deleniu nulou), čo je v súlade so skutočnosťou, že harmonický stupeň $n = 1$ nevplýva na anomálie tiažového zrýchlenia (pozri poznámku k rovnici 5.52).

[6] Z teoretického hľadiska môže byť ekvivalentne použitý aj priestorový tvar Stokesovho jadra, prípadne spektrálny tvar rozvinutý do vyššieho stupňa ako N (pozri napríklad Freeden a Schreiner, 2009).

6.2.2 Stokesov integrál ako konvolučný integrál

Výpočtom integrálu (6.8) získame poruchový potenciál v bode P, teda jedno číslo. Ak chceme získať poruchový potenciál v ďalšom bode P_1, integráciu je potrebné zopakovať s novým výpočtovým bodom P_1. Dôvod je ten, že hoci anomálie tiažového zrýchlenia $\Delta g(P')$ sú identické (daná funkcia na hranici $\partial\Omega$), zmena polohy výpočtového bodu z P na P_1 spôsobí, že nové Stokesovo integračné jadro $S(P_1, P')$ bude vážiť tie isté anomálie tiažového zrýchlenia $\Delta g(P')$ iným spôsobom ako predošlé integračné jadro $S(P, P')$. Ak teda chceme získať poruchový potenciál P v každom bode na Zemi, výpočtový bod P je potrebné vnímať ako premennú a integráciu opakovať vo všetkých bodoch na sfére. Výsledkom bude nová funkcia, ktorou je poruchový potenciál na celej sfére. Transformovali sme teda dve funkcie, Stokesovo integračné jadro S a anomálie tiažového zrýchlenia Δg, na tretiu funkciu, poruchový potenciál T. Tento proces sa nazýva *konvolúcia* a symbolicky ho zapisujeme vzťahom

$$\frac{R}{4\,\pi}(S * \Delta g)(P) = \frac{R}{4\pi} \iint\limits_{\sigma} S(P, P')\, \Delta g(P')\, \mathrm{d}\sigma(P'), \tag{6.20}$$

kde symbol $*$ označuje konvolučné násobenie funkcií S a Δg.

Vo fyzikálnej geodézii sa stretávame s konvolučnými integrálmi veľmi často (pozri napríklad Jekeli, 2017). Konvolučným integrálom je napríklad aj Newtonov integrál (1.21). Vo vzťahu (1.21) hrajú hustota ρ a prevrátená hodnota vzdialenosti $1/\ell$ podobnú úlohu akú majú anomálie tiažového zrýchlenia Δg a Stokesovo jadro S vo vzťahu (6.8). Konvolučnými integrálmi sú tiež integrály, ktoré sú odvodené z Newtonovho integrálu. Všimnime si napríklad, že vo vzťahu (1.9), ktorý je odvodený z Newtonovho integrálu, vystupuje tá istá hustota ako v rovnici (1.21). Keďže ale vzťah medzi gravitačným zrýchlením a hustotou je iný ako vzťah medzi gravitačným potenciálom a hustotou, konvolučné jadro $\mathbf{r}/\ell^3$ v rovnici (1.9) je iné ako v rovnici (1.21). Rozličné integračné jadrá teda transformujú tú istú funkciu rozdielne.

Konvolučné integrály sa vyskytujú aj v mnohých oblastiach matematiky, fyziky a v ďalších vedných disciplínach. Jednou z praktických aplikácií konvolúcie je potlačenie šumu na zvukových nahrávkach. Vstupný signál, teda pôvodná nahrávka, je konvolučne vynásobený vhodným integračným jadrom, výsledkom čoho je upravená nahrávka s potlačeným šumom, teda výstupný signál. Aplikáciou iného konvolučného jadra na tú istú nahrávku môžeme zvýrazniť inú časť spektra na nahrávke, povedzme nízke frekvencie a pod. Pre konvolučné integrály je typické, že ich numerický výpočet je časovo veľmi náročný. Preto sa snažíme použiť efektívne algoritmy, napríklad rýchlu Fourierovu transformáciu (Press a kol., 1997) či vlnkovú transformáciu (Keller, 2004). Obe transformácie sa používajú aj na efektívny výpočet konvolučných integrálov fyzikálnej geodézie (pozri napríklad Forsberg, 1984; Freeden a Schneider, 1998; Sansò a Sideris, 2013).

6.2.3 Sférická aproximácia v Stokesovom integráli

Riešenie (6.8) okrajovej úlohy (6.5) až (6.7) bolo získané s využitím sférickej aproximácie. Sférická aproximácia bola použitá jednak v definícii okrajovej podmienky (6.6), ale tiež v riešení okrajovej úlohy, čo má niekoľko dôsledkov na praktické určovanie geoidu vzťahom (6.13). Hoci získané riešenie (6.8) využíva anomálie tiažového zrýchlenia na geoide Δg_0, samotná integrácia sa nevykonáva na geoide, ktorý má komplikovaný tvar, ale na sfére s polomerom R, ktorá geoid aproximuje. Neznamená to však, že sú výšky geoidu získané vzťahom (6.13) vyjadrené voči referenčnej sfére s polomerom R. Vzťahujú sa k ekvipotenciálnemu elipsoidu, ktorý bol použitý na definíciu normálneho tiažového poľa, pretože tak bola definovaná okrajová úloha. V rovnici (6.13) má byť preto normálne tiažové zrýchlenie γ_0 počítané Somiglianovým vzťahom pre ekvipotenciálny elipsoid (rovnica 4.56).

Sférická aproximácia spôsobuje relatívnu chybu v určení geoidu na úrovni $0.003\,N$, teda dosahuje hodnoty menšie ako 1 m (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005). Pre spresnenie riešenia je potrebné zaviesť korekciu zo sploštenia referenčného elipsoidu (Claessens, 2006), prípadne integrovať priamo na ekvipotenciálnom elipsoide (Martinec a Grafarend, 1997).

6.3 Hotineov integrál

Definujme teraz takú okrajovú úlohu, ktorá umožní vypočítať poruchový potenciál z porúch tiažového zrýchlenia vo sférickej aproximácii:

$$\nabla^2 T(P) = 0, \qquad P \in \mathbb{R}^3 - \overline{\Omega}, \tag{6.21}$$

$$\delta g(P) = -\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_P, \qquad P \in \partial\Omega, \tag{6.22}$$

$$T(P) \to 0 \qquad \text{pre} \quad P \to \infty. \tag{6.23}$$

Riešením okrajovej úlohy (6.21) až (6.23) je rovnica

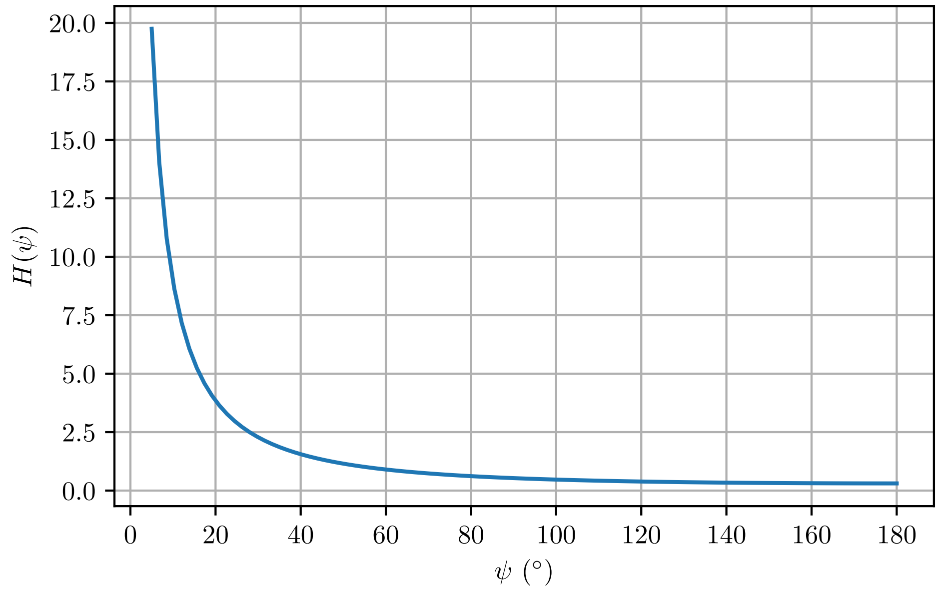
$$T(P) = \frac{R}{4\pi} \iint\limits_{\sigma} H(P,P')\,\delta g(P')\,\mathrm{d}\sigma(P'), \quad P \in \left(\mathbb{R}^3 - \overline{\Omega}\right) \cup \partial\Omega, \quad P' \in \partial\Omega. \tag{6.24}$$

Vzťah (6.24) sa nazýva *Hotineov integrál* a funkcia H sa nazýva *Hotineovo integračné jadro*. Všeobecný tvar Hotineovho jadra je daný rovnicou (Sansò a Sideris, 2013)

$$H(P,P') = H(r,\psi) = \frac{2R}{\ell} - \ln\left(\frac{\ell + R - r\,\cos\psi}{r\,(1-\cos\psi)}\right). \tag{6.25}$$

Pre $r = R$ sa Hotineovo jadro zjednoduší do tvaru (obrázok 6.4)

$$H(\psi) = \frac{1}{\sin\dfrac{\psi}{2}} - \ln\left(1 + \frac{1}{\sin\dfrac{\psi}{2}}\right). \tag{6.26}$$



Obrázok 6.4. Hotineova funkcia $H(\psi)$ (vzťah 6.26) na intervale $[5°, 180°]$.

Spektrálna reprezentácia Hotineovho jadra je daná vzťahom

$$H(r, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\psi). \tag{6.27}$$

Podobne ako Stokesov integrál, aj Hotineov integrál (6.24) patrí medzi konvolučné integrály (kapitola 6.2.2) a bol získaný vo sférickej aproximácii (kapitola 6.2.3). Hľadaný tvar integrálneho operátora $\mathcal{I}_{\delta g}$ z rovnice (6.3) je zrejmý z porovnania rovníc (6.8), (6.14) a (6.24). Odvodenie vzťahu (6.24) uvádzajú napríklad Hofmann-Wellenhof a Moritz (2005) a Sansò a Sideris (2013).

Hotineovo integračné jadro má podobné vlastnosti ako Stokesovo integračné jadro (kapitola 6.2.1), teda je singulárne, homogénne a izotropné. Na rozdiel od Stokesovho jadra ide o monotónne klesajúcu funkciu (obrázok 6.4). To znamená, že čím ďalej sa nachádza integračný element dσ od výpočtového bodu P, tým menšia váha H je v Hotineovom integráli (6.24) pridelená príslušnej poruche tiažového zrýchlenia.

Dosadením vzťahu (6.24) pre $P \in \partial\Omega$ do Brunsovho vzorca (5.39) získame vzťah na výpočet geoidu z porúch tiažového zrýchlenia,

$$N = \frac{R}{4\pi\,\gamma_0} \iint_{\sigma} H(\psi)\, \delta g_0 \, \mathrm{d}\sigma, \tag{6.28}$$

kde symbol δg_0 označuje poruchy tiažového zrýchlenia na geoide. Vzťah (6.28) možno bezpochyby zaradiť medzi najdôležitejšie vzťahy fyzikálnej geodézie.

M. Hotine (1898 až 1968) bol anglický geodet. Jeho kniha *Matematická geodézia* z roku 1969 patrí medzi fundamentálne geodetické práce.

6.4 Poissonov integrál

Posledná geodetická okrajová úloha, ktorú v tejto práci spomenieme, je okrajová úloha pre poruchový potenciál so zadanou okrajovou podmienkou vo forme poruchového potenciálu:

$$\nabla^2 T(P) = 0, \qquad P \in \mathbb{R}^3 - \overline{\Omega}, \tag{6.29}$$

$$T(P) = f(P), \quad P \in \partial\Omega, \tag{6.30}$$

$$T(P) \to 0 \qquad \text{pre} \quad P \to \infty, \tag{6.31}$$

kde f je funkcia zadaná na hranici $\partial\Omega$, v tomto prípade samotný poruchový potenciál.

Riešenie tejto okrajovej úlohy má tvar

$$T(P) = \frac{R}{4\pi} \iint_\sigma \Pi(P, P')\, T(P')\, \mathrm{d}\sigma(P'), \quad P \in \left(\mathbb{R}^3 - \overline{\Omega}\right) \cup \partial\Omega, \quad P' \in \partial\Omega, \tag{6.32}$$

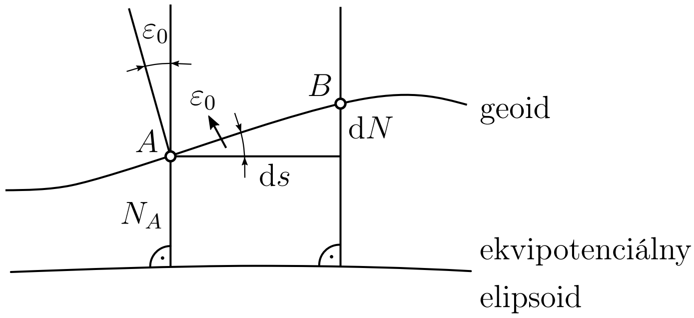
a nazýva sa *Poissonov integrál*. Symbol Π označuje *Poissonovo integračné jadro*,

$$\Pi(r, \psi) = \frac{r^2 - R^2}{\ell^3}, \tag{6.33}$$

$$\Pi(r, \psi) = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\psi). \tag{6.34}$$

Podobne ako v kapitolách 6.2 a 6.3, Poissonovo jadro je singulárne, homogénne a izotropné a Poissonov integrál je konvolučný. Vyobrazenie Poissonovho jadra vynecháme, pretože pre fixnú hodnotu sprievodiča r ide o prevrátenú hodnotu známej kubickej funkcie c/ℓ^3, kde $c = r^2 - R^2$ je konštanta. Odvodenie vzťahu (6.32) uvádzajú napríklad Hofmann-Wellenhof a Moritz (2005) a Sansò a Sideris (2013).

Poissonov integrál umožňuje získať akúkoľvek harmonickú funkciu v celom priestore $\left(\mathbb{R}^3 - \overline{\Omega}\right) \cup \partial\Omega$ z hodnôt tejto funkcie na hranici $\partial\Omega$. Tento proces sa nazýva analytické pokračovanie nahor (kapitola 1.2.5). V súvislosti so vzťahom (6.32) sa niekedy používa aj pojem *harmonické pokračovanie nahor*, keďže poruchový potenciál vystupujúci v Poissonovom integráli je v oblasti mimo hmôt harmonická funkcia. Poissonov integrál sa často používa aj inverzným spôsobom na pokračovanie nadol. Príkladom je výpočet poruchového potenciálu na povrchu Zeme z poruchového potenciálu na dráhe nízkoletiacej družice. Táto úloha je ale vo všeobecnosti nestabilná (pozri kapitolu 1.2.5 a najmä Sansò a Sideris, 2017). Okrem poruchového potenciálu môže byť Poissonov integrál aplikovaný aj na ďalšie harmonické funkcie, napríklad na gravitačný potenciál V_g či na funkciu $r\,\Delta g$, ktorá je taktiež harmonická (samotná funkcia Δg však harmonická nie je). Poissonov integrál teda umožňuje riešiť mnohé kľúčové úlohy fyzikálnej geodézie. Na výpočet geoidu sa však nezvykne používať, pretože predpokladá dostupnosť poruchového potenciálu na geoide (rovnica 6.30). Ak by bol ale poruchový potenciál na geoide známy, mohol by byť použitý priamo v Brunsovom vzorci (5.39) bez potreby formulovania a riešenia okrajovej úlohy.



Obrázok 6.5. Astronomicko-geodetická metóda určenia geoidu.

6.5 Astronomicko-geodetická metóda určenia geoidu

Astronomicko-geodetická metóda určuje geoid zo sklonu geoidu voči ekvipotenciálnemu elipsoidu. Tento sklon je popísaný Pizzettiho zvislicovou odchýlkou (obrázok 5.8). Priemet Pizzettiho zvislicovej odchýlky do spojnice dvoch bodov budeme v tejto kapitole označovať symbolom ε_0 bez horného indexu. Dolný index indikuje, že zvislicová odchýlka sa vzťahuje ku geoidu.

