

# NUMERICKÁ ANALÝZA DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC

Angela Handlovičová

# NUMERICKÁ ANALÝZA DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC

Angela Handlovičová

Všetky práva vyhradené. Nijaká časť textu nesmie byť použitá na ďalšie šírenie akoukoľvek formou bez predchádzajúceho súhlasu autorov alebo vydavateľstva.

© doc. RNDr. Angela Handlovičová, CSc.

Recenzenti: prof. RNDr. Michal Fečkan, DrSc. doc. RNDr. Eugen Viszus, CSc.

Schválila Edičná rada Stavebnej fakulty STU v Bratislave.

ISBN 978-80-227-5337-1

# Úvod

Učebnica nadväzuje na funkcionálnu analýzu bakalárskeho stupňa pre študijný program Matematicko-počítačové modelovanie [7], ktorá predstavuje základné poznatky z teórie funkcionálnych priestorov, operátorov a ich vlastností. Sústreďuje sa predovšetkým na eliptické lineárne operátory a funkcionály. Zahŕňa tiež definíciu slabého riešenia okrajovej úlohy s eliptickým operátorom, ako aj vetu o existencii slabého riešenia a základných vlastnostiach tohto riešenia.

Cieľom tejto učebnice je, popri rozšírení ďalších vlastností priestorov a operátorov, zamerať sa na numerické riešenia okrajových úloh metódou konečných objemov; riešiť otázku konvergencie, prípadne odhadu chýb numerického a slabého riešenia. Najskôr sa opäť sústredíme na eliptické okrajové úlohy a v druhej časti sa zameriame na parabolické úlohy, a to aj pre nelineárne rovnice. Numerické riešenie bude v tomto prípade navrhnuté ako kombinácia Rotheho metódy v časovej diskretizácii úlohy a metódy konečných objemov v priestorovej diskretizácii.

## PodĎakovanie

Moja úprimná vďaka patrí obom recenzentom Prof. RNDr. Michalovi Fečkanovi, DrSc. a Doc. RNDr. Eugenovi Vizusovi, PhD. za ich dôkladné prečítanie učebnice a za pripomienky a námety, ktoré prispeli ku skvalitneniu celého textu.

# Skratky a označenia

$\mathbb{N}$  - množina prirodzených čísel

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup 0$

$\mathbb{R}$  - množina reálnych čísel

$\mathbb{R}_+$  - množina všetkých kladných reálnych čísel

$\mathbb{R}_{0,+}$  - množina všetkých nezáporných reálnych čísel

$N$  - dimenzia oblasti (spravidla 1,2,3)

$\mathbb{R}^N$  - množina reálnych  $n$ -dimenzionálnych vektorov

1D, 2D, 3D - jednodimenzionálny, dvojdimenzionálny, trojdimenzionálny priestor

$\Omega$  - ohraničená oblasť v  $\mathbb{R}^N$  (neprázdna ohraničená, otvorená jednoducho súvislá množina v  $\mathbb{R}^N$ ) s Lipschitzovskou hranicou (pozri napríklad [9])

$\partial\Omega$  - hranica oblasti  $\Omega$ ,  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$

$\langle a, b \rangle$  - uzavretý interval v  $\mathbb{R}$  pre  $a < b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$

LP - lineárny priestor

LNP - lineárny normovaný priestor

UP - unitárny priestor

BP - Banachov priestor

HP - Hilbertov priestor

$C(\bar{\Omega})$  - priestor všetkých spojitých funkcií na  $\bar{\Omega}$

$C_0^\infty(\Omega)$  - priestor všetkých nekonečne hladkých finitných funkcií na  $\bar{\Omega}$

$L_2(\Omega)$  - priestor všetkých merateľných funkcií definovaných na  $\Omega$ , ktorých druhé mocniny sú Lebesgueovsky integrovateľné v  $\Omega$

$W_2^k(\Omega)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  - Sobolevov priestor

$W_2^k(\partial\Omega)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  - Sobolevov priestor na  $\partial\Omega$

$W_2^1(\Omega) = H^1(\Omega)$ , ak  $\Omega$  je oblasť s Lipschitzovskou hranicou, v tomto prípade je to Hilbertov priestor (pozri napríklad [9])

$\dot{W}_2^1(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ , - Sobolevov priestor funkcií s nulovou stopou na  $\partial\Omega$  (pozri napríklad [9])

ODR - obyčajná diferenciálna rovnica

PDR - parciálna diferenciálna rovnica

MKO - metóda konečných objemov

# Obsah

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Základné poznatky z funkcionálnej analýzy</b>                       | <b>7</b>  |
| 1.1      | Priestory, operátory a ich vlastnosti . . . . .                        | 7         |
| 1.2      | Typy konvergencií . . . . .  | 9         |
| 1.3      | Najdôležitejšie funkcionálne priestory . . . . .                       | 9         |
| 1.3.1    | Priestory spojitých funkcií . . . . .                                  | 9         |
| 1.3.2    | Lebesgueovsky integrovateľné funkcie . . . . .                         | 10        |
| 1.3.3    | Vety o vnoreniach . . . . .  | 14        |
| <b>2</b> | <b>Eliptické okrajové úlohy</b>  | <b>17</b> |
| 2.1      | Jednodimenzionálny prípad . . . . .                                    | 17        |
| 2.2      | $N$ -dimenzionálny prípad . . . . .                                    | 23        |
| 2.3      | Základné princípy numerických metód . . . . .                          | 27        |
| 2.3.1    | Pozitívne definitný operátor $A$ . . . . .                             | 28        |
| 2.3.2    | Nesymetrický operátor $A$ . . . . .                                    | 31        |
| <b>3</b> | <b>Metóda konečných objemov (MKO)<br/>pre eliptické okrajové úlohy</b> | <b>35</b> |
| 3.1      | Jednodimenzionálny prípad . . . . .                                    | 35        |
| 3.2      | Cvičenia . . . . .   | 45        |
| 3.3      | Dvoj- a troj-dimenzionálny prípad . . . . .                            | 47        |
| 3.3.1    | Dirichletove okrajové podmienky . . . . .                              | 47        |
| 3.4      | Cvičenia . . . . .   | 59        |
| <b>4</b> | <b>Parabolické<br/>počiatočno-okrajové úlohy</b>                       | <b>61</b> |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 4.1      | Jednoduché príklady a motivácia . . . . .                                      | 61         |
| 4.2      | Abstraktné funkcie . . . . .   | 62         |
| 4.3      | Bochnerov integrál . . . . .   | 64         |
| 4.4      | Slabé riešenie parabolickej<br>počiatočno-okrajovej úlohy . . . . .            | 67         |
| <b>5</b> | <b>Základné poznatky z Rotheho metódy</b>                                      | <b>71</b>  |
| 5.1      | Jednoduchý príklad . . . . .   | 71         |
| 5.2      | Stabilitné odhady . . . . .  | 75         |
| 5.3      | Konvergenčné vety . . . . .  | 77         |
| 5.4      | Konvergenca . . . . .  | 78         |
| 5.5      | Limitný prechod . . . . .  | 79         |
| <b>6</b> | <b>Metóda konečných objemov<br/>pre parabolické počiatočno- okrajové úlohy</b> | <b>85</b>  |
| 6.1      | Lineárny prípad . . . . .  | 85         |
| 6.2      | Nelineárny prípad . . . . .  | 96         |
| 6.3      | Cvičenia. . . . .  | 103        |
| <b>7</b> | <b>Namiesto záveru</b>   | <b>105</b> |
|          | <b>Literatúra</b>  | <b>107</b> |

# Kapitola 1

## Základné poznatky z funkcionálnej analýzy

Štúdium existencie slabého riešenia a konvergencie navrhutej numerickej aproximácie k tomuto riešeniu si vyžaduje určité teoretické vedomosti z funkcionálnej analýzy. Preto skôr ako prejdeme ku konkrétnym okrajovým úlohám, uvedieme základné definície a vlastnosti z funkcionálnej analýzy priestorov a operátorov podľa [4].

### 1.1 Priestory, operátory a ich vlastnosti

Hneď úvodom uvedieme jednu z najdôležitejších nerovností, ktorá je známa pod viacerými menami v závislosti od konkrétneho Hilbertovho priestoru. My budeme používať názov Cauchyho-Schwarzova nerovnosť pozri napríklad [7].

**Veta 1.1 (Cauchyho-Schwarzova nerovnosť).** Nech  $H$  je Hilbertov priestor so skalárnym súčinom  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  a z neho indukovanou normou  $\|\cdot\|$ . Potom pre všetky prvky  $x, y \in H$  platí:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|. \quad (1.1)$$

Majme  $X, Y$  ľubovoľné lineárne normované priestory.

**Definícia 1.1 (operátor).** Nech  $X, Y$  sú lineárne normované priestory, množina  $M \subseteq X$ . Ak existuje pravidlo ako každému  $u \in M$  predpísať jediný prvok z  $Y$ , pričom tento prvok označíme ako  $Au$ , hovoríme, že pravidlo definuje *operátor  $A$  na množine  $M$* . Jeho definičný obor označujeme  $D(A)$  a obor hodnôt  $R(A)$ , pozri napríklad [7].

*Poznámka 1.1.* Pre lineárne operátory, funkcionály a ich vlastnosti pozri napríklad [9].

**Definícia 1.2 (relatívne kompaktná množina).** Množina  $M$  v lineárnom normovanom priestore  $X$  sa nazýva *relatívne kompaktná* práve vtedy, keď každá jej postupnosť obsahuje konvergentnú podpostupnosť. Ak  $M$  je uzavretá a relatívne kompaktná, potom  $M$  je kompaktná.



**Definícia 1.3 (úplne spojitý operátor).** Nech  $A$  je lineárny operátor z lineárneho normovaného priestoru  $X$  do lineárneho normovaného priestoru  $Y$  taký, že  $D(A) = X$ . Operátor sa nazýva *úplne spojitý*, ak zobrazuje každú ohraničenú množinu v  $X$  na relatívne kompaktnú množinu v  $Y$ .

**Definícia 1.4 (izomorfizmus).** Dva lineárne normované priestory  $X$  a  $Y$  nazývame *izomorfné*, ak existuje spojitý lineárny operátor  $A$  taký, že  $D(A) = X$ ,  $R(A) = Y$  a existuje inverzný operátor  $A^{-1}$ , pričom je tiež spojitý. Potom operátor  $A$  nazývame *izomorfným zobrazením (izomorfizmom)*.

**Definícia 1.5 (izometria).** Majme dva lineárne normované priestory  $X$  a  $Y$  s metrikami  $\rho$  (pre priestor  $X$ ) a  $\sigma$  (pre  $Y$ ). Hovoríme, že sú *izometrické*, ak existuje operátor  $T$  taký, že  $D(T) = X$ ,  $R(T) = Y$  a pre všetky  $x, y \in X$  platí

$$\rho(x, y) = \sigma(Tx, Ty).$$

**Definícia 1.6 (izometrický izomorfizmus).** Dva lineárne normované priestory  $X$  a  $Y$  s normami  $\|\cdot\|_X$  (pre priestor  $X$ ) a  $\|\cdot\|_Y$  (pre  $Y$ ) nazývame *izometricky izomorfné*, ak existuje izomorfizmus  $A$  taký, že pre všetky  $x, y \in X$  platí:

$$\|x - y\|_X = \|Ax - Ay\|_Y.$$

**Veta 1.2 (vlastnosti izomorfných lineárnych normovaných priestorov).** Nech  $X$  a  $Y$  sú dva izomorfné lineárne normované priestory. Potom platí:

- ak  $X$  je separabilný, potom aj  $Y$  je separabilný,
- ak  $X$  je úplný, potom aj  $Y$  je úplný.

**Definícia 1.7 (vnorenie).** Nech sú dané dva lineárne normované priestory  $X$  a  $Y$ , pričom  $X \subseteq Y$ . Definujme identický operátor  $I: X \rightarrow Y$ ,  $D(I) = X$ ,  $R(I) = X$ ,  $Iu = u$ . Potom  $I$  je lineárny operátor a nazývame ho *operátor vnorenia*. Ak je navyše spojitý, hovoríme o *spojitom vnorení*, čo zapisujeme  $X \hookrightarrow Y$ . Ak je operátor vnorenia úplne spojitý, hovoríme o *kompaktnom vnorení*, čo zapisujeme  $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ .

*Poznámka 1.2.* Platí, že ak  $X \hookrightarrow Y$ , potom existuje konštanta  $c > 0$  taká, že pre všetky  $u \in X$  je

$$\|u\|_Y \leq c \|u\|_X.$$

*Poznámka 1.3.* Ak  $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ , potom platí, že každá ohraničená postupnosť  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  v  $X$  sa zobrazí na postupnosť v  $Y$ , z ktorej sa dá vybrať konvergentná podpostupnosť.

**Veta 1.3 (duálny priestor).** Nech  $X$  je lineárny normovaný priestor. Množina všetkých ohraničených lineárnych funkcionálov na  $X$  tvorí lineárny priestor, ktorý nazývame *duálny priestor* k priestoru  $X$ . Označujeme ho  $X^*$ .

Analogicky sa dá vytvoriť aj druhý duál.

*Poznámka 1.4 (reflexívny priestor).* Lineárny priestor  $X$  môžeme prirodzeným spôsobom vnoriť do druhého duálu. Ak je toto vnorenie izomorfizmus (vzájomne jednoznačné spojitú zobrazenie so spojitým inverzným zobrazením), tak priestor  $X$  nazývame *reflexívnym*.

*Poznámka 1.5.* Existujú aj ďalšie veľmi dôležité vlastnosti priestorov, ako napríklad separabilný priestor, hustá množina v priestore, ktoré možno nájsť napríklad v [7],[9],[4]

## 1.2 Typy konvergencií

Nech  $X$  je lineárny normovaný priestor s normou  $\|\cdot\|_X$  a  $X^*$  je jeho duálny priestor.

**Definícia 1.8 (silná konvergencia, konvergencia podľa normy).** Nech  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  je postupnosť prvkov z  $X$ . Hovoríme, že  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  *konverguje silno* (podľa normy) k prvku  $u \in X$  práve vtedy, keď

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| = 0,$$

čo označujeme  $u_n \rightarrow u$ .

**Definícia 1.9 (slabá konvergencia).** Nech  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  je postupnosť prvkov z  $X$ . Hovoríme, že  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  *slabo konverguje* k prvku  $u \in X$  práve vtedy, keď číselná postupnosť

$$\{f(u_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow f(u)$$

pre ľubovoľný funkcionál  $f \in X^*$ , čo označujeme  $u_n \rightharpoonup u$ .

**Definícia 1.10 (slabá  $\star$ -konvergencia).** Nech postupnosť  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  je postupnosť prvkov z  $X^*$ . Hovoríme, že táto postupnosť je *slabo  $\star$ -konvergentná* k  $f \in X^*$  práve vtedy, keď postupnosť

$$\{f_n(u)\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow f(u)$$

pre každé  $u \in X$ .

*Poznámka 1.6.* Pre reflexívne Banachove priestory je pojem slabo konvergentnej a slabo  $\star$ -konvergentnej postupnosti ekvivalentný.

## 1.3 Najdôležitejšie funkcionálne priestory

Pre analýzu okrajových úloh hrajú priestory funkcií podstatnú úlohu, preto si tie najdôležitejšie zopakujeme. Podrobnejšie vysvetlenie pozri [4, 9] a referencie tam citované.

### 1.3.1 Priestory spojitých funkcií

Nech  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ . Nech  $\partial\Omega$  je hranica tejto oblasti. Označme  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ .

**Definícia 1.11.** Symbolom  $C(\bar{\Omega})$  (niekedy sa označuje aj  $C^0(\bar{\Omega})$ ), označujeme množinu všetkých funkcií definovaných a spojitých na  $\bar{\Omega}$ . Na tejto množine definujeme pre funkciu  $u \in C(\bar{\Omega})$  normu:

$$\|u\|_C = \max_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)|. \quad (1.2)$$

*Poznámka 1.7.* Priestor s touto normou je Banachov priestor.

**Definícia 1.12.** Symbolom  $C^k(\bar{\Omega})$ , kde  $k \in \mathbb{N}_0$ , označujeme množinu všetkých funkcií definovaných a  $k$ -krát spojite diferencovateľných na  $\bar{\Omega}$ . Na tejto množine definujeme pre funkciu  $u \in C^k(\bar{\Omega})$  normu:

$$\|u\|_{C^k} = \max_{|i|=0, \dots, k} \max_{x \in \bar{\Omega}} |D^i u(x)|, \quad (1.3)$$

kde  $D^i$  je ľubovoľná  $|i|$ -ta derivácia funkcie  $u$  a symbol  $i$  predstavuje takzvaný multiindex pozri napríklad [9].

*Poznámka 1.8.* Prirodzeným zovšeobecnením sa definuje aj priestor  $C^\infty(\bar{\Omega})$  pozri napríklad [4].

V teórii Sobolevových priestorov sú dôležité aj priestory funkcií s kompaktným nosičom [9], ktoré budeme označovať analogicky ako priestory spojitely diferencovateľných funkcií symbolom  $C_0^k(\bar{\Omega})$ , pre  $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ .

**Definícia 1.13 (rovnomocná spojitosť, angl. equicontinuity).** Nech  $K$  je podmnožina priestoru  $C(\bar{\Omega})$ . Množinu  $K$  nazveme *rovnomocne spojitou* práve vtedy, keď pre každé  $\varepsilon > 0$  existuje také  $\delta > 0$ , že platí

$$|u(x) - u(y)| < \varepsilon$$

pre všetky  $u \in K$  a pre všetky  $x, y \in \bar{\Omega}$  také, že  $|x - y| < \delta$ .

**Veta 1.4 (Arzela-Ascoli).** Podmnožina  $K \subset C(\bar{\Omega})$  je relatívne kompaktná práve vtedy, keď je rovnomerne ohraničená a rovnomocne spojitá.

### 1.3.2 Lebesgueovsky integrovateľné funkcie

**Veta 1.5 (Lebesgueova veta o dominantnej konvergencii).** Nech  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  je postupnosť merateľných funkcií v  $\Omega$ , ktorá konverguje pre skoro všetky  $x \in \Omega$  k funkcii  $f$ . Nech existuje Lebesgueovsky integrovateľná funkcia  $g$  taká, že

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

pre všetky  $n \in \mathbb{N}$  a skoro všetky  $x \in \Omega$ . Potom  $f_n$  a  $f$  sú Lebesgueovsky integrovateľné a platí

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx.$$

**Priestory  $L_p(\Omega)$ ,  $p \in \langle 1, \infty \rangle$**

Skonstruujú sa analogicky ako priestor  $L_2$  [9]. Z tohto dôvodu tu len stručne zavedieme ich definíciu a základné vlastnosti. Podrobnejšie pozri, napríklad, [4].

**Definícia 1.14 (ekvivalencia funkcií).** Nech sú  $f_1, f_2$  merateľné funkcie, pre ktoré platí  $f_1(x) = f_2(x)$  pre skoro všetky  $x \in \Omega$ . Takéto funkcie nazývame *ekvivalentné* na  $\Omega$ .

**Definícia 1.15 (priestor  $L_p$ ).** Nech  $p \in \langle 1, \infty \rangle$ . Množinu všetkých ekvivalentných funkcií definovaných skoro všade na  $\Omega$  takých, že majú *konečný* Lebesgueov integrál

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx$$

nazývame *lineárny priestor  $L_p(\Omega)$* .

**Veta 1.6 (norma v  $L_p$  priestore).** Nech  $p \geq 1$  a  $f \in L_p(\Omega)$ . Potom

$$\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

je norma v priestore  $L_p(\Omega)$ .

*Dôkaz.* Využijeme Hölderovu a Minkowského nerovnosť [4] a fakt, že dve integrovateľné funkcie, ktoré sa rovnajú skoro všade, majú rovnaký Lebesquov integrál.  $\square$

**Veta 1.7.** Nech je  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ . Potom množina  $C_0^\infty(\Omega)$  je hustá v  $L_p(\Omega)$  pre ľubovoľné  $p \geq 1$ .

**Veta 1.8.** Nech je  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  a  $p \geq 1$ . Potom lineárny normovaný priestor  $L_p(\Omega)$  je separabilný.

**Veta 1.9.** Nech  $p \geq 1$  a nech  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  je Cauchyovská (fundamentálna) postupnosť v  $L_p(\Omega)$ . Potom existujú funkcie  $f, h \in L_p(\Omega)$  a podpostupnosť  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  postupnosti  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  taká, že

- 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0$ ,
- 2)  $g_n(x) \rightarrow f(x)$  skoro všade v  $\Omega$ ,
- 3)  $|g_n(x)| \leq h(x)$  pre všetky  $n \in \mathbb{N}$  a skoro všetky  $x \in \Omega$ .

**Veta 1.10.** Nech  $p \geq 1$ . Potom  $L_p(\Omega)$  s normou definovanou vo vete 1.6 je Banachov priestor.

**Veta 1.11 (duálny priestor k  $L_p(\Omega)$ ).** Nech  $p, q > 1$  a nech platí

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Nech  $g \in L_q(\Omega)$ . Označme

$$\Phi_g(f) = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx$$

pre  $f \in L_p(\Omega)$ . Potom  $\Phi_g \in L_p^*(\Omega)$  a  $\|\Phi_g\| = \|g\|_q$ .

**Veta 1.12.** Nech  $1 < p < \infty$ . Potom  $L_p(\Omega)$  je reflexívny.

**Definícia 1.16 (priestor  $L_\infty(\Omega)$ ).** Množinu všetkých tried ekvivalencií funkcií definovaných skoro všade v  $\Omega$  takých, že existuje konštanta  $K > 0$  a množina  $E \subseteq \Omega$  taká, že  $\mu(E) = 0$ , pričom  $|f(x)| \leq K$  pre všetky  $x \in \Omega \setminus E$ , nazývame *vektorový priestor  $L_\infty(\Omega)$* .

**Veta 1.13 (norma v  $L_\infty(\Omega)$ ).** Pre  $f \in L_\infty(\Omega)$  je

$$\|f\|_\infty = \inf_{\substack{E \subseteq \Omega \\ \mu(E)=0}} \left( \sup_{x \in \Omega \setminus E} |f(x)| \right) =: \text{ess sup}_{x \in \Omega} |f(x)| =: \text{vrai max}_{x \in \Omega} |f(x)|$$

norma v priestore  $L_\infty(\Omega)$ .

**Veta 1.14.** Nech je  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ . Potom množina  $C(\overline{\Omega})$  je uzavretý podpriestor v  $L_\infty(\Omega)$ .

**Veta 1.15.** Nech je  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ . Potom lineárny normovaný priestor  $L_\infty(\Omega)$  nie je separabilný.

**Veta 1.16.** Nech je  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  a  $f \in L_\infty(\Omega)$ . Potom platí:

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p.$$

**Veta 1.17.** Nech je  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ . Priestor  $L_\infty(\Omega)$  s normou definovanou vo vete 1.13 je Banachov priestor.

*Poznámka 1.9.* Nech je  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ . Nech  $p_1 > p_2 > 1$ . Potom

$$L_\infty(\Omega) \subseteq L_{p_1}(\Omega) \subseteq L_{p_2}(\Omega) \subseteq L_1(\Omega).$$

**Veta 1.18.** Nech je  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ . Priestory  $L_\infty(\Omega)$  a  $L_1(\Omega)$  nie sú reflexívne.

Ako sme už spomenuli vybudovanie priestorov integrovateľných funkcií je analogické ako vybudovanie  $L_2(\Omega)$  priestoru. Pozri napríklad [9]. Vzhľadom na to, že tento priestor hrá v analýze diferenciálnych rovníc dôležitú úlohu, pripomenieme si zvlášť jeho definíciu a normu.

**Definícia 1.17 (priestor  $L_2(\Omega)$ ).** Množinu všetkých ekvivalentných funkcií definovaných skoro všade v  $\Omega$  takých, že majú *konečný* Lebesgueov integrál

$$\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx$$

nazývame *vektorový priestor*  $L_2(\Omega)$ .

Jeho norma je potom definovaná ako:

**Veta 1.19 (norma v  $L_2(\Omega)$ ).** Nech  $f \in L_2(\Omega)$ . Potom

$$\|f\| = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

je norma v priestore  $L_2(\Omega)$ .

*Poznámka 1.10.* Keďže ju budeme používať najčastejšie, budeme ju označovať takto jednoducho, bez indexu.

Zároveň navyše platí [4, 9] nasledujúca veta.

**Veta 1.20.** Nech je  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ . Priestor  $L_2(\Omega)$  s normou definovanou vo vete 1.19 je **Hilbertov priestor**.

## Sobolevove priestory

Táto učebnica logicky nadväzuje na učebnicu funkcionálnej analýzy [7], kde sú vysvetlené Sobolevove priestory  $W_2^k(\Omega)$ , pre  $k = 1, 2, \dots$ , ktorých základom je priestor  $L_2(\Omega)$ . Pre naše úvahy o numerickej analýze diferenciálnych rovníc si v podstate s týmito priestormi vystačíme. Pre úplnosť uvádzame aj definíciu priestorov  $W_p^k(\Omega)$ , pre  $p \geq 1$ . Ich definícia je analogická ako pre priestory  $W_2^k(\Omega)$  s tým rozdielom, že ich základom je v tomto prípade priestor  $L_p(\Omega)$ . Podobne ako v [7, 9], aj my budeme používať označenie  $i = (i_1, i_2, \dots, i_N)$  pre  $N$ -dimenzionálny multiindex príslušných derivácií rádu

$$|i| = \sum_{j=1}^N i_j.$$

**Definícia 1.18 (priestor  $W_p^k(\Omega)$ ).** Nech  $p \geq 1$  a  $k \in \mathbb{N}$ . Množinu všetkých tried ekvivalencií funkcií definovaných skoro všade v  $\Omega$  takých, že majú derivácie až do  $k$ -teho rádu včítanie v zovšeobecnenom zmysle ([9, 4]) a takých, že majú pre všetky zovšeobecnené derivácie až do  $k$ -teho rádu včítane *konečné* Lebesgueove integrály

$$\int_{\Omega} |D^i f(x)|^p dx$$

nazývame *lineárny priestor*  $W_p^k(\Omega)$ .

V nasledujúcej vete definujeme normu tohto priestoru.

**Veta 1.21 (norma v  $W_p^k(\Omega)$ ).** Nech  $f \in W_p^k(\Omega)$ . Potom

$$\|f\|_{W_p^k} = \left( \sum_{|i|=0}^k \int_{\Omega} |D^i f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

je norma v priestore  $W_p^k(\Omega)$ .

**Veta 1.22.** Nech  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ . Priestor  $W_p^k(\Omega)$  s normou definovanou vo vete 1.21 je Banachov priestor.

Pre podrobnejšie informácie a vlastnosti čitateľovi odporúčame pozrieť [4].

## Kompaktnosť

Zhrnieme hlavné výsledky funkcionálnej analýzy, ktoré sa týkajú kompaktnosti v rôznych funkcionálnych priestoroch. Podrobnejšie pozri [4, 6]. Najskôr zopakujeme jej definíciu.

**Definícia 1.19 (relatívne kompaktná množina).** Množina  $M$  v lineárnom normovanom priestore  $X$  sa nazýva *relatívne kompaktná* práve vtedy, keď každá jej postupnosť obsahuje konvergentnú podpostupnosť.

*Poznámka 1.11.* Ak  $M$  je uzavretá a relatívne kompaktná, potom  $M$  je kompaktná.

**Veta 1.23 (Riesz-Kolmogorovovo kritérium kompaktnosti).** Nech  $p \geq 1$ . Podmnožina  $K \subseteq L_p(\Omega)$  je relatívne kompaktná vtedy, keď:

- (i) množina  $K$  je ohraničená, t. j. existuje taká konštanta  $C > 0$ , že pre všetky  $f \in K$  platí  $\|f\|_p \leq C$ ,
- (ii) množina  $K$  je  $p$ -rovnomočne spojitá, t. j. pre každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  také, že pre všetky  $f \in K$  a  $h \in \mathbb{R}^N$  taký, že  $|h| < \delta$  platí

$$\|f(x+h) - f(x)\|_p < \varepsilon.$$

(Teda  $\int_{\Omega} |f(x+h) - f(x)|^p dx < \varepsilon^p$ .)

Špeciálne môžeme citovať nasledujúcu vetu (pozri [6], veta 14.3), ktorá sa používa pri dôkazoch konvergencie pri metóde konečných objemov.

**Veta 1.24 (Kolmogorovovo kritérium kompaktnosti v  $L_2(\Omega)$ ).** Nech je  $\Omega$  otvorená ohraničená množina v  $\mathbb{R}^N$  s Lipschitzovskou spojitou hranicou. Nech je  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  postupnosť ohraničená v  $L_2(\Omega)$ . Pre  $n \in \mathbb{N}$  definujme

$$\tilde{u}_n(x) = \begin{cases} u_n(x), & \text{pre skoro všetky } x \in \Omega, \\ 0, & \text{inak.} \end{cases}$$

Nech existuje  $C \in \mathbb{R}$  a postupnosť  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  kladných čísel taká, že  $h_n \rightarrow 0$  pre  $n \rightarrow \infty$  a platí

$$\|\tilde{u}_n(\cdot + \eta) - \tilde{u}_n(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^N)}^2 \leq C|\eta|(|\eta| + h_n) \quad (1.4)$$

pre všetky  $n \in \mathbb{N}$  a  $\eta \in \mathbb{R}^N$ . Potom  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  je relatívne kompaktná v  $L_2(\Omega)$ . Ak navyše celá postupnosť  $u_n \rightarrow u$  v  $L_2(\Omega)$  pre  $n \rightarrow \infty$ , potom  $u \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ .

### 1.3.3 Vety o vnoreniach

Nasledujúce tvrdenia hrajú v numerickej analýze diferenciálnych rovníc zásadnú úlohu, pretože vlastne ukazujú na to, aké lepšie vlastnosti môžu funkcie mať. Toto ovplyvňuje predovšetkým dimenzia priestoru  $N$ , parameter  $p$  integrovateľnosti v Lebesgueových priestoroch a hodnota  $k$ , ktorá hovorí akého rádu má daná funkcia zovšeobecnené derivácie. Dôležité sú najmä kompaktné vnorenia. Podrobnejšie pozri napríklad [4]. Vo všetkých citovaných vetách budeme predpokladať, že  $\Omega$  ohraničená oblasť v  $\mathbb{R}^N$  s Lipschitzovskou hranicou ako v základných označeniach v úvode skriptu.

**Veta 1.25 (spojité vnorenie).** Nech je  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  a  $p \in (1, \infty)$ . Potom

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$$

ak platí jedna z nasledujúcich podmienok:

- a)  $kp < N$ ,  $1 \leq q \leq \frac{Np}{N-kp}$ , alebo
- b)  $kp = N$ ,  $q \in (1, \infty)$ .

**Veta 1.26 (kompaktné vnorenie 1).** Nech je  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  a  $p \in (1, \infty)$ . Potom

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$$

ak platí jedna z nasledujúcich podmienok:

- a)  $kp < N$ ,  $1 \leq q < \frac{Np}{N-kp}$ , alebo
- b)  $kp = N$ ,  $q \in (1, \infty)$ .