Z obrázku 6.5 vyplýva, že diferenciálne prevýšenie geoidu medzi bodmi A a B je dané vzťahom (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005)

$$\mathrm{d}N = -\varepsilon_0 \,\mathrm{d}s, \tag{6.35}$$

kde ε_0 je priemet zvislicovej odchýlky do spojnice bodov A, B (vzťah 5.60). Znamienko mínus je konvenčne dohodnuté, podobne ako sme konvenčne použili v rovnici (5.61) vektory vonkajších normál $\mathbf{n}_W$, $\mathbf{n}_U$, a nie vektory vnútorných normál $-\mathbf{n}_W$, $-\mathbf{n}_U$. Integráciou rovnice od bodu A po bod B získame výšku geoidu v bode B,

$$N_B = N_A - \int\limits_A^B \varepsilon_0 \,\mathrm{d}s, \tag{6.36}$$

pričom ε_0 sa pozdĺž spojnice môže meniť. Astronomicko-geodetická metóda určenia geoidu je teda *relatívna* metóda, ktorou určujeme *prevýšenie geoidu* medzi dvoma bodmi,

$$\Delta N_{AB} = N_B - N_A = -\int\limits_A^B \varepsilon_0 \,\mathrm{d}s. \tag{6.37}$$

Zvislicová odchýlka ε_0 nie je v praktických aplikáciách známa *spojito* pozdĺž spojnice bodov A a B, tak ako to vyžaduje vzťah (6.37), ale len *diskrétne*, zväčša v koncových bodoch spojnice. Integrál (6.37) preto vypočítame *numerickou integráciou*, v ktorej spojitú funkciu ε_0 a diferenciálne vzdialenosti ds nahradíme diskrétnymi hodnotami $\varepsilon_{0,i}$ a konečnými dĺžkami Δs_i. K dispozícii sú spravidla zvislicové odchýlky $\varepsilon_{0,A}$ a $\varepsilon_{0,B}$ na koncových bodoch spojnice a vzdialenosť Δs_{AB} medzi bodmi A, B. Približné prevýšenie geoidu medzi bodmi A a B získame aproximáciou integrálu (6.37) obdĺžnikovou metódou (pre popis obdĺžnikovej metódy pozri napríklad Macák a Minarechová, 2021),

$$\Delta N_{AB} \approx -\frac{\varepsilon_{0,A} + \varepsilon_{0,B}}{2}\,\Delta s_{AB}. \tag{6.38}$$

Prirodzene, čím je zložitejší priebeh geoidu medzi bodmi A a B, tým väčšej chyby sa dopúšťame použitím numerickej integrácie. V takom prípade je potrebné, pokiaľ je to možné, skrátiť vzdialenosti medzi bodmi siete.

Ak je geoid určovaný na viacerých bodoch, zvyčajne sa z bodov vytvorí trojuholníková sieť a vzťahom (6.38) sa vypočítajú prevýšenia geoidu medzi bodmi siete. V dôsledku chýb meraní a v dôsledku použitia numerickej integrácie však súčet prevýšení v trojuholníkoch siete spravidla nebude nulový. Prevýšenia sa preto zvyknú vyrovnať metódou najmenších štvorcov tak, aby bol súčet prevýšení v každom trojuholníku nulový. Na záver je potrebné odhadnuté prevýšenia geoidu pripojiť na jeden bod, v ktorom je známa absolútna výška geoidu nad referenčným elipsoidom.

Dodajme, že geoid môže byť vypočítaný zo zvislicových odchýlok aj integrálnymi vzťahmi, ktoré majú podobný charakter ako Stokesov a Hotineov integrál (pozri napríklad L. Sjöberg a Bagherbandi, 2017).

6.6 Ďalšie metódy určovania geoidu

6.6.1 Numerické riešenie geodetických okrajových úloh

V kapitolách 6.2 až 6.4 sme načrtli určovanie geoidu a vonkajšieho tiažového poľa Zeme riešením okrajových úloh. Získané riešenia (rovnice 6.8, 6.24 a 6.32) sa nazývajú *analytické riešenia*. Analytickým riešením rozumieme presný tvar hľadaného riešenia v podobe funkcie, ktorá vyhovuje definícii okrajovej úlohy. Okrajové úlohy sme si ale zjednodušili využím konceptu sférickej aproximácie, ktorá predpokladá okrajovú podmienku na sfére, nie na geoide. V presnejšom priblížení možno využiť elipsoidickú aproximáciu, teda integrovať okrajovú podmienku na ekvipotenciálnom elipsoide, ktorý je lepším priblížením geoidu ako sféra. Prirodzene, elipsoidická aproximácia vedie k okrajovej úlohe, ktorej riešenie sa hľadá náročnejšie ako vo sférickej aproximácii (pozri referencie v kapitole 6.2.3).

Ďalšie zvyšovanie presnosti analytického riešenia je nesmierne náročné. V takýchto situáciách je výhodnejšie (v mnohých prípadoch dokonca nutné) použiť *numerické riešenie* okrajovej úlohy. V tomto prístupe sa oblasť hľadaného riešenia zvykne *diskretizovať* pomocou vhodných elementárnych telies alebo plôch. Tento krok umožní riešiť úlohu lokálne v rámci jedného elementu a následne postupovať v riešení úlohy v susednom elemente. V okrajových úlohách, ktoré sú definované v trojrozmernom priestore, môže byť ako elementárne teleso použitá napríklad kocka či hranol. Takéto riešenie je síce približné, no v mnohých úlohách matematiky, fyziky a v ďalších vedných disciplínach je často jediné, ktoré je možné prakticky získať. *Numerické riešenie okrajových úloh pre poruchový potenciál* tak predstavuje ďalšiu vetvu metód určovania tvaru Zeme a jej vonkajšieho tiažového poľa.

Je potešením spomenúť, že medzi popredných svetových odborníkov v numerickom riešení geodetických okrajových úloh patrí bezpochyby tím matematikov a geodetov z Katedry matematiky a deskriptívnej geometrie Stavebnej fakulty Slovenskej technickej univerzity v Bratislave. S týmito metódami sa tak môžeme oboznámiť aj v prácach, ktoré sú napísané v slovenskom jazyku (napríklad Janák a kol., 2006; Macák a Minarechová, 2021), prípadne v odborných publikáciách v anglickom jazyku (napríklad Čunderlík a kol., 2008; Fašková a kol., 2010; Macák a kol., 2014).

6.6.2 Metódy založené na sférických harmonických funkciách

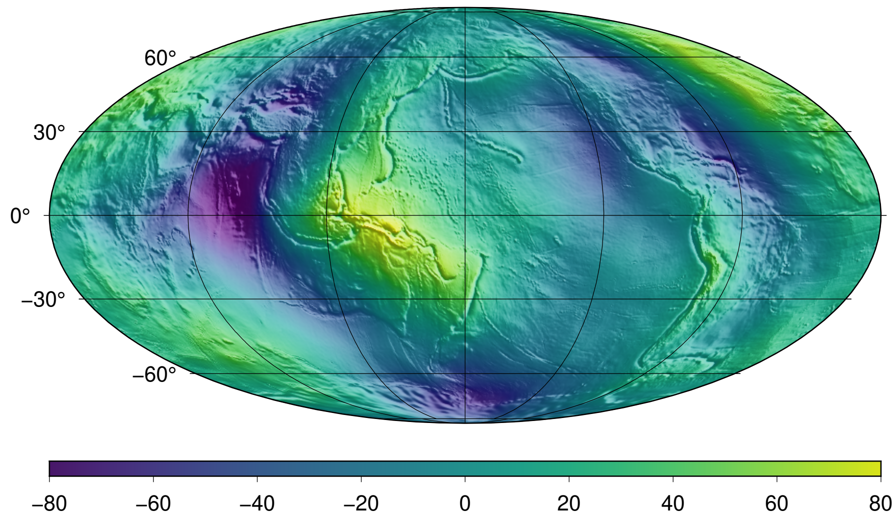
V praktických aplikáciách sú dáta, z ktorých určujeme tvar Zeme, dostupné vždy v konečnom počte bodov, a nie vo forme spojitej funkcie, ako bolo predpokladané v kapitolách 6.2 až 6.5. Nech je teda daných M anomálií tiažového zrýchlenia Δg, ktoré sú doplnené o príslušné polohy bodov v podobe sférických súradníc r, φ, λ. V rovnici (5.52) potom poznáme ľavú stranu (merané dáta) a na pravej strane vieme zo známej polohy priamočiaro vypočítať všetky členy okrem neznámych sférických harmonických koeficientov $\bar{t}_{nk}$. Vzťah (5.52) je z pohľadu koeficientov $\bar{t}_{nk}$ lineárny. Z jeho derivácií podľa $\bar{t}_{nk}$ tak dokážeme zostaviť maticu plánu a z meraní Δg potom metódou najmenších štvorcov odhadnúť najviac M koeficientov $\bar{t}_{nk}$ do maximálneho stupňa $N \leq \sqrt{M} - 1$.[7] Pomocou koeficientov $\bar{t}_{nk}$ a vzťahov (5.10) a (5.39) získame napokon priebeh geoidu. Všimnime si ale, že Brunsov vzorec (5.39) predpokladá znalosť poruchového potenciálu v bode P_0, ktorého polohu nepoznáme a snažíme sa ju určiť práve Brunsovým vzorcom (pozri obrázok 5.1). Vo výpočtoch, ktoré nevyžadujú vysokú presnosť, sa tento problém zvykne vyriešiť tak, že bod P_0 s elipsoidickými súradnicami $\phi, \lambda, h = N$ sa nahradí bodom Q_0 s elipsoidickými súradnicami $\phi, \lambda, h = 0$. Získame tým približný vzťah na výpočet výšky geoidu nad referenčným elipsoidom

$$N = \frac{T(P_0)}{\gamma(Q_0)} \approx \frac{T(Q_0)}{\gamma(Q_0)} = \frac{GM}{R\,\gamma(Q_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{k=-n}^{n} \bar{t}_{nk}\, \bar{Y}_{nk}(\varphi, \lambda), \tag{6.39}$$

kde r, φ, λ je trojica sférických súradníc bodu Q_0. Presnejší, no komplikovanejší vzťah je dostupný napríklad v práci Barthelmes (2013).

V praxi sa koeficienty $\bar{t}_{nk}$ často odhadujú nielen z anomálií tiažového zrýchlenia, ale prakticky zo všetkých dostupných dát, využívajúc pritom aj družicové merania. Výpočet koeficientov $\bar{t}_{nk}$ z družicových meraní spočíva v nájdení matematického vzťahu medzi družicovými dátami a niektorou z veličín gravitačného poľa. Keďže prakticky každá veličina gravitačného poľa môže byť vyjadrená sférickým harmonickým rozvojom, dokážeme tak formulovať hľadaný vzťah medzi meraniami na družici a neznámymi koeficientmi. Uvažujme družicu na nízkej obežnej dráhe Zeme vybavenú GNSS prijímačom, ktorý meria polohu družice každú, povedzme, sekundu. Vieme, že druhou (numerickou) deriváciou

[7] Z rovnice (5.52) vyplýva, že sférický harmonický rozvoj do stupňa N má $M = (N+1)^2$ sférických harmonických koeficientov $\bar{t}_{nk}$. Preto M koeficientov implikuje maximálny stupeň $N = \sqrt{M} - 1$.



Obrázok 6.6. Výška geoidu nad referenčným elipsoidom vypočítaná vzťahom (6.39) zo sférického harmonického modelu EIGEN-6C4 do stupňa 720 na povrchu elipsoidu GRS80 (jednotky m). Normálne tiažové pole je predpísané ekvipotenciálnym elipsoidom GRS80.

tejto polohy v inerciálnom súradnicovom systéme získame *výsledné* zrýchlenie pôsobiace na družicu v danom momente. Toto zrýchlenie sa skladá z *parciálnych* zrýchlení, ktoré sú udeľované družici v dôsledku rôznych vplyvov, napríklad tlaku priameho slnečného žiarenia na družicu, odporu atmosféry či tlaku slnečného žiarenia, ktoré je na družicu odrazené od zemského povrchu. Kľúčovým parciálnym zrýchlením je gravitačné zrýchlenie, ktoré družici udeľuje Zem. Toto zrýchlenie získame v dobrej aproximácii, keď matematickým spôsobom odstránime všetky modelovateľné a merateľné parciálne zrýchlenia, ktoré nie sú spôsobené gravitačným poľom Zeme (medzi takéto zrýchlenia patria napríklad aj gravitačné zrýchlenia udelené Mesiacom, Slnkom a planétami slnečnej sústavy). Spôsobom podobným predošlému odseku tak vieme zo sekundového vzorkovania získaného gravitačného zrýchlenia vypočítať pomocou rovníc (2.79) až (2.81) sférické harmonické koeficienty gravitačného poľa Zeme. Táto metóda sa v literatúre nazýva *metóda zrýchlení*. V Českej republike sa jej dlhodobo venuje kolektív pôsobiaci na Astronomickom ústave Akadémie vied Českej republiky v Ondřejove. Táto skupina vyvinula originálny variant metódy zrýchlení dosahujúci prvotriednu kvalitu v celosvetovom meradle (Bezděk a kol., 2014; Teixeira da Encarnação a kol., 2020). Okrem metódy zrýchlení existuje mnoho ďalších prístupov, ktoré využívajú aj ďalšie typy družicových dát (pozri Seeber, 2003). Navyše, dokonca aj z tej istej dráhy družice môžu byť koeficienty $\bar{t}_{nk}$ odhadnuté rozličnými spôsobmi (napríklad Baur a kol., 2014).

6.6.3 Metódy remove-compute-restore

Výpočet geoidu vzťahmi (6.13) a (6.28) je náročný nielen z hľadiska výpočtového času (pozri kapitolu 6.2.2), ale aj z pohľadu vstupných dát. Všimnime si, že obe rovnice integrujú anomálie, resp. poruchy tiažového zrýchlenia na celej sfére σ. Predpokladaná je teda dostupnosť gravimetrických meraní na celej Zemi. Celosvetové gravimetrické databázy síce existujú, no v súčasnosti ich priestorové rozlíšenie dosahuje nanajvýš zhruba $15'$ (Pavlis a kol., 2012; Pail a kol., 2018), teda približne 28 km na rovníku. Táto hustota nepostačuje na dosiahnutie vyžadovanej, zhruba centimetrovej, presnosti geoidu. Naproti tomu, gravimetrické databázy na úrovni kontinentov či štátov sú nezriedka výrazne hustejšie (na Slovensku napríklad 3 až 6 gravimetrických meraní na km^2, pozri Kubeš a kol., 2001 a Zahorec a kol., 2017).

Z podrobných regionálnych anomálií tiažového zrýchlenia sa preto zvykne odstrániť (angl. *remove*) dlhovlnný trend, ktorý je vypočítaný spravidla zo sférického harmonického modelu do stupňa N. Získame tým *reziduálne anomálie tiažového zrýchlenia*, ktoré sú následne použité na výpočet (angl. *compute*) *reziduálnej výšky geoidu* nad referenčným elipsoidom, napríklad pomocou Stokesovho integrálu. Na záver je k získanej reziduálnej výške geoidu vrátený (angl. *restore*) globálny dlhovlnný trend geoidu, ktorý je spočítaný opäť zo sférického harmonického modelu. Kľúčová je skutočnosť, že na získanie rozumnej presnosti je postačujúce v prostrednej časti metódy (*compute*) použiť regionálne gravimetrické dáta, napríklad do vzdialenosti 100 km od výpočtového bodu. Integračnou oblasťou v Stokesovom integráli tak už nemusí byť celá sféra σ, ale len sférický zvrchlík σ_0 so stredom vo výpočtovom bode. Takáto aproximácia je možná, pretože vplyv vzdialených *reziduálnych* anomálií tiažového zrýchlenia na *reziduálnu* výšku geoidu je s dostatočnou mierou presnosti zanedbateľný, pokiaľ sú stupeň N a integračná oblasť σ_0 vhodne zvolené.

Metóda remove-compute-restore teda umožňuje vhodnú kombináciu vysokej lokálnej hustoty regionálnych gravimetrických databáz s globálnymi družicovými meraniami. Je potrebné spomenúť, že časť *compute* môže byť realizovaná aj inými metódami výpočtu ako je Stokesov integrál, napríklad metódou kolokácie (Moritz, 1980; Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005). To isté platí v princípe aj pre časti *remove* a *restore*, hoci v tomto prípade je použitie sférických harmonických modelov takmer pravidlom. Podrobnosti o metóde remove-compute-restore sa nachádzajú napríklad v prácach L. E. Sjöberg (2005) a Hofmann-Wellenhof a Moritz (2005).

Dodajme aspoň v stručnosti, že metóda remove-compute-restore sa zvykne kombinovať s *metódou reziduálneho terénneho modelu* (Forsberg a Tscherning, 1981; Forsberg, 1984). Táto metóda vychádza zo skutočnosti, že tiažové zrýchlenie je veľmi závislé od blízkych hmôt, ktoré sa nachádzajú, povedzme, niekoľko desiatok kilometrov od výpočtového bodu (porovnaj obrázky 1.5 a 1.6). Tvar lokálnych hmôt je spravidla dobre popísaný digitálnymi modelmi terénu. V súčasnosti sú bežné modely s metrovým rozlíšením a s vertikálnou presnosťou lepšou ako pár desiatok centimetrov. Podrobnosť týchto modelov je teda výrazne vyššia ako podrobnosť terestrických gravimetrických databáz. Hustota lokálnych hmôt sa spravidla považuje za konštantnú (zväčša 2670 kg m^{-3}), no môžu byť použité aj presnejšie modely, ak sú dostupné (napríklad M. Yang a kol., 2018). Metóda reziduálneho terénneho modelu sa snaží využiť podrobnosť digitálnych modelov terénu a výpočtom gravitačného účinku blízkych hmôt dopomôcť k ešte presnejšiemu výpočtu reziduálnych anomálií tiažového zrýchlenia. Tie sa potom využívajú v metóde remove-compute-restore. Samozrejme, obe metódy môžu byť použité nielen s anomáliami tiažového zrýchlenia, ale aj s poruchami tiažového zrýchlenia, zvislicovými odchýlkami a ďalšími veličinami fyzikálnej geodézie.

6.7 Veningove Meineszove integrály

V kapitole 5.4.1 sme ukázali súvislosť medzi gravimetrickými zvislicovými odchýlkami a tiažovým poľom Zeme (vzťah 5.70). Rovnicu (5.70) ale spravidla nevieme priamo vypočítať, pretože poruchový potenciál vystupuje vo fyzikálnej geodézii väčšinou ako neznáma funkcia (kapitola 5.1). Jeden zo spôsobov výpočtu vzťahu (5.70) je pomocou sférického harmonického rozvoja poruchového potenciálu (rovnica 5.71). V tejto kapitole ukážeme ďalší prístup, ktorý kombinuje geometrickú interpretáciu zvislicových odchýlok na geoide (vzťah 6.35) a Stokesov integrál (vzťah 6.13). Kapitola je spracovaná podľa Hofmann-Wellenhof a Moritz (2005) a využíva sférickú aproximáciu zvislicových odchýlok s využitím lokálneho kartenziánskeho súradnicového systému $x^{\mathrm{s}}, y^{\mathrm{s}}, z^{\mathrm{s}}$ s pohyblivým začiatkom (pozri obrázok 1.9). Zvislicové odchýlky budeme hľadať na geoide, ktorý v tomto prístupe aproximujeme sférou s polomerom R (pozri tiež kapitolu 6.2.3).

Vyjadrime zvislicovú odchýlku ε_0 z rovnice (6.35),

$$\varepsilon_0 = -\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s}. \tag{6.40}$$

Z kapitoly 5.4 vieme, že priemet zvislicovej odchýlky ε_0 môžeme popísať dvoma kolmými zložkami ξ_0 a η_0, ktoré udávajú vychýlenie zvislice v smere sever-juh a v smere východ-západ. Ak chceme použiť tieto priemety v rovnici (6.40), potrebujeme získať zložky diferenciálu ds v smere meridiánu a v smere prvého vertikálu v lokálnom karteziánskom súradnicovom systéme $x^{\mathrm{s}}, y^{\mathrm{s}}, z^{\mathrm{s}}$ s pohyblivým začiatkom v tom bode, v ktorom je určovaná zvislicová odchýlka. Z rovnice (I.3) prílohy I vyplývajú pre zložky diferenciálu ds v horizontálnej rovine $x^{\mathrm{s}}, y^{\mathrm{s}}$ nasledujúce vzťahy,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s_{x^{\mathrm{s}}} &= R\,\mathrm{d}\varphi, \\ \mathrm{d}s_{y^{\mathrm{s}}} &= R\,\cos\varphi\,\mathrm{d}\lambda. \end{aligned} \tag{6.41}$$

Ak je zvislica vychýlená iba v smere sever-juh, vzťah (6.40) prejde do tvaru

$$\xi_0 = -\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s_{x^{\mathrm{s}}}}. \tag{6.42}$$

Ak je zvislica vychýlená iba v smere východ-západ, dostaneme vzťah

$$\eta_0 = -\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s_{y^{\mathrm{s}}}}. \tag{6.43}$$

Kombináciou rovníc (6.41), (6.42) a (6.43) získame dve zložky, ktorými možno popísať zvislicovú odchýlku v ľubovoľnom smere,

$$
\begin{aligned}
\xi_0 &= -\frac{1}{R}\,\frac{\partial N}{\partial \varphi}, \\
\eta_0 &= -\frac{1}{R\,\cos\varphi}\,\frac{\partial N}{\partial \lambda}.
\end{aligned}
\tag{6.44}
$$

Vzťahy (6.44) teda umožňujú vypočítať zvislicové odchýlky na geoide zo sklonu geoidu, zatiaľ čo vzťah (6.35) umožňuje inverzný výpočet sklonu geoidu zo zvislicových odchýlok.

Dosadením Stokesovho integrálu (6.13) do vzťahov (6.44) získame rovnice

$$
\begin{aligned}
\xi_0 &= -\frac{1}{4\pi\,\gamma_0}\iint\limits_{\sigma}\frac{\partial S(\psi)}{\partial \varphi}\,\Delta g_0\,\mathrm{d}\sigma, \\
\eta_0 &= -\frac{1}{4\pi\,\gamma_0\,\cos\varphi}\iint\limits_{\sigma}\frac{\partial S(\psi)}{\partial \lambda}\,\Delta g_0\,\mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}
\tag{6.45}
$$

Nájdime teraz derivácie $\partial S(\psi)/\partial\varphi$ a $\partial S(\psi)/\partial\lambda$. Z rovnice (6.11) vieme, že Stokesovo jadro $S(\psi)$ je funkciou sférickej vzdialenosti ψ. Tá však závisí od sférickej šírky aj od sférickej dĺžky výpočtového bodu (R, φ, λ) a integračného elementu (R, φ', λ') (vzťah 1.62). Derivujeme teda zloženú funkciu,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial S(\psi)}{\partial \varphi} &= \frac{\mathrm{d}S(\psi)}{\mathrm{d}\psi}\,\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \\
\frac{\partial S(\psi)}{\partial \lambda} &= \frac{\mathrm{d}S(\psi)}{\mathrm{d}\psi}\,\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}.
\end{aligned}
\tag{6.46}
$$

Deriváciu $\mathrm{d}S(\psi)/\mathrm{d}\psi$ získame derivovaním Stokesovho jadra (6.11) podľa sférickej vzdialenosti ψ. Na získanie parciálnych derivácií $\partial\psi/\partial\varphi$ a $\partial\psi/\partial\lambda$ je výhodné diferencovať vzťah pre kosínus sférickej šírky (1.62). Získame tak rovnice

$$
\begin{aligned}
-\sin\psi\,\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} &= \cos\varphi\,\sin\varphi' - \sin\varphi\,\cos\varphi'\,\cos(\lambda' - \lambda), \\
-\sin\psi\,\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} &= \cos\varphi\,\cos\varphi'\,\sin(\lambda' - \lambda).
\end{aligned}
\tag{6.47}
$$

Na ďalšiu úpravu rovníc (6.47) využime vzťahy (5.58), pričom použijeme aktuálnu symboliku, teda symboly Θ, ϕ, Φ, Λ nahradíme symbolmi ψ, φ, φ', λ' (porovnaj obrázky 5.9 a 6.2),

$$
\begin{aligned}
\sin\psi\,\cos\alpha &= \cos\varphi\,\sin\varphi' - \sin\varphi\,\cos\varphi'\,\cos(\lambda' - \lambda), \\
\sin\psi\,\sin\alpha &= \cos\varphi'\,\sin(\lambda' - \lambda).
\end{aligned}
\tag{6.48}
$$

Z rovníc (6.47) a (6.48) vyplývajú vzťahy

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} &= -\cos\alpha, \\
\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} &= -\cos\varphi\,\sin\alpha.
\end{aligned}
\tag{6.49}
$$

S využitím (6.46) a (6.49) dostaneme hľadané parciálne derivácie Stokesovho jadra podľa sférickej šírky φ a sférickej dĺžky λ,

$$\begin{aligned} \frac{S(\psi)}{\partial\varphi} &= -\frac{\mathrm{d}S(\psi)}{\mathrm{d}\psi}\cos\alpha, \\ \frac{S(\psi)}{\partial\lambda} &= -\frac{\mathrm{d}S(\psi)}{\mathrm{d}\psi}\cos\varphi\,\sin\alpha. \end{aligned} \tag{6.50}$$

Dosadením (6.50) do (6.45) získame výsledné vzťahy

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \frac{1}{4\pi\,\gamma_0}\iint\limits_\sigma \frac{\mathrm{d}S(\psi)}{\mathrm{d}\psi}\cos\alpha\,\Delta g_0\,\mathrm{d}\sigma, \\ \eta_0 &= \frac{1}{4\pi\,\gamma_0}\iint\limits_\sigma \frac{\mathrm{d}S(\psi)}{\mathrm{d}\psi}\sin\alpha\,\Delta g_0\,\mathrm{d}\sigma. \end{aligned} \tag{6.51}$$

Rovnice (6.51) sa nazývajú *Veningove Meineszove integrály*. Pomenované sú po holandskom geofyzikovi a geodetovi F. A. Veningovi Meineszovi (1887 až 1966), ktorý ich odvodil v roku 1928. Tieto integrály umožňujú výpočet gravimetrických zvislicových odchýlok na geoide z anomálií tiažového zrýchlenia na geoide. Deriváciu $\mathrm{d}S(\psi)/\mathrm{d}\psi$ nebudeme podrobne odvádzať a uvedieme iba jej výsledný tvar (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005),

$$\frac{\mathrm{d}S(\psi)}{\mathrm{d}\psi} = -\frac{\cos\dfrac{\psi}{2}}{2\,\sin^2\dfrac{\psi}{2}} + 8\,\sin\psi - 6\,\cos\frac{\psi}{2} - 3\,\frac{1-\sin\dfrac{\psi}{2}}{\sin\psi} + 3\,\sin\psi\,\ln\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right). \tag{6.52}$$

Veningove Meineszove integrály (6.51) patria medzi konvolučné integrály (kapitola 6.2.2). Ich integračné jadrá

$$\frac{\mathrm{d}S(\psi)}{\mathrm{d}\psi}\cos\alpha, \quad \frac{\mathrm{d}S(\psi)}{\mathrm{d}\psi}\sin\alpha \tag{6.53}$$

sú singulárne a homogénne, avšak nie sú izotropné (pozri kapitolu 6.2.1). Anizotropnosť je spôsobená závislosťou od azimutu α.

Dodajme, že do rovnice (6.44) môže byť dosadený Hotineov integrál (6.28) namiesto Stokesovho integrálu (6.13). Získame tým formálne podobné vzťahy, avšak s integračnými jadrami

$$\frac{\mathrm{d}H(\psi)}{\mathrm{d}\psi}\cos\alpha, \quad \frac{\mathrm{d}H(\psi)}{\mathrm{d}\psi}\sin\alpha \tag{6.54}$$

a poruchami tiažového zrýchlenia δg_0 namiesto anomálií tiažového zrýchlenia Δg_0.

Doslov

Súčasná geodézia stojí na mnohých pilieroch. Jedným z nich je znalosť tiažového poľa Zeme. Vďaka schopnosti merať a modelovať tiažové pole dokážeme určiť mnohé geodetické veličiny presnejšie, než keby sme vplyv tiažového poľa neuvažovali. Príkladom sú korekcie vodorovných uhlov a dĺžok do roviny mapy, prevýšenia medzi bodmi určené niveláciou či geocentrické súradnice bodov získané GNSS meraniami. Aby sme lepšie porozumeli geodézii, je potrebné pochopiť fyzikálnu podstatu princípov, na ktorých sú geodetické merania založené alebo ich implicitne využívajú. Princípy niektorých geodetických metód sa totiž môžu javiť ako očividné, no až podrobnejším premýšľaním si uvedomíme, že táto zrejmosť je len zdanlivá. Videli sme, že nemalé úsilie si vyžaduje opis už i tak bežných geodetických konceptov, akými sú lokálny horizont či smer zavesenej olovnice. S pokrokom vedy, výskumu a technológií sa výsledky výskumu tiažového poľa Zeme využívajú čoraz častejšie aj v bežnej geodetickej praxi, hoci to (opäť) nemusí byť na prvý pohľad zrejmé. Príkladom je určovanie výšky bodu na povrchu Zeme GNSS metódami. Tie umožňujú vypočítať elipsoidickú výšku, ktorá však má iba geometrický charakter a nereflektuje skutočné tiažové pole Zeme. Pre mnohé geodetické úlohy je preto nevhodná. Príkladom je vytýčenie *vodorovnej* roviny v teréne. Napriek tomu potenciál GNSS meraní v tejto úlohe dokážeme využiť, keď si uvedomíme, že odčítaním výšky geoidu N od elipsoidickej výšky h získame ortometrickú výšku H^{O} (obrázok 5.7). Táto výška už má fyzikálny charakter, a tak umožňuje napríklad presnejšie vytýčenie vodorovnej roviny. V súčasnosti je takýto prepočet medzi výškami bežnou činnosťou geodetov, pričom je uskutočňovaný buď priamo v GNSS prijímači, alebo v ďalšom spracovaní, niekedy azda i bez vedomia samotného geodeta. Porozumieť tiažovému poľu Zeme sa teda oplatí.

O poskytnutie poznatkov, ktoré by napomohli porozumieť základom teórie gravitačného a tiažového poľa, sa snažila aj táto práca. Niektoré koncepty však neboli diskutované vôbec alebo boli spomenuté iba okrajovo. V prvom rade, práca sa zaoberala určovaním tvaru Zeme v podobe geoidu. Molodenského metóda určovania fyzického povrchu Zeme (pozri úvodnú kapitolu a kapitolu 6) nebola predstavená. Nie je to tak ale preto, že táto teória je pre fyzikálnu geodéziu nepodstatná. Práve naopak! Na Slovensku sa Molodenského prístup využíva napríklad na definíciu výšok v Baltskom systéme po vyrovnaní. Molodenského koncepcia však presahuje rámec tejto práce a je pokrytá skriptami Janák a kol. (2006).

Druhou nedotknutou témou je prítomnosť topografických hmôt v procese určovania geoidu. V kapitole 6 sme predpokladali, že vo vonkajšom priestore geoidu sa nenachádzajú hmoty. V skutočnosti sa vo väčšine kontinentálnych častí zemského povrchu nad geoidom nachádzajú topografické hmoty, a to na miestach s kladnou ortometrickou výškou. Nad týmito hmotami sa ďalej nachádzajú *atmosférické hmoty*. Aby v priestore nad geoidom platila Laplaceova rovnica, topografické aj atmosférické hmoty je potrebné matematicky odstrániť. Ďalej je potrebné matematicky zredukovať (pokračovať nadol) anomálie tiažového zrýchlenia z povrchu Zeme (na ktorom boli odmerané) na geoid, kde sú potrebné na definovanie okrajovej podmienky. Matematické odstránenie topografických hmôt a pokračovanie nadol patria medzi najnáročnejšie kroky v procese určovania geoidu. Týmto témam sa venuje napríklad práca Janák a kol. (2006).

Pre názornosť sme v kapitole 2 často prirovnávali vlastnosti sférických harmonických funkcií k vlastnostiam jednotkových vektorov. Hlbšie porozumieť sférickým harmonickým funkciám a ich vlastnostiam možno napríklad pomocou *funkcionálnej analýzy*. Funkcionálna analýza je pomerne abstraktná časť matematiky, ktorá ale v súčasnosti nie je zaradená do obsahu študijného programu Geodézia a kartografia na Stavebnej fakulte Slovenskej technickej univerzity v Bratislave. Využívali sme preto prirovnania k jednotkovým vektorom, ktoré majú v širšom zmysle mnoho podobných vlastností ako sférické harmonické funkcie a navyše sú jednoducho predstaviteľné. Základy funkcionálnej analýzy uvádzajú napríklad Janák a kol. (2006). Podrobnejšie informácie sú dostupné napríklad v knihe Rektorys (1999), ktorá je napísaná v češtine a svojou formou je prístupná aj inžinierom a fyzikom. Odporúčať tiež môžeme geodetickú literatúru v anglickom jazyku, napríklad Moritz (1980), Sansò a Sideris (2013), Borre (2006) či Freeden a Schreiner (2009).