**Veta 1.27 (kompaktné vnorenie 2).** Nech je  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  a  $p \in (1, \infty)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $kp > N$ . Potom

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}).$$

*Poznámka 1.12.* Nech je  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  a  $p > 1$ . Potom

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}).$$

Špeciálne môžeme uviesť nasledujúcu vetu.

**Veta 1.28 (Relichova veta).** Nech je  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ . Potom

$$W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega).$$





# Kapitola 2

## Eliptické okrajové úlohy

V tejto kapitole budeme študovať niektoré eliptické okrajové úlohy. Najprv pripomenieme niektoré poznatky, ktoré sú v [7]. Tieto budú potrebné k novým častiam tejto kapitoly. Tu budeme rozoberať numerické riešenie uvedených úloh a ich vlastnosti.

### 2.1 Jednodimenzionálny prípad

Uvažujme ODR druhého rádu tvaru

$$-\left(p(x)u'(x)\right)' + r(x)u(x) = f(x) \quad (2.1)$$

s okrajovými podmienkami:

$$\alpha u'(a) - \beta u(a) = u_a, \quad \gamma u'(b) + \delta u(b) = u_b, \quad (2.2)$$

kde  $p$ ,  $r$  a  $f$  sú dané funkcie,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  dané nezáporné reálne čísla také, že  $\alpha + \beta > 0$  a súčasne  $\gamma + \delta > 0$  a  $u_a$ ,  $u_b$  dané reálne čísla. Bude nás zaujímať, za akých podmienok na dáta úlohy, má daný okrajový problém riešenie a v akom zmysle. Pre zjednodušenie začnime s homogénnymi Dirichletovými okrajovými podmienkami.

Uvažujme ODR druhého rádu tvaru

$$-\left(p(x)u'(x)\right)' + r(x)u(x) = f(x) \quad (2.3)$$

s Dirichletovými okrajovými podmienkami:

$$u(a) = 0, \quad u(b) = 0. \quad (2.4)$$

**Definícia 2.1 (Klasické riešenie).** Klasickým riešením problému (2.3), (2.4) nazývame funkciu  $u \in C^2(a, b) \cap C(\langle a, b \rangle)$  takú, že vyhovuje rovnici (2.3) v  $(a, b)$  a spĺňa okrajovú podmienku (2.4).

Skúmanie existencie takéhoto klasického riešenia predpokladá aj isté vhodné vlastnosti jednotlivých koeficientov a funkcií vyskytujúcich sa v zadaní úlohy. Minimálne z tvaru rovnice je jasné, že musí platiť:

$$p \in C^1((a, b)), \quad f, r \in C((a, b)) \quad (2.5)$$

a ešte nejaké podmienky navyše v závislosti od typu okrajovej úlohy. Pozri napríklad [2]. Ak platia navyše nasledujúce predpoklady pre dáta danej úlohy:

$$p(x) \geq p_0 > 0, \quad r(x) \geq 0 \quad \text{pre } x \in \langle a, b \rangle, \quad (2.6)$$

vieme (napríklad [2]), že daná úloha má *klasické riešenie*. Tieto podmienky na dáta úlohy sú však v problémoch z praxe veľmi často obmedzujúce, preto sa pre takéto úlohy definujú a hľadajú aj iné typy riešení.

Jednou z možností v prípade symetrických operátorov je aj *zovšeobecnené riešenie* pozri napríklad [9]. Tu urobíme len veľmi stručné vysvetlenie.

Označme operátor  $A$  prislúchajúci rovnici (2.3):

$$Au = -(pu')' + ru \quad (2.7)$$

s definičným oborom, v ktorom sú zahrnuté okrajové podmienky (2.4):

$$D_A = \left\{ u \in C^2(\langle a, b \rangle) : u(a) = u(b) = 0 \right\}.$$

Ako je ukázané, napríklad, v [7, 9], takto definovaný operátor je na energetickom priestore  $H_A$  (inteligentné rozšírenie  $D_A$  na Hilbertov priestor) *pozitívne definitný* (pozri napríklad [9] str. 210, 211) aj za slabších predpokladov:

$$f \in L_2(a, b), \quad p(x) \geq p_0 > 0, r(x) \geq 0 \text{ ohraničené na } \langle a, b \rangle. \quad (2.8)$$

Z uvedeného vyplýva, že v tomto priestore  $H_A$  existuje jediné **zovšeobecnené riešenie** úlohy (2.3), (2.4). Toto riešenie vychádza z vety o minime kvadratického funkcionálu a z existencie minima v Hilbertovom priestore  $H_A$  (pozri [9]). Označme toto riešenie  $u_0$ . Tu len zopakujeme, že norma v energetickom priestore  $H_A$  pre operátor  $A$  definovaný v (2.7) je definovaná takto:

$$\|u\|_A^2 = \langle Au, u \rangle = \int_a^b \left( p(u')^2 + ru^2 \right) dx. \quad (2.9)$$

V tomto jednoduchom prípade sa pre toto riešenie dá dokázať nasledujúce tvrdenie, ktoré hovorí, že v tomto prípade to riešenie má aj lepšie vlastnosti (pozri [9]).

**Tvrdenie 2.1.** Zovšeobecnené riešenie  $u_0$  problému (2.3), (2.4) je funkcia spojitá na  $\langle a, b \rangle$ , ktorá má skoro všade deriváciu. Minimalizujúca postupnosť  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  zostrojená niektorou z metód (Galerkinova, Rieszova, ...) konverguje rovnomerne k  $u_0$  v  $\langle a, b \rangle$  a postupnosť  $\{u'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  konverguje k  $u'_0$  v  $L_2(a, b)$ .

*Dôkaz.* Z konštrukcie približného riešenia niektorou z uvedených metód a dôkazu konvergenie postupnosti  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  v priestore  $H_A$  ku zovšeobecnenému riešeniu  $u_0$  vieme, že táto postupnosť musí byť cauchyovská, pričom platí (pozri napríklad [7, 9]):

$$\lim_{\substack{n \rightarrow 0 \\ m \rightarrow 0}} \|u_n - u_m\|_A^2 = \lim_{\substack{n \rightarrow 0 \\ m \rightarrow 0}} \int_a^b \left( p(u'_n - u'_m)^2 + r(u_n - u_m)^2 \right) dx = 0,$$

z čoho, vzhľadom na podmienku (2.8), dostávame

$$\lim_{\substack{n \rightarrow 0 \\ m \rightarrow 0}} \int_a^b (u'_n - u'_m)^2 dx = 0. \quad (2.10)$$

Tento výsledok znamená, že postupnosť  $\{u'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  je v priestore  $L_2(a, b)$  cauchyovská a vzhľadom na úplnosť tohto priestoru aj konvergentná. Teda existuje nejaká funkcia, ktorú označíme  $v_0 \in L_2(a, b)$  taká, že platí

$$\lim_{n \rightarrow 0} u'_n = v_0 \quad \text{v } L_2(a, b). \quad (2.11)$$

Z okrajových podmienok a z faktu, že postupnosť  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  môže byť skonštruovaná ako postupnosť hladkých funkcií (pozri napríklad [9], kapitola 19, pozn. 19.4) máme

$$u_n(x) = \int_a^x u'_n(t) dt \quad \text{pre všetky } n \in \mathbb{N} \text{ a } x \in \langle a, b \rangle.$$

Použitím Cauchyho-Schwartzovej nerovnosti dostávame

$$\left( u_n(x) - u_m(x) \right)^2 = \left( \int_a^x (u'_n - u'_m) dt \right)^2 \leq (b - a) \int_a^b (u'_n - u'_m)^2 dt.$$

Táto nerovnosť vzhľadom na (2.10) ukazuje, že postupnosť  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  spĺňa Cauchyho-Bolzanovo kritérium rovnomernej konvergenie postupnosti v intervale  $\langle a, b \rangle$ . Keďže uvedená postupnosť je postupnosť spojitých funkcií, z rovnomernej konvergenie tejto postupnosti dostávame, že aj limitná funkcia  $u(x)$  je spojitá na intervale  $\langle a, b \rangle$ . Z jednoznačnosti zovšeobecneného riešenia a z jednoznačnosti limity dostávame, že  $u(x) = u_0(x)$  v  $L_2(a, b)$ , teda aj zovšeobecnené riešenie je spojitou funkciou na  $\langle a, b \rangle$ . Z uvedených faktov dostávame

$$\lim_{n \rightarrow 0} u_n = u_0$$

rovnomerne v  $\langle a, b \rangle$  ( $u_n \rightrightarrows u_0$  v  $\langle a, b \rangle$ ).

Označme teraz

$$V_0(x) = \int_a^x v_0(t) dt,$$

kde  $v_0$  je limitou postupnosti derivácií z (2.11). Ďalej platí

$$u_n(x) - V_0(x) = \int_a^x \left( u'_n(t) - v_0(t) \right) dt.$$

Opäť využitím Cauchyho-Schwarzovej nerovnosti dostávame

$$\left( u_n(x) - V_0(x) \right)^2 \leq (b - a) \int_a^x \left( u'_n(t) - v_0(t) \right)^2 dt$$

pre každé  $x \in \langle a, b \rangle$ . Z konverencie danej vzťahom (2.11) a získanej nerovnosti hneď dostávame

$$\lim_{n \rightarrow 0} u_n = V_0$$

rovnomerne v  $\langle a, b \rangle$ . Preto  $u_0(x) = V_0(x)$  v  $\langle a, b \rangle$ , a teda aj funkcia  $V_0$  je spojitou funkciou (dokonca absolútne spojitou funkciou v  $\langle a, b \rangle$ ), a preto platí

$$V_0'(x) = v_0(x)$$

skoro všade v  $\langle a, b \rangle$ . Z uvedených faktov máme

$$u_0'(x) = v_0(x)$$

skoro všade v  $\langle a, b \rangle$ . □

Ako ukážeme neskôr, nie každý problém má zovšeobecnené riešenie, pretože pozitívne definitný operátor vyžaduje, aby bol operátor lineárny, symetrický a spĺňal nerovnosti pozitívnej definitnosti (pozri napríklad [9]). Najmä vlastnosť symetrie je obmedzujúca. Preto zavádzame pojem *slabého riešenia pre eliptickú úlohu* (podľa [9]).

Zamerajme sa teraz na pojem slabého riešenia pre úlohu (2.1), (2.2), čiže máme danú Newtonovu okrajovú podmienku (teda  $\alpha > 0, \gamma > 0$ ). Keďže ide o diferenciálnu rovnicu druhého rádu, náš základný priestor bude Sobolevov priestor  $W_2^1((a, b))$ , (pozri napríklad [7, 9]). Nech teraz  $v \in W_2^1((a, b))$ . Funkciou  $v$  vynásobíme rovnicu (2.3), integrujeme na intervale  $(a, b)$  a použijúc na prvý člen integrovanie per partes (vynecháme integračnú premennú  $x$ ), dostávame:

$$\int_a^b (pu'v' + ruv) dx - p(b)u'(b)v(b) + p(a)u'(a)v(a) = \int_a^b fv dx. \quad (2.12)$$

Teraz dosadíme z okrajových podmienok (2.1)

$$u'(a) = \frac{\beta}{\alpha}u(a) + \frac{1}{\alpha}u_a, \quad u'(b) = -\frac{\delta}{\gamma}u(b) + \frac{1}{\gamma}u_b$$

tieto hodnoty do rovnice (2.12):

$$\begin{aligned} \int_a^b (pu'v' + ruv) dx + p(b)\frac{\delta}{\gamma}u(b)v(b) + p(a)\frac{\beta}{\alpha}u(a)v(a) \\ = \int_a^b fv dx + \frac{1}{\gamma}p(b)u_bv(b) + \frac{1}{\alpha}p(a)u_av(a). \end{aligned} \quad (2.13)$$

**Definícia 2.2 (Slabé riešenie).** Slabým riešením problému (2.1), (2.2) budeme nazývať takú funkciu  $u \in W_2^1((a, b))$ , ktorá bude spĺňať integrálnu identitu (2.13) pre všetky  $v \in W_2^1((a, b))$ .

Z uvedeného ihneď vyplývajú predpoklady pre dáta, za ktorých má identita (2.13) zmysel. Stačí predpokladať, aby funkcie v úlohe mali nasledujúce vlastnosti:  $p$  a  $r$  sú lebesgueovsky merateľné a ohraničené,  $f \in L_2(\langle a, b \rangle)$ .

*Existenciu* takéhoto riešenia nám zaručuje Laxova-Milgramova veta (pozri napríklad [9], strana 404).

**Veta 2.1 (Laxova-Milgramova veta).** Nech  $H$  je Hilbertov priestor so skalárnym súčinom  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  a z neho indukovanou normou  $\|\cdot\|$ . Nech  $B(u, v)$  je bilineárna forma definovaná pre  $v \in H, u \in H$  a taká, že existujú konštanty  $K > 0, \alpha > 0$  nezávislé od  $u$  a  $v$ , že platí:

$$|B(u, v)| \leq K \|u\| \|v\| \quad \text{ohraničenosť bilineárnej formy} \quad (2.14)$$

a

$$B(u, u) \geq \alpha \|u\|^2 \quad \text{koercitívnosť bilineárnej formy} \quad (2.15)$$

Potom každý lineárny a ohraničený funkcionál  $F$  na  $H$  možno vyjadriť v tvare

$$Fv = B(z, v), \quad v \in H, \quad (2.16)$$

kde prvok  $z \in H$  je jednoznačne určený funkcionálom  $F$  a platí:

$$\|z\| \leq \frac{\|F\|}{\alpha}, \quad (2.17)$$

kde  $\|F\|$  je norma funkcionálu  $F$ .

Treba len stanoviť podmienky, za akých pre náš prípad táto veta platí. Uvažovaným Hilbertovým priestorom v tejto úlohe bude priestor  $W_2^1((a, b))$ .

Bilineárna forma z vety má tvar

$$B(u, v) = \int_a^b (pu'v' + ruv) dx + p(b)\beta u(b)v(b) + p(a)\alpha u(a)v(a).$$

Funkcionál je tvaru

$$Fv = \int_a^b fv dx + p(b)u_b v(b) - p(a)u_a v(a).$$

Treba ukázať, že v danom priestore je  $F$  ohraničený lineárny funkcionál a daná bilineárna forma je koercitívna a ohraničená (pozri napríklad [9], strana 408 veta 33.2).

## Koercitivita bilineárnej formy

Pre bilineárnu formu platí

$$B(u, u) = \int_a^b (p(u')^2 + ru^2) dx + \frac{\delta}{\gamma} p(b)u^2(b) + \frac{\beta}{\alpha} p(a)u^2(a)$$

Ak vezmeme do úvahy predpoklady pre dáta úlohy v tvare (2.8), teda

$$p(x) \geq p_0 > 0, \quad r(x) \geq 0,$$

hneď máme

$$B(u, u) \geq p_0 \|u'\|^2 + p(b)\frac{\delta}{\gamma} u^2(b) + p(a)\frac{\beta}{\alpha} u^2(a).$$

Teraz využijeme Friedrichsovu nerovnosť (pozri [9], strana 358) a dostávame

$$B(u, u) \geq C_V \|u\|_{W_2^1}^2, \quad \text{kde } C_V = \frac{p_0}{c_1} \min \left\{ \frac{\delta}{\gamma}, \frac{\beta}{\alpha} \right\},$$

pričom  $c_1$  je konštanta z Friedrichsovej nerovnosti.

## Ohraničenosť bilineárnej formy

Využijeme predpoklady na funkcie  $p$  a  $r$ . Ich horné ohraničenia označme  $p_{\max}$  a  $r_{\max}$ . Použijúc Cauchyho-Buniakovského nerovnosť dostávame

$$\begin{aligned} |B(u, v)| &\leq p_{\max} \|u'\| \|v'\| + r_{\max} \|u\| \|v\| + p_{\max} \max \left\{ \frac{\delta}{\gamma}, \frac{\beta}{\alpha} \right\} (|u(b)v(b)| + |u(a)v(a)|) \\ &\leq \max \{p_{\max}, r_{\max}\} ((\|u'\| + \|u\|)(\|v'\| + \|v\|)) \\ &\quad + p_{\max} \max \left\{ \frac{\delta}{\gamma}, \frac{\beta}{\alpha} \right\} (|u(b)v(b)| + |u(a)v(a)|). \end{aligned}$$

Na prvý člen využijeme nerovnosť, ktorá platí pre ľubovoľné nezáporné reálne čísla  $a, b$ :

$$a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}.$$

Ďalej využijeme vetu o stopách (pozri [9], strana 355) s konštantou  $T_r$ . Dostávame

$$|B(u, v)| \leq K \|u\|_{W_2^1} \|v\|_{W_2^1},$$

$$\text{kde } K = \max \left\{ \sqrt{2}p_{\max}, \sqrt{2}r_{\max}, 2T_r^2 p_{\max} \max \left\{ \frac{\delta}{\gamma}, \frac{\beta}{\alpha} \right\} \right\}.$$

## Ohraničenosť funkcionálu

Využijeme Cauchyho-Buniakovského nerovnosť a vetu o stopách:

$$|Fv| \leq C_f \|v\|_{W_2^1},$$

$$\text{kde } C_f = \max \{ \|f\|, T_r p_{\max} |u_b|, T_r p_{\max} |u_a| \}.$$

Záverom teda len zhrnieme predpoklady pre existenciu jediného riešenia:

- (1)  $f \in L_2(\langle a, b \rangle)$ ,
- (2) funkcie  $p, r$  sú lebesgueovsky merateľné a ohraničené, pričom

$$0 < p_0 \leq p(x) \leq p_{\max} \quad \text{a} \quad 0 \leq r(x) \leq r_{\max},$$

- (3)  $u_a, u_b$  sú ľubovoľné reálne čísla,
- (4)  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sú kladné reálne čísla (veta platí aj pre  $\beta \geq 0, \delta \geq 0$  v prípade  $\beta = 0, \delta = 0$  podmienky sú Neumannove).

Za týchto predpokladov z Laxovej-Milgramovej vety dostávame existenciu jediného slabého riešenia  $u \in W_2^1((a, b))$  úlohy (2.1), (2.2) a navyše ešte táto veta zaručuje, že

$$\|u\|_{W_2^1} \leq \frac{C_f}{C_V}.$$

Treba si naviac uvedomiť, že Laxova-Milgramova veta, ktorá zabezpečuje existenciu slabého riešenia, nevyžaduje symetriu operátora diferenciálnej rovnice na rozdiel od zovšeobecného riešenia. A tento fakt má aj iné dôležité dôsledky, ako uvidíme neskôr. Teraz ukážeme príklad nesymetrického operátora.

**Príklad** (nesymetrický operátor). Na intervale  $\langle 0, 1 \rangle$  uvažujeme okrajový problém:

$$-u''(x) + u'(x) + u(x) = f(x) \quad (2.18)$$

s Dirichletovými okrajovými podmienkami:

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \quad (2.19)$$

Potom operátor prislúchajúci tomuto problému nie je symetrický. Skutočne, definujme operátor

$$Au = -u'' + u' + u$$

s definičným oborom

$$D_A = \left\{ u \in C^2(\langle 0, 1 \rangle) : u(0) = u(1) = 0 \right\}.$$

Potom platí

$$\langle Au, v \rangle = \int_0^1 (u'v' + u'v + uv) \, dx,$$

z čoho hneď vidno, že operátor nie je symetrický a teda problém nemá tzv. zovšeobecnené riešenie. (pripomíname podmienku symetrie operátora:  $(Au, v) = (u, Av)$  pre všetky  $u, v \in D_A$ . Viac pozri [9], strana 120. ) Ukážeme splnenie predpokladov Laxovej-Milgramovej vety. Definujme

$$B(u, v) = \int_0^1 (u'v' + u'v + uv) \, dx.$$

Ohraničenosť:

$$\begin{aligned} |B(u, v)| &= \left| \int_0^1 (u'v' + uv) \, dx + \int_0^1 u'v \, dx \right| \leq \left| \langle u, v \rangle_{W_2^1} \right| + \left| \int_0^1 u'v \, dx \right| \\ &\leq \|u\|_{W_2^1} \|v\|_{W_2^1} + \|u\| \|v\| \leq 2 \|u\|_{W_2^1} \|v\|_{W_2^1}. \end{aligned}$$

Koercitivita:

$$\begin{aligned} B(u, u) &= \int_0^1 ((u')^2 + u^2 + u'u) \, dx \\ &\geq \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^1 ((u')^2 + u^2) \, dx}_{\|u\|_{W_2^1}^2} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^1 (u' + u)^2 \, dx}_{\geq 0} \geq \frac{1}{2} \|u\|_{W_2^1}^2. \end{aligned}$$

## 2.2 $N$ -dimenzionálny prípad

Pojem zovšeobecneného a slabého riešenia eliptických okrajových úloh sa dá rozšíriť aj na viacrozmerné úlohy.

Uvažujme teraz okrajový problém druhého rádu na  $N$ -dimenzionálnej ohraničenej oblasti  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ . Body tejto oblasti budeme označovať  $x = (x_1, \dots, x_N)$ , hranicu oblasti  $\Omega$



označíme  $\partial\Omega$  a body na hranici budeme označovať  $s = (s_1, \dots, s_N)$ . Problém môžeme pre neznámu funkciu  $u(x)$  sformulovať takto:

$$-\nabla \cdot \left( P(x) \nabla u(x) \right) + q(x)u(x) = f(x) \quad \text{na } \Omega \quad (2.20)$$

so všeobecnými okrajovými podmienkami newtonovského typu

$$Nu(s) + h(s)u(s) = g(s) \quad \text{pre } s \in \partial\Omega, \quad (2.21)$$

kde  $P(x)$  je matica  $N \times N$  funkcií  $p_{ij}(x)$  (koeficienty danej úlohy),  $q(x)$  a  $f(x)$  sú dané funkcie. Na hranici sú dané funkcie  $h(s)$  a  $g(s)$ . Označenie  $Nu$  v okrajovej podmienke predstavuje *deriváciu podľa vonkajšej konormály* (pozri [9], strana 269). Ukážme teraz pre takúto úlohu podmienky, pri akých existuje slabé riešenie problému (2.20), (2.21).

Pripomeňme si, že rovnicu (2.20) môžeme napísať aj v tvare:

$$-\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left( p_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + q(x)u(x) = f(x) \quad (2.22)$$

a výraz  $Nu(s)$  na hranici je

$$Nu = \sum_{i,j=1}^N p_{ij}(s) \frac{\partial u(s)}{\partial s_j} n_i(s),$$

kde  $n(s) = (n_1(s), \dots, n_N(s))$  je vektor vonkajšej normály ku hranici  $\partial\Omega$  v bode  $s$ .

Keďže úloha je druhého rádu, náš pracovný priestor bude Sobolevov priestor  $W_2^1(\Omega)$ . Nech teraz  $v \in W_2^1(\Omega)$ . Vynásobíme touto funkciou rovnicu (2.20) a preintegrujeme cez celú oblasť  $\Omega$ . Využitím Greenovej vety dostávame:

$$\sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} p_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \sum_{i,j=1}^N \int_{\partial\Omega} p_{ij} \frac{\partial u}{\partial s_j} n_i v ds + \int_{\Omega} quv dx = \int_{\Omega} fv dx.$$

Z tejto identity hneď vidíme dôvod, prečo je podmienka Newtonovského typu tvaru (2.21). Dosadíme teraz v hraničnom integrály okrajovú podmienku (2.21). Dostávame:

$$\sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} p_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} huv ds + \int_{\Omega} quv dx = \int_{\Omega} fv dx + \int_{\partial\Omega} gv ds. \quad (2.23)$$

**Definícia 2.3 (Slabé riešenie).** Slabým riešením úlohy (2.20), (2.21) rozumieme takú funkciu  $u \in W_2^1(\Omega)$ , ktorá spĺňa integrálnu identitu (2.23) pre všetky  $v \in W_2^1(\Omega)$ .

*Poznámka 2.1.* V prípade, že by matica bola symetrická, môžeme uvažovať aj o zovšeobecnenom riešení. Navyše, ak by matica bola diagonálna a na diagonále by boli rovnaké funkcie, napríklad  $p(x)$ , potom by tvar identity (2.23) nadobudol zjednodušený tvar:

$$\int_{\Omega} p(\nabla u \cdot \nabla v) dx + \int_{\partial\Omega} huv ds + \int_{\Omega} quv dx = \int_{\Omega} fv dx + \int_{\partial\Omega} gv ds.$$

*Poznámka 2.2.* V prípade iných okrajových podmienok postupujeme analogicky a pracovný priestor volíme podľa typu okrajových podmienok, ktoré môžu byť aj zmiešané. Podrobná definícia a príklady pozri [9], [7].

V ďalšom budeme skúmať, za akých podmienok kladených na dáta úlohy, existuje slabé riešenie definované v definícii 2.3. Treba teda overiť splnenie podmienok Laxovej-Milgramovej vety. Ľavá strana rovnice (2.23) bude predstavovať bilineárnu formu  $B(u, v)$ . Jej bilinearita je jasná z vlastnosti linearít rovnice a príslušných integrálov.

## Ohraničenosť bilineárnej formy

Hneď vidíme, že jednou z dôležitých podmienok sú vlastnosti funkcií v matici  $P$ .

**Predpoklad 1.** Existuje taká konštanta  $C > 0$ , že pre všetky  $i, j = 1, \dots, N$  platí

$$|p_{ij}(x)| \leq C \quad \text{pre skoro všetky } x \in \Omega.$$

Tu a aj v ďalších odhadoch budeme často používať nasledujúcu nerovnosť pre ľubovoľné nezáporné reálne čísla  $a, b, c, d$ :

$$ab = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2} \leq \sqrt{a^2 + c^2}\sqrt{b^2 + d^2}.$$

Potom prvý člen bilineárnej formy odhadneme, použijúc aj Cauchyho-Schwarzovu nerovnosť, takto:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} p_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \right| &\leq C \sum_{i,j=1}^N \left| \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle \right| \leq C \sum_{i,j=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\| \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\| \\ &\leq CN^2 \left( \sum_{j=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|^2 \right)^{1/2} \\ &= CN^2 \|\nabla u\| \|\nabla v\| \leq CN^2 \|u\|_{W_2^1} \|v\|_{W_2^1}. \end{aligned}$$

Teraz odhadneme druhý člen bilineárnej formy. Tu musíme urobiť predpoklad pre ohraničenosť funkcie  $h$ .

**Predpoklad 2.** Existuje taká reálna konštanta  $H > 0$ , že funkcia  $h$  definovaná a meralná na  $\partial\Omega$  je tu ohraničená:

$$|h(s)| \leq H \quad \text{pre skoro všetky } s \in \partial\Omega.$$

V prípade tohoto člena využijeme okrem uvedeného predpokladu aj vetu o stopách [7] s konštantou  $T_r$ , z ktorej dostávame

$$\left| \int_{\partial\Omega} huv ds \right| \leq H \|u\|_{L_2} \|v\|_{L_2} \leq HT_r^2 \|u\|_{W_2^1} \|v\|_{W_2^1}.$$

Analogicky budeme postupovať aj pri treťom člene.

**Predpoklad 3.** Existuje taká konštanta  $Q > 0$ , že funkcia  $q$  definovaná a merateľná na  $\Omega$  je tu ohraničená:

$$|q(x)| \leq Q \quad \text{pre skoro všetky } x \in \Omega.$$

Dostávame:

$$\left| \int_{\Omega} quv \, dx \right| \leq Q \|u\|_{L_2} \|v\|_{L_2} \leq Q \|u\|_{W_2^1} \|v\|_{W_2^1}.$$

Záverom teda máme pre  $B(u, v)$ , definovanú ľavou stranou identity (2.23), ohraničenie

$$|B(u, v)| \leq 3 \max \{CN^2, HT_r^2, Q\} \|u\|_{W_2^1} \|v\|_{W_2^1}.$$

## Koercitivita bilineárnej formy

Odhadneme, analogicky ako pri odhade ohraničenosti, člen po člene. Tu opäť budeme potrebovať istý predpoklad na operátor. Tomuto predpokladu sa v literatúre hovorí aj koercitívny alebo ako v [9] rovnomerne eliptický operátor. Zopakujeme definíciu, v ktorej definovaná vlastnosť bude ďalším predpokladom potrebným pre existenciu riešenia našej úlohy.

**Definícia 2.4.** Operátor (alebo rovnica) (2.20) sa nazýva *rovnomerne eliptický* na oblasti  $\Omega$ , ak existuje taká konštanta  $C_0 > 0$  nezávislá na  $x \in \Omega$ , že pre každý reálny vektor  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  platí pre všetky  $x \in \Omega$ :

$$\sum_{i,j=1}^N p_{ij}(x) \alpha_i \alpha_j \geq C_0 \sum_{i=1}^N \alpha_i^2.$$

**Predpoklad 4.** Naša rovnica (2.20) je rovnomerne eliptická.

Pomocou tohto predpokladu môžeme odhadnúť prvý člen takto:

$$\sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} p_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \, dx \geq C_0 \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \, dx = C_0 \|\nabla u\|^2.$$

Pre odhad ostatných dvoch členov použijeme nasledujúci predpoklad.

**Predpoklad 5.** Nech pre funkcie  $h$  a  $q$  platí navyiac

$$\begin{aligned} h(s) &\geq H_0 > 0 \quad \text{pre skoro všetky } s \in \partial\Omega, \\ q(x) &\geq 0 \quad \text{pre skoro všetky } x \in \Omega. \end{aligned}$$

Potom pre tieto dva členy dostávame odhad:

$$\int_{\partial\Omega} hu^2 \, ds + \underbrace{\int_{\Omega} qu^2 \, dx}_{\geq 0} \geq H_0 \|u\|_{L_2(\partial\Omega)}^2.$$

Na dokončenie dôkazu koercitivity v takomto prípade je potrebné použiť Friedrichsovu nerovnosť ( pozri [9] strana 358), napríklad v tomto tvare.

**Friedrichsova nerovnosť.** Existuje taká kladná konštanta  $C_F > 0$ , že pre všetky funkcie  $u \in W_2^1(\Omega)$  platí

$$\|u\|_{W_2^1}^2 \leq C_F \left( \|\nabla u\|_{L_2}^2 + \|u\|_{L_2(\partial\Omega)}^2 \right).$$

Využitím tejto nerovnosti máme pre našu bilineárnu formu nasledujúce ohraňenie:

$$\begin{aligned} B(u, u) &\geq C_0 \|\nabla u\|^2 + H_0 \|u\|_{L_2(\partial\Omega)}^2 \\ &\geq \min\{H_0, C_0\} \left( \|\nabla u\|^2 + \|u\|_{L_2(\partial\Omega)}^2 \right) \geq \frac{\min\{H_0, C_0\}}{C_F} \|u\|_{W_2^1}^2. \end{aligned}$$

Podobne ako pri bilineárnej forme, tak aj príslušný funkcionál, t. j. pravá strana identity (2.23), je lineárna. Stačí teda dokázať ohraňenosť funkcionálu.