Zrejme nebudeme ďaleko od pravdy, keď budeme tvrdiť, že vedecká a akademická literatúra, nevynímajúc tieto strany, sa v istom zmysle rodí veľmi ťažko. Objavovať poznatky je totiž rovnako zložité, ako je náročné sa ich snažiť sprostredkovať čitateľovi, ktorý nevybočuje z tohto začarovaného kruhu a pre porozumenie textu musí neraz vynaložiť podobné alebo aj väčšie úsilie ako samotný autor. Mohli by sme teda povedať, že ide tak trochu o vzájomnú hru, ktorá, pokiaľ sa hrá s otvorenou mysľou, spravidla stojí za to.

Príloha A

Numerická aplikácia operátora gradient

Uvažujme dvojrozmerný karteziánsky súradnicový systém so súradnicovými osami x, y. Nech $f(x, y)$ je skalárna funkcia dvoch premenných daná vzťahom

$$f(x, y) = \sin(2x) + \cos(2y). \tag{A.1}$$

Aplikáciou operátora gradient na skalárnu funkciu $f(x, y)$ získame v zmysle rovnice (1.12) vektorovú funkciu

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos(2x) \\ -2\sin(2y) \end{bmatrix}. \tag{A.2}$$

Ukážka numerického výpočtu funkcie (A.1) a jej gradientu (A.2) na intervale $x, y \in [-1, 1]$ je uvedená v zdrojovom kóde A.1. Grafické znázornenie je uvedené na obrázku A.1. Všímajme si smer šípky a jej veľkosť v závislosti od polohy a pokúsme sa danú situáciu interpretovať.

Zdrojový kód A.1. Výpočet a zobrazenie funkcie dvoch premenných a jej gradientu v programovacom jazyku Python

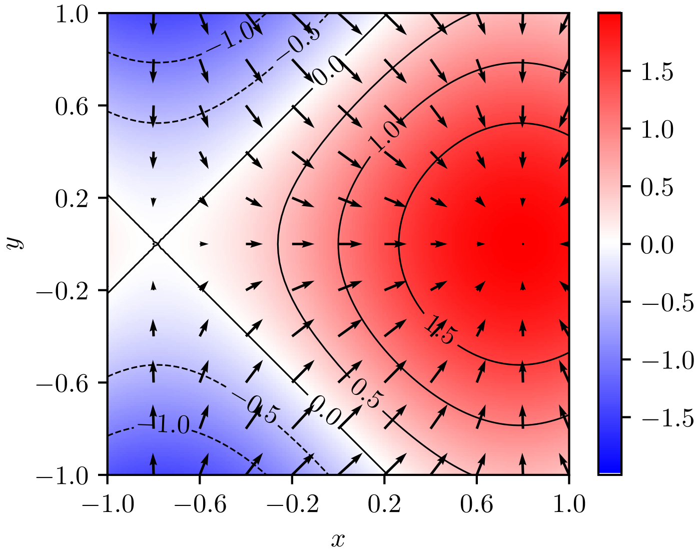
```python
# Import modulov
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import shutil

# Ak je dostupný LaTeX, bude použitý na zobrazenie popisu vo výslednom obrázku
if shutil.which(’latex’) is not None: plt.rc(’text’, usetex=True)

# Výpočtová oblasť
xmin, xmax, xn = -1.0, 1.0, 101  # Min., max. a počet hodnôt v smere osi "x"
ymin, ymax, yn = xmin, xmax, xn  # Min., max. a počet hodnôt v smere osi "y"

# Zobrazený bude každý "xngrad" a "yngrad" gradient v smere osí "x" a "y"
xngrad, yngrad = 10, 10

```



Obrázok A.1. Skalárna funkcia $f(x, y) = \sin(2x) + \cos(2y)$ a jej gradient $\nabla f(x, y)$ na intervale $x, y \in [-1, 1]$. Skalárna funkcia je znázornená hypsometricky a izočiarami. Gradient je zobrazený orientovanými šípkami, pričom šípka udáva smer a veľkosť najväčšieho nárastu funkcie $f(x, y)$ v danom bode.

```
# Tvorba gridu
x, y = np.meshgrid(np.linspace(xmin, xmax, xn), np.linspace(ymin, ymax, yn))

# Výpočet skalárnej funkcie
f = np.sin(2.0 * x) + np.cos(2.0 * y)

# Výpočet gradientu skalárnej funkcie "f" (derivácií "f" podľa "x" a "y")
fx =  2.0 * np.cos(2.0 * x)
fy = -2.0 * np.sin(2.0 * y)

# Vykreslenie
fig, ax = plt.subplots(figsize=(10.0 / 2.54, 8.0 / 2.54))
im = ax.imshow(f, extent=(xmin, xmax, ymin, ymax), cmap='bwr',
               vmin=-np.abs(f).max(), vmax=np.abs(f).max())
cntr = ax.contour(x, y, f, colors='black', linewidths=0.6)
ax.clabel(cntr, inline=True, fontsize=10)
ax.quiver( x[::xngrad, ::xngrad],  y[::yngrad, ::yngrad],
          fx[::xngrad, ::xngrad], fy[::yngrad, ::yngrad])
ax.set_xlabel('$x$')
ax.set_ylabel('$y$')
ax.set_xticks(np.linspace(xmin, xmax, 6))
ax.set_yticks(np.linspace(ymin, ymax, 6))
fig.colorbar(im)
plt.tight_layout()
fig.savefig('./fig-gradient.pdf')
```

Príloha B

Operátor gradient v ortogonálnych súradnicových systémoch

V tejto kapitole je vyjadrený operátor gradient v ortogonálnych súradnicových systémoch. *Ortogonálny súradnicový systém* je taký súradnicový systém, ktorého súradnicové plochy sa pretínajú pod pravým uhlom. Príkladom sú karteziánske súradnicové systémy x, y, z a $x^{\mathrm{s}}, y^{\mathrm{s}}, z^{\mathrm{s}}$ či krivočiary systém súradníc r, φ, λ (pozri obrázok 1.9).

V kapitole B.1 je odvodený operátor gradient (1.39) v ortogonálnom krivočiarom sférickom súradnicovom systéme (r, φ, λ). V kapitole B.2 je uvedené všeobecné riešenie pre ľubovoľný ortogonálny súradnicový systém.

B.1 Operátor gradient vo sférickom súradnicovom systéme

Nech f je skalárna diferencovateľná funkcia. V lokálnom karteziánskom súradnicovom systéme $x^{\mathrm{s}}, y^{\mathrm{s}}, z^{\mathrm{s}}$ s jednotkovými vektormi $\mathbf{e}_1^{\mathrm{s}}, \mathbf{e}_2^{\mathrm{s}}, \mathbf{e}_3^{\mathrm{s}}$ (obrázok 1.9) je gradient funkcie f daný vzťahom (1.12),

$$\nabla f = \mathbf{e}_1^{\mathrm{s}} \frac{\partial f}{\partial x^{\mathrm{s}}} + \mathbf{e}_2^{\mathrm{s}} \frac{\partial f}{\partial y^{\mathrm{s}}} + \mathbf{e}_3^{\mathrm{s}} \frac{\partial f}{\partial z^{\mathrm{s}}}. \tag{B.1}$$

Cieľom tejto kapitoly je vyjadriť parciálne derivácie $\partial f / \partial x^{\mathrm{s}}, \partial f / \partial y^{\mathrm{s}}, \partial f / \partial z^{\mathrm{s}}$ pomocou ortogonálnych *krivočiarych* súradníc φ, λ, r.

Je zrejmé, že potrebujeme nájsť parciálne derivácie $\partial f / \partial \varphi, \partial f / \partial \lambda, \partial f / \partial r$. Túto úlohu komplikuje závislosť karteziánskych súradníc x, y, z od sférických súradníc φ, λ, r (pozri rovnice 1.37). Derivujeme preto zloženú funkciu troch premenných,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \varphi}, \\
\frac{\partial f}{\partial \lambda} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \lambda}, \\
\frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r}.
\end{aligned} \tag{B.2}$$

Rovnicu (B.2) môžeme zapísať v maticovom tvare

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \lambda} \\ \dfrac{\partial f}{\partial r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \lambda} & \dfrac{\partial y}{\partial \lambda} & \dfrac{\partial z}{\partial \lambda} \\ \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}. \tag{B.3}$$

Zaveďme vektorovú funkciu $\mathbf{r}$, ktorá bude popisovať začiatok lokálneho súradnicového systému $x^{\mathrm{s}}, y^{\mathrm{s}}, z^{\mathrm{s}}$ v globálnom súradnicovom systéme x, y, z (rovnice 1.37),

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x(\varphi, \lambda, r) \\ y(\varphi, \lambda, r) \\ z(\varphi, r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos\varphi \cos\lambda \\ r \cos\varphi \sin\lambda \\ r \sin\varphi \end{bmatrix}. \tag{B.4}$$

Vzťah (B.3) potom môžeme prepísať do tvaru

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \lambda} \\ \dfrac{\partial f}{\partial r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\hat{\mathbf{e}}_1^{\mathrm{s}})^\top \\ (\hat{\mathbf{e}}_2^{\mathrm{s}})^\top \\ (\hat{\mathbf{e}}_3^{\mathrm{s}})^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}, \tag{B.5}$$

kde symboly

$$\hat{\mathbf{e}}_1^{\mathrm{s}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} -r \sin\varphi \cos\lambda \\ -r \sin\varphi \sin\lambda \\ r \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{e}}_2^{\mathrm{s}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} = \begin{bmatrix} -r \cos\varphi \sin\lambda \\ r \cos\varphi \cos\lambda \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{e}}_3^{\mathrm{s}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \cos\lambda \\ \cos\varphi \sin\lambda \\ \sin\varphi \end{bmatrix} \tag{B.6}$$

predstavujú vektory v smere osí $x^{\mathrm{s}}, y^{\mathrm{s}}, z^{\mathrm{s}}$ lokálneho karteziánskeho súradnicového systému. Derivácie $\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z$ vyjadríme pomocou parciálnych derivácií $\partial f/\partial \varphi, \partial f/\partial \lambda, \partial f/\partial r$ vyriešením systému lineárnych rovníc (B.5) použitím niektorej z metód lineárnej algebry.

Obzvlášť jednoduchý postup riešenia systému rovníc (B.5) je daný nasledujúcimi krokmi. Normovaním vektorov (B.6) ich veľkosťami

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathbf{e}}_1^{\mathrm{s}}\| &= \sqrt{(-r \sin\varphi \cos\lambda)^2 + (-r \sin\varphi \sin\lambda)^2 + (r \cos\varphi)^2} = r, \\ \|\hat{\mathbf{e}}_2^{\mathrm{s}}\| &= \sqrt{(-r \cos\varphi \sin\lambda)^2 + (r \cos\varphi \cos\lambda)^2} = r \cos\varphi, \\ \|\hat{\mathbf{e}}_3^{\mathrm{s}}\| &= \sqrt{(\cos\varphi \cos\lambda)^2 + (\cos\varphi \sin\lambda)^2 + \sin^2\varphi} = 1 \end{aligned} \tag{B.7}$$

získame jednotkové vektory v smere súradnicových osí $x^{\mathrm{s}}, y^{\mathrm{s}}, z^{\mathrm{s}}$,

$$\mathbf{e}_1^{\mathrm{s}} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_1^{\mathrm{s}}}{\|\hat{\mathbf{e}}_1^{\mathrm{s}}\|} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi \cos\lambda \\ -\sin\varphi \sin\lambda \\ \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2^{\mathrm{s}} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_2^{\mathrm{s}}}{\|\hat{\mathbf{e}}_2^{\mathrm{s}}\|} = \begin{bmatrix} -\sin\lambda \\ \cos\lambda \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3^{\mathrm{s}} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_3^{\mathrm{s}}}{\|\hat{\mathbf{e}}_3^{\mathrm{s}}\|} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \cos\lambda \\ \cos\varphi \sin\lambda \\ \sin\varphi \end{bmatrix}. \tag{B.8}$$

Systém lineárnych rovníc (B.5) potom môžeme prepísať do tvaru

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \lambda} \\ \dfrac{\partial f}{\partial r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\ (\mathbf{e}_1^{\mathrm{s}})^\top \\ r\ \cos\varphi\ (\mathbf{e}_2^{\mathrm{s}})^\top \\ (\mathbf{e}_3^{\mathrm{s}})^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}. \tag{B.9}$$

O vektoroch $\mathbf{e}_1^{\mathrm{s}}, \mathbf{e}_2^{\mathrm{s}}, \mathbf{e}_3^{\mathrm{s}}$ vieme, že sú ortogonálne (pozri rovnicu 1.27) a ich veľkosť je rovná 1, čo možno overiť vzťahmi (B.8). Inverzia matice systému lineárnych rovníc (B.9) je potom daná vzťahom (Michel, 2013)

$$\begin{bmatrix} r\ (\mathbf{e}_1^{\mathrm{s}})^\top \\ r\ \cos\varphi\ (\mathbf{e}_2^{\mathrm{s}})^\top \\ (\mathbf{e}_3^{\mathrm{s}})^\top \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{r}\,\mathbf{e}_1^{\mathrm{s}} & \dfrac{1}{r\ \cos\varphi}\,\mathbf{e}_2^{\mathrm{s}} & \mathbf{e}_3^{\mathrm{s}} \end{bmatrix}. \tag{B.10}$$

Riešenie rovnice (B.9) má teda tvar

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{r}\,\mathbf{e}_1^{\mathrm{s}} & \dfrac{1}{r\ \cos\varphi}\,\mathbf{e}_2^{\mathrm{s}} & \mathbf{e}_3^{\mathrm{s}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \lambda} \\ \dfrac{\partial f}{\partial r} \end{bmatrix}. \tag{B.11}$$

Hľadané parciálne derivácie v súradnicovom systéme $x^{\mathrm{s}}, y^{\mathrm{s}}, z^{\mathrm{s}}$ sú tak dané vzťahmi

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x^{\mathrm{s}}} &= \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial f}{\partial y^{\mathrm{s}}} &= \frac{1}{r\ \cos\varphi}\frac{\partial f}{\partial \lambda}, \\ \frac{\partial f}{\partial z^{\mathrm{s}}} &= \frac{\partial f}{\partial r}. \end{aligned} \tag{B.12}$$

Keďže funkcia f je podľa predpokladu ľubovoľná skalárna diferencovateľná funkcia, vzťah (B.11) dokazuje rovnicu (1.39).

B.2 Operátor gradient v ortogonálnom súradnicovom systéme

Odvodenie z predošlej kapitoly možno zovšeobecniť na ľubovoľný ortogonálny súradnicový systém. Nech ξ_1, ξ_2, ξ_3 je ortogonálny súradnicový systém a nech f je diferencovateľná funkcia. Gradient funkcie f je v tomto súradnicovom systéme daný vzťahom (Arfken a Weber, 2005; Sansò a Sideris, 2013)

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{3} \frac{\hat{\mathbf{e}}_i}{\|\hat{\mathbf{e}}_i\|^2}\frac{\partial f}{\partial \xi_i} = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\|\hat{\mathbf{e}}_i\|}\,\mathbf{e}_i\,\frac{\partial f}{\partial \xi_i}, \tag{B.13}$$

kde

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \frac{\partial \mathbf{r}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_i} \tag{B.14}$$

je vektor v smere súradnicovej osi ξ_i,

$$\mathbf{e}_i = \frac{\hat{\mathbf{e}}_i}{\|\hat{\mathbf{e}}_i\|} \tag{B.15}$$

je jednotkový vektor v smere súradnicovej osi ξ_i a

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}. \tag{B.16}$$

Príloha C

Laplaceov operátor v ortogonálnych súradnicových systémoch

V kapitole C.1 je odvodený tvar Laplaceovho operátora vo sférickom súradnicovom systéme (rovnica 1.40). V kapitole C.2 je odvodený všeobecný tvar Laplaceovho operátora v ľubovoľnom ortogonálnom súradnicovom systéme. Kapitola C.1 je spracovaná podľa Michel (2013) a kapitola C.2 podľa Sansò a Sideris (2013).