## Ohraňenosť funkcionálu

Predpoklad pre splnenie tejto podmienky bude takýto.

**Predpoklad 6.** Nech  $f \in L_2(\Omega)$  a  $g \in L_2(\partial\Omega)$ .

Na základe týchto vlastností prvý člen odhadneme pomocou Cauchyho-Schwartzovej nerovnosti (1.1) a v druhom člene s využitím vety o stopách máme:

$$\begin{aligned} |F(v)| &= \left| \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\partial\Omega} g v \, ds \right| \\ &\leq \|f\|_{L_2} \|v\|_{L_2} + \|g\|_{L_2(\partial\Omega)} \|v\|_{L_2(\partial\Omega)} \\ &\leq \left( \|f\|_{L_2} + T_r \|g\|_{L_2(\partial\Omega)} \right) \|v\|_{W_2^1}. \end{aligned}$$

Z uvedených vlastností dostávame pri splnení predpokladov 1. až 6. existenciu jediného slabého riešenia úlohy (2.20), (2.21).

## 2.3 Základné princípy numerických metód

V tejto časti by sme chceli v krátkosti zhrnúť výsledky z učebnice [7], ktoré skúmajú návrh a vlastnosti numerickej schémy vo všeobecnosti. Tento prístup sa pre eliptické rovnice (akékoľvek) nazýva *Galerkinova metóda*. Ak má rovnica nejaké ďalšie dobré vlastnosti (linearita, pozitívna definitnosť operátora, a pod.), tak táto metóda môže byť ekvivalentná *Ritzovej metóde*, preto sa niekedy používa aj názov *Ritzova-Galerkinova metóda*. Okrem toho, v najnovších výskumoch je táto metóda zovšeobecnená a známa pod pojmom *nespojité Galerkinova metóda* (discontinuous GM).

Cieľom tejto podkapitoly bude teoreticky určiť odhad chyby tejto metódy pre rôzne vlastnosti daného operátora. Navyše, na jednoduchom jednodimenzionálnom prípade ukážeme odhad chyby pre metódu konečných prvkov.

Z predchádzajúcich častí už vieme, že eliptický okrajový problém môžeme zapísať v operátorovej forme

$$Au = f$$

s príslušným definičným oborom  $D_A \subseteq H$  operátora  $A$ , kde  $H$  je Hilbertov priestor so skalárnym súčinom  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

### 2.3.1 Pozitívne definitný operátor $A$

Ak je operátor  $A: H \rightarrow H$  **pozitívne definitný**, kde  $H$  je separabilný Hilbertov priestor, tak sa dá skonštruovať [9] separabilný energetický Hilbertov priestor  $H_A$  so skalárnym súčinom, ktorý sa definuje ako

$$\langle u, v \rangle_A = \langle Au, v \rangle \quad \text{pre všetky } u, v \in H_A.$$

V tomto priestore má rovnica

$$Au = f \tag{2.24}$$

jediné, tzv. *zovšeobecnené riešenie*. Pri hľadaní numerického riešenia môžeme použiť napríklad Galerkinovu metódu. V stručnosti zopakujeme jej hlavnú myšlienku [7, 9]. Táto je založená na nasledujúcom tvrdení, pre jeho dôkaz pozri [7].

**Tvrdenie 2.2.** Majme separabilný Hilbertov priestor  $H$  so skalárnym súčinom  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  a bázou  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Ak pre danú bázu a prvok  $u \in H$  platí

$$\langle u, \varphi_i \rangle = 0 \quad \text{pre všetky } i \in \mathbb{N},$$

potom prvok  $u$  je nulovým prvkom v  $H$ .

Ak vieme, že rovnica  $Au = f$  má v  $H_A$  jediné riešenie, označme ho  $u_0$ , musí platiť

$$\langle Au_0 - f, \varphi_i \rangle = 0 \quad \text{pre všetky } i \in \mathbb{N},$$

kde  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  je báza v  $H_A$ . Navyše, báza tohoto priestoru môže byť skonštruovaná z prvkov patriacich do  $D_A$  (pozri [9], kapitola 25), pretože je to hustá podmnožina  $H_A$ . Vezmime teraz zo spočítateľnej množiny bázových prvkov ich konečný počet. Označme ho pre jednoduchosť

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}.$$

Ich lineárny obal vygeneruje konečno-dimenzionálny podpriestor, ktorý označíme  $V_n$ , pričom platí  $V_n \subseteq H_A$ .

Približné riešenie rovnice  $Au = f$  teda hľadáme v tvare

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x), \tag{2.25}$$

kde  $n$  je ľubovoľné, ale pevne zvolené prirodzené číslo. V ďalšom pri úvahách pre jednoduchosť zápisu budeme vynechávať pre funkcie premennú  $x$ . Prvky bázy poznáme a treba nájsť koeficienty  $a_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Tieto určíme z podmienky

$$\langle Au_n - f, \varphi_k \rangle = 0 \quad \text{pre } k = 1, 2, \dots, n.$$

Táto podmienka predstavuje  $n$  rovníc o  $n$  neznámych. V prípade pozitívne definitného (a teda lineárneho) operátora ide o algebraický systém lineárnych rovníc o  $n$  neznámych tvaru

$$a_1 \langle \varphi_1, \varphi_i \rangle_A + a_2 \langle \varphi_2, \varphi_i \rangle_A + \cdots + a_n \langle \varphi_n, \varphi_i \rangle_A = \langle f, \varphi_i \rangle \quad \text{pre } i = 1, 2, \dots, n.$$

Tento systém rovníc môžeme prepísať do maticového tvaru takto:

$$KU = F,$$

kde  $K$  je štvorcová matica  $n$ -tého stupňa s prvkami  $K_{ij} = \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle_A$ , pravá strana je vektor s prvkami  $F_i = \langle f, \varphi_i \rangle$  a  $U$  je vektor neznámych  $U = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

Uvedená metóda sa dá použiť aj všeobecnejšie, teda nie len pre pozitívne definitné operátory. Zavedieme preto ešte jedno užitočné označenie, ktoré sa používa všeobecnejšie ako je skalárny súčin v energetickom priestore  $H_A$  a budeme ho používať aj neskôr:

$$\langle u, v \rangle_A = \langle Au, v \rangle = B(u, v) \quad \text{pre všetky } u, v \in H_A.$$

Pre daný operátor predstavuje označenie  $B(u, v)$  bilineárnu formu s dobrými vlastnosťami. Toto označenie sa používa aj pri definícii slabého riešenia úlohy a potom aj pri dôkaze existencie a jednoznačnosti tohoto riešenia pomocou Laxovej-Milgramovej vety, pozri [9].

Pri odhade chyby nás zaujíma nielen to, či numerické riešenie konverguje k riešeniu úlohy v nejakom funkcionálnom priestore, ale aj ako „ďaleko“ sú tieto dve riešenia, teda ako rýchlo konverguje numerické riešenie ku skutočnému (klasickému, zovšeobecnému alebo slabému riešeniu) v závislosti od narastania počtu bázových prvkov, ktoré vyberieme pre aproximáciu. Zo zatiaľ uvedeného môžeme hneď napísať jeden veľmi dôležitý fakt Galerkinovej metódy. Ten vyplýva z toho, že našu rovnicu s jej riešením  $u_0$  si v tomto označení môžeme prepísať do tvaru:

$$B(u_0, v) = \langle f, v \rangle \quad \text{pre všetky } v \in H_A,$$

a teda toto platí aj pre všetky prvky z  $V_n \subseteq H_A$ . Pre približné riešenie dostávame

$$B(u_n, v) = \langle f, v \rangle \quad \text{pre všetky } v \in V_n.$$

Odčítaním týchto rovníc, za predpokladu, že ide o lineárny operátor, dostaneme fundamentálny *vzťah ortogonalít* medzi  $u_0$  a  $u_n$ :

$$B(u_0 - u_n, v) = 0 \quad \text{pre všetky } v \in V_n. \quad (2.26)$$

Ak teraz pri zavedenom označení odhadujeme v energetickom priestore  $H_A$  rozdiel zovšeobecného a numerického riešenia, dostávame:

$$\begin{aligned} \|u_0 - u_n\|_A^2 &= \\ \langle u_0 - u_n, u_0 - u_n \rangle_A &= B(u_0 - u_n, u_0 - u_n) = \\ B(u_0 - u_n, u_0 - v) - B(u_0 - u_n, u_n - v) &\quad \text{pre všetky } v \in V_n. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Keďže pre numerické riešenie tiež platí  $u_n \in V_n$  aj  $u_n - v \in V_n$  pre všetky  $v \in V_n$ , a teda druhý člen vo vzťahu (2.27) je nulový, a preto, využijúc Cauchyho-Schwarzovu nerovnosť pre skalárny súčin v  $H_A$ , máme:

$$\|u_0 - u_n\|_A^2 \leq \|u_0 - u_n\|_A \|u_0 - v\|_A \quad \text{pre všetky } v \in V_n. \quad (2.28)$$

Z čoho máme

$$\|u_0 - u_n\|_A \leq \inf_{v \in V_n} \|u_0 - v\|_A. \quad (2.29)$$

Z tohoto výsledku dostávame, že pre uvedený prípad operátora  $A$  je Galerkinovská aproximácia riešenia na priestore  $V_n$  *najlepšia možná*. Keď navyše uvažime, že  $u_n \in V_n$  dostávame nasledujúce tvrdenie.

**Veta 2.2.** Nech rovnica  $Au = f$  má zovšeobecnené riešenie  $u_0 \in H_A$ . Potom pre jeho numerickú aproximáciu definovanú v (2.25) platí:

$$\|u_0 - u_n\|_A = \min_{v \in V_n} \|u_0 - v\|_A. \quad (2.30)$$

Pre odhad chyby v priestore  $H$  využijeme tzv. argument duality, pozri napríklad [3]. Nech teraz  $w \in H_A$  rieši rovnicu

$$Aw = u_0 - u_n.$$

Potom, použijúc analogické argumenty ako v predchádzajúcom odhade, dostaneme:

$$\begin{aligned} \|u_0 - u_n\|^2 &= \langle u_0 - u_n, u_0 - u_n \rangle = \langle Aw, u_0 - u_n \rangle = B(w, u_0 - u_n) \\ &= B(w - v, u_0 - u_n) + B(v, u_0 - u_n) = B(w - v, u_0 - u_n) \\ &= \langle A(w - v), u_0 - u_n \rangle = \langle w - v, u_0 - u_n \rangle_A \\ &\leq \|u_0 - u_n\|_A \|w - v\|_A \quad \text{pre všetky } v \in V_n, \end{aligned}$$

kde sme využili vzťah ortogonalít (2.26), definíciu skalárneho súčinu v  $H_A$  a Cauchyho-Schwarzovu nerovnosť.

Z toho odvodíme (za predpokladu, že  $\|u_0 - u_n\| \neq 0$ )

$$\|u_0 - u_n\|^2 \leq \|u_0 - u_n\| \|w - v\|_A \frac{\|u_0 - u_n\|_A}{\|u_0 - u_n\|} \quad \text{pre všetky } v \in V_n,$$

z čoho je

$$\|u_0 - u_n\| \leq \|u_0 - u_n\|_A \frac{\|w - v\|_A}{\|Aw\|} \quad \text{pre všetky } v \in V_n.$$

A teda

$$\|u_0 - u_n\| \leq \|u_0 - u_n\|_A \inf_{v \in V_n} \frac{\|w - v\|_A}{\|Aw\|}. \quad (2.31)$$

Z tejto nerovnosti vidíme, že odhad bude taký dobrý, ako vhodne vieme aproximovať funkciu  $w \in H_A$  v podpriestore  $V_n$ . Nech teda platí aproximačný predpoklad pre ľubovoľnú funkciu  $z \in H_A$  a pre nejaké malé  $\varepsilon > 0$ :

$$\inf_{v \in V_n} \|z - v\|_A \leq \varepsilon \|Az\| \quad \text{pre všetky } z \in H_A, \quad (2.32)$$

a teda platí aj pre funkciu  $w \in H_A$ :

$$\inf_{v \in V_n} \|w - v\|_A \leq \varepsilon \|Aw\|. \quad (2.33)$$

Potom z (2.31) a (2.33) vyplýva

$$\|u_0 - u_n\| \leq \varepsilon \|u_0 - u_n\|_A. \quad (2.34)$$

Aproximačný predpoklad (2.32) platí aj pre  $u_0 \in H_A$ . Teda máme

$$\inf_{v \in V_n} \|u_0 - v\|_A \leq \varepsilon \|Au_0\|.$$

Keď využijeme vlastnosť (2.29) dostaneme

$$\|u_0 - u_n\|_A \leq \varepsilon \|Au_0\|. \quad (2.35)$$

Ak uvážime, že  $Au_0 = f$  v  $H_A$ , odhady (2.34) a (2.35) dávajú

$$\|u_0 - u_n\| \leq \varepsilon^2 \|f\|. \quad (2.36)$$

Z týchto výsledkov hneď dostávame nasledujúce tvrdenie.

**Veta 2.3.** Nech rovnica  $Au = f$  má zovšeobecnené riešenie  $u_0 \in H_A$ . Nech numerická aproximácia je definovaná ako (2.25). Nech platí aproximačný predpoklad (2.32). Potom pre odhad chyby numerického riešenia platí:

$$\|u_0 - u_n\| \leq \varepsilon \|u_0 - u_n\|_A \leq \varepsilon^2 \|f\|. \quad (2.37)$$

### 2.3.2 Nesymetrický operátor $A$

V prípade, že operátor nie je symetrický, ale spĺňa predpoklady Laxovej-Milgrammovej vety [9], nemôžeme využiť energetický Hilbertov priestor  $H_A$ . V tomto prípade pracujeme v nejakom Hilbertovom podpriestore  $V \subseteq H$  v závislosti od okrajových podmienok úlohy. Pre operátory druhého rádu spravidla máme  $H = W_2^1(\Omega)$  a  $V$  je buď tento samotný priestor, alebo nejaký jeho podpriestor, pre ktorý platí

$$\mathring{W}_2^1(\Omega) \subseteq V \subseteq W_2^1(\Omega).$$

Slabé riešenie úlohy  $Au = f$  musí spĺňať integrálnu identitu (2.23), ktorá sa dá zapísať v tvare

$$B(u, v) = Fv \quad \text{pre všetky } v \in H.$$

Numerické riešenie definujeme podľa (2.25). Pre odhad chyby numerického riešenia nám pomôže nasledujúce tvrdenie (pozri [3], strana 344 veta 2.8.1).

**Veta 2.4 (Céa).** Nech platia predpoklady Laxovej-Milgrammovej vety a  $u_0$  je slabé riešenie problému. Potom pre numerické riešenie tohto problému platí

$$\|u_0 - u_n\| \leq \frac{C}{\alpha} \min_{w \in V_n} \|u_0 - w\|, \quad (2.38)$$

kde  $C$  je koeficient ohraničenosti a  $\alpha$  koercitívny koeficient bilineárnej formy.

*Dôkaz.* Z definície slabého riešenia vieme  $B(u_0, v) = Fv$  pre všetky  $v \in V \subseteq H$  a tiež  $B(u_n, v) = Fv$  pre všetky  $v \in V_n \subseteq H$ . Z toho hneď máme

$$B(u_0 - u_n, v) = 0$$



pre všetky  $v \in V_n$ . Z vlastností bilineárneho operátora dostávame pre všetky  $v \in V_n$ :

$$\begin{aligned} \alpha \|u_0 - u_n\|^2 &\leq B(u_0 - u_n, u_0 - u_n) \\ &= B(u_0 - u_n, u_0 - v) + B(u_0 - u_n, v - u_n) \\ &= B(u_0 - u_n, u_0 - v) \leq C \|u_0 - u_n\| \|u_0 - v\|. \end{aligned}$$

Odkiaľ máme

$$\|u_0 - u_n\| \leq \frac{C}{\alpha} \|u_0 - v\| \leq \frac{C}{\alpha} \min_{w \in V_n} \|u_0 - w\|. \quad \square$$

## Odhad chyby pre metódu konečných prvkov v 1D

**Príklad.** V tejto časti ukážeme konkrétny odhad chyby pre jednoduchú jednorozmernú Dirichletovu okrajovú úlohu, pozri [3]. Uvažujme Dirichletov problém

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{pre všetky } x \in \langle a, b \rangle \quad (2.39)$$

s okrajovými podmienkami

$$u(a) = u(b) = 0. \quad (2.40)$$

Táto úloha je veľmi jednoduchá a má všetky dobré vlastnosti. Operátor je pozitívne definitný, takže použijeme Galerkinovu metódu a výber bázy spočíva v použití metódy konečných prvkov. Je to široko používaná metóda, pretože má množstvo veľmi vhodných vlastností, medzi ktoré nesporne patrí fakt, že výsledná matica lineárneho algebraického systému, ktorý treba riešiť, je tzv. *riedka* matica, čo hlavne pri viacdimenziálnych úlohách predstavuje veľmi významný fakt. V tomto konkrétnom príklade je dokonca matica trojdiagonálna (viac napríklad [3]).

Najprv danú výpočtovú oblasť diskretizujeme. Zvoľme rovnomerné delenie. Dostávame

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

s vlastnosťou  $x_i - x_{i-1} = h$  pre všetky  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Body  $x_i$  nazývame *uzly* a úsečky  $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$  *konečné prvky*. Nech je teraz lineárny priestor  $V_n$  priestorom funkcií  $v$  spĺňajúcich:

- (i)  $v \in C(\langle a, b \rangle)$ ;
- (ii)  $v|_{\langle x_{i-1}, x_i \rangle}$  je lineárna funkcia pre všetky  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ;
- (iii)  $v(a) = v(b) = 0$ .

Dá sa ukázať, že  $V_n \subseteq H_A$ . Pre každé  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  definujeme po častiach lineárnu funkciu  $\varphi_i$  tak, aby platilo  $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ , kde  $\delta_{ij}$  je Kroneckerovo delta. Platí nasledujúce tvrdenie.

**Veta 2.5.** Množina  $\{\varphi_i : i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$  tvorí bázu priestoru  $V_n$ .

Dôkaz možno nájsť napríklad v [3], strana 6 veta 0.45. Túto bázu nazývame *nodálna báza* pre  $V_n$  a hodnoty  $v(x_i)$  pre  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  nazývame *uzlové hodnoty* funkcie  $v$ .

**Veta 2.6.** Nech je diskretizácia oblasti  $\langle a, b \rangle$  definovaná ako je opísaná vyššie. Potom platí

$$\|u - u_n\|_A \leq Ch \|u''\| \quad (2.41)$$

pre všetky  $u \in H_A$ , kde  $C$  je konštanta nezávislá od  $h$  a  $u$ .



# Kapitola 3

## Metóda konečných objemov (MKO) pre eliptické okrajové úlohy

Nosnou literatúrou tejto časti je kniha [6], konkrétne jej druhá kapitola. Vzhľadom na označenie v tejto literatúre budeme v nasledujúcich kapitolách používať označenie Sobolevových priestorov ako je uvedené v úvode:

$W_2^1(\Omega) = H^1(\Omega)$ , ak  $\Omega$  je oblasť s Lipschitzovskou hranicou, v tomto prípade je to Hilbertov priestor

$\dot{W}_2^1(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ , - Sobolevov priestor funkcií s nulovou stopou na  $\partial\Omega$ .

### 3.1 Jednodimenzionálny prípad

Základné princípy metódy konečných objemov si najskôr odvodíme pre najjednoduchšie príklady v 1D definované na úsečke  $\langle a, b \rangle$ ,  $a < b$  sú reálne čísla. Uvažujme, že na tomto intervale je daná obyčajná diferenciálna rovnica a okrajové podmienky. Príklady uvedieme neskôr. Najskôr sa budeme venovať diskretizácii oblasti a definícii numerického riešenia.

**Definícia 3.1 (Prípustná diskretizácia oblasti v 1D).** Majme interval  $\langle a, b \rangle$ , kde  $a < b$  sú reálne čísla a  $n$  je dané prirodzené číslo. Prípustnou diskretizáciou intervalu  $\langle a, b \rangle$ , ktorú budeme označovať  $\mathcal{T}$ , budeme rozumieť:

- množinu bodov  $\{x_i, i = 0, \dots, n + 1\}$  -**reprezentatívne body**, takých, že

$$a = x_0 = x_{\frac{1}{2}} < x_1 < x_{\frac{3}{2}} \cdots < x_{i-\frac{1}{2}} < x_i < x_{i+\frac{1}{2}} \cdots x_n < x_{n+\frac{1}{2}} = x_{n+1} = b.$$

- množinu bodov  $\{x_{i+\frac{1}{2}}, i = 0, \dots, n\}$  -**hraničné body konečných objemov**.

- množinu intervalov  $K_i, i = 1, \dots, n$  -**konečné objemy**, takých že

$$K_i = (x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}})$$

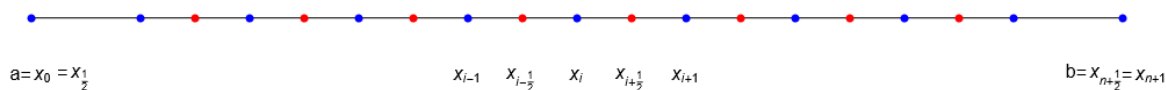
Označme

$$h_i = m(K_i) = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}, \quad i = 1, \dots, n$$

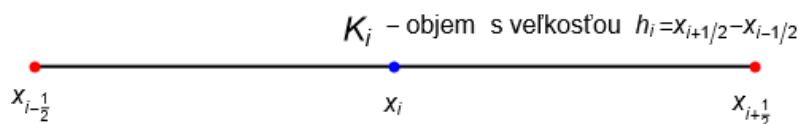
$$h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, \dots, n,$$

a teda  $\sum_{i=1}^N h_i = |b - a|$  a  $size(\mathcal{T}) := h = \max\{h_i, i = 1, \dots, n\}$ .

Graficky je daná situácia zobrazená na obrázkoch 3.1, 3.2.



Obr. 3.1. Diskretizácia intervalu  $\langle a, b \rangle$  pre MKO, modré body - reprezentatívne, červené body - hranice konečných objemov



Obr. 3.2. MKO, konečný objem  $K_i$ , modrý bod - reprezentatívny, červené body - hranice konečného objemu

**Definícia 3.2 (Numerické riešenie).** Numerickým riešením pre metódu konečných objemov nazývame po častiach konštantnú funkciu, ktorá je daná ako hodnota v reprezentatívnom bode  $x_i$  každého konečného objemu.

$$u_h(x) = u_i, \quad i = 1, \dots, n \text{ pre } x \in K_i.$$

*Poznámka 3.1.* V ďalšom texte budeme hodnotu numerického riešenia v reprezentatívnom bode  $x_i$  označovať preto  $u_i$  a skutočnú hodnotu klasického riešenia v tomto bode  $u(x_i)$ .

Teraz odvodíme numerickú schému a jej vlastnosti pre veľmi jednoduchú okrajovú úlohu.

### Príklad 1

Uvažujme ODR druhého rádu tvaru

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in (0, 1) \tag{3.1}$$

s okrajovými podmienkami:

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{3.2}$$

Predpokladajme, že rovnica má klasické riešenie, a teda platí:

$$f \in C(\langle 0, 1 \rangle), \quad u \in C(\langle 0, 1 \rangle) \cap C^2((0, 1)).$$

Hľadáme numerické riešenie tohoto problému metódou konečných objemov. Toto urobíme v niekoľkých krokoch.

### Diskretizácia oblasti

Pre danú úlohu použijeme diskretizáciu oblasti opísanú v definícii (3.1) pre  $a = 0$  a  $b = 1$ .

### Odvodenie numerickej schémy

Numerická schéma je založená na integrácii eliptickej rovnice na ľubovoľnom konečnom objeme  $K_i$ . V našom prípade teda integrujeme rovnicu (3.1) na konečnom objeme  $K_i$  a využitím Newtonovho-Leibnizovho vzorca dostávame:

$$-u'(x_{i+\frac{1}{2}}) + u'(x_{i-\frac{1}{2}}) = \int_{K_i} f(x) dx, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ľavá strana tejto rovnice vlastne predstavuje rozdiel tokov do konečného objemu  $K_i$  a z neho. Pre dobrú numerickú aproximáciu je stanovenie vhodného numerického toku tou podstatnou úlohou. Taylorov rad funkcie jednej premennej nám poskytuje rozumnú aproximáciu  $-u'(x_{i+\frac{1}{2}})$  (pozri napríklad [10], strana 7), ktorú označíme takto:

$$F_{i+\frac{1}{2}} := -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}}. \quad (3.3)$$

Táto aproximácia je rozumná preto, že ak  $u \in C(< 0, 1 >) \cap C^2((0, 1))$ , tak

$$F_{i+\frac{1}{2}}^* := -\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_{i+\frac{1}{2}}} = -u'(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(h), \quad (3.4)$$

kde  $|O(h)| \leq Ch$ ,  $C \in \mathbb{R}_+$  nezávisí od  $h$ .

Okrem toho v konečných objemoch  $K_1$  a  $K_n$  vezmeme do úvahy okrajové podmienky (3.2).

Pravú stranu môžeme aproximovať takto:

Nech

$$f_i = \frac{1}{h_i} \int_{K_i} f(x) dx, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.5)$$

Potom schéma získaná pomocou metódy konečných objemov bude takáto:

$$F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}} = h_i f_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.6)$$

$$F_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}}, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (3.7)$$

$$F_{\frac{1}{2}} = -\frac{u_1}{h_{\frac{1}{2}}}, \quad F_{n+\frac{1}{2}} = \frac{u_n}{h_{n+\frac{1}{2}}} \quad (3.8)$$

Z uvedeného je vidieť, že pre danú úlohu v 1D, analogicky ako pri metóde konečných diferencií alebo pri metóde konečných prvkov, dostávame pre neznáme hodnoty riešiť lineárny systém rovníc s trojdiagonálnou maticou.

**Veta 3.1 (Odhad chyby).** Nech platí  $f \in C(< 0, 1 >)$  a  $u \in C^2(< 0, 1 >)$  je riešenie okrajového problému (3.1)-(3.2). Nech  $\mathcal{T}$  je prípustná diskretizácia v zmysle definície (3.1).

Potom existuje jediné numerické riešenie úlohy (3.6),(3.7)(3.8) a existuje také  $C \geq 0$ , závislé len od riešenia  $u$ , že platí:

$$\sum_{i=0}^n \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} \leq C^2 h^2 \quad (3.9)$$

a

$$|e_i| \leq Ch, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad (3.10)$$

kde  $e_i = u(x_i) - u_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  a  $e_0 = e_{n+1} = 0$  (pozri [6], strana 735, Veta 6.1).

*Dôkaz.* Najskôr dokážeme existenciu jediného numerického riešenia (3.6), (3.7) a (3.8). Treba si uvedomiť, že numerické riešenie získame riešením sústavy  $n$  lineárnych algebraických rovníc o  $n$  neznámych (3.6). Ako vieme z lineárnej algebry, takáto sústava má jediné riešenie, keď je matica sústavy regulárna, alebo inak povedané, keď sústava s nulovou pravou stranou má ako jediné riešenie nulový vektor.

Vynásobme rovnicu (3.6) hodnotou  $u_i$  a sčítajme cez všetky konečné objemy  $i = 1, 2, \dots, n$ . Dostaneme

$$\sum_{i=1}^n (F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}) u_i = \sum_{i=1}^n u_i h_i f_i.$$

Člen na ľavej strane upravíme podľa (3.7) a (3.8). Máme:

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{u_i - u_{i+1}}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}} \right) u_i = \sum_{i=1}^n u_i h_i f_i.$$

Teraz v oboch členoch na ľavej strane použijeme známu rovnosť, platnú pre ľubovoľné reálne čísla  $a, b$ :

$$(a - b)a = \frac{1}{2} (a^2 - b^2 + (a - b)^2)$$

Budeme mať:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{u_i^2 - u_{i+1}^2 + (u_i - u_{i+1})^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{u_i^2 - u_{i-1}^2 + (u_i - u_{i-1})^2}{h_{i-\frac{1}{2}}} \right) = \sum_{i=1}^n u_i h_i f_i.$$

A po úprave:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{u_i^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{u_{i+1}^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{u_i^2}{h_{i-\frac{1}{2}}} - \frac{u_{i-1}^2}{h_{i-\frac{1}{2}}} \right) + \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{(u_i - u_{i+1})^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{(u_i - u_{i-1})^2}{h_{i-\frac{1}{2}}} \right) = \sum_{i=1}^n u_i h_i f_i. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Prvú sumu (3.11) upravíme na dve sumy a v druhej zavedieme substitúciu sumačnej premennej  $j = i - 1$ :

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{u_i^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{u_{i+1}^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{u_i^2}{h_{i-\frac{1}{2}}} - \frac{u_{i-1}^2}{h_{i-\frac{1}{2}}} \right) =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{u_i^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{u_{i+1}^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \left( \frac{u_{j+1}^2}{h_{j+\frac{1}{2}}} - \frac{u_j^2}{h_{j+\frac{1}{2}}} \right)$$

Teraz len zoskupíme jednotlivé rovnaké členy (niektoré sa vysčítajú) a dostaneme

$$\frac{1}{2} \left( \frac{u_1^2}{h_{\frac{1}{2}}} - \frac{u_0^2}{h_{\frac{1}{2}}} + \frac{u_n^2}{h_{n+\frac{1}{2}}} - \frac{u_{n+1}^2}{h_{n+\frac{1}{2}}} \right)$$

pričom si uvedomíme fakt, že z okrajových podmienok máme  $u_0 = u_{n+1} = 0$ . Podobne postupujeme aj s druhou sumou (3.11):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(u_i - u_{i+1})^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(u_i - u_{i-1})^2}{h_{i-\frac{1}{2}}} = \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(u_i - u_{i+1})^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(u_{j+1} - u_j)^2}{h_{j+\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

z čoho po úprave dostávame

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(u_i - u_{i+1})^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} \frac{(u_n - u_{n+1})^2}{h_{n+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} \frac{(u_1 - u_0)^2}{h_{\frac{1}{2}}},$$

kde opäť po využití okrajových podmienok dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(u_i - u_{i+1})^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} \frac{u_n^2}{h_{n+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} \frac{u_1^2}{h_{\frac{1}{2}}}.$$

Po týchto úpravách oboch súm v (3.11) dostaneme

$$\frac{u_1^2}{h_{\frac{1}{2}}} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(u_i - u_{i+1})^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{u_n^2}{h_{n+\frac{1}{2}}} = \sum_{i=1}^n u_i h_i f_i. \quad (3.12)$$

Ak zvolíme na pravej strane rovnice (3.12)  $f_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , potom jediným riešením rovnice (3.6) je nulové riešenie ako vidíme zo vzťahu (3.12), keďže na ľavej strane sú všetky členy nezáporné. Existencia jediného riešenia je teda dokázaná.