C.1 Laplaceov operátor vo sférickom súradnicovom systéme

Aplikujme operátor gradient vo sférických súradniciach (1.39) na dvakrát diferencovateľnú funkciu f v zmysle rovnice (1.26),

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f &= \nabla \cdot (\nabla f) \\
&= \left(\mathbf{e}_1^{\mathrm{s}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_2^{\mathrm{s}} \frac{1}{r\,\cos\varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \mathbf{e}_3^{\mathrm{s}} \frac{\partial}{\partial r} \right) \cdot \left(\mathbf{e}_1^{\mathrm{s}} \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_2^{\mathrm{s}} \frac{1}{r\,\cos\varphi} \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \mathbf{e}_3^{\mathrm{s}} \frac{\partial f}{\partial r} \right) \\
&= \frac{1}{r^2} \underbrace{\mathbf{e}_1^{\mathrm{s}} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_1^{\mathrm{s}}}{\partial \varphi}}_{\mathbf{e}_1^{\mathrm{s}} \cdot (-\mathbf{e}_3^{\mathrm{s}}) = 0} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \underbrace{\mathbf{e}_1^{\mathrm{s}} \cdot \mathbf{e}_1^{\mathrm{s}}}_{1} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2\,\cos\varphi} \underbrace{\mathbf{e}_1^{\mathrm{s}} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_2^{\mathrm{s}}}{\partial \varphi}}_{\mathbf{e}_1^{\mathrm{s}} \cdot \mathbf{0} = 0} \frac{\partial f}{\partial \lambda} \\
&\quad + \frac{1}{r^2} \underbrace{\mathbf{e}_1^{\mathrm{s}} \cdot \mathbf{e}_2^{\mathrm{s}}}_{0} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\cos\varphi} \right) \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \frac{1}{r^2\,\cos\varphi} \underbrace{\mathbf{e}_1^{\mathrm{s}} \cdot \mathbf{e}_2^{\mathrm{s}}}_{0} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi\,\partial \lambda} + \frac{1}{r} \underbrace{\mathbf{e}_1^{\mathrm{s}} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_3^{\mathrm{s}}}{\partial \varphi}}_{\mathbf{e}_1^{\mathrm{s}} \cdot \mathbf{e}_1^{\mathrm{s}} = 1} \frac{\partial f}{\partial r} \\
&\quad + \frac{1}{r} \underbrace{\mathbf{e}_1^{\mathrm{s}} \cdot \mathbf{e}_3^{\mathrm{s}}}_{0} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi\,\partial r} + \frac{1}{r^2\,\cos\varphi} \underbrace{\mathbf{e}_2^{\mathrm{s}} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_1^{\mathrm{s}}}{\partial \lambda}}_{\mathbf{e}_2^{\mathrm{s}} \cdot (-\sin\varphi\, \mathbf{e}_2^{\mathrm{s}}) = -\sin\varphi} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2\,\cos\varphi} \underbrace{\mathbf{e}_2^{\mathrm{s}} \cdot \mathbf{e}_1^{\mathrm{s}}}_{0} \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda\,\partial \varphi} \\
&\quad + \frac{1}{r^2\,\cos^2\varphi} \underbrace{\mathbf{e}_2^{\mathrm{s}} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_2^{\mathrm{s}}}{\partial \lambda}}_{0} \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \frac{1}{r^2\,\cos^2\varphi} \underbrace{\mathbf{e}_2^{\mathrm{s}} \cdot \mathbf{e}_2^{\mathrm{s}}}_{1} \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{r\,\cos\varphi} \underbrace{\mathbf{e}_2^{\mathrm{s}} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_3^{\mathrm{s}}}{\partial \lambda}}_{\mathbf{e}_2^{\mathrm{s}} \cdot (\cos\varphi\, \mathbf{e}_2^{\mathrm{s}}) = \cos\varphi} \frac{\partial f}{\partial r}
\end{aligned} \tag{C.1}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{1}{r\,\cos\varphi}\,\underbrace{\mathbf{e}_2^{\mathrm{s}}\cdot\mathbf{e}_3^{\mathrm{s}}}_{0}\,\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\,\partial r} + \frac{1}{r}\,\underbrace{\mathbf{e}_3^{\mathrm{s}}\cdot\frac{\partial\mathbf{e}_1^{\mathrm{s}}}{\partial r}}_{\mathbf{e}_3^{\mathrm{s}}\cdot\mathbf{0}=0}\,\frac{\partial f}{\partial\varphi} + \underbrace{\mathbf{e}_3^{\mathrm{s}}\cdot\mathbf{e}_1^{\mathrm{s}}}_{0}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial f}{\partial\varphi} + \underbrace{\mathbf{e}_3^{\mathrm{s}}\cdot\mathbf{e}_1^{\mathrm{s}}}_{0}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial\varphi} \\
&+ \frac{1}{r\,\cos\varphi}\,\underbrace{\mathbf{e}_3^{\mathrm{s}}\cdot\frac{\partial\mathbf{e}_2^{\mathrm{s}}}{\partial r}}_{\mathbf{e}_3^{\mathrm{s}}\cdot\mathbf{0}=0}\,\frac{\partial f}{\partial\lambda} + \underbrace{\mathbf{e}_3^{\mathrm{s}}\cdot\mathbf{e}_2^{\mathrm{s}}}_{0}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r\,\cos\varphi}\right)\frac{\partial f}{\partial\lambda} + \underbrace{\mathbf{e}_3^{\mathrm{s}}\cdot\mathbf{e}_2^{\mathrm{s}}}_{0}\,\frac{1}{r\,\cos\varphi}\,\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial\lambda} \\
&+ \underbrace{\mathbf{e}_3^{\mathrm{s}}\cdot\frac{\partial\mathbf{e}_3^{\mathrm{s}}}{\partial r}}_{\mathbf{e}_3^{\mathrm{s}}\cdot\mathbf{0}=0}\,\frac{\partial f}{\partial r} + \underbrace{\mathbf{e}_3^{\mathrm{s}}\cdot\mathbf{e}_3^{\mathrm{s}}}_{1}\,\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}.
\end{aligned}
$$

Jednotkové vektory $\mathbf{e}_1^{\mathrm{s}}, \mathbf{e}_2^{\mathrm{s}}, \mathbf{e}_3^{\mathrm{s}}$ z predošlej rovnice sú dané vzťahmi (B.8). Ich derivácie podľa sférických súradníc majú nasledujúci tvar,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\mathbf{e}_1^{\mathrm{s}}}{\partial\varphi} = \begin{bmatrix} -\cos\varphi\,\cos\lambda \\ -\cos\varphi\,\sin\lambda \\ -\sin\varphi \end{bmatrix} = -\mathbf{e}_3^{\mathrm{s}}, &&\frac{\partial\mathbf{e}_1^{\mathrm{s}}}{\partial\lambda} = \begin{bmatrix} \sin\varphi\,\sin\lambda \\ -\sin\varphi\,\cos\lambda \\ 0 \end{bmatrix} = -\sin\varphi\,\mathbf{e}_2^{\mathrm{s}}, &&\frac{\partial\mathbf{e}_1^{\mathrm{s}}}{\partial r} = \mathbf{0}, \\
&\frac{\partial\mathbf{e}_2^{\mathrm{s}}}{\partial\varphi} = \mathbf{0}, &&\frac{\partial\mathbf{e}_2^{\mathrm{s}}}{\partial\lambda} = \begin{bmatrix} -\cos\lambda \\ -\sin\lambda \\ 0 \end{bmatrix}, &&\frac{\partial\mathbf{e}_2^{\mathrm{s}}}{\partial r} = \mathbf{0}, \\
&\frac{\partial\mathbf{e}_3^{\mathrm{s}}}{\partial\varphi} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi\,\cos\lambda \\ -\sin\varphi\,\sin\lambda \\ \cos\varphi \end{bmatrix} = \mathbf{e}_1^{\mathrm{s}}, &&\frac{\partial\mathbf{e}_3^{\mathrm{s}}}{\partial\lambda} = \begin{bmatrix} -\cos\varphi\,\sin\lambda \\ \cos\varphi\,\cos\lambda \\ 0 \end{bmatrix} = \cos\varphi\,\mathbf{e}_2^{\mathrm{s}}, &&\frac{\partial\mathbf{e}_3^{\mathrm{s}}}{\partial r} = \mathbf{0}.
\end{aligned}
\tag{C.2}
$$

Kombináciou rovníc (C.1) a (C.2) získame Laplaceov operátor vo sférických súradniciach,

$$
\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{r^2\,\cos^2\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda^2}. \tag{C.3}
$$

C.2 Laplaceov operátor v ortogonálnom súradnicovom systéme

Odvodenie z kapitoly C.1 možno zovšeobecniť na ľubovoľný ortogonálny súradnicový systém ξ_1, ξ_2, ξ_3.

Nech f je dvakrát diferencovateľná funkcia. Všeobecný tvar Laplaceovho operátora získame pomocou rovníc (1.26) a (B.13),

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f = \nabla\cdot(\nabla f) &= \left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\hat{\mathbf{e}}_i}{\|\hat{\mathbf{e}}_i\|^2}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\hat{\mathbf{e}}_j}{\|\hat{\mathbf{e}}_j\|^2}\frac{\partial f}{\partial\xi_j}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{\|\hat{\mathbf{e}}_i\|^2\,\|\hat{\mathbf{e}}_j\|^2}\,\hat{\mathbf{e}}_i\cdot\frac{\partial\hat{\mathbf{e}}_j}{\partial\xi_i}\,\frac{\partial f}{\partial\xi_j} - 2\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\hat{\mathbf{e}}_i\cdot\hat{\mathbf{e}}_j}{\|\hat{\mathbf{e}}_i\|^2\,\|\hat{\mathbf{e}}_j\|^3}\,\frac{\partial\|\hat{\mathbf{e}}_j\|}{\partial\xi_i}\,\frac{\partial f}{\partial\xi_j} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\hat{\mathbf{e}}_i\cdot\hat{\mathbf{e}}_j}{\|\hat{\mathbf{e}}_i\|^2\,\|\hat{\mathbf{e}}_j\|^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial\xi_i\,\partial\xi_j}.
\end{aligned}
\tag{C.4}
$$

Súradnicový systém ξ_1, ξ_2, ξ_3 je podľa predpokladu ortogonálny, preto vektory $\hat{\mathbf{e}}_i$, $i = 1, 2, 3$, musia byť taktiež ortogonálne (pozri vzťahy 1.27, 1.28, B.14 a B.15),

$$\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \begin{cases} (\|\hat{\mathbf{e}}_i\|\,\mathbf{e}_i) \cdot (\|\hat{\mathbf{e}}_i\|\,\mathbf{e}_i) = \|\hat{\mathbf{e}}_i\|^2, & \text{ak} \quad i = j, \\ 0, & \text{ak} \quad i \neq j. \end{cases} \tag{C.5}$$

Použitím vzťahov

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_i}{\partial \xi_j} = \frac{\partial}{\partial \xi_j}\frac{\partial \mathbf{r}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_i} = \frac{\partial}{\partial \xi_i}\frac{\partial \mathbf{r}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_j} = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_j}{\partial \xi_i} \tag{C.6}$$

a (C.5) prejde rovnica (C.4) do tvaru

$$\begin{aligned} \nabla^2 f = {} & \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \frac{1}{\|\hat{\mathbf{e}}_i\|^2\,\|\hat{\mathbf{e}}_j\|^2}\,\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_i}{\partial \xi_j}\frac{\partial f}{\partial \xi_j} - 2\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{\|\hat{\mathbf{e}}_j\|^3}\frac{\partial \|\hat{\mathbf{e}}_j\|}{\partial \xi_j}\frac{\partial f}{\partial \xi_j} \\ & + \sum_{j=1}^{3}\frac{1}{\|\hat{\mathbf{e}}_j\|^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_j^2}. \end{aligned} \tag{C.7}$$

Ďalej samostatne upravíme najprv prvé dva členy rovnice (C.7) a potom jej tretí člen. Na záver použijeme výsledky oboch úprav, čím získame výsledný tvar Laplaceovho operátora v ľubovoľnom ortogonálnom súradnicovom systéme ξ_1, ξ_2, ξ_3.

Nech $j = 1$. Pomocou

$$\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_i}{\partial \xi_j} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \xi_j}(\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_i) = \frac{1}{2}\frac{\partial \|\hat{\mathbf{e}}_i\|^2}{\partial \xi_j} = \|\hat{\mathbf{e}}_i\|\,\frac{\partial \|\hat{\mathbf{e}}_i\|}{\partial \xi_j}, \tag{C.8}$$

$$E = \|\hat{\mathbf{e}}_1\|\,\|\hat{\mathbf{e}}_2\|\,\|\hat{\mathbf{e}}_3\| \tag{C.9}$$

môžeme upraviť prvé dva členy rovnice (C.7),

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\|\hat{\mathbf{e}}_i\|^2\,\|\hat{\mathbf{e}}_1\|^2}\,\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_i}{\partial \xi_1}\frac{\partial f}{\partial \xi_1} - 2\frac{1}{\|\hat{\mathbf{e}}_1\|^3}\frac{\partial \|\hat{\mathbf{e}}_1\|}{\partial \xi_1}\frac{\partial f}{\partial \xi_1} \\ & = \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\|\hat{\mathbf{e}}_i\|^2\,\|\hat{\mathbf{e}}_1\|^2}\,\|\hat{\mathbf{e}}_i\|\,\frac{\partial \|\hat{\mathbf{e}}_i\|}{\partial \xi_1}\frac{\partial f}{\partial \xi_1} - 2\frac{1}{\|\hat{\mathbf{e}}_1\|^3}\frac{\partial \|\hat{\mathbf{e}}_1\|}{\partial \xi_1}\frac{\partial f}{\partial \xi_1} \\ & = -\frac{1}{\|\hat{\mathbf{e}}_1\|^3}\frac{\partial \|\hat{\mathbf{e}}_1\|}{\partial \xi_1}\frac{\partial f}{\partial \xi_1} + \frac{1}{\|\hat{\mathbf{e}}_1\|^2\,\|\hat{\mathbf{e}}_2\|}\frac{\partial \|\hat{\mathbf{e}}_2\|}{\partial \xi_1}\frac{\partial f}{\partial \xi_1} + \frac{1}{\|\hat{\mathbf{e}}_1\|^2\,\|\hat{\mathbf{e}}_3\|}\frac{\partial \|\hat{\mathbf{e}}_3\|}{\partial \xi_1}\frac{\partial f}{\partial \xi_1} \\ & = \frac{1}{\|\hat{\mathbf{e}}_1\|\,\|\hat{\mathbf{e}}_2\|\,\|\hat{\mathbf{e}}_3\|}\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\frac{\|\hat{\mathbf{e}}_2\|\,\|\hat{\mathbf{e}}_3\|}{\|\hat{\mathbf{e}}_1\|}\right)\frac{\partial f}{\partial \xi_1} = \frac{1}{E}\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\frac{E}{\|\hat{\mathbf{e}}_1\|^2}\right)\frac{\partial f}{\partial \xi_1}. \end{aligned} \tag{C.10}$$

Podobným spôsobom možno upraviť prvé dva členy rovnice (C.7) pre všetky $j = 1, 2, 3$ do konečného tvaru

$$\frac{1}{E}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_j}\frac{E}{\|\hat{\mathbf{e}}_j\|^2}\right)\frac{\partial f}{\partial \xi_j}. \tag{C.11}$$

Tretí člen rovnice (C.7) upravíme pomocou vzťahu (C.9),

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{\|\hat{\mathbf{e}}_j\|^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_j^2} = \frac{1}{E}\sum_{j=1}^{3}\frac{E}{\|\hat{\mathbf{e}}_j\|^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_j^2}. \tag{C.12}$$

Kombináciou (C.11) a (C.12) získame výsledný tvar Laplaceovho operátora v ortogonálnom súradnicovom systéme,

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f &= \frac{1}{E} \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j} \frac{E}{\|\hat{\mathbf{e}}_j\|^2} \right) \frac{\partial f}{\partial \xi_j} + \frac{1}{E} \sum_{j=1}^{3} \frac{E}{\|\hat{\mathbf{e}}_j\|^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_j^2} \\
&= \frac{1}{E} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\frac{E}{\|\hat{\mathbf{e}}_j\|^2} \frac{\partial f}{\partial \xi_j} \right) .
\end{aligned} \tag{C.13}$$

Dosadením substitúcie (C.9) do (C.13) dostaneme tvar, s ktorým sa možno často stretnúť v literatúre (napríklad Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005),

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f = \frac{1}{\|\hat{\mathbf{e}}_1\| \, \|\hat{\mathbf{e}}_2\| \, \|\hat{\mathbf{e}}_3\|} & \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{\|\hat{\mathbf{e}}_2\| \, \|\hat{\mathbf{e}}_3\|}{\|\hat{\mathbf{e}}_1\|} \frac{\partial f}{\partial \xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{\|\hat{\mathbf{e}}_1\| \, \|\hat{\mathbf{e}}_3\|}{\|\hat{\mathbf{e}}_2\|} \frac{\partial f}{\partial \xi_2} \right) \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{\|\hat{\mathbf{e}}_1\| \, \|\hat{\mathbf{e}}_2\|}{\|\hat{\mathbf{e}}_3\|} \frac{\partial f}{\partial \xi_3} \right) \right] .
\end{aligned} \tag{C.14}$$

Z rovnice (C.14) vidíme, že na získanie Laplaceovho operátora v ortogonálnom súradnicovom systéme teda postačuje vypočítať veľkosti vektorov $\hat{\mathbf{e}}_i$ a dosadiť ich do vzťahu (C.14).