Teraz sa zameriame na odhad chýb. Tento sa pri diferenciálnych rovniciach spravidla dokazuje tak, že sa pôvodná diferenciálna rovnica v nejakom tvare a rovnica numerickej schémy odčítajú a využije sa regularita riešenia diferenciálnej rovnice. Označme

$$\bar{F}_{i+\frac{1}{2}} = -u'(x_{i+\frac{1}{2}}) \quad (3.13)$$

a integrujme rovnicu (3.1), ktorou je dané skutočné riešenie nášho problému, na konečnom objeme  $K_i$ . Použitím Newtonovho- Leibnizovho vzorca dostaneme

$$-\int_{K_i} u''(x) dx = \int_{K_i} f(x) dx,$$



$$-u'(x_{i+\frac{1}{2}}) + u'(x_{i-\frac{1}{2}}) = \int_{K_i} f(x),$$

čiže použijúc zavedené označenie (3.13) a (3.5) dostaneme

$$\bar{F}_{i+\frac{1}{2}} - \bar{F}_{i-\frac{1}{2}} = h_i f_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.14)$$

Označme teraz rozdiel skutočného (3.13) a aproximovaného (3.3) toku ako

$$G_{i+\frac{1}{2}} = \bar{F}_{i+\frac{1}{2}} - F_{i+\frac{1}{2}}$$

a porovnaním rovníc (3.6) a (3.14) dostaneme

$$G_{i+\frac{1}{2}} - G_{i-\frac{1}{2}} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.15)$$

Použijúc teraz konzistenciu tokov (3.4) dostávame, že existuje taká konštanta  $C > 0$  závislá len od funkcie  $u$ , že platí:

$$F_{i+\frac{1}{2}}^* = \bar{F}_{i+\frac{1}{2}} + R_{i+\frac{1}{2}}, \quad \text{a } |R_{i+\frac{1}{2}}| \leq Ch. \quad (3.16)$$

Pri definícii chyby  $e_i = u(x_i) - u_i$ , kde z okrajových podmienok vieme, že  $e_0 = e_{n+1} = 0$  dostávame po úprave

$$\begin{aligned} G_{i+\frac{1}{2}} &= \bar{F}_{i+\frac{1}{2}} - F_{i+\frac{1}{2}} = -u'(x_{i+\frac{1}{2}}) + \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} = \\ F_{i+\frac{1}{2}}^* - R_{i+\frac{1}{2}} - F_{i+\frac{1}{2}} &= -\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} - R_{i+\frac{1}{2}} = \\ &= -\frac{e_{i+1} - e_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} - R_{i+\frac{1}{2}}, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Dosadením týchto úprav do (3.15) máme rovnicu pre odhad chyby

$$-\frac{e_{i+1} - e_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} - R_{i+\frac{1}{2}} + \frac{e_i - e_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}} - R_{i-\frac{1}{2}} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.17)$$

S touto rovnicou urobíme teraz analogické úpravy ako pri dôkaze jednoznačnosti riešenia. Vynásobíme rovnicu (3.17) hodnotou  $e_i$ , sčítame pre  $i = 1, \dots, n$  a máme

$$-\sum_{i=1}^n \frac{(e_{i+1} - e_i)e_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \sum_{i=1}^n \frac{(e_i - e_{i-1})e_i}{h_{i-\frac{1}{2}}} = -\sum_{i=1}^n R_{i-\frac{1}{2}}e_i + \sum_{i=1}^n R_{i+\frac{1}{2}}e_i \quad (3.18)$$

Analogickými úpravami ako pri jednoznačnosti máme

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{e_{i+1}^2 - e_i^2 + (e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{e_i^2 - e_{i-1}^2 + (e_i - e_{i-1})^2}{h_{i-\frac{1}{2}}} \right) = \sum_{i=1}^n R_{i+\frac{1}{2}}(e_i - e_{i+1}) \quad (3.19)$$

Po úpravách a ak vezmeme do úvahy, že  $e_0 = e_{n+1} = 0$  a (3.16) máme

$$\sum_{i=0}^n \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} \leq Ch \sum_{i=0}^n |e_i - e_{i+1}|. \quad (3.20)$$

Na pravú stranu aplikujeme Cauchyho-Schwarzovu nerovnosť pre klasický  $n$ -rozmerný euklidovský priestor

$$\sum_{i=0}^n |e_{i+1} - e_i| \leq \left( \sum_{i=0}^n \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=0}^n h_{i+\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

a keďže  $\sum_{i=0}^n h_{i+\frac{1}{2}} = 1$  dostávame zo vzťahu (3.20)

$$\left( \sum_{i=0}^n \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} \leq Ch, \quad (3.21)$$

z čoho hneď máme (3.9).

Ak teraz uvážime, že

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad e_i = \sum_{j=1}^i (e_j - e_{j-1}),$$

tak

$$\begin{aligned} |e_i| &\leq \sum_{j=1}^i |e_j - e_{j-1}| \leq \sum_{j=1}^n |e_j - e_{j-1}| \leq \\ &\left( \sum_{i=0}^n \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=0}^n h_{i+\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \leq Ch, \end{aligned} \quad (3.22)$$

kde sme využili predchádzajúce výsledky a dostávame (3.10). □

## Príklad 2

Uvažujme ODR druhého rádu so všeobecným eliptickým operátorom tvaru

$$-(p(x)u'(x))' + \alpha u'(x) + \beta u(x) = f(x), \quad x \in (a, b), \quad a < b, \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (3.23)$$

s okrajovými podmienkami:

$$u(a) = c, \quad u(b) = d, \quad (3.24)$$

kde platia nasledujúce predpoklady:

### Predpoklady P

- $p \in L_\infty((a, b))$  a platí: existujú reálne čísla  $p_0$  a  $p_1$ , také, že:

$$0 < p_0 \leq p(x) \leq p_1 \text{ skoro všade na } (a, b),$$

- $\alpha, \beta, c, d$  sú reálne čísla a  $\beta \geq 0$

- $f \in L_2((a, b))$

*Poznámka 3.2.* Táto úloha je ďaleko všeobecnejšia ako v príklade 1 a v praxi má veľké opodstatnenie, pretože napríklad nespojitosť koeficientu  $p$  je v problémoch difúzie v tzv. pórovitom prostredí veľmi častá. Okrem pribudol aj člen  $\alpha u'(x)$  a preto je táto úloha príklad s tzv. nesymetrickým operátorom. Pre dané vlastnosti dát má slabé riešenie  $u \in W_2^1((a, b))$  (pozri cvičenie 1).

Budeme teraz konštruovať a hľadať vlastnosti numerického riešenia pre túto úlohu. Postupovať budeme analogicky ako v prvom príklade.

### Diskretizácia oblasti

Pre danú úlohu použijeme diskretizáciu oblasti opísanú v definícii (3.1).

### Odvodenie numerickej schémy

Numerickej schéma je založená na integrácii eliptickej rovnice na ľubovoľnom konečnom objeme  $K_i$ . Predpokladáme teraz, že funkcia  $p$  aj  $u$  sú dostatočne regulárne pre nasledujúce úkony. V našom prípade teda integrujeme rovnicu (3.23) na konečnom objeme  $K_i$  a využitím Newton-Leibnizovho vzorca dostávame:

$$-p(x_{i+\frac{1}{2}})u'(x_{i+\frac{1}{2}}) + p(x_{i-\frac{1}{2}})u'(x_{i-\frac{1}{2}}) + \alpha u(x_{i+\frac{1}{2}}) - \alpha u(x_{i-\frac{1}{2}}) + \int_{K_i} \beta u(x) dx = \int_{K_i} f(x) dx, \quad i = 1, \dots, n.$$

Numerickej schéma budeme označovať ako v definícii (3.2).

### Aproximácia jednotlivých členov.

- Člen na pravej strane rovnice ako aj posledný člen ľavej strany rovnice aproximujeme podobne ako v prvom príklade, teda ako

$$h_i f_i, \quad \beta h_i u_i.$$

- Druhý člen rovnice aproximujeme pomocou tzv. up-wind schémy.

Ak  $\alpha \geq 0$  člen  $\alpha u(x_{i+\frac{1}{2}})$  aproximujeme pomocou  $\alpha u_i$  a ak  $\alpha \leq 0$  člen  $\alpha u(x_{i+\frac{1}{2}})$  aproximujeme pomocou  $\alpha u_{i+1}$ , aby schéma bola stabilná. Aproximácia tohoto člena pomocou  $\alpha \frac{u_i + u_{i+1}}{2}$  je stabilná iba ak  $\alpha h \leq q$  pre rovnomerné delenie a konštantnú hodnotu koeficientu  $q$ .

- Aproximácia člena  $-p(x_{i+\frac{1}{2}})u'(x_{i+\frac{1}{2}})$ . Označme  $p_i = \frac{1}{h_i} \int_{K_i} p(x) dx$ . Aj v tomto prípade, ako pri diskretizácii prvého, jednoduchšieho príkladu, chceme aby diskretizácia toku v bode  $x_{i+\frac{1}{2}}$  mala rovnakú veľkosť na konečných objemoch  $K_i$  aj  $K_{i+1}$  (konzistencia tokov). Zavedme teraz neznámu  $u_{i+\frac{1}{2}}$  ako aproximáciu hodnoty  $u(x_{i+\frac{1}{2}})$ . Potom analogicky ako v prvom príklade aproximujeme člen  $-p(x_{i+\frac{1}{2}})u'(x_{i+\frac{1}{2}})$  použitím metódy konečných diferencií ako

$$H_{i+\frac{1}{2}}^+ := -p_i \frac{u_{i+\frac{1}{2}} - u_i}{h_i^+}, \quad \text{na } K_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$H_{i+\frac{1}{2}}^- := -p_{i+1} \frac{u_{i+1} - u_{i+\frac{1}{2}}}{h_{i+1}^-}, \quad \text{na } K_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad (3.25)$$

pričom  $h_i^+ = x_{i+\frac{1}{2}} - x_i$  a  $h_i^- = x_i - x_{i-\frac{1}{2}}$ . Vzhľadom na okrajové podmienky máme  $u_0 = u_{\frac{1}{2}} = c$  a  $u_{n+1} = u_{n+\frac{1}{2}} = d$ . Z princípu konzervativity tokov:

$$H_{i+\frac{1}{2}}^+ = H_{i+\frac{1}{2}}^-$$

môžeme vyjadriť neznámu hodnotu  $u_{i+\frac{1}{2}}$  :

$$u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i+1} \frac{p_{i+1}}{h_{i+1}^-} + u_i \frac{p_i}{h_i^+}}{\frac{p_{i+1}}{h_{i+1}^-} + \frac{p_i}{h_i^+}}.$$

Dosadením takto vyjadrenej hodnoty  $u_{i+\frac{1}{2}}$  do (3.25) a po jednoduchšej úprave môžeme potom definovať aproximáciu toku ako

$$H_{i+\frac{1}{2}} := -\tau_{i+\frac{1}{2}}(u_{i+1} - u_i) \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (3.26)$$

$$H_{\frac{1}{2}} := -\frac{p_1}{h_1^-}(u_1 - c),$$

$$H_{n+\frac{1}{2}} := -\frac{p_n}{h_n^+}(d - u_n),$$

kde

$$\tau_{i+\frac{1}{2}} = \frac{p_i p_{i+1}}{h_i^+ p_{i+1} + h_{i+1}^- p_i} \quad (3.27)$$

Tým sme aproximovali jednotlivé členy integrovanej rovnice. Na zjednodušenie zápisu voľme

$$\alpha \geq 0$$

a definujme

$$F_{i+\frac{1}{2}} = -\tau_{i+\frac{1}{2}}(u_{i+1} - u_i) + \alpha u_i, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (3.28)$$

$$F_{\frac{1}{2}} = -\frac{p_1}{h_1^-}(u_1 - c) + \alpha c,$$

$$F_{n+\frac{1}{2}} = -\frac{p_n}{h_n^+}(d - u_n) + \alpha u_n.$$

Aproximačné rovnice teda majú tvar

$$F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}} + \beta h_i u_i = h_i f_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.29)$$

**Veta 3.2 (Odhad chyby 2).** Nech pre dáta úlohy (3.23)-(3.24) platia predpoklady P. Nech  $u$  je jediné riešenie (3.23)-(3.24). Nech  $\mathcal{T}$  je prípustná diskretizácia v zmysle Definície 3.1 a taká, že  $p \in C^1(\bar{K}_i)$  a  $f \in C(\bar{K}_i)$ , pre všetky  $i = 1, \dots, n$ . Nech  $\gamma = \max\{\|u''\|_{L^\infty(K_i)}, i = 1, \dots, n\}$  a  $\delta = \max\{\|p\|_{L^\infty(K_i)}, i = 1, \dots, n\}$ . Potom

1. existuje jediné numerické riešenie v zmysle definície (3.2) úlohy (3.28)-(3.29)
2. Existuje konštanta  $C$  závislá len od  $p_0, p_1, \gamma, \delta$ , taká, že

$$\sum_{i=0}^N \tau_{i+\frac{1}{2}} (e_{i+1} - e_i)^2 \leq Ch^2, \quad (3.30)$$

kde  $\tau_{i+\frac{1}{2}}$  je definované v (3.27) a

$$|e_i| \leq Ch, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad (3.31)$$

kde  $e_i = u(x_i) - u_i, i = 1, \dots, n$  a  $e_0 = e_{n+1} = 0$ .

*Dôkaz.* Pozri [6], strana 744, Veta 7.1 □

*Poznámka 3.3.* V oboch príkladoch sme použili Dirichletove podmienky. Neumannove podmienky, ktoré zadávajú tok na hranici sa implementujú v numerickej schéme založenej na metóde konečných objemov celkom prirodzene ako tok cez hranicu konečného objemu, ktorý má jednu alebo viac hrán ležiacich na hranici oblasti, a to nulou v prípade homogénnych okrajových podmienok alebo danou veľkosťou toku v prípade nehomogénnych Neumanových okrajových podmienok.

## 3.2 Cvičenia

1. Dokážte existenciu slabého riešenia úlohy z príkladu 2 v predchádzajúcej časti.
2. Pre neznámu funkciu  $u(x)$  napíšte lineárnu eliptickú rovnicu s konštantným difúznym koeficientom rovným  $p(x) = 1$  a s členom  $8u(x)$  a nenulovou pravou stranou rovnou  $f(x) = x + x^2$  danou na oblasti  $\Omega = \langle 1, 2 \rangle$ . Na hranici sú dané homogénne Dirichletove podmienky.  
Napíšte matematický model tejto úlohy.  
Definujte slabé riešenie tejto úlohy.  
Napíšte numerickú schému založenú na metóde konečných objemov pre túto úlohu.
3. Pre neznámu funkciu  $u(x)$  napíšte lineárnu eliptickú rovnicu s nekonštantným difúznym koeficientom rovným funkcii  $p(x) = x^2 + 1$  a s členom  $(x^2 + 1)u(x)$  a nenulovou pravou stranou rovnou  $f(x) = 1 + x^2$  danou na oblasti  $\Omega = \langle 0, 1 \rangle$ . Na hranici sú dané homogénne Neumannove podmienky. Napíšte matematický model tejto úlohy.  
Definujte slabé riešenie tejto úlohy.  
Napíšte numerickú schému založenú na metóde konečných objemov pre túto úlohu.
4. Pre neznámu funkciu  $u(x)$  napíšte lineárnu eliptickú rovnicu s nekonštantným difúznym koeficientom rovným funkcii  $p(x) = x + 1$  a s členom  $8u(x)$  a nenulovou pravou stranou rovnou  $f(x) = x + x^2$  danou na oblasti  $\Omega = \langle 0, 2 \rangle$ . Na hranici sú dané homogénne Dirichletove podmienky.  
Napíšte matematický model tejto úlohy.  
Definujte slabé riešenie tejto úlohy.  
Napíšte numerickú schému založenú na metóde konečných objemov pre túto úlohu.
5. Pre neznámu funkciu  $u(x)$  napíšte lineárnu eliptickú rovnicu s nekonštantným difúznym koeficientom rovným funkcii  $p(x) = x^2 + 2x$  a s členom  $(x + 1)u(x)$  a nenulovou pravou stranou rovnou  $f(x) = x^2$  danou na oblasti  $\Omega = \langle 1, 3 \rangle$ . Na hranici sú dané Dirichletove podmienky  $u(1) = 2$ ,  $u(3) = 4$ .  
Napíšte matematický model tejto úlohy.  
Definujte slabé riešenie tejto úlohy.  
Napíšte numerickú schému založenú na metóde konečných objemov pre túto úlohu.
6. Pre neznámu funkciu  $u(x)$  napíšte lineárnu eliptickú rovnicu s nekonštantným difúznym koeficientom rovným funkcii  $p(x) = x^2$  a s členom  $(x + 6)u(x)$  a nenulovou pravou stranou rovnou  $f(x) = x^2$  danou na oblasti  $\Omega = \langle 2, 5 \rangle$ . Na hranici sú dané Dirichletove podmienky  $u(2) = 4$ ,  $u(5) = 2$ .  
Napíšte matematický model tejto úlohy.  
Definujte slabé riešenie tejto úlohy.  
Napíšte numerickú schému založenú na metóde konečných objemov pre túto úlohu.
7. Pre neznámu funkciu  $u(x)$  napíšte lineárnu eliptickú rovnicu s nekonštantným difúznym koeficientom rovným funkcii  $p(x) = 3x$  a s členom  $4xu(x)$  a nenulovou pravou stranou rovnou  $f(x) = x^2 - x$  danou na oblasti  $\Omega = \langle 2, 4 \rangle$ . Na hranici sú dané homogénne Neumanove podmienky.  
Napíšte matematický model tejto úlohy.  
Definujte slabé riešenie tejto úlohy.  
Napíšte numerickú schému založenú na metóde konečných objemov pre túto úlohu.
8. Pre neznámu funkciu  $u(x)$  napíšte lineárnu eliptickú rovnicu s nekonštantným difúznym koeficientom rovným funkcii  $p(x) = x + 4$  a s členom  $(x - 1)^2 u(x)$  a nenulovou

pravou stranou rovnou  $f(x) = 8$  danou na oblasti  $\Omega = \langle 0, 3 \rangle$ . Na hranici sú dané Neumannove podmienky  $u'(0) = 3$ ,  $u'(3) = 4$ .

Napište matematický model tejto úlohy.

Definujte slabé riešenie tejto úlohy.

Napište numerickú schému založenú na metóde konečných objemov pre túto úlohu.

9. Pre neznámu funkciu  $u(x)$  napíšte lineárnu eliptickú rovnicu s nekonštantným difúznym koeficientom rovným funkcii  $p(x) = 6x$  a s členom  $2u(x)$  a nenulovou pravou stranou rovnou  $f(x) = 8x - 1$  danou na oblasti  $\Omega = \langle 1, 10 \rangle$ . Na hranici sú dané Newtonove podmienky  $u'(1) = 3$ ,  $u'(10) + u(10) = 4$ .

Napište matematický model tejto úlohy.

Definujte slabé riešenie tejto úlohy.

## 3.3 Dvoj- a troj-dimenzionálny prípad

### 3.3.1 Dirichletove okrajové podmienky

Uvažujme jednoduchý eliptický problém druhého rádu tvaru

$$-\Delta u(x) + bu(x) = f(x), \quad x \in \Omega \quad (3.32)$$

s okrajovými podmienkami:

$$u(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (3.33)$$

kde predpokladáme, že:

$$\Omega \subset \mathbb{R}^N, N = 2 \text{ alebo } 3 \text{ je otvorená, ohraničená polygonálna oblasť} \quad (3.34)$$

- $b \geq 0$
- $f \in L_2(\Omega)$
- $g \in C(\partial\Omega)$  taká, že existuje  $\tilde{g} \in H^1(\Omega)$ , ktorej stopa je rovná  $g$  pre skoro všetky  $x \in \partial\Omega$ .

Za uvedených predpokladov podľa Laxovej-Milgramovej vety existuje jediné slabé riešenie problému (3.32), (3.33), to je funkcia  $u \in H^1(\Omega)$  taká, že  $u - \tilde{g} \in H_0^1(\Omega)$  a pre všetky  $v \in H_0^1(\Omega)$  platí nasledujúca integrálna identita:

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} bu(x)v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx. \quad (3.35)$$

Opäť budeme definovať diskretizáciu, numerické riešenie a numerickú schému pre uvedený problém.

**Definícia 3.3 (Prípustná diskretizácia oblasti  $\Omega$ ).** Prípustnou diskretizáciou oblasti  $\Omega$  (definovanej v (3.34)), ktorú budeme označovať  $\mathcal{T}$  budeme rozumieť:

- množinu polygonálnych konvexných oblastí (kladnej miery) -**konečné objemy**  $K \subset \Omega$  (aj "control volumes"),
- množinu hrán (stien v 3D), konečných objemov, ktoré sú podmnožinou  $\bar{\Omega}$  a označíme ju  $\mathcal{E}$ , všetky sú striktné pozitívnej (N-1) dimenzionálnej miery - **hrany konečných objemov**
- množinu bodov  $\{x_K, K \in \mathcal{T}\}$  -**reprezentatívne body**, ktorú budeme označovať  $\mathcal{P}$ ,

s vlastnosťami:

- $\cup\{\bar{K} \in \mathcal{T}\} = \bar{\Omega}$  (zjednotenie všetkých konečných objemov je celá oblasť  $\Omega$ ),
- pre ľubovoľný konečný objem  $K \in \mathcal{T}$  existuje  $\mathcal{E}_K \subset \mathcal{E}$  taká že  $\mathcal{E}_K = \partial K = \bar{K} - K$  a  $\cup\{\mathcal{E}_K; K \in \mathcal{T}\} = \mathcal{E}$  ( $\mathcal{E}_K$  je teda množina všetkých hrán (stien) konečného objemu  $K$ ),
- pre ľubovoľné  $K, L \in \mathcal{T}$  také že  $K \neq L$  je  $\bar{K} \cap \bar{L}$  alebo nulovej (N-1) miery alebo ich (N-1) miera je pozitívna, a vtedy ju označíme  $\bar{K} \cap \bar{L} = \sigma$ , kde  $\sigma \in \mathcal{E}$  sa niekedy pre presnosť označuje  $\sigma_{K,L}$  alebo  $K|L$  (spoločná hrana konečných objemov  $K, L$ ),



- množina reprezentatívnych bodov  $\{x_K, K \in \mathcal{T}\}$  je taká, že pre všetky  $K \in \mathcal{T}$  platí  $x_K \in \bar{K}$  a ak  $K, L$  sú dva susedné konečné objemy, také že  $\bar{K} \cap \bar{L} = \sigma$ , potom  $x_K \neq x_L$  a navyše

$$(x_L - x_K) = d_{\sigma_{K,L}} \mathbf{n}_\sigma, \quad (3.36)$$

kde  $d_{\sigma_{K,L}} = |x_K - x_L|$  a  $\mathbf{n}_\sigma$  je jednotkový vektor vonkajšej normály ku hrane  $\sigma_{K,L}$  vzhľadom na konečný objem  $K$ . V prípade, že nemôže dôjsť k nedorozumeniu, označujeme  $\sigma_{K,L}$  len  $\sigma$ .

- ak  $\sigma \in \mathcal{E}$  je taká, že  $\sigma \in \partial\Omega$  a existuje  $K \in \mathcal{T}$ ;  $x_K \in \bar{K}$  a  $x_K$  neleží na  $\sigma$ , označíme  $(y_\sigma - x_K)$  vektor, ktorý prechádza bodom  $x_K$  a je kolmý na hranu  $\sigma$  pričom  $y_\sigma \in \sigma$  a dĺžku tohoto vektora označíme  $d_\sigma$ .

Zavedieme ešte ďalšie označenia:

- $\text{size}(\mathcal{T}) = h := \sup\{\text{diam}(K), K \in \mathcal{T}\}$ ,
- $m(K)$  je  $N$ - dimenzionálna miera  $\forall K \in \mathcal{T}$  (pre  $N=2$ , plocha  $K$  a pre  $N=3$  objem  $K$ )
- $m(\sigma)$  je  $N-1$  dimenzionálna miera  $\forall \sigma \in \mathcal{E}$  alebo tiež aj  $m(\sigma) = m(K|L)$
- $\mathcal{E}_{int} = \{\sigma \in \mathcal{E}; \sigma \notin \partial\Omega\}$   
 $\mathcal{E}_{ext} = \{\sigma \in \mathcal{E}; \sigma \in \partial\Omega\}$   
 $N(K) = \{L \in \mathcal{T}; \text{existuje } \sigma \in \mathcal{E}_K; \bar{\sigma} = \bar{K} \cap \bar{L}\}$
- Ak  $\sigma = K|L$  tak  $d_\sigma$  (alebo  $d_{K|L}$ ) je euklidovská vzdialenosť bodov  $x_K, x_L$  so spoločnou hranou  $\sigma$ . Označíme

$$\tau_{K|L} = \frac{m(K|L)}{d_{K|L}}, \quad \forall \sigma = K|L, \sigma \in \mathcal{E}$$

Ak  $\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext}$ , potom  $d_\sigma$  je euklidovská vzdialenosť bodu  $x_K$  od hranice  $\partial\Omega$ .

$$\tau_\sigma = \frac{m(\sigma)}{d_\sigma}, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}, d_\sigma \neq 0.$$

- Množinu všetkých, na konečných objemoch konštantných funkcií označíme  $X(\mathcal{T})$ .

*Poznámka 3.4.* Na Obrázku 3.3 vidíme diskretizáciu obdĺžnikovej 2-dimenzionálnej oblasti s hranami  $a, b$  so základným popisom pre dva susediace konečné objemy. Navyše vidíme, že v tomto prípade máme pre dôležité hodnoty diskretizácie jednoduché výpočty:

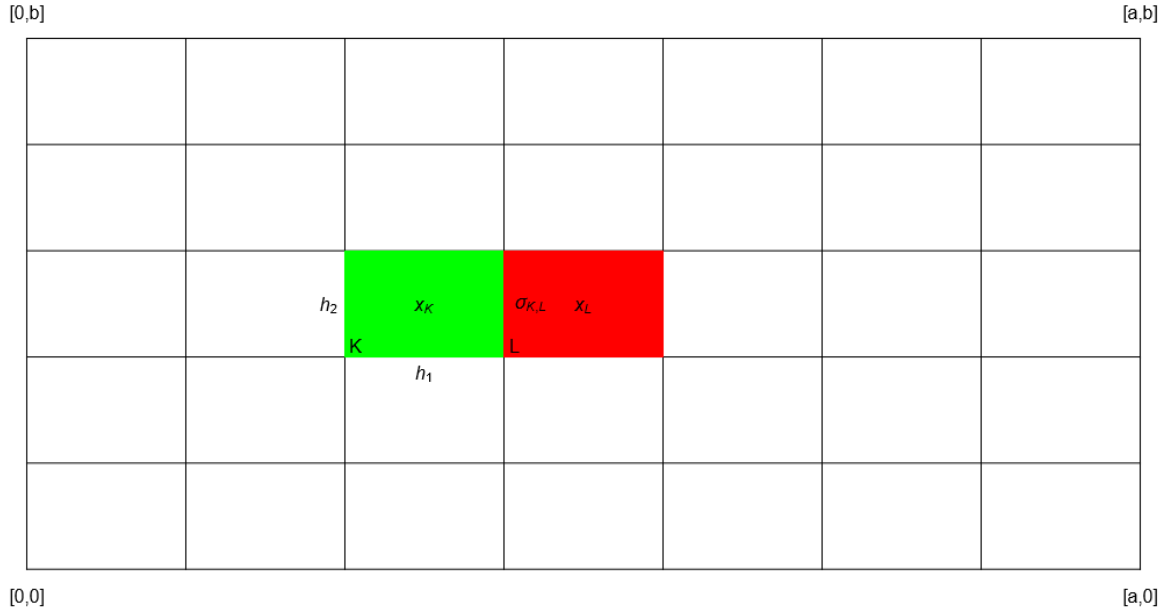
$$m(K) = h_1 h_2, \quad m(\sigma_{K,L}) = m(K|L) = h_2, \quad d_{\sigma_{K,L}} = d_{K|L} = |x_K - x_L| = h_1, \quad \text{a teda} \\ \tau_{K|L} = \frac{m(K|L)}{d_{K|L}} = h_1/h_2.$$

Pre diskretizáciu štvorcovými konečnými objemami, dostávame ešte jednoduchšie hodnoty dôležitých veličín.

**Definícia 3.4 (Numerické riešenie).** Numerické riešenie pre metódu konečných objemov je po častiach (na konečných objemoch) konštantná funkcia, ktorá je daná ako hodnota v reprezentatívnom bode každého konečného objemu.

$$u_{\mathcal{T}}(x) = u_K, x \in K.$$

**Odvodenie numerickej schémy** Numerická schéma je založená na integrácii eliptickej rovnice na ľubovoľnom konečnom objeme  $K \in \mathcal{T}$ . Predpokladajme teraz, že úloha má



Obr. 3.3. Rovnomerná diskretizácia obdĺžnikovej oblasti s hranami  $a, b$  pre MKO, vyznačené dva susediace konečné objemy  $K$  a  $L$ , ich reprezentatívne body  $x_K, x_L$ , veľkosť hrán konečných objemov  $h_1, h_2$  a spoločná hrana konečných objemov  $K$  a  $L$ :  $\sigma_{K|L}$

klasické riešenie, teda  $u \in C^2(\Omega)$ . V našom prípade teda integrujeme rovnicu (3.32) na ľubovoľnom konečnom objeme  $K$  a využitím Greenovej vety (divergenčnej vety) dostávame:

$$-\int_{\partial K} \nabla u(s) \cdot \mathbf{n}_{\partial K}(s) ds + \int_K bu(x) dx = \int_K f(x) dx \quad (3.37)$$

Podobne ako v jednodimenzionálnom prípade odvodíme numerickú schému takto:

Označme

$$f_K = \frac{1}{m(K)} \int_K f(x) dx, \forall K \in \mathcal{T} \quad (3.38)$$

Keďže naše numerické riešenie je po častiach konštantná funkcia, druhý integrál v rovnici (3.37) môžeme aproximovať takto:

$$bu_K m(K).$$

V prvom člene dostaneme

$$-\int_{\partial K} \nabla u(s) \cdot \mathbf{n}_{\partial K}(s) ds = - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_{\sigma} \nabla u(s) \cdot \mathbf{n}_{\sigma}(s) ds \quad (3.39)$$

a aproximáciu vzhľadom na vlastnosti prípustnej mriežky urobíme takto: Nech  $\sigma = K|L \in \mathcal{E}_{int}$

$$\int_{\sigma} \nabla u(s) \cdot \mathbf{n}_{\sigma}(s) ds \approx \frac{(u_L - u_K)}{d_{\sigma}} m(\sigma) = (u_L - u_K) \tau_{K|L}.$$

Nech  $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$

$$\int_{\sigma} \nabla u(s) \cdot \mathbf{n}_{\sigma}(s) ds \approx \frac{(g(y_{\sigma}) - u_K)}{d_{\sigma}} m(\sigma) = (g(y_{\sigma}) - u_K) \tau_{\sigma}.$$

Teda ak označíme

$$F_{K,\sigma} = -\tau_{K|L}(u_L - u_K), \quad \forall \sigma = K|L \in \mathcal{E}_{int}, \quad (3.40)$$

$$F_{K,\sigma} = -\tau_{\sigma}(g(y_{\sigma}) - u_K), \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{ext} \quad (3.41)$$

potom z konzistencie tokov platí:

$$F_{K,\sigma} = -F_{L,\sigma} \quad \forall \sigma = K|L \in \mathcal{E}_{int}, \quad (3.42)$$

a naša numerická scéma bude mať tvar

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} + bm(K)u_K = m(K)f_K \quad \forall K \in \mathcal{T}. \quad (3.43)$$

V ďalšom treba, podobne ako v jednodimenzionálnom prípade, ukázať, že schéma je skonštruovaná korektne, teda, že má jediné riešenie a potom ukázať odhady, ktoré zabezpečia stabilitu schémy a v ďalšom jej konvergenciu ku slabému riešeniu. K tomuto cieľu teraz definujeme podľa [6]:

**Definícia 3.5 (Diskrétna  $H_0^1$  norma).** Nech  $\Omega$  je ohraničená polygonálna oblasť v dvoj- alebo trojdimenzionálnom priestore. Nech je  $\mathcal{T}$  prípustná diskretizácia ako v definícii (3.3). Potom pre  $u \in X(\mathcal{T})$  definujeme diskrétnu  $H_0^1$  normu takto:

$$\|u\|_{1,\mathcal{T}} = \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \tau_{\sigma} (D_{\sigma} u)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.44)$$

kde

$$\begin{aligned} \tau_{\sigma} &= \frac{m(\sigma)}{d_{\sigma}}, \\ D_{\sigma} u &= |u_K - u_L|, \text{ ak } \sigma \in \mathcal{E}_{int}, \sigma = K|L, \\ D_{\sigma} u &= |u_K|, \text{ ak } \sigma \in \mathcal{E}_{ext} \cap \mathcal{E}_K. \end{aligned}$$

Jedným z najdôležitejších nástrojov pri dôkaze konvergencie je nasledujúca veta. Tá hovorí, že ak vieme odhadnúť funkciu  $u \in X(\mathcal{T})$  v diskrétnej  $H_0^1$  norme, tak máme pre túto funkciu aj  $L_2$  odhad jej normy, závislý len od veľkosti oblasti  $\Omega$  a tejto  $H_0^1$  normy.

**Veta 3.3 (Diskrétna Poincarého nerovnosť).** Nech  $\Omega$  je ohraničená polygonálna oblasť v dvoj alebo trojdimenzionálnom priestore  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N = 2, 3$ . Nech je  $\mathcal{T}$  prípustná diskretizácia ako v definícii (3.3). Potom pre  $u \in X(\mathcal{T})$  platí:

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq \text{diam}(\Omega) \|u\|_{1,\mathcal{T}}, \quad (3.45)$$

kde  $\|u\|_{1,\mathcal{T}}$  je definované v definícii 3.5 vzt'ahom (3.44) (pozri [6], strana 765, Lemma 9.1).

*Dôkaz.* Treba si uvedomiť, že chceme dokázať odhad pre  $L_2$  normu pre funkciu  $u \in X(\mathcal{T})$ , čo vlastne je

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} = \left( \sum_{K \in \mathcal{T}} u_K^2 m(K) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.46)$$

Použijeme šikovný trik ([6]). Nech  $\sigma \in \mathcal{E}$ . Definujme funkciu na  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$  do  $\{0, 1\}$  takto:

$$\chi_\sigma(x, y) = 1 \text{ ak } \sigma \cap [x, y] \neq \emptyset$$

$$\chi_\sigma(x, y) = 0 \text{ ak } \sigma \cap [x, y] = \emptyset,$$

kde  $[x, y]$  je priamka spájajúca body  $x$  a  $y$ . Nech  $u \in X(\mathcal{T})$  a daný je ľubovoľný jednotkový vektor  $\mathbf{d}$ . Pre ľubovoľný bod  $x \in \Omega$  definujme  $\mathcal{D}_x$  polpriamku definovanú bodom  $x$  a vektorom  $\mathbf{d}$ . Nech je  $y(x)$  taký, že platí:  $y(x) \in \mathcal{D}_x \cap \partial\Omega$  a  $[x, y(x)] \subset \bar{\Omega}$ , kde  $[x, y(x)] = \{tx + (1-t)y(x), t \in [0, 1]\}$  (teda  $y(x)$  je prvý bod (oblasť  $\Omega$  nemusí byť konvexná) prieniku  $\mathcal{D}_x$  a  $\partial\Omega$ ). Nech teraz  $K \in \mathcal{T}$ . Potom pre skoro všetky  $x \in K$  platí:

$$|u_K| \leq \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} D_\sigma u \chi_\sigma(x, y(x)),$$

kde  $D_\sigma u$  je definované v definícii 3.5. K tomuto odhadu si stačí uvedomiť definíciu funkcie  $\chi_\sigma$  a fakt, že hodnota funkcie  $u$  na hranici je nula, a teda platí:

$$|u_K| \leq |u_K - u_L| + |u_L - u_{L_1}| + \dots + |u_{L_k} - 0|$$

a vyberáme len tie hrany diskretizácie, ktoré majú s priamkou  $[x, y(x)]$  neprázdny prienik (ostatné budú v odhade vďaka definícii  $\chi_\sigma$  nulové). Teraz potrebujeme vhodne odhadnúť druhú mocninu tejto hodnoty, ako potrebujeme podľa vzťahu (3.46). Treba mať pritom na pamäti, čo chceme dostať. Na pravej strane musíme dostať diskkrétne  $H_0^1$  normu. Nech teraz  $c_\sigma = |\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}_\sigma|$ , kde pravá strana tohoto výrazu je absolútna hodnota skalárneho súčinu dvoch vektorov v dvoj alebo troj dimenzionálnom priestore. Vhodne použijeme Cauchyho- Schwarzovu nerovnosť a máme:

$$|u_K|^2 \leq \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \frac{D_\sigma u \sqrt{\chi_\sigma(x, y(x))}}{\sqrt{d_\sigma c_\sigma}} \sqrt{d_\sigma c_\sigma} \sqrt{\chi_\sigma(x, y(x))} \right)^2 \leq$$

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \frac{(D_\sigma u)^2 \chi_\sigma(x, y(x))}{d_\sigma c_\sigma} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} d_\sigma c_\sigma \chi_\sigma(x, y(x)) \text{ pre skoro všetky } x \in K.$$

Odhadneme teraz druhú sumu. Tam si stačí uvededomiť, že ak bod  $x \in K$  pre nejaké  $K \in \mathcal{T}$  tak platí:  $d_\sigma c_\sigma = |\mathbf{d} \cdot (x_K - x_L)|$ , kde  $\sigma = K|L$  a  $x_L - x_K = d_\sigma \mathbf{n}_\sigma$  a sumácia sa deje s hodnotou 1 len pre tie  $\chi_\sigma(x, y(x))$ , kde táto priamka pretne niektorú hranu diskretizácie. Dostávame

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} d_\sigma c_\sigma \chi_\sigma(x, y(x)) = |(x_K - y_\sigma) \cdot \mathbf{d}|.$$

Keďže body  $x_K$  a  $y_\sigma$  sú z oblasti  $\Omega$  môžeme ich vzdialenosť odhadnúť ako:

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} d_\sigma c_\sigma \chi_\sigma(x, y(x)) \leq \text{diam}(\Omega)$$

Odhad teda bude

$$|u_K|^2 \leq \text{diam}(\Omega) \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \frac{(D_\sigma u)^2 \chi_\sigma(x, y(x))}{d_\sigma c_\sigma} \quad (3.47)$$

Integrujeme teraz (3.47) na oblasti  $\Omega$  a dostaneme

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K |u_K|^2 dx \leq \text{diam}(\Omega) \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \frac{(D_\sigma u)^2}{d_\sigma c_\sigma} \int_\Omega \chi_\sigma(x, y(x)) dx. \quad (3.48)$$

Teraz odhadneme integrál na pravej strane (3.48) takto. Uvedený integrál predstavuje pre danú hranu  $\sigma$  vlastne plochu vymedzenú pásom, ktorý udáva priamka určená bodmi  $x$  a  $y(x)$  a šírka pásu je daná hodnotou dĺžky konkrétnej hrany  $m(\sigma)$  (v 2D lichobežníkový pás). Preto môžeme urobiť odhad

$$\int_\Omega \chi_\sigma(x, y(x)) dx \leq \text{diam}(\Omega) m(\sigma) c_\sigma.$$

Využijúc tento odhad v (3.48) máme

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K |u_K|^2 dx \leq (\text{diam}(\Omega))^2 \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |D_\sigma u|^2 \tau_\sigma,$$

čo dáva požadovaný výsledok (3.45).  $\square$

**Veta 3.4 (Existencia a odhady).** Nech  $\Omega$  je ohraničená polygonálna oblasť v dvoj alebo trojdimenzionálnom priestore. Nech je  $\mathcal{T}$  prípustná diskretizácia ako v definícii 3.3. Potom existuje jediné riešenie  $u_{\mathcal{T}} \in X(\mathcal{T})$  problému (3.43). Ak navyše platí:  $g = 0$  (máme homogénnu Dirichletovu podmienku), potom platí:

$$\|u_{\mathcal{T}}\|_{1, \mathcal{T}} \leq \text{diam}(\Omega) \|f\|_{L_2(\Omega)}, \quad (3.49)$$

kde  $\|\cdot\|_{1, \mathcal{T}}$  je definované v definícii 3.5. (pozri [6], strana 768, Lemma 9.2)

*Dôkaz.* 1. Existencia a jednoznačnosť.

Numerická schéma definovaná v (3.40) a (3.43) predstavuje v konečnom dôsledku riešenie lineárneho systému rovníc s neznámymi hodnotami  $u_K$ ,  $K \in \mathcal{T}$ . Podobne ako v jednodimenzionálnom prípade, aj tu uvažujeme splnenie nulových okrajových podmienok a nulovej pravej strany ( $f_K = 0, \forall K \in \mathcal{T}$ ). Potom treba dokázať, že riešenie je nulové. Vynásobíme rovnicu (3.43) hodnotou  $u_K$  a sčítame vzhľadom ku  $K \in \mathcal{T}$ . Dostaneme:

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K, \sigma} u_K + b \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) u_K^2 = 0. \quad (3.50)$$

Teraz si len treba uvedomiť základnú vlastnosť metódy konečných objemov a z vlastnosti (3.40) máme

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K, \sigma} u_K = - \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \tau_{K|L} (u_L - u_K) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \tau_\sigma (D_\sigma u)^2,$$

kde  $D_\sigma u = |u_K - u_L|$  pre  $\sigma = K|L$  a  $D_\sigma u = |u_K|$  ak  $\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{\uparrow\Box}$ . Teda z (3.50) máme

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \tau_\sigma (D_\sigma u)^2 + b \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) u_K^2 = 0, \quad (3.51)$$

alebo inak podľa definícií 3.4 a 3.5

$$\|u_{\mathcal{T}}\|_{1, \mathcal{T}}^2 + b \|u_{\mathcal{T}}\|_{L_2(\Omega)}^2 = 0. \quad (3.52)$$

Zo vzťahu (3.51) okamžite platí, že  $u_K = 0$  pre všetky  $K \in \mathcal{T}$  z čoho hneď plynie existencia a jednoznačnosť riešenia lineárneho systému pre ľubovoľnú nehomogénnu okrajovú podmienku a pre ľubovoľnú pravú stranu  $f$ .

## 2. Stabilita

Predpokladáme homogénne okrajové podmienky. Analogickým postupom ako v prvej časti dostaneme

$$\|u_{\mathcal{T}}\|_{1, \mathcal{T}}^2 + b \|u_{\mathcal{T}}\|_{L_2(\Omega)}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) f_K u_K. \quad (3.53)$$

použitím Cauchyho-Schwarzovej nerovnosti na pravej strane máme odhad

$$\|u_{\mathcal{T}}\|_{1, \mathcal{T}}^2 \leq \left( \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) f_K^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) u_K^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|f\|_{L_2(\Omega)} \|u_{\mathcal{T}}\|_{L_2(\Omega)} \quad (3.54)$$

Využívajúc teraz diskretnú Poincarého nerovnosť (3.45) máme

$$\|u_{\mathcal{T}}\|_{1, \mathcal{T}}^2 \leq \|f\|_{L_2(\Omega)} \|u_{\mathcal{T}}\|_{L_2(\Omega)} \leq \text{diam}(\Omega) \|f\|_{L_2(\Omega)} \|u_{\mathcal{T}}\|_{1, \mathcal{T}},$$

z čoho finálne

$$\|u_{\mathcal{T}}\|_{1, \mathcal{T}} \leq \text{diam}(\Omega) \|f\|_{L_2(\Omega)}. \quad (3.55)$$

□

Táto veta spolu s Kolmogorovovým kritériom kompaktnosti (Veta 1.24) hrá podstatnú úlohu pri dôkaze konvergencie numerického riešenia k slabému riešeniu úlohy. Aby bolo Kolmogorovo kritérium kompaktnosti (1.4) z vety (1.24) splnené, potrebujeme nasledujúcu vetu:

**Veta 3.5.** Nech  $\Omega$  je ohraničená polygonálna oblasť v dvoj- alebo trojdimenzionálnom priestore. Nech je  $\mathcal{T}$  prípustná diskretizácia ako v definícii 3.3. Nech  $u \in X(\mathcal{T})$ . Definujme  $\tilde{u} = u$  skoro všade v  $\Omega$  a  $\tilde{u} = 0$  skoro všade v  $\mathbb{R}^N - \Omega$ , kde  $N = 2$  alebo  $N = 3$ . Potom existuje  $C > 0$  závislé len od  $\Omega$  také, že platí:

$$\|\tilde{u}(\cdot + \eta) - \tilde{u}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \|u\|_{1, \mathcal{T}}^2 |\eta| (|\eta| + \text{size}(\mathcal{T})), \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^N \quad (3.56)$$

*Dôkaz.* (pozri [6], strana 770, Lemma 9.3). □

*Poznámka 3.5.* Treba si uvedomiť, že predchádzajúca lema nehovorí nič o tom, že funkcia  $u \in X(\mathcal{T})$  je riešením problému. Táto vlastnosť je vlastnosťou prípustnej diskretizácie oblasti. Teda, ak si pozrieme Kolmogorovo kritérium kompaktnosti, pre dôkaz konvergenencie podpostupnosti vybratej z postupnosti funkcií  $z u_n \in X(\mathcal{T})$ , treba zostrojiť pre náš problém prípustnú diskretizáciu oblasti v zmysle definície (3.3) a ukázať odhad tejto postupnosti v diskkrétnej  $H_0^1$  norme nezávisle od diskretizačných parametrov.

**Veta 3.6.** Nech platia predpoklady (3.34) pre dáta eliptického problému (3.32),(3.33) a  $g = 0$ . Nech  $\mathcal{T}$  je prípustná diskretizácia oblasti  $\Omega$  daná definíciou 3.3. Nech  $u_{\mathcal{T}}$  je numerické riešenie problému (3.43), ktorého existencia a jednoznačnosť je dokázaná vo vete 3.5. Potom toto riešenie konverguje v priestore  $L_2(\Omega)$  k jedinému slabému riešeniu problému (3.32)-(3.33), ktoré je definované identitou (3.35) ak  $\text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0$ . Navyše  $\|u_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}$  konverguje ku  $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$  ak  $\text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0$ . (pozri [6], strana 773, Theorem 9.1).

*Dôkaz.* Nech  $Y$  je množina numerických riešení, teda množina takých funkcií  $u_{\mathcal{T}}$ , kde  $\mathcal{T}$  je prípustná diskretizácia v zmysle definície 3.3. Najskôr treba dokázať, že táto postupnosť konverguje k jedinému slabému riešeniu (v  $H_1(\Omega)$ ) definovanému v (3.35) ak  $\text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0$ . Z Vety 3.4 a Vety 3.3 o diskkrétnej Poincarého nerovnosti hneď vieme, že existuje konštanta  $C_1 \in \mathbb{R}$  závislá len od oblasti  $\Omega$ , a funkcie  $f$ , taká že platí

$$\|u_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} \leq C_1 \text{ a } \|u_{\mathcal{T}}\|_{L_2(\Omega)} \leq C_1.$$

Teda vďaka Vete 3.5 a Kolmogorovovmu kritériu kompaktnosti vo vete 1.24 platí, že množina  $Y$  je relatívne kompaktná v  $L_2(\Omega)$  a prípadná limita (ide o relatívnu kompaktnosť) je z priestoru  $H_0^1(\Omega)$ . Keďže ale slabé riešenie našej úlohy (3.35) je jediné, stačí ukázať nasledujúce tvrdenie:

Ak  $\{u_{\mathcal{T}_n}\} \subset Y$  konverguje k nejakej funkcii  $u \in H_0^1(\Omega)$  v priestore  $L_2(\Omega)$  pre  $\text{size}(\mathcal{T}_n) \rightarrow 0$ , potom toto  $u$  je slabé riešenie problému, ktorý je definovaný v (3.35).

Nech teraz  $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$  a nech  $\text{size}(\mathcal{T})$  je dostatočne malé, aby platilo  $\psi(x) = 0$  ak  $x \in K$  pre také  $K$ , kde  $\partial K \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ . Teraz vynásobíme rovnicu našej numerickej scémy (3.43) hodnotou  $\psi(x_K)$  a sčítame cez  $K \in \mathcal{T}$ . Dostaneme

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} \psi(x_K) + b \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) u_K \psi(x_K) = \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) f_K \psi(x_K) \quad \forall K \in \mathcal{T}.$$

Označme teraz

$$T_{1,\mathcal{T}} = b \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) u_K \psi(x_K)$$

$$T_{2,\mathcal{T}} = \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} \psi(x_K)$$

$$T_{3,\mathcal{T}} = \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) f_K \psi(x_K).$$

Potom platí:

$$T_{1,\mathcal{T}} + T_{2,\mathcal{T}} = T_{3,\mathcal{T}}.$$

Teraz ukážeme konvergenciu jednotlivých členov

Člen  $T_{1,\mathcal{T}}$ :

$T_{1,\mathcal{T}}$  upravíme nasledovne:

$$T_{1,\mathcal{T}} = b \int_{\Omega} u_{\mathcal{T}} \psi_{\mathcal{T}} dx,$$

kde  $\psi_{\mathcal{T}}$  je po častiach konštantná funkcia vytvorená z funkcie  $\psi$  v každom reprezentačnom bode. Pre funkcie  $\psi$ , keďže ide o hladké funkcie platí:

$$\psi_{\mathcal{T}} \rightarrow \psi \text{ pre } \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0.$$

a to dokonca rovnomerne, a teda tým skôr v priestore  $L_2(\Omega)$ . Využijeme tento fakt a tiež fakt, že  $u_{\mathcal{T}} \rightarrow u$  v priestore  $L_2(\Omega)$ , to znamená konvergencia podľa normy v tomto priestore. Zo základnej vlastnosti takýchto konvergencií (pozri [7], strana 36, Veta 3.11), hneď vieme, že konverguje aj skalárny súčin v tomto priestore a teda

$$T_{1,\mathcal{T}} \rightarrow b \int_{\Omega} u(x) \psi(x) dx \text{ ak } \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0. \quad (3.57)$$

Člen  $T_{3,\mathcal{T}}$ :

Odhadneme analogicky. Keď uvážime definíciu  $f_K$  zo vzťahu (3.38), dostaneme:

$$T_{3,\mathcal{T}} = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K f(x) \psi(x_K) dx = \int_{\Omega} f(x) \psi_{\mathcal{T}} dx,$$

čo je vlastne opäť skalárny súčin v  $L_2(\Omega)$  a keďže  $\psi_{\mathcal{T}} \rightarrow \psi$  pre  $\text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0$ , dostávame analaogicky ako pre člen  $T_1$ :

$$T_{3,\mathcal{T}} \rightarrow \int_{\Omega} f(x) \psi(x) dx \text{ ak } \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0. \quad (3.58)$$

Člen  $T_{2,\mathcal{T}}$ :

Z definície (3.40) a z faktu, ako sme definovali  $\psi(x)$  a veľkosť  $\text{size}(\mathcal{T})$ , budeme mať v sume len vnútorné hrany z  $\mathcal{E}_{int}$  a z toho máme

$$T_{2,\mathcal{T}} = - \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma=K|L \in \mathcal{E}_K} \tau_{K|L} (u_L - u_K) \psi(x_K).$$

Teraz využijeme vlastnosť zo vzťahu (3.42) v definícii numerických tokov a dostaneme po úprave :

$$T_{2,\mathcal{T}} = - \sum_{\sigma=K|L \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{K|L} (u_L - u_K) (\psi(x_K) - \psi(x_L)).$$

V ďalšom postupe využijeme nasledujúci člen:

$$T'_{2,\mathcal{T}} = \int_{\Omega} u_{\mathcal{T}} \Delta \psi(x) dx = \sum_{K \in \mathcal{T}} u_K \int_K \Delta \psi(x) dx.$$

Použijeme Greenovu vetu a dostaneme:

$$T'_{2,\mathcal{T}} = \sum_{\sigma=K|L \in \mathcal{E}_{int}} (u_K - u_L) \int_{K|L} \nabla \psi(s) \cdot \mathbf{n}_{K,L} ds,$$



kde  $\mathbf{n}_{K,L}$  je jednotkový vektor normály ku hrane  $K|L$  smerom von od  $K$ . Keďže vieme, že postupnosť  $u_{\mathcal{T}}$  konverguje k funkcii  $u \in L_2(\Omega)$  ak  $\text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0$ , tak

$$T'_{2,\mathcal{T}} \rightarrow \int_{\Omega} u(x) \Delta \psi(x) dx \text{ ak } \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0. \quad (3.59)$$

Definujme teraz aproximáciu

$$R_{K,L,\mathcal{T}} = \frac{1}{m(K|L)} \int_{K,L} \nabla \psi(x) \cdot \mathbf{n}_{K|L} ds - \frac{\psi(x_L) - \psi(x_K)}{d_{K,L}}.$$

Keď si uvedomíme, že funkcia  $\psi$  je funkciou hladkou, táto aproximácia sa dá odhadnúť ako

$$|R_{K,L,\mathcal{T}}| \leq C_2 \text{size}(\mathcal{T}), \quad (3.60)$$

kde kladná konštanta  $C_2 \in \mathbb{R}$  je závislá len od funkcie  $\psi$ . Potom platí (využijúc vzťah z definície 3.5)

$$\tau_{K|L} = \frac{m(K|L)}{d_{K|L}} :$$

$$|T'_{2,\mathcal{T}} + T_{2,\mathcal{T}}| =$$

$$\left| \sum_{\sigma=K|L \in \mathcal{E}_{int}} (u_K - u_L) \int_{K|L} \nabla \psi(s) \cdot \mathbf{n}_{K,L} ds - \sum_{\sigma=K|L \in \mathcal{E}_{int}} m(K|L)(u_L - u_K) \frac{\psi(x_K) - \psi(x_L)}{d_{K|L}} \right|,$$

čo upravíme pomocou  $R_{K,L,\mathcal{T}}$  takto:

$$|T'_{2,\mathcal{T}} + T_{2,\mathcal{T}}| = \left| \sum_{\sigma=K|L \in \mathcal{E}_{int}} m(K|L)(u_K - u_L) R_{K,L,\mathcal{T}} \right|.$$

Pomocou Cauchyho-Schwarzovej nerovnosti odhadneme

$$|T'_{2,\mathcal{T}} + T_{2,\mathcal{T}}| \leq \left( \sum_{\sigma=K|L \in \mathcal{E}_{int}} m(K|L) \frac{(u_K - u_L)^2}{d_{K|L,\mathcal{T}}} \sum_{\sigma=K|L \in \mathcal{E}_{int}} m(K|L) d_{K,L} (R_{K,L,\mathcal{T}})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|u\|_{1,\mathcal{T}} \left( \sum_{\sigma=K|L \in \mathcal{E}_{int}} m(K|L) d_{K,L} (R_{K,L,\mathcal{T}})^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

kde sme v poslednom odhade použili vzťah (3.44). Popritom navyše platí odhad (3.49) z vety 3.4. Uvážme teraz odhad

$$\sum_{\sigma=K|L \in \mathcal{E}_{int}} m(K|L) d_{K,L} \leq Nm(\Omega),$$

Kde  $N$  je dimenzia oblasti  $\Omega$ . (napríklad pre  $N = 2$  je to súčet obsahov trojuholníkov okolo hrany  $K|L$ . Dostaneme odhad

$$|T'_{2,\mathcal{T}} + T_{2,\mathcal{T}}| \leq C_2 Nm(\Omega) \text{diam}(\Omega) \|f\|_{L_2(\Omega)} \text{size}(\mathcal{T}),$$

z čoho hned' plynie

$$T'_{2,\mathcal{T}} + T_{2,\mathcal{T}} \rightarrow 0 \text{ ak } \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0.$$

Záverom, použijúc vlastnosť (3.59), dostaneme

$$T_{2,\mathcal{T}} = T_{2,\mathcal{T}} + T'_{2,\mathcal{T}} - T_{2,\mathcal{T}} \rightarrow 0 - \int_{\Omega} u(x)\Delta\psi(x)dx \text{ ak } \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0. \quad (3.61)$$

Keď uvážime konvergenciu jednotlivých členov a vezmeme do úvahy hustotu priestoru  $C_0^\infty(\Omega)$  v priestore  $H_0^1(\Omega)$  vidíme, že sme dokázali požadované tvrdenie.  $\square$

## Neumannove okrajové podmienky

Máme eliptický problém druhého rádu tvaru

$$-\Delta u(x) + bu(x) = f(x), \quad x \in \Omega \quad (3.62)$$

s okrajovými podmienkami:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}} = g(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (3.63)$$

kde  $\frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}} = \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}$  predstavuje deriváciu funkcie  $u$  v smere jednotkového vektora vonkajšej normály ku hranici  $\partial\Omega$ . Predpokladáme:

$$\Omega \subset \mathbb{R}^N, N = 2 \text{ alebo } 3 \text{ je ohraničená polygonálna oblasť} \quad (3.64)$$

- $b > 0$  (pre nulovú hodnotu  $b$  treba zabezpečiť existenciu slabého aj numerického riešenia iným spôsobom pozri [6])
- $f \in L_2(\Omega)$
- $g \in C(\partial\Omega)$  .

Pri uvedených predpokladoch podľa Laxovej-Milgramovej vety existuje jediné slabé riešenie problému (3.62), (3.63)  $u \in H^1(\Omega)$  také, že pre všetky  $v \in H^1(\Omega)$  platí nasledujúca integrálna identita:

$$\int_{\Omega} \nabla u(x)\nabla v(x)dx + \int_{\Omega} bu(x)v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx + \int_{\partial\Omega} g(s)v(s)ds. \quad (3.65)$$

Pre uvedený problém diskretizácia oblasti a definícia numerického riešenia je taká ako pri Dirichletovej okrajovej podmienke. Zmena nastane iba pri definícii numerickej schémy pre uvedený problém. A táto zmena sa týka len difúzneho člena a aj to len v prípade, keď ide o taký konečný objem, pre ktorý platí:

$$m(\partial\Omega \cap \partial K) \neq 0.$$

V tomto prípade zo vzťahu (3.39) dostaneme: Nech  $\sigma = \sigma_{K|L} \in \mathcal{E}_{ext}$

$$\int_{\sigma} \nabla u(s) \cdot \mathbf{n}_{\sigma}(s)ds \approx g_K m(\partial\Omega \cap \partial K),$$

kde

$$g_K = \frac{1}{m(\partial\Omega \cap \partial K)} \int_{m(\partial\Omega \cap \partial K)} g(s) ds.$$

Znamená, že ak ide o vnútorný objem ( $m(\partial\Omega \cap \partial K) = 0$ ), numerická schéma je tvaru (3.43) s tokmi definovanými v (3.41).

Ak platí:  $m(\partial\Omega \cap \partial K) \neq 0$ , potom pre takéto konečné objemy bude mať numerická schéma tvar

$$- \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{int}} \tau_{K|L}(u_L - u_K) + bm(K) = m(K)f_K + m(\partial\Omega \cap \partial K)g_K.$$

Teoretické výsledky týkajúce sa tohoto prípadu pozri [6], strana 794, časť 10.

## 3.4 Cvičenia

1. Pre neznámu funkciu  $u(x, y)$  napíšte lineárnu eliptickú rovnicu s konštantným difúznym koeficientom rovným  $p(x, y) = 1$  a s členom  $2u(x, y)$  a nenulovou pravou stranou rovnou  $f(x, y) = x + 2y$  danou na oblasti  $\Omega = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 3 \rangle$ . Na hranici je zadaná nulová Dirichletova podmienka.  
Napíšte matematický model tejto úlohy a nakreslite obrázok.  
Definujte slabé riešenie tejto úlohy.  
Napíšte numerickú schému založenú na metóde konečných objemov pre túto úlohu.
2. Pre neznámu funkciu  $u(x, y)$  napíšte lineárnu eliptickú rovnicu s nekonštantným difúznym koeficientom rovným funkcii  $p(x, y) = xy + 1$  a s členom  $8u(x, y)$  a nenulovou pravou stranou rovnou  $f(x, y) = x + y$  danou na oblasti  $\Omega = \langle 0, 2 \rangle \times \langle 0, 3 \rangle$ . Na hranici je zadaná nulová Dirichletova podmienka.  
Napíšte matematický model tejto úlohy a nakreslite obrázok.  
Definujte slabé riešenie tejto úlohy.  
Napíšte numerickú schému založenú na metóde konečných objemov pre túto úlohu.
3. Pre neznámu funkciu  $u(x, y)$  napíšte lineárnu eliptickú rovnicu s nekonštantným difúznym koeficientom rovným funkcii  $p(x, y) = x + y$  a s členom  $xu(x)$  a nenulovou pravou stranou rovnou  $f(x, y) = x^2 + 4y$  danou na oblasti  $\Omega = \langle 1, 2 \rangle \times \langle 1, 3 \rangle$ . Na hranici je daná homogénna Neumannova podmienka.  
Napíšte matematický model tejto úlohy a nakreslite obrázok.  
Definujte slabé riešenie tejto úlohy.  
Napíšte numerickú schému založenú na metóde konečných objemov pre túto úlohu.
4. Pre neznámu funkciu  $u(x, y)$  napíšte lineárnu eliptickú rovnicu s nekonštantným difúznym koeficientom rovným funkcii  $p(x, y) = x + 3y + 1$  a s členom  $2(x + y)u(x, y)$  a nenulovou pravou stranou rovnou  $f(x, y) = xy$  danou na oblasti  $\Omega = \langle 0, 2 \rangle \times \langle 0, 3 \rangle$  s hranicou  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , kde  $\Gamma_1$  je časť hranice tvorená úsečkami pre  $x = 0$  a pre  $y = 0$ . Hranica  $\Gamma_2$  je tvorená zvyšnými dvoma úsečkami. Na hranici  $\Gamma_1$  je daná homogénna Neumannova podmienka a na hranici  $\Gamma_2$  je zadaná homogénna Dirichletova podmienka.  
Napíšte matematický model tejto úlohy a nakreslite obrázok.  
Definujte slabé riešenie tejto úlohy.  
Napíšte numerickú schému založenú na metóde konečných objemov pre túto úlohu.
5. Pre neznámu funkciu  $u(x, y)$  napíšte lineárnu eliptickú rovnicu s nekonštantným difúznym koeficientom rovným funkcii  $p(x, y) = xy + 2$  a s členom  $8u(x)$  a nenulovou pravou stranou rovnou  $f(x, y) = x + y$  danou na oblasti  $\Omega = \langle 0, 2 \rangle \times \langle 0, 3 \rangle$  s hranicou  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , kde  $\Gamma_1$  je časť hranice tvorená úsečkami pre  $x = 0$  a pre  $y = 0$ . Hranica  $\Gamma_2$  je tvorená zvyšnými dvoma úsečkami. Na hranici  $\Gamma_1$  je daná homogénna Neumannova podmienka a na hranici  $\Gamma_2$  je zadaná nulová Dirichletova podmienka.  
Napíšte matematický model tejto úlohy a nakreslite obrázok.  
Definujte slabé riešenie tejto úlohy.  
Napíšte numerickú schému založenú na metóde konečných objemov pre túto úlohu.
6. Pre neznámu funkciu  $u(x, y)$  napíšte lineárnu eliptickú rovnicu s nekonštantným difúznym koeficientom rovným funkcii  $p(x, y) = x^2 + 3y^2 + 1$  a s členom  $5(x + y)u(x, y)$  a nenulovou pravou stranou rovnou  $f(x, y) = 3xy$  danou na oblasti  $\Omega = \langle 0, 5 \rangle$

$\times \langle 0, 3 \rangle$  s hranicou  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , kde  $\Gamma_1$  je časť hranice tvorená úsečkou pre  $x = 0$ . Hranica  $\Gamma_2$  je tvorená zvyšnými tromi úsečkami. Na hranici  $\Gamma_1$  je daná nehomogénna Neumannova podmienka s pravou stranou  $h(0, y) = 2y$  na hranici  $\Gamma_2$  je zadaná nenulová Dirichletova podmienka s hodnotou 5.