Príloha D

Výpočet a zobrazenie gravitačného potenciálu a veľkosti gravitačného zrýchlenia homogénnej gule

Zdrojový kód D.1 vypočíta a zobrazí gravitačný potenciál a veľkosť gravitačného zrýchlenia v okolí homogénnej nerotujúcej gule. Hmotnosť a polomer homogénnej gule boli zvolené tak, aby aproximovali skutočnú Zem.

Zdrojový kód D.1. Výpočet a zobrazenie gravitačného potenciálu a veľkosti gravitačného zrýchlenia homogénnej gule v programovacom jazyku Python

```
# Import modulov
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import shutil

# Ak je dostupný LaTeX, bude použitý na zobrazenie popisu vo výslednom obrázku
if shutil.which('latex') is not None: plt.rc('text', usetex=True)

G    = 6.67430 * 10**-11  # Newtonova gravitačná konštanta (jednotky
                          # "m**3 * kg**-1 * s**-2")
M    = 5.9722 * 10**24    # Hmotnosť Zeme ("kg")
dr   = 10.0**5            # Krok vo sférickom sprievodiči ("m")
R    = 6378137.0          # Polomer Zeme ("m")
rmax = 2.5 * 10**7        # Maximálny sférický sprievodič ("m")

GM = G * M  # Geocentrická gravitačná konštanta ("m**3 * s**-2")

# Diskretizácia výpočtovej oblasti vo vnútri gule ("ri") a mimo gule ("ro")
ri = np.arange(0.0, np.floor(R / dr) * dr + dr, dr, dtype=np.float64)
ro = np.arange(np.ceil(R / dr) * dr, rmax + dr, dtype=np.float64)

# Gravitačný potenciál a gravitačné zrýchlenie vo vnútri gule
Vgi = (GM / 2.0) * (3.0 / R - ri**2 / R**3)
```

```
ggi = (GM / R**3) * ri

# Gravitačný potenciál a gravitačné zrýchlenie na povrchu gule
VgR = GM / R
ggR = GM / R**2

# Gravitačný potenciál a gravitačné zrýchlenie mimo gule
Vgo = GM / ro
ggo = GM / ro**2

# Spojenie výsledkov do polí pre jednoduché vykreslenie
r  = np.hstack((ri, R,  ro))     # Sférický sprievodič
Vg = np.hstack((Vgi, VgR, Vgo))  # Gravitačný potenciál
gg = np.hstack((ggi, ggR, ggo))  # Gravitačné zrýchlenie

# Vykreslenie
blue   = 'tab:blue'    # Farba pre zobrazenie gravitačného potenciálu
orange = 'tab:orange'  # Farba pre zobrazenie gravitačného zrýchlenia

fig, ax1 = plt.subplots(figsize=(13.0 / 2.54, 9.0 / 2.54))
ax1.plot(r, Vg, color=blue)
ax1.set_ylabel('$V_{\mathrm{g}} \ (\mathrm{m}^2 \ \mathrm{s}^{-2})$',
               color=blue)
ax1.tick_params(axis='y', colors=blue)

ax2 = ax1.twinx()  # Pridanie druhej vertikálnej osi
ax2.plot(r, gg, color=orange)
ax2.set_ylabel('$\| \mathbf{g}_{\mathrm{g}} \| \ ' +
               '(\mathrm{m} \ \mathrm{s}^{-2})$',
               color=orange)
ax2.spines['right'].set_color(orange)
ax2.spines['left'].set_color(blue)
ax2.tick_params(axis='y', colors=orange)

ylim = ax2.get_ylim()
ax2.set_ylim(ylim)
ax2.set_xlim([0, rmax])

# Vyznačenie oblasti vo vnútri homogénnej gule
ax2.axhspan(ylim[0], ylim[1], xmin=0, xmax=R / rmax, facecolor='0', alpha=0.15)

ax1.set_xlabel('$r \ (\mathrm{m})$')
plt.tight_layout()
fig.savefig('./fig-homogeneous-ball-vg-gg.pdf')
```

Príloha E

Výpočet a zobrazenie Legendreových polynómov

Zdrojový kód E.1 vypočíta a graficky znázorní Legendreove polynómy $P_n(t) = P_n(\sin\varphi)$ stupňov $n = 0, 1, \ldots, n_{\max}$ pre $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Polynómy sú pre názornosť počítané Bonnetovým rekurentným vzťahom (2.23), ktorý je vhodný na praktickú numerickú implementáciu. Legendreove polynómy môžu byť vypočítané aj funkciou `scipy.special.eval_legendre` z modulu `scipy`.

Zdrojový kód E.1. Výpočet a zobrazenie Legendreových polynómov v programovacom jazyku Python

```
# Import modulov
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import shutil

# Ak je dostupný LaTeX, bude použitý na zobrazenie popisu vo výslednom obrázku
if shutil.which('latex') is not None: plt.rc('text', usetex=True)

nmax = 5  # Maximálny stupeň Legendreových polynómov

# Vzorkovanie sférických šírok a ich sínusy
lat = np.linspace(-np.pi / 2.0, np.pi / 2.0, 101)
t   = np.sin(lat)

# Výpočet Legendreových polynómov pomocou rekurentných vzťahov
pn       = np.zeros((nmax + 1, t.shape[0]), dtype=np.float64)
pn[0, :] = 1.0
if nmax > 0:
    pn[1, :] = t
    for n in range(2, nmax + 1):
        pn[n, :] = ((2.0 * n - 1.0) / n) * t * pn[n - 1, :] - \
                   ((n - 1.0) / n) * pn[n - 2, :]
```

```python

# Vykreslenie
fig, ax = plt.subplots(figsize=(13.0 / 2.54, 9.0 / 2.54))
ax.plot(t, pn.transpose())
ax.grid(visible=True)
ax.set_xlabel('$t$')
labels = [''] * (nmax + 1)
for n in range(nmax + 1):
    labels[n] = f'$P_{n}$'
ax.legend(labels, loc='center', bbox_to_anchor=(0.5, -0.35), ncol=nmax + 1)
fig.subplots_adjust(bottom=0.3, top=0.98)
fig.savefig('./fig-legendre-polynomials.pdf')
```

Príloha F

Výpočet a zobrazenie sférických harmonických funkcií

Zdrojový kód F.1 vypočíta a zobrazí nenormovanú plošnú sférickú harmonickú funkciu stupňa $n = 0, 1, 2, \ldots$ a rádu $k = -n, \ldots, n$ (rovnica 2.53). Legendreove funkcie sú pre jednoduchosť počítané funkciou `lpmv` z Python modulu `scipy`. Táto funkcia počíta Legendreove funkcie $P_n^{|k|}(\sin\varphi)$, v ktorých je použitý Condonov-Shortleyho fázový faktor (pozri kapitolu 2.4). Vo fyzikálnej geodézii sa tento faktor väčšinou nepoužíva, preto je vo výpočte odstránený.

Sférické harmonické funkcie možno vypočítať a zobraziť aj pomocou služby na stránke ICGEM (pre link pozri poznámku pod čiarou 2 na strane 68).

Zdrojový kód F.1. Výpočet a zobrazenie nenormovaných sférických harmonických funkcií v programovacom jazyku Python

```
# Import modulov
import numpy as np
import matplotlib as mpl
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.special import lpmv

# Sférický harmonický stupeň "n" a sférický harmonický rád "k"
n, k = 3, 1

# "False" pre zobrazenie na jednotkovej sfére, "True" pre zobrazenie pomocou
# odhľahlostí od jednotkovej sféry
zobrazenie_3d = True

# Tvorba gridu na jednotkovej sfére
lat      = np.linspace(-np.pi / 2.0, np.pi / 2.0, 181)
lon      = np.linspace(0.0, 2.0 * np.pi, 361)
lon, lat = np.meshgrid(lon, lat)

```

```
# Výpočet nenormovanej Legendreovej funkcie stupňa "n" a rádu "|k|"
pnk = lpmv(np.abs(k), n, np.sin(lat))

# Výpočet sférickej harmonickej funkcie
if k >= 0:
    ynk = pnk * np.cos(k * lon)
else:
    ynk = pnk * np.sin(np.abs(k) * lon)

# Odstránenie Condonovho-Shortleyho fázového faktora
ynk *= (-1)**np.abs(k)

# Sprievodič
if zobrazenie_3d:
    # Zobrazenie odľahlosťami od jednotkovej sféry.
    #
    # Hodnota "1.0" reprezentuje polomer jednotkovej sféry.  Hodnota "0.5" je
    # amplitúdový faktor, ktorý pre účely zobrazenia pozmení amplitúdu
    # oscilácií sférických harmonických funkcií tak, aby bol zreteľný
    # zobrazovaný tvar.  Člen "ynk / np.abs(ynk).max()" zabezpečuje, že
    # hodnoty "ynk" sa budú nachádzať v jednotnom intervale "[-1.0, 1.0]" pre
    # ľubovoľné "n" a "k", čo je opäť výhodné pre vizualizačné účely.
    r = 1.0 + 0.5 * ynk / np.abs(ynk).max()
else:
    r = 1.0  # Zobrazenie na jednotkovej sfére

# Transformácia sférických súradníc na pravouhlé súradnice
x = r * np.cos(lat) * np.cos(lon)
y = r * np.cos(lat) * np.sin(lon)
z = r * np.sin(lat)

# Vykreslenie
fig, ax = plt.subplots(figsize=(4.0 / 2.54, 4.0 / 2.54),
                       subplot_kw={'projection': '3d'})
ax.set_box_aspect((np.ptp(x), np.ptp(y), np.ptp(z)))
norm = mpl.colors.Normalize()
ax.plot_surface(x, y, z, rstride=1, cstride=1, cmap=plt.cm.bwr,
                facecolors=plt.cm.bwr(norm(ynk)))
ax.set_axis_off()
ax.set_rasterized(True)
plt.tight_layout(pad=-2.0)

# Názov výstupného súboru
fileout = f'./fig-spherical-harmonic-n{n}-k{k}'
if zobrazenie_3d:
    fileout += '-3d'
fileout += '.pdf'
fig.savefig(fileout, dpi=300)
```

Príloha G

Ukážka modelu gravitačného poľa Zeme

Táto príloha obsahuje ukážku modelu EIGEN-6C4 vo forme `gfc` súboru. Niektoré odkazy na literatúru zo state `References` a mnohé sférické harmonické koeficienty sú pre stručnosť vynechané. Preskočené časti sú označené značkou `[...]`. Pôvodný súbor je dostupný na stránke služby ICGEM (pre link pozri poznámku pod čiarou 2 na strane 68). Sférický harmonický stupeň n a sférický harmonický rád m sú v modeli označené písmenami `L` a `M`. Stĺpce s označením `sigma C` a `sigma S` obsahujú formálne stredné chyby príslušných sférických harmonických koeficientov.

```
The Gravity Field Model EIGEN-6C4
---------------------------------

EIGEN-6C4 is a static global combined gravity field model up to degree and order
2190. It has been elaborated jointly by GFZ Potsdam and GRGS Toulouse and contains
the following satellite and ground data:

- LAGEOS (deg. 2 - 30): 1985 - 2010

- GRACE RL03 GRGS (deg. 2 - 130): ten years 2003 - 2012

- GOCE-SGG data, processed by the direct approach (Pail et al. 2011, Bruinsma et al.
  2014, to deg. 235) incl. the gravity gradient components Txx, Tyy, Tzz and Txz out
  of the following time spans: 837 days out of the nominal mission time span 20091101
  - 20120801 422 days out of the lower orbit phase between 20120901 - 20130524 The
  GOCE polar gaps were stabilized by the Spherical Cap Regularization (Metzler and
  Pail 2005) using the combined gravity field model EIGEN-6C3stat

- Terrestrial data (max degree 370):
  DTU12 ocean geoid data (Anderson et al. 2009) and an EGM2008 geoid height grid for
  the continents
```

```
The combination of these different satellite and surface data sets has been done
by a band-limited combination of normal equations (to max degree 370), which are
generated from observation equations for the spherical harmonic coefficients. A brief
description of the applied techniques for the generation of such a combined gravity
field model is given in Shako et al. 2014. The resulted solution to degree/order 370
has been extended to degree/order 2190 by a block diagonal solution using the DTU10
global gravity anomaly data grid.

References:
-----------

Andersen O. B. P. Knudsen and P. Berry. (2009): DNSC08 mean sea surface and mean
dynamic topography models, Journal of Geophys Research, Vol. 114, c11001 12 pp., 2009,
doi:10.1029/2008JC005179

[...]

begin_of_head =====================================
product_type              gravity_field
modelname                 EIGEN-6C4
earth_gravity_constant    0.3986004415E+15
radius                    0.6378136460E+07
max_degree                2190
errors                    formal
norm                      fully_normalized
tide_system               tide_free

key L M  C                S                  sigma C    sigma S
end_of_head ===================================================
gfc 0 0  1.00000000000e+00 0.000000000000e+00 0.0000e+00 0.0000e+00
gfc 1 0  0.00000000000e+00 0.000000000000e+00 0.0000e+00 0.0000e+00
gfc 2 0 -4.84165217061e-04 0.000000000000e+00 1.1081e-13 0.0000e+00
gfc 3 0  9.57173592933e-07 0.000000000000e+00 6.5264e-14 0.0000e+00

[...]

gfc 1 1  0.00000000000e+00 0.00000000000e+00 0.0000e+00 0.0000e+00
gfc 2 1 -3.38846075704e-10 1.46306108906e-09 3.2499e-13 3.2870e-13
gfc 3 1  2.03045608898e-06 2.48236210655e-07 8.5500e-14 8.5499e-14

[...]

gfc 2190 2190 -0.488605221310D-13 -0.515141038060D-13 0.1601D-12 0.1601D-12
```

Príloha H

Výpočet a zobrazenie sférického harmonického rozvoja zemskej topografie

Zdrojovým kódom H.1 možno vypočítať a zobraziť sférický harmonický rozvoj topografie Zeme. Sférické harmonické koeficienty $\bar{h}_{nk}$ (rovnica 2.82) sú prevzaté z modelu DTM2006.0 (Pavlis a kol., 2007). Výpočet používa program GrafLab (Bucha a Janák, 2013), ktorý je voľne dostupný na adrese https://github.com/blazej-bucha/graflab. Návody na prácu v programe GrafLab sú prístupné na adrese https://github.com/blazej-bucha/graflab-cookbook.

Zdrojový kód H.1. Sférický harmonický rozvoj zemskej topografie v programovacom jazyku MATLAB

```
% Stiahnutie programu "GrafLab" na výpočet sférického harmonického rozvoja
unzip("https://github.com/blazej-bucha/graflab/archive/refs/heads/" + ...
      "master.zip", ".");

% Zmena pracovného adresára na adresár so zdrojovým kódom programu GrafLab
cd graflab-master/src/

% Výpočet a zobrazenie zemskej topografie do rôznych stupňov "nmax"
for nmax = [30, 90, 360]

    GrafLab('OK', 1.0, 1.0, 0, nmax, [0 0 0 0 0], ...
            '../data/input/DTM2006.mat', 1, 0, -90.0, 0.25, 90, 0.0 ,0.25, ...
            360.0, 0.0, [], [], [], [], ...
            sprintf('../../topography-nmax%d', nmax), ...
            0, 11, 1, [], 1, 0, 0, 2, 6, 1, 60, 600, 1);

end

% Návrat do pôvodného pracovného adresára
cd ../../
```

Príloha I

Diferenciál vzdialenosti vo sférických súradniciach

V tejto prílohe odvodíme vzťah pre druhú mocninu diferenciálu vzdialenosti $\mathrm{d}s^2$ vo sférických súradniciach r, φ, λ.