Napíšte matematický model tejto úlohy a nakreslite obrázok.

Definujte slabé riešenie tejto úlohy.

Napíšte numerickú schému založenú na metóde konečných objemov pre túto úlohu.

7. Pre neznámu funkciu  $u(x, y)$  napíšte lineárnu eliptickú rovnicu s nekonštantným difúznym koeficientom rovným funkcii  $p(x, y) = x + 2y + 4$  a s členom  $x^2 u(x)$  a nenulovou pravou stranou rovnou  $f(x, y) = 4x + y$  danou na oblasti  $\Omega = \langle 0, 2 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$  s hranicou  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , kde  $\Gamma_1$  je časť hranice tvorená úsečkou pre  $x = 2$ . Hranica  $\Gamma_2$  je tvorená zvyšnými úsečkami. Na hranici  $\Gamma_2$  je daná homogénna Neumannova podmienka a na hranici  $\Gamma_1$  je zadaná nenulová Dirichletova podmienka  $u(2, y) = (y + 1)^2$ .

Napíšte matematický model tejto úlohy a nakreslite obrázok.

Definujte slabé riešenie tejto úlohy.

Napíšte numerickú schému založenú na metóde konečných objemov pre túto úlohu.

# Kapitola 4

## Parabolické počiatočno-okrajové úlohy

Predpokladajú sa základné znalosti z teórie parciálnych diferenciálnych rovníc [2], [1].

### 4.1 Jednoduché príklady a motivácia

Nech je daný interval  $(a, b)$  pre  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$  a interval  $I = (0, T)$ ,  $T > 0$ . Na karteziánskom súčine  $Q_T = (0, T) \times (a, b)$  uvažujme veľmi jednoduchú parabolickú parciálnu diferenciálnu rovnicu (PDR) druhého rádu tvaru

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + ru(t, x) = f(t, x) \quad (4.1)$$

s Dirichletovými okrajovými podmienkami:

$$u(a) = u_a(t), \quad u(b) = u_b(t), \quad t \in (0, T) \quad (4.2)$$

a počiatočnou podmienkou

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in (a, b), \quad (4.3)$$

kde  $f, u_a, u_b$  a  $u_0$  sú dané funkcie a  $r$  dané nezáporné reálne číslo. Takto definovaný problém je najjednoduchší prípad celej triedy časovo závislých difúzných rovníc, ktoré majú v technickej praxi široké využitie.

Nás bude najskôr zaujímať definícia riešenia tejto úlohy a za akých podmienok na dáta úlohy má daný počiatočno-okrajový problém riešenie a v akom zmysle.

**Definícia 4.1 (Klasické riešenie).** Klasickým riešením problému (4.1), (4.2), (4.3) (pozri napríklad [1], strana 121) nazývame funkciu  $u$  takú, že  $u \in C(< 0, T) \times < a, b >)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t} \in C(< 0, T))$  pre všetky  $x \in (a, b)$ , a  $\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} \in C((a, b))$  pre všetky  $t \in (0, T)$ ,

a teda vyhovuje rovnici (4.1) v každom bode  $(t, x) \in Q_T$ , okrajovej podmienke (4.2) v každom  $t \in (0, T)$  a počiatkovej podmienke (4.3) v každom  $x \in (a, b)$ . Navyše sú splnené podmienky kompatibility, teda  $u_a(0) = u_0(a)$ ,  $u_b(0) = u_0(b)$ .

Skúmanie existencie takéhoto klasického riešenia predpokladá aj isté vhodné vlastnosti jednotlivých koeficientov a funkcií vyskytujúcich sa v zadání úlohy. Minimálne z tvaru rovnice je jasné, že musí platiť:

$f \in C(Q_T)$ ,  $u_0 \in C((a, b))$ . Pozri napríklad [1].

Uvažujme teraz podobný počiatko-okrajový problém druhého rádu na priestorovo  $N$  dimenzionálnej oblasti, a teda  $Q_T = (0, T) \times \Omega$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ . Body tejto oblasti budeme označovať  $(t, x)$ , kde  $x = (x_1, \dots, x_N)$ , hranicu oblasti  $\Omega$  označíme  $\partial\Omega$  a body na nej budeme označovať  $s = (s_1, \dots, s_N)$ . Problém môžeme sformulovať pre neznámu funkciu  $u(t, x)$  takto:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (P(t, x) \nabla u(t, x)) + q(t, x)u(t, x) = f(t, x) \text{ v } Q_T \quad (4.4)$$

s okrajovými podmienkami Dirichletovho typu

$$u(t, s) = g(t, s) \text{ pre } s \in \partial\Omega, t \in (0, T) \quad (4.5)$$

a počiatkovou podmienkou

$$u(0, x) = u_0(x), x \in \Omega, \quad (4.6)$$

kde  $P(t, x)$  je matica  $N \times N$  funkcií  $p_{ij}(t, x)$  - koeficienty danej úlohy,  $q(t, x)$  a  $f(t, x)$  sú dané funkcie. Na hranici je daná funkcia  $g(t, s)$ . Pre takúto úlohu tiež môžeme analogicky definovať klasické riešenie úlohy, len je to trošku komplikovanejšie na zapísanie. Navyše, ak by sme analogicky chceli definovať pojem slabého riešenia, bolo by to ešte komplikovanejšie a niektoré veci zatiaľ nevieme vystihnúť vôbec. Tieto medzery vyplníme v krátkosti v nasledujúcej časti.

## 4.2 Abstraktné funkcie

V tejto časti si veľmi stručne a jednoducho definujeme pojem abstraktnej funkcie podľa [4], časť 1.6.

**Definícia 4.2 (Abstraktná funkcia).** Nech  $D \subset \mathbb{R}^N$  a  $X$  je lineárny normovaný priestor s normou  $\|\cdot\|_X$ . Zobrazenie

$$u : D \rightarrow X$$

nazývame abstraktnou funkciou definovanou na  $D$ .

*Poznámka 4.1.* Definícia a vlastnosti spojitosti a diferencovateľnosti abstraktných funkcií sú jednoduchým a priamočiarym zovšeobecnením týchto pojmov pre bežné funkcie.

### Vlastnosti

1. Hovoríme, že abstraktná funkcia  $u : D \rightarrow X$  je **spojitá** v bode  $x_0 \in D$  práve vtedy keď:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \|u(x) - u(x_0)\|_X = 0, x \in D.$$

2. Abstraktná funkcia  $v_i : D \rightarrow X$  je **parciálnou deriváciou abstraktnej funkcie**  $u$  podľa  $i$ -tej premennej práve vtedy keď:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{u(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_N) - u(x)}{h} - v_i(x) \right\|_X = 0.$$

Takúto parciálnu deriváciu budeme označovať  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  a podobne aj derivácie vyšších rádov  $D^k u$  pre daný multiindex  $k$ . Pozri [9] strana 347 alebo [4].

### Priklady abstraktných funkcií

1. Najjednoduchším príkladom je samozrejme obyčajná reálna funkcia jednej reálnej premennej. V tomto prípade je  $D \subseteq \mathbb{R} = X$  a norma v  $X$  sa chápe ako klasická euklidovská norma, teda v tomto prípade absolútna hodnota.
2. Ak  $D = \mathbb{R}^d$ , kde  $d$  je prirodzené číslo, povedzme 2,3,.. Nech  $X = \mathbb{R}$ , máme reálnu funkciu  $d$  premenných .
3. Ak  $D = \langle 0, T \rangle$  a  $X = C(\langle a, b \rangle)$ , potom toto je abstraktná funkcia, ktorá každej hodnote  $t \in \langle 0, T \rangle$  priradí funkciu  $u_t(x)$ , ktorá je spojitá v  $(a, b)$  ( $t \mapsto u_t(x)$ ). Ten index vo funkcii v tomto prípade označuje tú konkrétnu funkciu v priradení.

Teraz uvedieme príklady priestorov abstraktných funkcií.

### Priestory spojitých (a $k$ -krát spojitodiferencovateľných) abstraktných funkcií

Nech  $X$  je ľubovoľný Banachov priestor. Potom množinu všetkých abstraktných funkcií definovaných a **spojitých** na  $D = \langle 0, T \rangle$  budeme označovať  $C(D; X)$

Analogicky množinu všetkých abstraktných funkcií definovaných a  $k$ -krát spojitodiferencovateľných na  $D$  budeme označovať  $C^k(D; X)$ . Ich norma potom bude:

$$\|u\|_{k,X} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup \|D^\alpha u(x)\|_X$$

**Veta 4.1.** Nech  $X$  je Banachov priestor. Potom aj priestory  $C^k(D; X)$  sú Banachove priestory.

Dôkaz pozri napríklad [4].

### Konkrétne príklady:

1. Nech  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  a  $X = C(\bar{\Omega})$ . Nech  $D = I = \langle 0, T \rangle$ . Utvoríme priestor  $C(\langle 0, T \rangle, C(\bar{\Omega})) = C(\langle 0, T \rangle \times \bar{\Omega}) = C(\bar{Q}_T)$ . Teda ide o priestor spojitých funkcií  $u(t, x)$ , kde  $t \in \langle 0, T \rangle$  a  $x \in \bar{\Omega}$ . Norma tohoto priestoru bude

$$\|u\|_{C(I, C(\bar{\Omega}))} = \sup_{t \in I} \|u(t)\|_{C(\bar{\Omega})} = \sup_{t \in I, x \in \bar{\Omega}} |u(t, x)|$$

2. Nech  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  a  $X = L_2(\Omega)$ . Nech  $D = I = \langle 0, T \rangle$ . Utvoríme priestor  $C(\langle 0, T \rangle, L_2(\Omega))$ . Norma tohoto priestoru bude

$$\|u\|_{C(I, L_2(\Omega))} = \sup_{t \in I} \|u(t)\|_{L_2(\Omega)} = \sup_{t \in I} \left( \int_{\Omega} u(t, x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$



3. Nech je daný interval  $\langle a, b \rangle$  a  $X = C^2(\langle a, b \rangle)$ . Nech  $D = I = (0, T)$ . Utvoríme priestory  $C(\langle 0, T \rangle)$ ,  $C^2(\langle a, b \rangle)$  a  $C^1(\langle 0, T \rangle)$ ,  $C(\langle a, b \rangle)$ . Teda v prvom prípade ide o priestor spojitéch funkcií  $u(t, x)$ , zároveň je spojitá aj druhá parciálna derivácia funkcie  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  pre všetky  $t \in (0, T)$ . V tom druhom prípade ak  $t \in (0, T)$  a  $x \in \langle a, b \rangle$  je abstraktná funkcia  $\frac{\partial u}{\partial t}$  spojitá. Teda, ak si všimneme rovnicu (4.1), práve takéto vlastnosti bude mať klasické riešenie uvedeného problému.
4. Nech  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  a  $X = C^2(\Omega)$ . Nech  $D = \langle 0, T \rangle$ . Utvoríme opäť priestory  $C(\langle 0, T \rangle)$ ,  $C^2(\Omega)$  a  $C^1(\langle 0, T \rangle)$ ,  $C(\Omega)$ . Teda v prvom prípade ide o priestor spojitéch funkcií  $u(t, x)$ , kde  $t \in \langle 0, T \rangle$  a  $x \in \Omega$ , ktorých všetky druhé parciálne derivácie funkcie  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$  pre všetky  $i, j = 1, \dots, N$  pre všetky  $t \in \langle 0, T \rangle$  sú spojité a v druhom prípade platí, že  $\frac{\partial u}{\partial t}$  je spojitá abstraktná funkcia. Teda, ak si všimneme rovnicu (4.4), práve z tohoto priestoru bude klasické riešenie uvedeného problému.

Z uvedeného je jasné, že analogické priestory sa budú využívať aj pri definícii slabého riešenia parabolických problémov. Z eliptických úloh ale vieme, že v tomto prípade sa jedná o priestory, ktoré sú podmnožinami priestoru  $L_2$  a všetky majú integrálne normy (jedná sa o Lebesgueov integrál). Preto pred týmito definíciami je ešte potrebné zaviesť integrál z abstraktnej funkcie.

### 4.3 Bochnerov integrál

Bochnerov integrál je vlastne zovšeobecnením Lebesgueovho integrálu pre abstraktné funkcie. Uvedieme základné definície a vlastnosti Bochnerovho integrálu podľa [4] časť 2.19.

**Definícia 4.3 (Jednoduchá funkcia).** Nech  $D \subset \mathbb{R}^N$  je neprázdna ohraničená otvorená množina a  $X$  je Banachov priestor s normou  $\|\cdot\|_X$  a nulovým prvkom  $o$ . Zobrazenie  $f$  z  $D$  do  $X$  nazývame jednoduchou funkciou ak existujú  $c_1, c_2, \dots, c_n \in X$  a merateľné vzájomne dizjunktné podmnožiny  $B_1, \dots, B_n$  množiny  $D$ , že platí:

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \chi_{B_i}(t) c_i, \quad (4.7)$$

kde  $\chi_M$  je charakteristická funkcia množiny  $M$ .

**Definícia 4.4 (Silno merateľná funkcia).** Funkcia (presnejšie abstraktná funkcia)  $f : D \rightarrow X$  sa nazýva silno merateľnou, ak existuje postupnosť  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  jednoduchých funkcií tak, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f(x)\|_X = 0.$$

**Veta 4.2.** Nech  $f : D \rightarrow X$  je silno merateľná funkcia. Potom funkcia

$$\|f(x)\|_X : D \rightarrow \mathbb{R}$$

je merateľná. (v Lebesgueovom zmysle).

**Definícia 4.5 (Bochnerov integrál z jednoduchej funkcie).** Nech je  $f : D \rightarrow X$  jednoduchá funkcia definovaná v definícii 4.3, vzťahom (4.7). Potom Bochnerov integrál funkcie  $f$  - označíme ho ako

$$\int_D f(x)dx$$

definujeme ako

$$\sum_{i=1}^n m(B_i)c_i, \quad (4.8)$$

kde  $m(M)$  je miera množiny  $M$ .

**Veta 4.3.** Nech  $f : D \rightarrow X$  je jednoduchá funkcia. Potom

$$\left\| \int_D f(x)dx \right\|_X \leq \int_D \|f(x)\|_X dx$$

**Veta 4.4.** Nech  $f : D \rightarrow X, g : D \rightarrow X$  sú jednoduche funkcie a  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Potom  $\alpha f + \beta g$  je tiež jednoduchá funkcia a platí:

$$\int_D (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_D f(x)dx + \beta \int_D g(x)dx$$

**Definícia 4.6 (Bochnerovsky integrovateľná funkcia).** Hovoríme, že funkcia  $f : D \rightarrow X$  je Bochnerovsky integrovateľnou, ak existuje postupnosť  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  jednoduchých funkcií tak, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f(x)\|_X = 0 \quad (4.9)$$

pre skoro všetky  $x \in D$  a ak platí :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_D \|f_n(x) - f(x)\|_X = 0. \quad (4.10)$$

**Definícia 4.7 (Bochnerov integrál).** Pre merateľnú množinu  $B \subset D$  a silno merateľnú a Bochnerovsky integrovateľnú funkciu  $f$  definujeme Bochnerov integrál takto:

$$\int_B f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D \chi_B(x)f_n(x)dx,$$

pre postupnosť s vlastnosťami (4.9),(4.10).

**Veta 4.5 (Bochnerova veta).** Silno merateľná (abstraktná) funkcia  $f : D \rightarrow X$  je Bochnerovsky integrovateľná práve vtedy, keď reálna funkcia  $\|f(x)\|_X$  má konečný Lebesgueov integrál.

**Príklady priestorov (Bochnerovsky) integrovateľných (abstraktných) funkcií.** Nech  $X$  je Banachov priestor s normou  $\|\cdot\|_X$ . Nech  $D \subset \mathbb{R}^N$  je neprázdna ohraničená množina.

Nech teraz  $1 \leq p < \infty$  a Označme  $L_p(D; X)$  množinu všetkých funkcií  $f : D \rightarrow X$ , ktoré sú silno merateľné a také, že

$$\int_D \|f(x)\|_X^p dx < \infty.$$

Analogicky ako u skôr definovaných  $L_p$  priestorov hovoríme, že dve abstraktné funkcie  $f_1, f_2 \in L_p(D; X)$  sa rovnajú, ak sa rovnajú pre skoro všetky  $x \in D$ . Potom platí: Množina  $L_p(D; X)$  je vektorový priestor a navyše

$$\|f\|_p := \left( \int_D \|f(x)\|_X^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (4.11)$$

je norma v tomto priestore.

**Veta 4.6.** Nech  $1 \leq p < \infty$  a  $X$  je Banachov priestor s normou  $\|\cdot\|_X$ . Nech  $D \subset \mathbb{R}^N$  je neprázdna ohraničená množina. Potom  $L_p(D; X)$  s normou (4.11) sú Banachove priestory.

Označme teraz  $L_\infty(D; X)$  množinu všetkých funkcií  $f : D \rightarrow X$ , ktoré sú silno merateľné a také, že

$$\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{x \in D} \|f(x)\|_X < \infty. \quad (4.12)$$

**Veta 4.7.** Nech  $X$  je Banachov priestor s normou  $\|\cdot\|_X$ . Nech  $D \subset \mathbb{R}^N$  je neprázdna ohraničená množina. Potom  $L_\infty(D; X)$  s normou (4.12) je Banachov priestor.

### Konkrétne príklady:

1. Nech je daný interval  $(a, b)$  a  $X = L_2((a, b))$ . Nech  $D = (0, T)$ . Utvoríme priestor  $L_2((0, T), L_2((a, b)))$ . Teda ide o priestor Lebesgueovskych integrovateľných funkcií  $u$  s normou podľa definície

$$\|u\|_{L_2(I, L_2(\Omega))} = \left( \int_0^T \|u(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \int_0^T \left( \int_a^b u^2(t, x) dx \right) dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

V tomto prípade dostávame (Fubiniho veta) priestor  $L_2(Q_T)$ , kde  $Q_T = (0, T) \times (a, b)$ .

2. Nech  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  a  $X = L_2(\Omega)$ . Nech  $D = (0, T)$ . Utvoríme priestor  $L_2((0, T), L_2(\Omega))$ . Teda analogicky ako pre jedno dimenzionálnu oblasť  $\Omega$  dostávame Banachov priestor s normou

$$\|u\|_{L_2(I, L_2(\Omega))} = \left( \int_0^T \left( \int_\Omega u^2(t, x) dx \right) dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

z čoho vidíme, že v tomto prípade dostávame priestor  $L_2(Q_T)$ , kde  $Q_T = (0, T) \times \Omega$ .

3. Nech  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  a  $X = L_2(\Omega)$ . Nech  $D = (0, T)$ . Utvoríme priestor  $L_1((0, T), L_2(\Omega))$ . Dostávame Banachov priestor s normou

$$\|u\|_{L_1(I, L_2(\Omega))} = \int_0^T \left( \int_{\Omega} u^2(t, x) dx \right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

4. Nech  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  a  $X = L_2(\Omega)$ . Nech  $D = (0, T)$ . Utvoríme priestor  $L_{\infty}((0, T), L_2(\Omega))$ . Dostávame Banachov priestor s normou

$$\|u\|_{L_{\infty}(I, L_2(\Omega))} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in (0, T)} \left( \int_{\Omega} u^2(t, x) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

## 4.4 Slabé riešenie parabolickej počiatočno-okrajovej úlohy

Na  $N$  dimenzionálnej oblasti  $\Omega$  pre  $Q_T = (0, T) \times \Omega$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  máme, podobne ako v prvej časti tejto kapitoly, problém

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u(t, x) = f(t, x) \text{ v } Q_T \quad (4.13)$$

s homogénnou Dirichletovou okrajovou podmienkou :

$$u(t, s) = 0 \text{ pre } s \in \partial\Omega, t \in (0, T) \quad (4.14)$$

a počiatočnou podmienkou

$$u(0, x) = u_0(x), x \in \Omega, \quad (4.15)$$

Úlohou tejto časti je definovať pojem slabého riešenia tohto problému. Vo všeobecnosti tento pojem pri parabolickej (a aj pri eliptickej) rovnici môže byť definovaný rôzne v závislosti od kvality, akú požadujeme od nášho riešenia. Základným princípom je podobne ako pri eliptických rovniciach voľba pracovného priestoru, vynásobenie rovnice funkciou z tohto priestoru a integrácia s využitím Greenovej vety. Na tomto jednoduchom príklade ukážeme tri rôzne (nie jediné) možnosti tejto definície.

1. Podľa [6] rovnicu (4.13) vynásobíme testovacou funkciou  $v$  z pracovného priestoru  $V$  (tento podrobne určíme neskôr, ale funkcie z neho spĺňajú vo všeobecnosti homogénne stabilné podmienky, teda pre našu úlohu sú to nulové Dirichletove podmienky na hranici alebo jej časti tam, kde su predpísané) a integrujeme na celej časopriestorovej oblasti  $Q_T$  (na zjednodušenie zápisu nebudeme písať premenné funkcií).

$$\int_{Q_T} \left( \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \right) v dx dt = \int_{Q_T} f v dx dt$$

Využívajúc Greenovu vetu (v premennej  $x$ ) a homogénne Dirichletove podmienky dostávame integrálnu identitu:

$$\int_{Q_T} \frac{\partial u}{\partial t} v dx dt + \int_{Q_T} \nabla u \nabla v dx dt = \int_{Q_T} f v dx dt \quad (4.16)$$

Teraz slabé riešenie definujeme tak, aby funkcie  $u$  a  $v$  boli z takých priestorov, ktoré zaručujú, že integrálna identita je definovaná korektne a  $u$  bude naše riešenie, teda aj s prihliadnutím na dané okrajové podmienky analogicky, ako pri eliptických problémoch.

**Definícia 4.8 (Slabé riešenie I).** Slabým riešením problému (4.13), (4.14), (4.15) je funkcia  $u \in L_2(I, H_0^1(\Omega))$ , taká, že  $\frac{\partial u}{\partial t} \in L_2(Q_T)$  a pre ľubovoľnú funkciu  $v \in L_2(I, H_0^1(\Omega))$ , platí integrálna identita (4.16).

- Podľa [5] rovnicu (4.13) vynásobíme testovacou funkciou  $v$  a integrujeme na celej časo-priestorovej oblasti  $Q_T$  podobne ako v prvom prípade, ale integrály na ľavej strane upravíme takto:

$$\int_I \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v dx dt = \int_{\Omega} (u(T, x)v(T, x) - u(0, x)v(0, x)) dx - \int_{Q_T} u \frac{\partial v}{\partial t} dx dt$$

a

$$- \int_I \int_{\Omega} \Delta u v dx dt = \int_{Q_T} \nabla u \nabla v dx dt$$

Takže využívajúc počiatočnú podmienku dostávame integrálnu identitu

$$- \int_{Q_T} u \frac{\partial v}{\partial t} dx dt + \int_{Q_T} \nabla u \nabla v dx dt = \int_{Q_T} f v dx dt + \int_{\Omega} u_0(x)v(0, x) dx \quad (4.17)$$

**Definícia 4.9 (Slabé riešenie II).** Slabým riešením problému (4.13), (4.14), (4.15) je funkcia  $u \in L_2(I, H_0^1(\Omega))$ , že pre ľubovoľnú funkciu  $v \in L_2(I, H_0^1(\Omega))$  takú, že  $\frac{\partial v}{\partial t} \in L_2(Q_T)$  a platí  $v(T, x) = 0$  pre skoro všetky  $x \in \Omega$  platí integrálna identita (4.17)

*Poznámka 4.2.* Všimnime si, že teraz je naše riešenie definované oproti prvému prípadu "slabšie" t.j. nevyžaduje sa žiadna kvalita pre časovú deriváciu.

- Podľa [8] rovnicu (4.13) vynásobíme testovacou funkciou  $v$ , ktorá bude funkciou len priestorovej premennej a integrujeme na priestorovej oblasti  $\Omega$  (na zjednodušenie zápisu nebudeme písať premenné funkcií).

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \right) v dx = \int_{\Omega} f v dx$$

Využívajúc Greenovu vetu a homogénne Dirichletove podmienky dostávame integrálnu identitu:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v dx dt + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad (4.18)$$

**Definícia 4.10 (Slabé riešenie III).** Slabým riešením problému (4.13), (4.14), (4.15) je funkcia  $u \in L_\infty(I, H_0^1(\Omega))$ , taká, že  $u(0, \cdot) = u_0(\cdot)$  a  $\frac{\partial u}{\partial t} \in L_\infty(I, L_2(\Omega))$  a pre ľubovoľnú funkciu  $v \in H_0^1(\Omega)$ , platí integrálna identita (4.18) pre skoro všetky  $t \in I$ .

*Poznámka 4.3.* Pri takejto definícii slabého riešenia z viet o vnorení navyše dostávame, že  $u \in C(I, L_2(\Omega))$ .

Takto definované riešenie vyžaduje z uvedených prípadov najvyššiu "kvalitu" (hovoríme regularitu) riešenia.

*Poznámka 4.4.* Analogicky sa definuje aj slabé riešenie pre iné okrajové podmienky, kde sa pre stabilné podmienky využíva aj veta o stopách [9] a v priestorovej premennej priestor  $H^1(\Omega)$ , ktorý bude základom aj pre nestabilné podmienky. Podobná technika, ako pri zmiešaných okrajových podmienkach eliptického typu sa využíva pre priestorové premenné aj pri parabolických úlohách.



# Kapitola 5

## Základné poznatky z Rotheho metódy

V tejto časti vysvetlíme základnú myšlienku metódy, ktorá dáva návod ako riešiť parabolické parciálne diferenciálne rovnice (PDR) podľa [8]. Nie je to jediná možnosť, ale jej myšlienka je veľmi jednoduchá a využíva znalosť riešenia eliptických PDR.

### 5.1 Jednoduchý príklad

Nech je daná ohraničená oblasť  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  a interval  $I = (0, T)$ ,  $T > 0$ . Na karterziánskom súčine  $Q_T = (0, T) \times \Omega$  uvažujme veľmi jednoduchú parabolickú PDR druhého rádu tvaru

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \Delta u(t, x) = f(t, x) \quad (5.1)$$

s Dirichletovými okrajovými podmienkami:

$$u(t, s) = g(t, s), \quad s \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T) \quad (5.2)$$

a počiatočnou podmienkou

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (5.3)$$

kde  $f, g$  a  $u_0$  sú dané funkcie.

Rotheho metóda spočíva v tom, že parabolickú rovnicu budeme riešiť ako istý počet eliptických rovníc.

#### Postup:

1. Rozdelíme časový interval  $(0, T)$  na  $m$  časových úsekov  $I_n = \langle t_{n-1}, t_n \rangle$ ,  $n = 1, 2, \dots, m$ , kde  $t_0 = 0$  a  $t_m = T$ , pričom  $t_n - t_{n-1} = k_n$  (nemusi byť rovnomerné delenie) nazývame **časový krok**. V prípade rovnomerného delenia používame pre časový krok označenie  $k$ . Pre jednoduchosť



budeme ďalej uvažovať rovnomerné delenie časového intervalu, a teda časový krok budeme označovať  $k$ .

- pre každé  $n = 1, 2, \dots, m$  budeme riešiť eliptickú rovnicu na časovom intervale  $I_n$  (niekedy hovoríme na časovom reze  $t_n$ ) s neznámou funkciou  $u^n(x)$ , (predstava môže byť napríklad taká, že ak je funkcia  $u(t, x)$  riešenie problému (5.1), (5.2) (5.3), tak  $u(t_n, x) \approx u^n(x)$ , kde premennú  $x$  často v zápise vynechávame a píšeme  $u^n$ ). Túto rovnicu dostaneme tak, že ak časovú deriváciu v rovnici (5.1) nahradíme diferenciou a použijeme vyššie zavedené označenie, máme

$$\frac{\partial u(t_n, x)}{\partial t} \approx \frac{u(t_n, x) - u(t_{n-1}, x)}{k} \approx \frac{u^n - u^{n-1}}{k}$$

a pravú stranu aproximujeme podľa regularity tejto funkcie napríklad:

$$f^n := f(t_n, x) \quad \text{alebo} \quad f^n := \frac{1}{k} \int_{I_n} f(t, x) dt.$$

Analogicky môžeme aproximovať okrajovú podmienku. Pre každé  $n = 1, \dots, m$  máme riešenie eliptického problému- funkciu  $u^n, n = 1, \dots, m$ .

- Riešenie parabolického problému je potom dané:  
bud' ako tzv. **Rotheho funkcia**:

$$u_m(t) = u^{n-1} + \frac{u^n - u^{n-1}}{k}(t - t_{n-1}), \quad t \in I_n \quad (5.4)$$

alebo **schodovitá funkcia**

$$\bar{u}_m(t) = u^{n-1}, \quad t \in I_n \quad (5.5)$$

Na obrázku 5.1 vidíme na časovom úseku  $\langle 0; 2 \rangle$  zobrazené skutočné riešenie v čase a jeho numerické aproximácie Rotheho a schodovitú funkciu v závislosti od veľkosti časového kroku.

Rotheho funkcia je v premennej  $t$  po častiach lineárna funkcia na intervale  $I_n$  má konštantnú deriváciu, ktorú budeme označovať

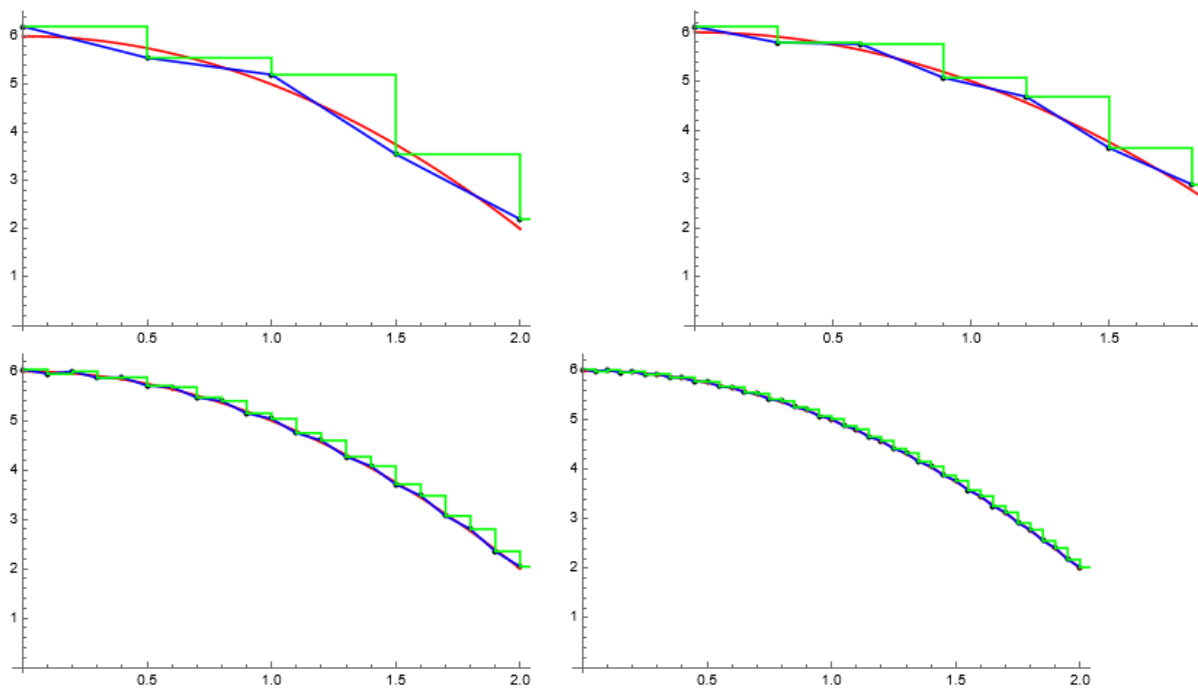
$$\frac{du_m}{dt} = \frac{u^n - u^{n-1}}{k} \quad (5.6)$$

Takouto aproximáciou rovnice (5.1) je potrebné pre každé  $n = 1, \dots, m$  počítať eliptickú rovnicu

$$\frac{u^n - u^{n-1}}{k} - \Delta u^l = f^l, \quad (5.7)$$

kde ak

- $l = n - 1$ , dostávame **explicitnú schému**
- $l = n$ , dostávame **implicitnú schému**



Obr. 5.1. Skutočné riešenie (červená), Rotheho funkcia (modrá) a schodovitá funkcia (zelená) pre časové kroky  $k = 0, 5$ , (vľavo hore),  $k = 0, 3$  (vpravo hore),  $k = 0, 1$ , (vľavo dole) a  $k = 0, 05$  (vpravo dole)

Pritom  $u^0 = u_0(x)$  je dané z počiatočnej podmienky (5.3) a nové riešenie vypočítame aproximáciou eliptického člena v predchádzajúcom kroku (explicitná scéma) alebo v počítanom kroku (implicitná schéma).

Pozrime sa teraz bližšie na implicitnú schému. Rovnicu (5.7) pre  $l = n$  môžeme prepísať do tvaru

$$u^n - k\Delta u^n = kf^n + u^{n-1}, \quad (5.8)$$

kde  $u^n$  je funkcia premennej  $x \in \Omega$ ,  $k$  je kladná konštanta a  $kf^n + u^{n-1}$  je pravá strana eliptickej rovnice s okrajovou podmienkou

$$u^n(s) = g^n(s), s \in \partial\Omega. \quad (5.9)$$

Pre daný eliptický problém jednoznačnosť slabého riešenia zabezpečuje Laxova-Milgramova veta za istých podmienok pre dáta úlohy. Overme teda podmienky Laxovej-Milgramovej vety. V danom prípade slabé riešenie problému bude taká funkcia  $u^n \in H^1(\Omega)$ , že existuje taká funkcia  $w \in H^1(\Omega)$ , ktorej stopa je zhodná s funkciou  $g^n$  v zmysle stôp tak, že  $u - w \in_0^1(\Omega)$  a pre ľubovoľnú funkciu  $v^n \in H_0^1(\Omega)$  platí integrálna identita

$$(u^n, v) + k(\nabla u^n, \nabla v) = (kf^n + u^{n-1}, v),$$

kde  $(\cdot, \cdot)$  je označenie skalárneho súčinu v  $L_2(\Omega)$ . Jeho normu označujeme  $\|\cdot\|$ . Keďže ide o stabilnú okrajovú podmienku a lineárnu eliptickú rovnicu, riešenie  $u^n$  môžeme hľadať v tvare súčtu funkcií  $u^n = z^n + w^n$ , kde funkcia  $w^n \in H^1(\Omega)$ , ktorej stopa je zhodná s funkciou  $g^n$  v zmysle stôp a pre funkciu  $z^n$  platí integrálna identita

$$(z^n, v) + k(\nabla z^n, \nabla v) = (kf^n + u^{n-1}, v) - (w^n, v) - k(\nabla w^n, \nabla v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

V zmysle znenia Laxovej-Milgramovej ako v [9], označme teraz

$$B(z^n, v) = (z^n, v) + k(\nabla z^n, \nabla v)$$

a

$$F(v) = (kf^n + u^{n-1}, v) - (w^n, v) - k(\nabla w^n, \nabla v).$$

Náš Hilbertov priestor je  $H^1(\Omega)$  s normou  $\|u\|_{H^1(\Omega)} = (\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2)^{\frac{1}{2}}$ . Treba teraz ukázať ohraničenosť a koercitívnosť bilineárnej formy  $B(z, v)$  a ohraničenosť lineárneho funkcionálu  $F(v)$  (v dôkaze budeme používať označenie  $z, w$  miesto  $z^n, w^n$ ).

**Ohraničenosť bilineárnej formy:**

Využijeme Cauchyho-Schwarzovu nerovnosť a dostávame

$$|B(z, v)| \leq \|z\| \|v\| + k \|\nabla z\| \|\nabla v\| \leq \max\{1, k\} \|z\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

čo vyplýva hneď z definície normy v priestore  $H^1(\Omega) = W_2^1(\Omega)$ .

**Koercitivita bilineárnej formy:**

$$B(v, v) = \|v\|^2 + k \|\nabla v\|^2 \geq \min\{1, k\} \|v\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

**Ohraničenosť lineárneho funkcionálu:**

Opäť využijeme Cauchyho-Schwarzovu nerovnosť:

$$|F(v)| = |(kf^n + u^{n-1} - w, v) - k(\nabla w, \nabla v)| \leq$$

$$(k\|f^n\| + \|u^{n-1}\| + \|w\|) \|v\| + k \|\nabla w\| \|\nabla v\| \leq$$

$$(k\|f^n\| + \|u^{n-1}\| + \max\{1, k\} \|w\|_{H^1(\Omega)}) \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Záverom dostávame z Laxovej-Milgramovej vety existenciu jediného riešenia tejto eliptickej rovnice za predpokladu, že funkcia  $f \in L_2(Q_T)$  a  $u^{n-1} \in L_2(\Omega)$ . Teda rekurentne, ak počiatočná funkcia  $u_0 \in L_2(\Omega)$ , tak  $z^1 \in H^1(\Omega)$  a  $u^1 = z^1 + w^1 \in H^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ , a teda  $u^{n-1} \in L_2(\Omega)$ , z čoho analogicky máme  $u^n \in H^1(\Omega)$ .

Keď si uvedomíme tento fakt, vidíme, že aj Rotheho funkcia aj schodovitá funkcia definované vzťahmi (5.4), (5.5) sú abstraktné funkcie premennej  $t$ .

$$u_m : I \rightarrow H^1(\Omega),$$

$$\bar{u}_m : I \rightarrow H^1(\Omega).$$

Z tejto jednoznačnosti a definície riešenia eliptického problému dostávame aj jednoznačnosť riešenia Rotheho alebo schodovitej funkcie definovanej vyššie. V knihe [8] je dokázaná (okrem iného) konvergencia tejto metódy k slabému riešeniu. Túto budeme na zjednodušenom príklade prezentovať v nasledujúcej časti.

## 5.2 Stabilitné odhady

Pre lepšie pochopenie vlastností riešenia získaného Rotheho metódou riešme problém (5.1), (5.3), (5.2) so zjednodušenými vlastnosťami:

1. funkcia  $f(t, x)$  nie je časovo závislá
2. Dirichletova podmienka je homogénna  $u(t, s) = 0, s \in \partial\Omega = 0$

Za týchto okolností vieme získať odhady na numerické riešenie veľmi jednoducho. V tomto prípade eliptickú rovnicu (5.8) môžeme prepísať do tvaru

$$\frac{u^n - u^{n-1}}{k} - \Delta u^n = f. \quad (5.10)$$

Keďže máme homogénne Dirichletove podmienky, prenásobme rovnicu (5.10) funkciou  $v \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ , integrujme na oblasti  $\Omega$  a použijúc Greenovu vetu máme (využijeme opäť označenie  $(\cdot, \cdot)$  pre skalárny súčin v priestore  $L_2(\Omega)$ ):

$$\left( \frac{u^n - u^{n-1}}{k}, v \right) + (\nabla u^n, \nabla v) = (f, v). \quad (5.11)$$

Položme teraz  $v = \frac{u^n - u^{n-1}}{k}$  a dostaneme

$$\left\| \frac{u^n - u^{n-1}}{k} \right\|^2 + \frac{1}{k} (\nabla u^n, \nabla (u^n - u^{n-1})) = (f, \frac{u^n - u^{n-1}}{k}). \quad (5.12)$$

Analogicky dostaneme z rovnice (5.11) pre index  $n-1$  s tou istou funkciou  $v$  nasledujúcu rovnicu:

$$\left( \frac{u^{n-1} - u^{n-2}}{k}, \frac{u^n - u^{n-1}}{k} \right) + \frac{1}{k} (\nabla u^{n-1}, \nabla (u^n - u^{n-1})) = (f, \frac{u^n - u^{n-1}}{k}). \quad (5.13)$$

Teraz odčítajme (5.13) od (5.12) a máme

$$\left\| \frac{u^n - u^{n-1}}{k} \right\|^2 + \frac{1}{k} \|\nabla (u^n - u^{n-1})\|^2 = \left( \frac{u^n - u^{n-1}}{k}, \frac{u^{n-1} - u^{n-2}}{k} \right).$$

Pravú stranu teraz odhadneme pomocou Cauchyho-Schwarzovej nerovnosti a nerovnosti  $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \forall a, b \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{u^n - u^{n-1}}{k} \right\|^2 + \frac{1}{k} \|\nabla (u^n - u^{n-1})\|^2 &\leq \left\| \frac{u^n - u^{n-1}}{k} \right\| \left\| \frac{u^{n-1} - u^{n-2}}{k} \right\| \leq \\ &\frac{1}{2} \left\| \frac{u^n - u^{n-1}}{k} \right\|^2 + \frac{1}{2} \left\| \frac{u^{n-1} - u^{n-2}}{k} \right\|^2. \end{aligned}$$

Z tohto po úprave máme

$$\left\| \frac{u^n - u^{n-1}}{k} \right\|^2 + \frac{2}{k} \|\nabla (u^n - u^{n-1})\|^2 \leq \left\| \frac{u^{n-1} - u^{n-2}}{k} \right\|^2. \quad (5.14)$$

Špeciálne pre  $n = 1$  z rovnice (5.12) platí

$$\left\| \frac{u^1 - u^0}{k} \right\|^2 + \frac{1}{k} (\nabla u^1, \nabla(u^1 - u^0)) = (f, \frac{u^1 - u^0}{k}),$$

čo po úprave (pripočítame na každú stranu rovnice  $-\frac{1}{k}(\nabla u^0, \nabla(u^1 - u^0))$ ) dáva

$$\left\| \frac{u^1 - u^0}{k} \right\|^2 + \frac{1}{k} \|\nabla(u^1 - u^0)\|^2 = (f, \frac{u^1 - u^0}{k}) - \frac{1}{k} (\nabla u^0, \nabla(u^1 - u^0)).$$

V poslednom člene teraz použijeme Greenovu vetu a nulové okrajové podmienky na celom časovom intervale

$$-\frac{1}{k} (\nabla u^0, \nabla(u^1 - u^0)) = (\Delta u^0, \frac{u^1 - u^0}{k}),$$

z čoho hneď dostávame využijúc Cauchyho-Schwarzovu nerovnosť

$$\left\| \frac{u^1 - u^0}{k} \right\|^2 + \frac{1}{k} \|\nabla(u^1 - u^0)\|^2 \leq (\|f\| + \|\Delta u^0\|) \left\| \frac{u^1 - u^0}{k} \right\|,$$

a preto berúc do úvahy fakt, že druhý člen na ľavej strane nerovnosti je nezáporný, máme

$$\left\| \frac{u^1 - u^0}{k} \right\| \leq \|f\| + \|\Delta u^0\|.$$

Ak teda pre dáta problému platí:  $f \in L_2(\Omega)$  a počiatková podmienka  $u_0 \in W_2^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , dostaneme z tohoto odhadu a rekurentne z odhadu (5.14) odhad

$$\left\| \frac{u^n - u^{n-1}}{k} \right\|^2 \leq \|f\| + \|\Delta u^0\| = C_0^2 \quad \forall n = 1, \dots, m, \quad (5.15)$$

a preto

$$\left\| \frac{u^n - u^{n-1}}{k} \right\| \leq C_0 \quad \forall n = 1, \dots, m. \quad (5.16)$$

Z tohoto odhadu tiež dostaneme

$$\begin{aligned} \|u^n\| &\leq \|u^n - u^{n-1}\| + \|u^{n-1} - u^{n-2}\| + \dots + \|u^1 - u^0\| + \|u^0\| = \\ &= \sum_{i=1}^n \left\| \frac{u^i - u^{i-1}}{k} \right\| k + \|u^0\|. \end{aligned}$$

Ak teraz využijeme predchádzajúci odhad (5.16) a vlastnosti počiatkovej funkcie  $u_0$  dostaneme

$$\|u^n\| \leq C_0 \sum_{i=1}^n k + \|u_0\| \leq C_0 n k + \|u_0\| = C_1, \quad (5.17)$$

kde sme využili fakt, že  $n k \leq m k = T$  a teda  $C_1 = C_0 T + \|u_0\|$ .

Dosadme teraz do (5.11)  $v = u^n$ :

$$\left( \frac{u^n - u^{n-1}}{k}, u^n \right) + \|\nabla u^n\|^2 = (f, u^n),$$

z čoho hneď použitím Cauchyho -Schwarzovej nerovnosti máme

$$\|\nabla u^n\|^2 \leq \|f\| \|u^n\| + \left\| \frac{u^n - u^{n-1}}{k} \right\| \|u^n\| \leq \|f\| C_1 + C_0 C_1 = C_2. \quad (5.18)$$

Z týchto odhadov vyplýva, že máme odhad pre normu schodovitej funkcie a jej gradientu nezávisle od delenia časového intervalu a zároveň máme aj odhad pre deriváciu Rotheho funkcie taktiež nezávislý od delenia časového intervalu. Teda existuje konštanta  $C$  taká, že pre všetky  $t \in I$  platí:

$$\|\bar{u}_m(t)\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C, \quad \left\| \frac{du_m(t)}{dt} \right\| \leq C. \quad (5.19)$$

Tieto dva odhady tvoria dôležitý predpoklad pre konvergenciu Rotheho metódy.

### 5.3 Konvergenčné vety

Tieto výsledky sú vlastne rozšírením Arzela-Ascoliho vety 1.4 pre abstraktné funkcie [8].

**Veta 5.1** (Konvergenčná veta I). Nech  $V$  a  $Y$  sú reflexívne Banachove priestory s normami  $\|\cdot\|_V$ ,  $\|\cdot\|_Y$  a platí kompaktné vnorenie  $V \hookrightarrow Y$ . Nech je daná postupnosť abstraktných Rotheho a schodovitých funkcií  $\{u_m\}$ ,  $\{\bar{u}_m\}$ . Nech platí:

$$\int_I \left\| \frac{du_m(s)}{ds} \right\|_Y^2 ds \leq C, \quad \|\bar{u}_m(t)\|_V \leq C \quad \forall t \in I. \quad (5.20)$$

Potom existuje  $u \in C(I, Y) \cap L_\infty(I, V)$  s deriváciou  $\frac{du}{dt} \in L_2(I, Y)$  a podpostupnosť  $\{u_{m_k}\}$  postupnosti  $\{u_m\}$  taká, že

$$u_{m_k} \rightarrow u \text{ v } C(I, Y) \quad u_{m_k}(t) \rightharpoonup u(t), \quad \bar{u}_{m_k}(t) \rightharpoonup u(t) \quad \text{vo } V \quad \forall t \in I \quad (5.21)$$

a

$$du_{m_k}(t) dt \rightharpoonup \frac{du}{dt} \text{ v } L_2(I, Y). \quad (5.22)$$

Ak navyše

$$\left\| \frac{du_m(t)}{dt} \right\|_Y \leq C \text{ pre skoro všetky } t \in I, \quad (5.23)$$

potom  $\frac{du}{dt} \in L_\infty(I, Y)$  a navyše je funkcia  $u$  Lipschitzovsky spojitá.

Existuje aj jej užitočná modifikácia.

**Veta 5.2** (Konvergenčná veta II). Nech  $V$  a  $Y$  sú reflexívne Banachove priestory s normami  $\|\cdot\|_V$ ,  $\|\cdot\|_Y$  a platí spojité vnorenie  $V \hookrightarrow Y$ . Nech je daná postupnosť abstraktných Rotheho a schodovitých funkcií  $\{u_m\}$ ,  $\{\bar{u}_m\}$ . Nech platí:

$$\{u_m\} \rightarrow u \text{ v } C(I, Y)$$

a nech

$$\int_I \left\| \frac{du_m(s)}{ds} \right\|_Y^2 ds \leq C, \quad \|\bar{u}_m(t)\|_V \leq C \quad \forall t \in I. \quad (5.24)$$

Potom existuje  $u \in L_\infty(I, V)$  s deriváciou  $\frac{du}{dt} \in L_2(I, Y)$ , že

$$u_m(t) \rightharpoonup u(t), \quad \bar{u}_m(t) \rightharpoonup u(t) \quad \text{vo } V \quad \forall t \in I \quad (5.25)$$

a

$$\frac{du_m(t)}{dt} \rightharpoonup \frac{du}{dt} \quad \text{v } L_2(I, Y). \quad (5.26)$$

Ak navyiac

$$\left\| \frac{du_m(t)}{dt} \right\|_Y \leq C \quad \text{pre skoro všetky } t \in I, \quad (5.27)$$

potom  $\frac{du}{dt} \in L_\infty(I, Y)$  a navyiac je funkcia  $u$  Lipschitzovsky spojitá.

## 5.4 Konvergencia

V našom konkrétnom prípade pri parabolických rovniciach s eliptickým operátorom 2. rádu využijeme tieto vety pre konkrétne funkcionálne priestory  $V = H^1(\Omega)$  a  $Y = L_2(\Omega)$ .

Z Relichovej vety 1.28 vieme:

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega).$$

Teraz využijeme dosiahnuté odhady (5.19). Pre ľubovoľné  $m$  (počet delení časového intervalu) máme:

$$\|u_m(t) - u_m(t')\| \leq \|(t - t') \frac{du^m(t)}{dt}\| \leq C|(t - t')|, \quad (5.28)$$

a teda každá funkcia z postupnosti Rotheho funkcií  $u_m(t)$  je Lipschitzovsky spojitá.

Ďalej ak  $t \in I_n$  podľa 5.4 a 5.5 máme

$$\begin{aligned} \|\bar{u}_m(t) - u_m(t)\| &= \|u^{n-1} - (u^{n-1} + \frac{u^n - u^{n-1}}{k}(t - t_{n-1}))\| \leq \\ &\|\frac{u^n - u^{n-1}}{k}\| |(t - t_{n-1})| \leq C|(t - t_{n-1})| \leq Ck = \frac{CT}{m}, \end{aligned} \quad (5.29)$$

čo znamená, že rozdiel Rotheho a schodovitej funkcie rovnomerne konverguje k nule pre  $m \rightarrow \infty$ . Z týchto odhadov a konvergenčnej vety 5.1 vieme, že existuje taká funkcia  $u \in C(I, L_2(\Omega))$ , a podpostupnosť  $\{u_m\}$  (označíme ju tak isto ako pôvodnú postupnosť), pre ktorú platí:

$$u_m \rightarrow u \quad \text{v } C(I, L_2(\Omega)).$$

Navyiac

$$\bar{u}_m(t) \rightharpoonup u(t) \quad \text{v } \mathring{W}_2^1(\Omega) \quad \forall t \in I$$

a teda  $u \in L_\infty(I, H_0^1(\Omega))$  Naviac funkcia  $u : I \rightarrow H_0^1(\Omega)$  je Lipschitzovsky spojitá, a teda  $u$  je slabo a aj silno diferencovateľná pre skoro všetky  $t \in I$  a  $\frac{du}{dt} \in L_\infty(I, L_2(\Omega))$ . Pritom

$$\frac{du_m}{dt} \rightharpoonup \frac{du}{dt} \text{ v } L_2(I, L_2(\Omega))$$

Teraz už len treba ukázať, že táto limita je naše hľadané riešenie.

## 5.5 Limitný prechod

Použijúc zavedené označenia, môžeme prepísať vzťah (5.11) do tvaru

$$\left(\frac{du_m(t)}{dt}, v\right) + (\nabla \bar{u}_m(t), \nabla v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ a skoro všetky } t \in I.$$

Integrujme túto rovnicu na intervale  $(t_1, t_2) \subset I$  a máme

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{du_m(s)}{ds}, v\right) ds + \int_{t_1}^{t_2} (\nabla \bar{u}_m(s), \nabla v) ds = \int_{t_1}^{t_2} (f, v) ds \quad \forall v \in \dot{W}_2^1(\Omega).$$

Teraz urobíme limitný prechod pre  $m \rightarrow \infty$  a vzhľadom na vyššie uvedené konvergencie máme

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{du(s)}{ds}, v) ds + \int_{t_1}^{t_2} (\nabla \bar{u}(s), \nabla v) ds = \int_{t_1}^{t_2} (f, v) ds \quad \forall v \in \dot{W}_2^1(\Omega),$$

pretože

$$(\nabla \bar{u}_m(t), \nabla v) \rightarrow (\nabla u(t), \nabla v) \quad \forall t \in I$$

a

$$|(\nabla \bar{u}_m(t), \nabla v)| \leq C$$

Keďže  $t_1, t_2$  boli ľubovoľné, dostávame

$$\left(\frac{du(t)}{dt}, v\right) + (\nabla u(t), \nabla v) = (f, v) \quad \forall v \in \dot{W}_2^1(\Omega) \text{ a skoro všetky } t \in I \quad (5.30)$$

a  $u(0) = u_0$ , teda  $u$  je slabým riešením nášho problému.

Naviac Ak sú  $u_1$  a  $u_2$  dve slabé riešenia, a teda spĺňajú identitu (5.30), potom ak napíšeme túto identitu pre riešenia  $u_1$  a  $u_2$ , zvolíme  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = t$ ,  $t \in I$  a rovnice odčítame, tak máme

$$\int_0^t \left(\frac{d(u_1(s) - u_2(s))}{ds}, v\right) ds + \int_0^t (\nabla (\bar{u}_1(s) - \bar{u}_2(s)), \nabla v) ds = 0 \quad \forall v \in L_\infty(I, H_0^1(\Omega)).$$

Zvoľme teraz za funkciu  $v(s) = u_1(s) - u_2(s)$ . Prvý výraz upravíme využijúc fakt

$$2 \frac{dz(s)}{ds} z(s) = \frac{d}{ds} (z(s)^2) \quad \forall z \in L_\infty(I, H_0^1(\Omega)) \text{ a } \frac{dz}{dt} \in L_\infty(I, L_2(\Omega)).$$



Potom dostávame

$$\frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{ds} \|u_1(s) - u_2(s)\|^2 ds + \int_0^t \|\nabla(u_1(s) - u_2(s))\|^2 ds = 0,$$

a teda z prvého integrálu máme  $\frac{d}{dt} \|u_1(t) - u_2(t)\|^2 = 0 \quad \forall t \in I$  teda rozdiel riešení je konštantný, ale pretože  $u_1(0) = u_2(0) = u_0$ , máme  $\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 = 0$ . Riešenie je teda jediné a celá podpostupnosť konverguje k funkcii  $u$ , teda slabému riešeniu úlohy.

*Poznámka 5.1.* Stabilitné odhady a následná konvergencia Rotheho metódy nie je vždy takáto jednoduchá. Veľmi užitočným nástrojom je aj Gronwallova lemma. Tu ju uvedieme v diskretnom tvare, ktorá sa pri Rotheho metóde využíva (pozri napríklad [8]).

**Veta 5.3 (Diskrétna Gronwallova lema).** Nech sú dané postupnosti nezáporných reálnych čísel  $\{a_i\}_{i=1}^m, \{A_i\}_{i=1}^m$ , kde postupnosť  $\{A_i\}_{i=1}^m$  je neklesajúca ohraňovaná konštantou  $C$ . Nech existuje konštantna  $L > 0$  a nech  $k < \frac{1}{L}$ . Nech pre ľubovoľné  $i = 1, \dots, m$  platí:

$$a_i \leq A_i + L \sum_{n=1}^i a_n k.$$

Potom platí:

$$a_i \leq C \frac{Lk}{L} e^{(i-1)kLk},$$

kde  $L_k = \frac{L}{1-kL}$ .

Ukážeme použitie diskretnej Gronwallovej lemy pre stabilitné odhady parabolickej úlohy popísanej v (5.1), (5.2), (5.3) s časovo závislou pravou stranou. Vtedy schéma na riešenie eliptického problému má tvar (5.10)

$$\frac{u^n - u^{n-1}}{k} - \Delta u^n = f^n. \quad (5.31)$$

Ak opäť predpokladáme, že máme homogénne Dirichletove podmienky, vynásobme rovnicu (5.31) funkciou  $v \in H_0^1(\Omega)$ , integrujme na oblasti  $\Omega$  a použijúc Greenovu vetu máme (využijeme opäť označenie  $(\cdot, \cdot)$  pre skalárny súčin v priestore  $L_2(\Omega)$ ):

$$\left( \frac{u^n - u^{n-1}}{k}, v \right) + (\nabla u^n, \nabla v) = (f^n, v). \quad (5.32)$$

Položme teraz  $v = ku^n$  a využijúc identitu  $(a-b)a = \frac{1}{2}(a^2 - b^2 + (a-b)^2) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ , dostaneme

$$\frac{1}{2} \|u^n\|^2 + \frac{1}{2} \|u^n - u^{n-1}\|^2 + k \|\nabla u^n\|^2 = \frac{1}{2} \|u^{n-1}\|^2 + k(f^n, u^n).$$

Teraz túto rovnicu vynásobíme hodnotou 2 a sčítame pre  $n = 1, \dots, i$ , kde  $i$  je ľubovoľný index z množiny  $\{1, \dots, m\}$ . Máme

$$\|u^i\|^2 + \sum_{n=1}^i \|u^n - u^{n-1}\|^2 + 2 \sum_{n=1}^i k \|\nabla u^n\|^2 = \|u^0\|^2 + 2 \sum_{n=1}^i k(f^n, u^n).$$

V poslednom člene použijeme Cauchyho-Schwarzovu nerovnosť a odhad

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad (5.33)$$

Dostaneme

$$\begin{aligned} \left| 2 \sum_{n=1}^i k(f^n, u^n) \right| &\leq 2 \sum_{n=1}^i k \|f^n\| \|u^n\| \leq \sum_{n=1}^i k \|f^n\|^2 + \sum_{n=1}^i k \|u^n\|^2 \leq \\ &\|f\|_{L_2(Q_T)}^2 + \sum_{n=1}^i k \|u^n\|^2, \end{aligned}$$

kde sme v poslednom odhade využili definíciu funkcie  $f^n$  a nasledujúce odhady:

Ak  $f^n := f(t_n, x)$ , tak

$$\sum_{n=1}^i k \|f^n\|^2 = \sum_{n=1}^i k \int_{\Omega} f(t_n, x)^2 dx = \sum_{n=1}^i \int_{I_n} \int_{\Omega} f(t_n, x)^2 dx = \int_I \int_{\Omega} f(t, x)^2 dx = \|f\|_{L_2(Q_T)}^2.$$

Ak  $f^n := \frac{1}{k} \int_{I_n} f(t, x) dt$ , tak

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^i k \|f^n\|^2 &= \sum_{n=1}^i k \int_{\Omega} \left( \frac{1}{k} \int_{I_n} f(t, x) dt \right)^2 dx = \sum_{n=1}^i \frac{1}{k} \int_{\Omega} \left( \int_{I_n} 1 dt \int_{I_n} f^2(t, x) dt \right) dx \leq \\ &\sum_{n=1}^i \int_{I_n} \int_{\Omega} f^2(t, x) dx dt = \|f\|_{L_2(Q_T)}^2. \end{aligned}$$

Finálne máme

$$\|u^i\|^2 + \sum_{n=1}^i \|u^n - u^{n-1}\|^2 + 2 \sum_{n=1}^i k \|\nabla u^n\|^2 \leq \|f\|_{L_2(Q_T)}^2 + \|u_0\|^2 + \sum_{n=1}^i k \|u^n\|^2, \quad (5.34)$$

kde sme využili definíciu  $u^0$ . Z tohto odhadu použime

$$\|u^i\|^2 \leq \|f\|_{L_2(Q_T)}^2 + \|u_0\|_{L_2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^i k \|u^n\|^2,$$

Na posledný odhad použijeme vyššie citovanú Gronwalovú lemu pre  $A_i = \|f\|_{L_2(Q_T)}^2 + \|u_0\|_{L_2(\Omega)}^2$  (jedná sa v tomto prípade o konštantnú postupnosť) a  $a_n = \|u^n\|^2$ ,  $L = 1$  a teda, ak  $k < 1$ , platí

$$\|u^i\|^2 \leq \frac{C}{1-k} e^{\frac{(i-1)k}{1-k}},$$

kde  $C = \|f\|_{L_2(Q_T)}^2 + \|u_0\|^2$ . Ak teraz vezmeme  $k < k_0 < 1$ , kde  $k_0$  je pevná konštanta máme pre ľubovoľné  $i = 1, 2, \dots, m$  odhad

$$\|u^i\|^2 \leq \bar{C},$$

kde  $\bar{C} = \frac{1}{1-k_0} \left( \|f\|_{L_2(Q_T)}^2 + \|u_0\|_{L_2(\Omega)}^2 \right) e^{\frac{T}{1-k_0}}$ . Z tohoto dostávame odhad schodovitej funkcie nezávislý na diskretizácii úlohy, ale len na dátach problému. Keď takto odhadneme všetky členy v nerovnosti (5.34), máme

$$\|u^i\|^2 + \sum_{n=1}^i \|u^n - u^{n-1}\|^2 + 2 \sum_{n=1}^i k \|\nabla u^n\|^2 \leq \bar{C}(1+T), \quad (5.35)$$

Z čoho hneď máme odhad na normu schodovitej funkcie a jej gradientu vzhľadom ku priestorovým premenným:

$$\|\bar{u}_m\|_{L_\infty(I, L_2(\Omega))} \leq \bar{C} \quad \text{a} \quad \|\bar{u}_m\|_{L_2(I, H^1(\Omega))} \leq \bar{C}.$$

Ak teraz položíme v rovnici (5.32)  $v = \frac{u^n - u^{n-1}}{k}$ , máme

$$\begin{aligned} \left\| \frac{u^n - u^{n-1}}{k} \right\|^2 + \frac{1}{k} \|\nabla u^n\|^2 &= (f^n, \frac{u^n - u^{n-1}}{k}) + \frac{1}{k} (\nabla u^n, \nabla u^{n-1}) \leq \\ &\|f^n\| \left\| \frac{u^n - u^{n-1}}{k} \right\| + \frac{1}{k} \|\nabla u^n\| \|\nabla u^{n-1}\|. \end{aligned}$$

Opäť využijeme nerovnosť (5.33) na pravej strane a máme

$$\begin{aligned} \|f^n\| \left\| \frac{u^n - u^{n-1}}{k} \right\| + \frac{1}{k} \|\nabla u^n\| \|\nabla u^{n-1}\| &\leq \\ \frac{1}{2} \left( \|f^n\|^2 + \left\| \frac{u^n - u^{n-1}}{k} \right\|^2 + \frac{1}{k} \|\nabla u^n\|^2 + \frac{1}{k} \|\nabla u^{n-1}\|^2 \right). \end{aligned}$$

Úpravou predposlednej nerovnosti využijúc posledný odhad dostaneme po jednoduchých úpravách

$$\left\| \frac{u^n - u^{n-1}}{k} \right\|^2 + \frac{1}{k} \|\nabla u^n\|^2 \leq \|f^n\|^2 + \frac{1}{k} \|\nabla u^{n-1}\|^2.$$

Teraz presumovaním pre  $n = 1, \dots, i$  pre ľubovoľné  $i \in \{1, \dots, m\}$  a vynásobením hodnotou  $k$  máme

$$\sum_{n=1}^i k \left\| \frac{u^n - u^{n-1}}{k} \right\|^2 + \|\nabla u^i\|^2 \leq \|f\|_{L_2(Q_T)}^2 + \|\nabla u^0\|^2.$$

Z týchto odhadov dostávame pre Rotheho a schodovitú funkciu ohraničenosť schodovitej funkcie v priestore  $C(I, W_2^1(\Omega))$  a ohraničenosť derivácie Rotheho funkcie v priestore  $L_2(I, L_2(\Omega))$ . Teda platia predpoklady vety 5.2:

$$\int_I \left\| \frac{du_n(s)}{ds} \right\|_Y^2 ds \leq C, \quad \|\bar{u}_n(t)\|_V \leq C \quad \forall t \in I. \quad (5.36)$$

Túto teraz môžeme použiť pre dôkaz konvergencie aj v tomto prípade.