Definujme polohový vektor $\mathbf{r}$ pomocou globálnych karteziánskych súradníc x, y, z nasledujúcim spôsobom (rovnice 1.37),

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x(\varphi, \lambda, r) \\ y(\varphi, \lambda, r) \\ z(\varphi, r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos\varphi \cos\lambda \\ r \cos\varphi \sin\lambda \\ r \sin\varphi \end{bmatrix}. \tag{I.1}$$

Totálny diferenciál polohového vektora $\mathrm{d}\mathbf{r}$ vo sférických súradniciach získame vzťahom (pozri kapitolu 1.5.1)

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}\,\mathrm{d}\varphi + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda}\,\mathrm{d}\lambda + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}\,\mathrm{d}r = \hat{\mathbf{e}}_1^{\mathrm{s}}\,\mathrm{d}\varphi + \hat{\mathbf{e}}_2^{\mathrm{s}}\,\mathrm{d}\lambda + \hat{\mathbf{e}}_3^{\mathrm{s}}\,\mathrm{d}r, \tag{I.2}$$

kde vektory $\hat{\mathbf{e}}_1^{\mathrm{s}}, \hat{\mathbf{e}}_2^{\mathrm{s}}, \hat{\mathbf{e}}_3^{\mathrm{s}}$ sú dané rovnicami (B.6). Pomocou jednotkových vektorov $\mathbf{e}_1^{\mathrm{s}}, \mathbf{e}_2^{\mathrm{s}}, \mathbf{e}_3^{\mathrm{s}}$ z rovníc (B.8) môžeme prepísať vzťah (I.2) do tvaru

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathbf{r} &= \|\hat{\mathbf{e}}_1^{\mathrm{s}}\|\,\mathbf{e}_1^{\mathrm{s}}\,\mathrm{d}\varphi + \|\hat{\mathbf{e}}_2^{\mathrm{s}}\|\,\mathbf{e}_2^{\mathrm{s}}\,\mathrm{d}\lambda + \|\hat{\mathbf{e}}_3^{\mathrm{s}}\|\,\mathbf{e}_3^{\mathrm{s}}\,\mathrm{d}r \\ &= \mathbf{e}_1^{\mathrm{s}}\,r\,\mathrm{d}\varphi + \mathbf{e}_2^{\mathrm{s}}\,r\,\cos\varphi\,\mathrm{d}\lambda + \mathbf{e}_3^{\mathrm{s}}\,\mathrm{d}r. \end{aligned} \tag{I.3}$$

Po uvážení vlastností (1.27) a (1.28) jednotkových vektorov $\mathbf{e}_1^{\mathrm{s}}, \mathbf{e}_2^{\mathrm{s}}, \mathbf{e}_3^{\mathrm{s}}$ (pozri tiež prílohu B.1) získame hľadaný vzťah,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} &= (\mathbf{e}_1^{\mathrm{s}}\,r\,\mathrm{d}\varphi + \mathbf{e}_2^{\mathrm{s}}\,r\,\cos\varphi\,\mathrm{d}\lambda + \mathbf{e}_3^{\mathrm{s}}\,\mathrm{d}r)\cdot(\mathbf{e}_1^{\mathrm{s}}\,r\,\mathrm{d}\varphi + \mathbf{e}_2^{\mathrm{s}}\,r\,\cos\varphi\,\mathrm{d}\lambda + \mathbf{e}_3^{\mathrm{s}}\,\mathrm{d}r) \\ &= r^2\,\mathrm{d}\varphi^2\,\mathbf{e}_1^{\mathrm{s}}\cdot\mathbf{e}_1^{\mathrm{s}} + r^2\,\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\lambda\,\mathbf{e}_1^{\mathrm{s}}\cdot\mathbf{e}_2^{\mathrm{s}} + \cdots + \mathrm{d}r^2\,\mathbf{e}_3^{\mathrm{s}}\cdot\mathbf{e}_3^{\mathrm{s}} \\ &= r^2\,\mathrm{d}\varphi^2 + r^2\,\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\lambda^2 + \mathrm{d}r^2. \end{aligned} \tag{I.4}$$

Literatúra

Arfken, G. B.; Weber, H. J., 2005. *Mathematical Methods for Physicists*. 6. vyd. Elsevier Academic Press.

Barthelmes, F., 2013. *Definition of functionals of the geopotential and their calculation from spherical harmonic models: Theory and formulas used by the calculation service of the International Centre for Global Earth Models (ICGEM), http://icgem.gfz-potsdam.de*. Potsdam, Germany. Scientific Technical Report, STR09/02. GFZ German Research Centre for Geosciences. Dostupné z DOI: 10.2312/GFZ.b103-0902-26.

Baur, O.; Bock, H.; Höck, E.; Jäggi, A.; Krauss, S.; Mayer-Gürr, T.; Reubelt, T.; Siemes, C.; Zehentner, N., 2014. Comparison of GOCE-GPS gravity fields derived by different approaches. *Journal of Geodesy*. Roč. 88, s. 959–973. Dostupné z DOI: 10.1007/s00190-014-0736-6.

Bezděk, A.; Sebera, J.; Klokočník, J.; Kostelecký, J., 2014. Gravity field models from kinematic orbits of CHAMP, GRACE and GOCE satellites. *Advances in Space Research*. Roč. 53, s. 412–429. Dostupné z DOI: 10.1016/j.asr.2013.11.031.

Borre, K., 2006. *Mathematical Foundation of Geodesy: Selected Papers of Torben Krarup*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.

Bosch, W., 2000. On the computation of derivatives of Legendre functions. *Physics and Chemistry of the Earth*. Roč. 25, s. 655–659. Dostupné z DOI: 10.1007/s00190-012-0561-8.

Bucha, B., 2019. *grav-sr-2arcsec: a suite of 2-arcsec surface gravitational maps of the Slovak Republic up to the full gravitational tensor* [https://zenodo.org/record/7074772, (accessed September 26, 2022)]. Dostupné z DOI: 10.5281/zenodo.7074771.

Bucha, B., 2022. Spherical harmonic synthesis of area-mean potential values on irregular surfaces. *Journal of Geodesy*. Roč. 96, č. 68. Dostupné z DOI: 10.1007/s00190-022-01658-1.

Bucha, B.; Janák, J., 2013. A MATLAB-based graphical user interface program for computing functionals of the geopotential up to ultra-high degrees and orders. *Computers and Geosciences*. Roč. 56, s. 186–196. Dostupné z DOI: 10.1016/j.cageo.2013.03.012.

Claessens, S. J., 2006. *Solutions to ellipsoidal boundary value problems for gravity field modelling*. Perth, Australia. Diz. pr. Curtin University of Technology.

Claessens, S. J., 2019. Efficient transformation from Cartesian to geodetic coordinates. *Computers and Geosciences*. Roč. 133, s. 104307. Dostupné z DOI: 10.1016/j.cageo.2019.104307.

Conway, J. T, 2000. Exact solutions for the gravitational potential of a family of heterogeneous spheroids. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. Roč. 316, s. 555–558. Dostupné z DOI: 10.1046/j.1365-8711.2000.03524.x.

Čunderlík, R.; Mikula, K.; Mojzeš, M., 2008. Numerical solution of the linearized fixed gravimetric boundary-value problem. *Journal of Geodesy*. Roč. 82, s. 15–29. Dostupné z DOI: 10.1007/s00190-007-0154-0.

Dziewonski, A. M.; Anderson, D. L., 1981. Preliminary reference Earth model. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. Roč. 25, s. 297–356. Dostupné z DOI: 10.1016/0031-9201(81)90046-7.

Fašková, Z.; Čunderlík, R.; Mikula, K., 2010. Finite element method for solving geodetic boundary value problems. *Journal of Geodesy*. Roč. 84, s. 135–144. Dostupné z DOI: 10.1007/s00190-009-0349-7.

Feynman, R. P.; Leighton, R. B.; Sands, M., 2010. *The Feynman Lectures on Physics: Volume I: Mainly Mechanics, Radiation, and Heat*. The New Millennium Edition. New York, NY: Basic Books.

Forsberg, R., 1984. *A study of terrain reductions, density anomalies and geophysical inversion methods in gravity field modelling*. Columbus, Ohio. Report, No. 355. Department of Geodetic Science a Surveying, The Ohio State University.

Forsberg, R.; Tscherning, C. C., 1981. The use of height data in gravity field approximation by collocation. *Journal of Geophysical Research*. Roč. 86, s. 7843–7854. Dostupné z DOI: 10.1029/JB086iB09p07843.

Förste, C.; Bruinsma, S. L.; Abrikosov, O.; Lemoine, J.-M.; Schaller, T.; Götze, H.-J.; Ebbing, J.; Marty, J. C.; Flechtner, F.; Balmino, G.; Biancale, R., 2014. EIGEN-6C4 The latest combined global gravity field model including GOCE data up to degree and order 2190 of GFZ Potsdam and GRGS Toulouse. In: *5th GOCE User Workshop*. Paris, France, 25–28 November.

Freeden, W.; Schneider, F., 1998. An integrated wavelet concept of physical geodesy. *Journal of Geodesy*. Roč. 72, s. 259–281. Dostupné z DOI: 10.1007/s001900050166.

Freeden, W.; Schreiner, M., 2009. *Spherical Functions of Mathematical Geosciences: A Scalar, Vectorial, and Tensorial Setup*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

Freeden, W.; Sonar, T.; Witte, B., 2018. Gauss as Scientific Mediator Between Mathematics and Geodesy from the Past to the Present. In: Freeden, W.; Nashed, M. Z. (ed.). *Handbook of Mathematical Geodesy: Functional Analytic and Potential Theoretic Methods*. Cham: Birkhäuser, s. 1–163.

Fukushima, T., 2006. Transformation from Cartesian to geodetic coordinates accelerated by Halley's method. *Journal of Geodesy*. Roč. 79, s. 689–693. Dostupné z DOI: 10.1007/s00190-006-0023-2.

Fukushima, T., 2012a. Numerical computation of spherical harmonics of arbitrary degree and order by extending exponent of floating point numbers. *Journal of Geodesy*. Roč. 86, s. 271–285. Dostupné z DOI: 10.1007/s00190-011-0519-2.

Fukushima, T., 2012b. Numerical computation of spherical harmonics of arbitrary degree and order by extending exponent of floating point numbers: II first-, second-, and third-order derivatives. *Journal of Geodesy*. Roč. 86, s. 1019–1028. Dostupné z DOI: 10.1007/s00190-012-0561-8.

Fukushima, T., 2013. Recursive computation of oblate spheroidal harmonics of the second kind and their first-, second-, and third-order derivatives. *Journal of Geodesy*. Roč. 87, s. 303–309. Dostupné z DOI: 10.1007/s00190-012-0599-7.

Garmier, R.; Barriot, J.-P., 2001. Ellipsoidal harmonic expansions of the gravitational potential: Theory and applications. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. Roč. 79, s. 235–275. Dostupné z DOI: 10.1023/A:1017555515763.

Gradshteyn, I. S.; Ryzhik, I. M., 2007. *Table of Integrals, Series, and Products*. 7. vyd. Academic Press.

Grafarend, E. W.; Engels, J., 1993. The gravitational field of topographic-isostatic masses and the hypothesis of mass condensation. *Surveys in Geohpysics*. Roč. 140, s. 495–524. Dostupné z DOI: 10.1007/BF00690574.

Heiskanen, W. A.; Moritz, H., 1967. *Physical Geodesy*. San Francisco: W. H. Freeman a Company.

Hirt, C., 2014. Encyclopedia of Geodesy. In: ed. Grafarend, E. Cham: Springer, kap. Digital Terrain Models, s. 1–6. Dostupné z DOI: 10.1007/978-3-319-02370-0_31-1.

Hirt, C.; Claessens, S.; Fecher, T.; Kuhn, M.; Pail, R.; Rexer, M., 2013. New ultrahigh-resolution picture of Earth's gravity field. *Geophysical Research Letters*. Roč. 40, s. 4279–4283. Dostupné z DOI: 10.1002/grl.50838.

Hirt, C.; Reußner, E.; Rexer, M.; Kuhn, M., 2016. Topographic gravity modeling for global Bouguer maps to degree 2160: Validation of spectral and spatial domain forward modeling techniques at the 10 microGal level. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. Roč. 121, s. 6846–6862. Dostupné z DOI: 10.1002/2016JB013249.

Hirt, C.; Rexer, M., 2015. Earth2014: 1 arc-min shape, topography, bedrock and ice-sheet models – Available as gridded data and degree-10,800 spherical harmonics. *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation*. Roč. 39, s. 103–112. Dostupné z DOI: 10.1016/j.jag.2015.03.001.

Hobson, E. W., 1931. *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*. Cambridge, Great Britain: Cambridge University Press.

Hofmann-Wellenhof, B.; Moritz, H., 2005. *Physical Geodesy*. Wien, New York: Springer.

Holmes, S. A.; Featherstone, W. E., 2002. A unified approach to the Clenshaw summation and the recursive computation of very high degree and order normalised associated Legendre functions. *Journal of Geodesy*. Roč. 76, s. 279–299. Dostupné z DOI: 10.1007/s00190-002-0216-2.

Hörmander, L., 1976. The boundary problems of physical geodesy. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. Roč. 62, s. 1–52. Dostupné z DOI: 10.1007/BF00251855.

Hotine, M., 1969. *Mathematical Geodesy*. Washington, D.C.: U.S. Department of Commerce.

Hu, X.; Jekeli, C., 2015. A numerical comparison of spherical, spheroidal and ellipsoidal harmonic gravitational field models for small non-spherical bodies: examples for the Martian moons. *Journal of Geodesy*. Roč. 89, s. 159–177. Dostupné z DOI: 10.1007/s00190-014-0769-x.

Husár, L., 2017. *Sférická astronómia a kozmická geodézia*. Bratislava: Slovenská technická univerzita v Bratislave.

Ince, E. S.; Abrykosov, O.; Förste, C.; Flechtner, F., 2020. Forward gravity modelling to augment high-resolution combined gravity field models. *Surveys in Geophysics*. Roč. 41, s. 767–804. Dostupné z DOI: 10.1007/s10712-020-09590-9.

Ishioka, K., 2018. A new recurrence formula for efficient computation of spherical harmonic transform. *Journal of the Meteorological Society of Japan*. Roč. 96, s. 241–249. Dostupné z DOI: 10.2151/jmsj.2018-019.

Ivanov, K. G.; Pavlis, N. K.; Petrushev, P., 2018. Precise and efficient evaluation of gravimetric quantities at arbitrarily scattered points in space. *Journal of Geodesy*. Roč. 92, s. 779–796. Dostupné z DOI: 10.1007/s00190-012-0558-3.

Janák, J., 2010. *Gravimetria*. Bratislava: Slovenská technická univerzita v Bratislave.

Janák, J.; Mikula, K.; Čunderlík, R., 2006. *Fyzikálna geodézia II: Okrajové úlohy v geodézii*. Bratislava: Slovenská technická univerzita v Bratislave.

Jekeli, C., 1983. A numerical study of the divergence of spherical harmonic series of the gravity and height anomalies at the Earth's surface. *Bulletin Géodésique*. Roč. 57, s. 10–28. Dostupné z DOI: 10.1007/BF02520909.

Jekeli, C., 1999. An analysis of vertical deflections derived from high-degree spherical harmonic models. *Journal of Geodesy*. Roč. 73, s. 10–22. Dostupné z DOI: 10.1007/s001900050213.

Jekeli, C., 2000a. *Heights, the geopotential and vertical datums*. Columbus, Ohio. Report No. 459. Department of Civil, Environmental Engineering a Geodetic Science, The Ohio State University.

Jekeli, C., 2000b. *Inertial Navigation Systems with Geodetic Applications*. Berlin, New York: Walter de Gruyter.

Jekeli, C., 2015. Potential Theory and the Static Gravity Field of the Earth. In: Schubert, G. (ed.). *Treatise on Geophysics*. 2. vyd. Elsevier, s. 9–35.

Jekeli, C., 2017. *Spectral Methods in Geodesy and Geophysics*. CRC Press.

Karcol, R.; Mikuška, J.; Marušiak, I., 2017. Normal Earth Gravity Field Versus Gravity Effect of Layered Ellipsoidal Model. In: Pašteka, R.; Mikuška, J.; Meurers, B. (ed.). *Understanding the Bouguer Anomaly*. Elsevier, s. 63–77. Dostupné z DOI: 10.1016/B978-0-12-812913-5.00006-3.

Keller, W., 2004. *Wavelets in Geodesy and Geodynamics*. Berlin: Walter de Gruyter.

Kellogg, O. D., 1967. *Foundation of Potential Theory*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.

Kostelecký, J.; Klokočník, J.; Kostelecký, J., 2008. *Kosmická geodézie*. Praha: Nakladatelství ČVUT.

Krarup, T., 1969. A contribution to the mathematical foundation of Physical Geodesy. In: Borre, K. (ed.). *Mathematical Foundation of Geodesy: Selected Papers of Torben Krarup*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, v. 2006, s. 29–90.

Krarup, T., 1973. Letters on Molodenskiy's problem. In: Borre, K. (ed.). *Mathematical Foundation of Geodesy: Selected Papers of Torben Krarup*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, v. 2006, s. 105–134.

Kubeš, P.; Grand, T.; Šefara, J.; Pašteka, R.; Bielik, M.; Daniel, S., 2001. *Atlas of geophysical maps and profiles: D1 - part gravimetry*. Bratislava, Slovak Republic. Final Report, 0801840301/180. State Geological Institute of Dionýz Štúr.

Lee, J. G.; Adelberger, E. G.; Cook, T. S.; Fleischer, S. M.; Heckel, B. R., 2020. New test of the gravitational $1/r^2$ law at separations down to 52 μm. *Physical Review Letters*. Roč. 124, s. 101101. Dostupné z DOI: 10.1103/PhysRevLett.124.101101.

Lowrie, W., 2007. *Fundamentals of Geophysics*. 2. vyd. Cambridge University Press. Dostupné z DOI: 10.1017/CBO9780511807107.

Macák, M.; Minarechová, Z., 2021. *Numerická matematika (nielen) pre geodetov a kartografov*. Bratislava: Slovenská technická univerzita v Bratislave.

Macák, M.; Minarechová, Z.; Mikula, K., 2014. A novel scheme for solving the oblique derivative boundary-value problem. *Studia Geophysica et Geodaetica*. Roč. 58, s. 556–570. Dostupné z DOI: 10.1007/s11200-013-0340-x.

MacMillan, W. D., 1930. *The Theory of the Potential*. New York: McGraw-Hill Book Company, Incorporated.

Martinec, Z., 1998. *Boundary-Value Problems for Gravimetric Determination of a Precise Geoid*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

Martinec, Z.; Grafarend, E. W., 1997. Solution to the Stokes boundary-value problem on an ellipsoid of revolution. *Studia Geophysica et Geodaetica*. Roč. 41, s. 103–129. Dostupné z DOI: 10.1023/A:1023380427166.

Meissl, P., 1971. *On the linearization of the geodetic boundary value problem*. Columbus, Ohio. Report, No. 152. Department of Geodetic Science, The Ohio State University.

Melicher, J.; Fixel, J.; Kabeláč, J., 1993. *Geodetická astronómia a základy kozmickej geodézie*. Bratislava: Alfa.

Melicher, J.; Gerhátová, Ľ., 2009. *Kozmická geodézia*. Bratislava: Slovenská technická univerzita v Bratislave.

Meurers, B., 2017. The Physical Meaning of Bouguer Anomalies—General Aspects Revisited. In: Pašteka, R.; Mikuška, J.; Meurers, B. (ed.). *Understanding the Bouguer Anomaly*. Elsevier, s. 13–30. Dostupné z DOI: 10.1016/B978-0-12-812913-5.00001-4.

Michel, V., 2013. *Lectures on Constructive Approximation: Fourier, Spline, and Wavelet Methods on the Real Line, the Sphere, and the Ball*. Boston: Birkhäuser.

Mikuška, J.; Pašteka, R.; Zahorec, P.; Papčo, J.; Marušiak, I.; Krajňák, M., 2017. Some Remarks on the Early History of the Bouguer Anomaly. In: Pašteka, R.; Mikuška, J.; Meurers, B. (ed.). *Understanding the Bouguer Anomaly*. Elsevier, s. 31–61. Dostupné z DOI: 10.1016/B978-0-12-812913-5.00002-6.

Minarechová, Z.; Macák, M., 2019. *Zbierka riešených úloh z Matematiky 2 pre odbor GaK*. Bratislava: Slovenská technická univerzita v Bratislave.

Molodensky, M. S.; Eremeev, V. F.; Yurkina, M. I., 1962. *Methods for Study of the External Gravitational Field and Figure of the Earth*. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations. Translated from Russian (1960).

Moritz, H., 1980. *Advanced Physical Geodesy*. Karlsruhe, Germany: Herbert Wichmann Verlag.

Moritz, H., 1990. *The Figure of the Earth: Theoretical Geodesy and the Earth's Interior*. Karlsruhe, Germany: Herbert Wichmann Verlag.

Moritz, H., 2000. Geodetic reference system 1980. *Journal of Geodesy*. Roč. 74, s. 128–133. Dostupné z DOI: 10.1007/s001900050278.

National Imagery and Mapping Agency, 2000. *Department of Defence World Geodetic System 1984: Its Definition and Relationships with Local Geodetic Systems*. USA. Technical Report No. NIMA TR8350.2. National Imagery a Mapping Agency.

Olver, F. W. J.; Lozier, D. W.; Boisvert, R. F.; Clark, C. W., 2010. *NIST Handbook of Mathematical Functions*. Cambridge: Cambridge University Press.

Pail, R.; Fecher, T.; Barnes, D.; Factor, J. F.; Holmes, S. A.; Gruber, T.; Zingerle, P., 2018. Short note: the experimental geopotential model XGM2016. *Journal of Geodesy*. Roč. 92, s. 443–451. Dostupné z DOI: 10.1007/s00190-017-1070-6.

Pavlis, N. K.; Factor, J. K.; Holmes, S. A., 2007. Terrain-related gravimetric quantities computed for the next EGM. In: *Proceedings of the 1st International Symposium of the International Gravity Field Service vol. 18*. Harita Dergisi, Istanbul, 318–323.

Pavlis, N. K.; Holmes, S. A; Kenyon, S. C.; Factor, J. K., 2012. The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008). *Journal of Geophysical Research*. Roč. 117(B04406), s. 1–38. Dostupné z DOI: 10.1029/2011JB008916.

Petrovskaya, M. S.; Vershkov, A. N., 2012. Spherical harmonic series for derivatives of all orders of the gravitational potential of a planet and their application in satellite geodesy and space navigation. *Cosmic Research*. Roč. 50, s. 152–159. Dostupné z DOI: 10.1134/S001095251201008X.

Pick, M., 2000. *Advanced Physical Geodesy and Gravimetry*. Prague: Ministry of Defence of the Czech Republic.

Pick, M.; Pícha, J.; Vyskočil, V., 1973. *Theory of the Earth's Gravity Field*. Amsterdam, London, New York: Elsevier Scientific Publishing Company.

Pizzetti, P., 1894. Sulla espressione della gravità alla superficie del geoide, supposto ellissoidico. *Atti Reale Accademia dei Lincei*. Roč. 3, s. 166–172.

Press, W. H.; Teukolsky, S. A.; Vetterling, W. T.; Flannery, B. P., 1997. *Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing*. 2. vyd. Cambridge: Cambridge University Press.

Reimond, S.; Baur, O., 2016. Spheroidal and ellipsoidal harmonic expansions of the gravitational potential of small Solar System bodies. Case study: Comet 67P/Churyumov-Gerasimenko. *Journal of Geophysical Research: Planets*. Roč. 121, s. 497–515. Dostupné z DOI: 10.1002/2015JE004965.

Rektorys, K., 1999. *Variational Methods in Engineering and in Mathematical Physics*. 2. vyd. Prague: Academia.

Rexer, M., 2017. *Spectral solutions to the topographic potential in the context of high-resolution global gravity field modelling*. München, Germany. Diz. pr. Technische Universität München.

Rozimant, K.; Pašteka, V.; Šefara, J., 1994. *Gravimetria*. Bratislava: Univerzita Komenského.

Sansò, F.; Reguzzoni, M.; Barzaghi, R., 2019. *Geodetic Heights*. Springer.

Sansò, F.; Sideris, M. G., 2013. *Geoid Determination: Theory and Methods*. Berlin, Heidelberg: Springer.

Sansò, F.; Sideris, M. G., 2017. *Geodetic Boundary Value Problem: the Equivalence between Molodensky's and Helmert's Solutions*. Springer Nature. SpringerBriefs in Earth Sciences.

Sebera, J.; Bezděk, A.; Pešek, I.; Henych, T., 2016. Spheroidal models of the exterior gravitational field of Asteroids Bennu and Castalia. *Icarus*. Roč. 272, s. 70–79. Dostupné z DOI: 10.1016/j.icarus.2016.02.038.

Sebera, J.; Bouman, J.; Bosch, W., 2012. On computing ellipsoidal harmonics using Jekeli's renormalization. *Journal of Geodesy*. Roč. 86, s. 713–726. Dostupné z DOI: 10.1007/s00190-012-0591-2.

Sebera, J.; Wagner, C. A.; Bezděk, A.; Klokočník, J., 2013. Short guide to direct gravitational field modelling with Hotine's equations. *Journal of Geodesy*. Roč. 87, s. 223–238. Dostupné z DOI: 10.1007/s00190-012-0591-2.

Seeber, G., 2003. *Satellite Geodesy*. Berlin: Walter de Gruyter.

Sheng, M. B.; Shaw, C.; Vaníček, P.; Kingdon, R. W.; Santos, M.; Foroughi, I., 2019. Formulation and validation of a global laterally varying topographical density model. *Tectonophysics*. Roč. 762, s. 45–60. Dostupné z DOI: 10.1016/j.tecto.2019.04.005.

Schaeffer, N., 2013. Efficient spherical harmonic transforms aimed at pseudospectral numerical simulations. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*. Roč. 14, s. 751–758. Dostupné z DOI: 10.1002/ggge.20071.

Sjöberg, L., 1977. *On the errors of spherical harmonic developments of gravity at the surface of the Earth*. Columbus, Ohio. Report, No. 12. Department of Geodetic Science, The Ohio State University.

Sjöberg, L., 1980. On the convergence problem for the spherical harmonic expansion of the geopotential at the surface of the Earth. *Bollettino di Geodesia e Scienze Affini*. Roč. 39, s. 261–270.

Sjöberg, L.; Bagherbandi, M., 2017. *Gravity Inversion and Integration: Theory and Application in Geodesy and Geophysics*. Springer.

Sjöberg, L. E., 2005. A discussion on the approximations made in the practical implementation of the remove-compute-restore technique in regional geoid modelling. *Journal of Geodesy*. Roč. 78, s. 645–653. Dostupné z DOI: 10.1007/s00190-004-0430-1.

Somigliana, C., 1929. Teoria generale del campo gravitazionale dell'ellisoide di rotazione. *Memorie della Sociatà Astronomica Italiana*. Roč. 4.

Šprlák, M.; Han, S.-C.; Featherstone, W. E., 2020. Spheroidal forward modelling of the gravitational fields of 1 Ceres and the Moon. *Icarus*. Roč. 335, s. 113412. Dostupné z DOI: 10.1016/j.icarus.2019.113412.

Teixeira da Encarnação, J.; Visser, P.; Arnold, D.; Bezdek, A.; Doornbos, E.; Ellmer, M.; Guo, J.; IJssel, J. van den; Iorfida, E.; Jäggi, A.; Klokocník, J.; Krauss, S.; Mao, X.; Mayer-Gürr, T.; Meyer, U.; Sebera, J.; Shum, C. K.; Zhang, C.; Zhang, Y.; Dahle, C., 2020. Description of the multi-approach gravity field models from Swarm GPS data. *Earth System Science Data*. Roč. 12, č. 2, s. 1385–1417. Dostupné z DOI: 10.5194/essd-12-1385-2020.

Torge, W., 1989. *Gravimetry*. Berlin: Walter de Gruyter.

Torge, W.; Müller, J., 2012. *Geodesy*. 4. vyd. Berlin: Walter de Gruyter. Dostupné z DOI: 10.1515/9783110250008.

Tscherning, C. C., 1976. On the chain-rule method for computing potential derivatives. *Manuscripta Geodaetica*. Roč. 1, s. 125–141.

Vajda, P.; Foroughi, I.; Vaníček, P.; Kingdon, R.; Santos, M.; Sheng, M.; Goli, M., 2020a. Topographic gravimetric effects in earth sciences: Review of origin, significance and implications. *Earth-Science Reviews*. Roč. 211, s. 103428. Dostupné z DOI: 10.1016/j.earscirev.2020.103428.

Vajda, P.; Pánisová, J., 2005. Practical comparison of formulae for computing normal gravity at the observation point with emphasis on the territory of Slovakia. *Contributions to Geophysics and Geodesy*. Roč. 35, č. 2, s. 173–188.

Vajda, P.; Zahorec, P.; Papčo, J.; Carbone, D.; Greco, F.; Cantarero, M., 2020b. Topographically predicted vertical gravity gradient field and its applicability in 3D and 4D microgravimetry: Etna (Italy) case study. *Pure and Applied Geophysics*. Roč. 177, č. 7, s. 3315–3333. Dostupné z DOI: 10.1007/s00024-020-02435-x.

van Hees, G. S., 1991. Stokes formula using Fast Fourier Techniques. In: Rapp, R. H.; Sansò, F. (ed.). *Determination of the Geoid: Present and Future*. New York: Springer-Verlag, s. 405–408. Dostupné z DOI: 10.1007/978-1-4612-3104-2_47.

Vaníček, P.; Krakiwsky, E. J., 1986. *Geodesy: The Concepts*. 2. vyd. Amsterdam: Elsevier.

Wahr, J. M., 2007. Time Variable Gravity from Satellites. In: ed. Schubert, G. Elsevier, zv. 3, s. 213–237. Treatise on Geophysics. Dostupné z DOI: 10.1016/b978-044452748-6.00176-0.

Wang, Y. M., 1997. On the error of analytical downward continuation of the earth's external gravitational potential on and inside the earth's surface. *Journal of Geodesy*. Roč. 71, s. 70–82. Dostupné z DOI: 10.1007/s001900050076.

Wang, Y. M.; Yang, X., 2013. On the spherical and spheroidal harmonic expansion of the gravitational potential of the topographic masses. *Journal of Geodesy*. Roč. 87, s. 909–921. Dostupné z DOI: 10.1007/s00190-013-0654-z.

Wieczorek, M. A., 2015. Gravity and topography of the terrestrial planets. In: Schubert, G. (ed.). *Treatise on Geophysics*. 2. vyd. Elsevier. Kap. 10.5, s. 153–193. Dostupné z DOI: 10.1016/B978-0-444-53802-4.00169-X.

Wieczorek, M. A.; Meschede, M., 2018. SHTOOLS: Tools for working with spherical harmonics. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*. Roč. 19, s. 2574–2592. Dostupné z DOI: 10.1029/2018GC007529.

Yang, M.; Hirt, C.; Tenzer, R.; Pail, R., 2018. Experiences with the use of mass-density maps in residual gravity forward modelling. *Studia Geophysica et Geodaetica*. Roč. 62, č. 4, s. 596–623. Dostupné z DOI: 10.1007/s11200-017-0656-z.

Zahorec, P.; Papčo, J.; Vajda, P.; Greco, F.; Cantarero, M.; Carbone, D., 2018. Refined prediction of vertical gradient of gravity at Etna volcano gravity network (Italy). *Contributions to Geophysics and Geodesy*. Roč. 48, č. 4, s. 299–317. Dostupné z DOI: 10.2478/congeo-2018-0014.

Zahorec, P.; Pašteka, R.; Mikuška, J.; Szalaiová, V.; Papčo, J.; Kušnirák, D.; Pánisová, J.; Krajňák, M.; Vajda, P.; Bielik, M.; Marušiak, I., 2017. National Gravimetric Database of the Slovak Republic. In: Pašteka, R.; Mikuška, J.; Meurers, B. (ed.). *Understanding the Bouguer Anomaly*. Elsevier, s. 113–125. Dostupné z DOI: 10.1016/B978-0-12-812913-5.00006-3.

Zuber, M. T.; Smith, D. E.; Cheng, A. F.; Garvin, J. B.; Aharonson, O.; Cole, T. D.; Dunn, P. J.; Guo, Y.; Lemoine, F. G.; Neumann, G. A.; Rowlands, D. D.; Torrence, M. H., 2000. The shape of 433 Eros from the NEAR-Shoemaker Laser Rangefinder. *Science*. Roč. 289, s. 2097–2101. Dostupné z DOI: 10.1126/science.289.5487.2097.

Blažej Bucha

FYZIKÁLNA GEODÉZIA

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave vo Vydavateľstve SPEKTRUM STU, Bratislava, Vazovova 5, v roku 2023.

Edícia skrípt

Rozsah 184 strán, 48 obrázkov, 4 tabuľky, 11.103 AH, 11.355 VH, 1. vydanie, edičné číslo 6170, vydané v elektronickej forme.

85 – 232 – 2023

ISBN 978-80-227-5368-5