Rotheho metóda predstavuje vlastne diskretizáciu v premennej  $t$ , teda spravidla v čase. Niekedy hovoríme aj o **semidiskretizácii v čase**. Na získanie numerického riešenia musíme zvoliť aj nejakú numerickú metódu na hľadanie riešenia eliptických problémov. Spojením Rotheho metódy a nejakej numerickej metódy pre výpočet eliptických úloh dostaneme diskretizáciu v čase aj priestore, **úplná diskretizácia**.

V ďalšej časti si ukážeme základné princípy pre diskretizáciu v priestore pomocou metódy konečných objemov.



# Kapitola 6

## Metóda konečných objemov pre parabolické počiatovo- okrajové úlohy

Nosnou literatúrou tejto časti je kniha [6], konkrétne jej štvrtá kapitola.

### 6.1 Lineárny prípad

Na jednoduchom príklade si ukážeme základné princípy metódy konečných objemov (MKO) pre parabolické rovnice.

Uvažujme parabolickú PDR druhého rádu definovanú na časo-priestorovej oblasti

$Q_T = (0, T) \times \Omega$ , kde  $T > 0, T \in \mathbb{R}$ ,

$\Omega$  je polygonálna konvexná ohraničená oblasť v  $\mathbb{R}^N$ ,  $N = 1, 2, 3$ .

Rovnica nech je:

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \Delta u(t, x) + bu(t, x) = f(t, x), \quad t \in (0, T), \quad x \in \Omega \quad (6.1)$$

s okrajovými podmienkami:

$$u(t, s) = g(t, s), \quad t \in (0, T), \quad s \in \partial\Omega \quad (6.2)$$

a počiatočnou podmienkou

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \Omega \quad (6.3)$$

Pre numerickú schému spojíme Rotheho metódu opísanú v kapitole 5 s metódou konečných objemov pre eliptické rovnice, ktorá je opísaná v kapitole 3.

Pripomeňme si, že diskretizácia oblasti  $\Omega$  bude daná tak, ako v kapitole 3. v definícii 3.1 pre priestorovo jedno dimenzionálny prípad a v v definícii 3.3 pre priestorovo dvoj alebo trojdimenzionálny prípad. Budeme používať tie isté označenia. Tu len zopakujeme, že:

**Prípustnú diskretizáciu oblasti**  $\Omega$  budeme označovať  $\mathcal{T}$  a tvorí ju:

- množina polygonálnych konvexných oblastí (kladnej miery) -**konečné objemy**  $K \subset \Omega$  (aj "control volumes"),
- množinu hrán (stien v 3D), konečných objemov, ktoré sú podmnožinou  $\bar{\Omega}$  a označíme ju  $\mathcal{E}$ , všetky sú striktno pozitívnej (N-1) dimenzionálnej miery - **hrany konečných objemov**
- množinu bodov  $\{x_K, K \in \mathcal{T}\}$  -**reprezentatívne body**, ktorú budeme označovať  $\mathcal{P}$ ,

s vlastnosťami a označením popísanými v definícii (3.1), v kapitole 3.

Pripomenieme ešte dôležitú vlastnosť :

$$(x_L - x_K) = d_{\sigma_{K,L}} \mathbf{n}_\sigma, \quad (6.4)$$

kde  $d_{\sigma_{K,L}} = |x_K - x_L|$  a  $\mathbf{n}_\sigma$  je jednotkový vektor vonkajšej normály ku hrane  $\sigma_{K,L}$  vzhľadom na konečný objem  $K$ . Dôležité budú aj niektoré ďalšie označenia:

$$h = \text{size}(\mathcal{T}) = \sup\{\text{diam}(K), K \in \mathcal{T}\},$$

$m(K)$  je N- dimenzionálna miera  $\forall K \in \mathcal{T}$  (pre N=2, plocha  $K$  a pre N=3 objem  $K$ )

$m(\sigma)$  je N-1 dimenzionálna miera  $\forall \sigma \in \mathcal{E}$

$$\mathcal{E}_{int} = \{\sigma \in \mathcal{E}; \sigma \notin \partial\Omega\}$$

$$\mathcal{E}_{ext} = \{\sigma \in \mathcal{E}; \sigma \in \partial\Omega\}$$

$\mathcal{E}_K$  je množina všetkých hrán (stien) konečného objemu  $K$

$$N(K) = \{L \in \mathcal{T}; \text{ existuje } \sigma \in \mathcal{E}_K; \bar{\sigma} = \bar{K} \cap \bar{L}\}$$

Ak  $\sigma = K|L$  tak  $d_\sigma$  alebo  $d_{K,L}$  je euklidovská vzdialenosť bodov  $x_K, x_L$  so spoločnou hranou  $\sigma$ .

Ak  $\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext}$ , potom  $d_\sigma$  je euklidovská vzdialenosť bodu  $x_K$  od hranice  $\partial\Omega$ .

$$\tau_\sigma = \frac{m(\sigma)}{d_\sigma}, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}; d_\sigma \neq 0.$$

Teraz definujeme časovú diskretizáciu analogicky ako je opísaná v kapitole 5.

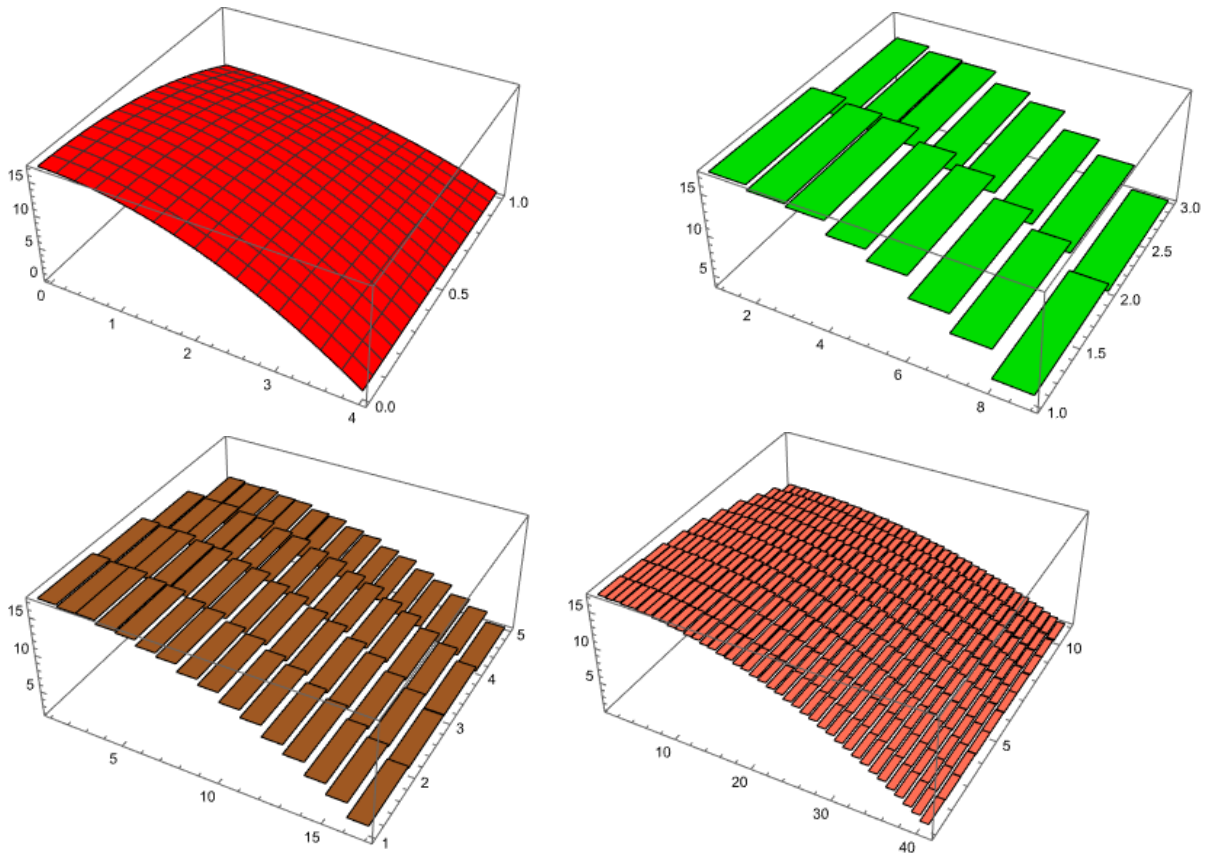
Rozdelíme časový interval  $< 0, T)$  na  $N_T$  časových úsekov

$I_n = < t_{n-1}, t_n >, n = 1, 2, \dots, N_T$ , kde  $t_0 = 0$  a  $t_{N_T} = T$ , pričom  $t_n - t_{n-1} = k$  (nemusí byť rovnomerné delenie) nazývame **časový krok**.

**Definícia 6.1 (Numerické riešenie).** Numerickým riešením parabolického problému (6.1), (6.2), (6.3) pre takto definovanú metódu konečných objemov je po častiach konštantná funkcia, ktorá je daná ako hodnota v reprezentatívnom bode každého konečného objemu v každom časovom reze  $t_n = nk$ , t.j. na časovom intervale  $I_n$ . Budeme ho označovať

$$u_{k,\mathcal{T}}(t, x) = u_K^n, \quad x \in K, t \in I_n.$$

Na obrázku 6.1 môžeme vidieť presné riešenie parabolickej úlohy v priestorovo jednodimenzionálnom prípade. Časový interval je  $\langle 0, 1 \rangle$  a priestor tvorí interval  $\langle 0, 4 \rangle$  a jeho numerické aproximácie založené na Rotheho metóde a metóde konečných objemov s postupným zjemňovaním časového a priestorového kroku. Pri presnom riešení označujú osi priestorový interval  $\langle 0, 4 \rangle$  a časový interval  $\langle 0, 1 \rangle$ , pri numerických riešeníach počet deliacich bodov v priestore a čase.



Obr. 6.1. Skutočné riešenie (červená, vľavo hore), numerické riešenie pre  $k = h = 0, 5$  (zelená, vpravo hore) numerické riešenie pre  $k = h = 0, 25$  (hnedá, vľavo dole) a numerické riešenie pre  $k = h = 0, 1$  (ružová, vpravo dole).

Uvedomme si, že takto definované riešenie možno chápať aj ako množinu bodov

$$\{u_K^n; K \in \mathcal{T}, n = 0, \dots, N_T\}.$$

### Odvodenie numerickej schémy.

Numerickej schéma je založená na integrácii parabolickej rovnice na ľubovoľnom konečnom objeme  $K \in \mathcal{T}$  a ľubovoľnom časovom intervale  $I_n$ . V našom prípade teda integrujeme rovnicu (6.1) na konečnom objeme  $K$  a časovom intervale  $I_n$ . Využitím Newtonovho-Leibnizovho vzorca (prvý integrál) a Greenovej vety (druhý integrál) dostávame analo-



gicky ako v kapitole 3:

$$\int_K (u(t_n, x) - u(t_{n-1}, x)) dx - \int_{I_n} \int_{\partial K} \nabla u(t, s) \cdot \mathbf{n}_{\partial K}(s) ds dt + \int_{I_n} \int_K bu(t, x) dx dt = \int_{I_n} \int_K f(t, x) dx dt \quad (6.5)$$

Teraz dáme dohromady poznatky získané z numeriky eliptických rovníc ako aj Rotheho metódy. Zavedieme označenia:

$$f_K^n = \frac{1}{km(K)} \int_{I_n} \int_K f(t, x) dx dt, \forall K \in \mathcal{T} \quad \forall n = 1, \dots, N_T. \quad (6.6)$$

V závislosti od regularity pravej strany môžeme integrál na pravej strane aproximovať aj takto:

$$f_K^n = \frac{1}{m(K)} \int_K f(t_n, x) dx, \forall K \in \mathcal{T} \quad \forall n = 1, \dots, N_T. \quad (6.7)$$

Keďže naše numerické riešenie je po častiach konštantná funkcia, tretí integrál v rovnici (6.5) môžeme aproximovať takto:

$$bu_K^n m(K)k.$$

Treba si uvedomiť, že na aproximáciu numerického riešenia sa môžeme dívať aj ako

$$u_K^n \approx \frac{1}{m(K)k} \int_{I_n} \int_K u(t, x) dx dt, \forall K \in \mathcal{T} \quad \forall n = 0, \dots, N_T.$$

V prvom člene (6.5), použijúc diferenciu ako v Rotheho metóde, dostaneme

$$m(K)k \frac{u_K^n - u_K^{n-1}}{k}$$

Druhý člen na ľavej strane (6.5) aproximujeme analogicky ako pri eliptických rovniciach s tým dodatkom, že vezmeme hodnotu  $t_n$  v diskretizácii (implicitná schéma).

Nech  $\sigma = \sigma_{K|L} \in \mathcal{E}_{int}$

$$\int_{I_n} \int_{\sigma} \nabla u(t, s) \cdot \mathbf{n}_{\sigma}(s) ds dt \approx \frac{(u_L^n - u_K^n)}{d_{\sigma}} m(\sigma)k = (u_L^n - u_K^n) \tau_{K|L} k.$$

Nech  $\sigma = \sigma_{K|L} \in \mathcal{E}_{ext}$

$$\int_{I_n} \int_{\sigma} \nabla u(s) \cdot \mathbf{n}_{\sigma}(s) ds \approx \frac{(g(y_{\sigma}, t_n) - u_K^n)}{d_{\sigma}} m(\sigma)k = (g(y_{\sigma}, t_n) - u_K) \tau_{\sigma} k.$$

Teda ak definujeme

$$\begin{aligned} F_{K,\sigma}^n &= -\tau_{K|L}(u_L^n - u_K^n), \forall \sigma = K|L \in \mathcal{E}_{int}, \\ F_{K,\sigma}^n &= -\tau_\sigma(g(y_\sigma, t_n) - u_K^n), \forall \sigma \in \mathcal{E}_{ext} \cap \mathcal{E}_K \end{aligned} \quad (6.8)$$

naša numerická scéma bude mať tvar

$$\begin{aligned} m(K) \frac{u_K^n - u_K^{n-1}}{k} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma}^n + bm(K)u_K^n &= m(K)f_K^n \\ \forall K \in \mathcal{T} \quad n &= 1, \dots, N_T. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Počiatkové hodnoty  $u_K^0$  pre  $K \in \mathcal{T}$  môžeme zase definovať rôznym spôsobom v závislosti od regularity počiatkovej podmienky. Napríklad:

$$u_K^0 := \frac{1}{m(K)} \int_K u_0(x) dx, \forall K \in \mathcal{T} \quad (6.10)$$

alebo

$$u_K^0 := u_0(x_K) \forall K \in \mathcal{T}. \quad (6.11)$$

*Poznámka 6.1.* Pre dôkaz nasledujúcej vety použijeme aproximáciu pravej strany v tvare (6.7) a aproximáciu počiatkovej podmienky v tvare (6.11).

Pre takto definovanú úlohu môžeme analogicky, ako sme urobili pre jednodimenzionálny eliptický prípad, sformulovať vetu o odhade chyby riešenia v prípade, že úloha má klasické riešenie (pozri [6] strana 843, veta 17.1).

**Veta 6.1 (Odhad chyby).** Nech  $T > 0$ ,  $T \in \mathbb{R}$  a  $\Omega$  je polygonálna konvexná ohraničená oblasť v  $\mathbb{R}^N$ ,  $N = 1, 2, 3$ . Nech  $u \in C^2(\mathbb{R}_{0,+} \times \bar{\Omega})$ ,  $b \geq 0$  a  $u_0 \in C^2(\bar{\Omega})$  definované ako  $u_0(\cdot) = u(0, \cdot)$ . Nech  $f \in C(\mathbb{R}_{0,+} \times \bar{\Omega})$  definovaná ako  $f = \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \Delta u(t,x) + bu(t,x)$  a  $g \in C(\mathbb{R}_{0,+}, \partial\Omega)$  je definovaná ako  $g = u$  na  $\mathbb{R}_{0,+} \times \bar{\Omega}$ . Nech  $\mathcal{T}$  je prípustná diskretizácia v zmysle definícií 3.1 alebo 3.3 a  $k \in (0, T)$ . Potom existuje jediné numerické riešenie úlohy (6.9),(6.8), (6.10),(6.11) a existuje také  $C \geq 0$ , závislé len od riešenia,  $u_0, f, g, b$ , že platí:

$$\sup\{|u_K^n|, K \in \mathcal{T}, n = 1, \dots, N_T\} \leq C. \quad (6.12)$$

Naviac, ak  $e_K^n = u(t_n, x_K) - u_K^n$ ,  $K \in \mathcal{T}, n = 1, \dots, N_T$ , potom existuje také  $C \geq 0$ , závislé len od riešenia,  $u_0, f, g, b$ , že platí:

$$\left( \sum_{K \in \mathcal{T}} (e_K^n)^2 m(K) \right)^{\frac{1}{2}} \leq C(h + k), \forall n \in \{1, \dots, N_T\}. \quad (6.13)$$

(Hodnota  $k$  predstavuje veľkosť časového kroku a hodnota  $h$  je maximálny diameter zo všetkých diametrov konečných objemov  $K$ .)

*Dôkaz.* Najskôr ukážeme existenciu, jednoznačnosť a odhad numerického riešenia v priestore  $L_\infty$ , teda vzťah (6.12). Použijeme analogickú argumentáciu ako v eliptickom prípade.

Teda ak si uvedomíme, že numerické riešenie je dané sústavou lineárnych rovníc (6.9), pre existenciu a jednoznačnosť riešenia treba ukázať, že ak je pravá strana tejto sústavy nulová, musí existovať jedine nulové riešenie. Nech pre dané  $n \in \{0, \dots, N_T\}$  je  $f_K^n = 0$ ,  $u_K^{n-1} = 0$  a  $g(y_\sigma, nk) = 0$  pre všetky  $\sigma \in \partial\Omega$ . Vynásobíme teda rovnicu (6.9) hodnotou  $u_K^n$  a použijeme podobnú techniku ako pri dôkaze pre eliptickú rovnicu (veta 3.1). Po vynásobení rovnice s prihliadnutím na fakt, že platí  $f_K^n = 0$ ,  $u_K^n = 0$  a  $g(y_\sigma, nk) = 0$  hneď máme

$$m(K) \frac{(u_K^n)^2}{k} - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma}^n u_K^n + bm(K)(u_K^n)^2 = 0.$$

Teraz sčítame tieto rovnice cez všetky konečné objemy.

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) \frac{(u_K^n)^2}{k} - \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma}^n u_K^n + \sum_{K \in \mathcal{T}} bm(K)(u_K^n)^2 = 0.$$

a pre stredný člen využijeme vlastnosť konzistencie pre konečné objemy:

$$\begin{aligned} F_{K,\sigma}^n u_K^n &= -\tau_{K|L}(u_L^n - u_K^n)u_K^n, \forall \sigma = K|L \in \mathcal{E}_{int}, \\ F_{L,\sigma}^n u_K^n &= -\tau_{K|L}(u_K^n - u_L^n)u_L^n, \forall \sigma = K|L \in \mathcal{E}_{int}, \\ F_{K,\sigma}^n &= \tau_\sigma (u_K^n)^2, \forall \sigma \in \mathcal{E}_{ext} \cap \mathcal{E}_K \end{aligned}$$

Z vyššie uvedeného vidíme, že v strednom člene môžeme presumovať rovnaké členy po jednotlivých hranách konečných objemov a dostaneme

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) \frac{(u_K^n)^2}{k} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{K|L}(u_L^n - u_K^n)^2 + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} (u_K^n)^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}} bm(K)(u_K^n)^2 = 0.$$

Keďže na ľavej strane tejto rovnice máme všetky členy nezáporné a na pravej strane je nula, ihneď dostávame, že

$$u_K^n = 0 \text{ pre všetky } K \in \mathcal{T}.$$

Teda dostávame nulové riešenie.

Dokážeme odhad (6.12). Nech pre  $n \in \{0, \dots, N_T\}$  sa minimum dosahuje v konečnom objeme  $K_n$ . Potom z rovnice (6.9) pre  $K = K_n$  máme

$$m(K_n) \frac{u_{K_n}^n - u_{K_n}^{n-1}}{k} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K_n}} \tau_{K_n|L}(u_{K_n}^n - u_L^n) + bm(K_n)u_{K_n}^n = m(K_n)f_{K_n}^n,$$

alebo

$$u_{K_n}^n + \frac{k}{m(K_n)} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K_n}} \tau_{K_n|L}(u_{K_n}^n - u_L^n) + bk u_{K_n}^n = u_{K_n}^{n-1} + k f_{K_n}^n,$$

Ak by bol konečný objem  $K_n$  s jednou alebo viacerými hranami patriacimi hranici oblasti  $\partial\Omega$  v sumácii cez hranicu sa miesto  $u_L^n$  bude nachádzať hodnota z Dirichletovej podmienky. Ak teraz platí, že

$$u_{K_n}^n < 0 \text{ a } u_{K_n}^n < m_g,$$

kde

$$m_g = \min\{g(s, t), s \in \partial\Omega, t \in \langle 0, 2T \rangle\}$$

a keďže hodnota  $u_{K_n}^n$  je minimom, druhý člen v rovnici je záporný a hneď dostávame

$$u_{K_n}^n \geq u_{K_n}^{n-1} + kf_{K_n}^n \geq \min\{u_K^{n-1}, K \in \mathcal{T}\} + km_f,$$

kde

$$m_f = \min\{f(x, t), x \in \Omega, t \in \langle 0, 2T \rangle\}.$$

Záverom preto

$$u_{K_n}^n \geq \min\{\min\{u_K^{n-1}, K \in \mathcal{T}\} + km_f, 0, m_g\},$$

Z tohto odhadu indukciou hneď máme

$$\min\{u_K^n, K \in \mathcal{T}\} \geq \min\{\min\{u_0(x), x \in \Omega\}, 0, m_g\} + nk \min\{m_f, 0\} \quad \forall n \in \{0, \dots, N_T\}.$$

Teraz sa analogický odhad urobí aj pre maximum a záverom dostávame

$$\sup\{|u_K^n|, K \in \mathcal{T}, n = 1, \dots, N_T\} \leq \|u_0\|_{L_\infty(\Omega)} + \|g\|_{L_\infty(\langle 0, 2T \rangle \times \partial\Omega)} + 2T\|f\|_{L_\infty(\langle 0, 2T \rangle \times \Omega)}.$$

Zostáva dokázať odhad chyby numerického a presného riešenia, teda vzťah (6.13). Myšlienka dôkazu je podobná ako v eliptickom prípade. Teda využijeme regularitu dát a riešenia danej parabolickej úlohy a pre chybu  $e_K^n = u(t_n, x_K) - u_K^n$  definovanú pre  $K \in \mathcal{T}$  a  $n \in \{0, \dots, N_T\}$  odvodíme rovnicu jej riešenia. Navyiac z definície numerického riešenia (vzťah (6.11)), hneď máme

$$e_K^0 = 0, K \in \mathcal{T} \quad \forall K \in \mathcal{T}.$$

Rovnicu odvodíme analogicky, ako v eliptickom prípade. Teda integráciou rovnice parabolického problému (6.1) na ľubovoľnom  $K \in \mathcal{T}$  v čase  $t_n$ , kde využijeme Greenovu vetu a definíciu (6.7):

$$\int_K \frac{\partial u(t_n, x)}{\partial t} dx - \int_{\partial K} \nabla u(t_n, s) \cdot \mathbf{n}_{\partial K}(s) ds + \int_K bu(t_n, x) dx = m(K)f_K^n. \quad (6.14)$$

V prípade regularity presného riešenia problému (6.1) z Taylorovho rozvoja pre ľubovoľné  $x \in K, K \in \mathcal{T}$  máme

$$\frac{\partial u(t_n, x)}{\partial t} = \frac{u(t_n, x_K) - u(t_{n-1}, x_k)}{k} + s_K^n(x), \quad \text{kde } |s_K^n(x)| \leq C_1(h + k),$$

kde  $C_1$  je konštanta závislá len na riešení  $u$  a veľkosti časového intervalu  $T$ . Teraz definujeme

$$S_K^n = \int_K s_K^n(x) dx,$$

pre ktorý platí:

$$|S_K^n| \leq C_1 m(K)(h + k). \quad (6.15)$$

Prvý člen rovnice (6.14) sa teraz dá upraviť do tvaru

$$\frac{u(t_n, x_K) - u(t_{n-1}, x_K)}{k} m(K) + S_K^n(x).$$

Druhý člen rovnice zapíšeme ako

$$\int_{\partial K} \nabla u(t_n, s) \cdot \mathbf{n}_{\partial K}(s) ds = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_{\sigma} \nabla u(t_n, s) \cdot \mathbf{n}_{\partial \sigma}(s) ds$$

Pre jednotlivé hrany odvodíme

$$\nabla u(t_n, s) \cdot \mathbf{n}_{\partial \sigma}(s) = \frac{u(t_n, x_K) - u(t_n, x_L)}{d_{\sigma}} + R_{K, \sigma}^n,$$

ak  $\sigma = K|L$  je vnútorná hrana konečného objemu  $K$ , alebo

$$\nabla u(t_n, s) \cdot \mathbf{n}_{\partial \sigma}(s) = \frac{u(t_n, x_K) - g(t_n, y_{\sigma})}{d_{\sigma}} + \bar{R}_{K, \sigma}^n,$$

ak  $\sigma$  je hrana konečného objemu  $K$  ležiaca na hranici oblasti  $\Omega$ , kde

$$m(\sigma) R_{K, \sigma}^n = \int_{\sigma} \nabla u(t_n, s) \cdot \mathbf{n}_{\partial \sigma}(s) ds - (u(t_n, x_K) - u(t_n, x_L)) \tau_{\sigma}$$

a

$$m(\sigma) \bar{R}_{K, \sigma}^n = \int_{\sigma} \nabla u(t_n, s) \cdot \mathbf{n}_{\partial \sigma}(s) ds - (u(t_n, x_K) - g(t_n, y_{\sigma})) \tau_{\sigma}.$$

Tretí člen na ľavej strane (6.14) upravíme

$$\int_K bu(t_n, x) dx = bu(t_n, x_K) m(K) + bm(K) \rho_K^n$$

kde

$$\rho_K^n = \frac{1}{m(K)} \int_K u(t_n, x) dx - u(t_n, x_K)$$

Po týchto úpravách môžeme prepísať rovnicu (6.14) do tvaru

$$\begin{aligned} & \frac{u(t_n, x_K) - u(t_{n-1}, x_K)}{k} m(K) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{int}} (u(t_n, x_K) - u(t_n, x_L)) \tau_{K|L} + \\ & \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext}} (u(t_n, x_K) - g(t_n, y_{\sigma})) \tau_{\sigma} + bu(t_n, x_K) m(K) = \\ & m(K) f_K^n - S_K^n(x) - bm(k) \rho_K^n - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) R_{K, \sigma}^n - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext}} m(\sigma) \bar{R}_{K, \sigma}^n \end{aligned} \quad (6.16)$$

Rovnica numerickej schémy (6.9) s tokmi definovanými v (6.8) má  $\forall K \in \mathcal{T}, \forall \sigma \in \mathcal{E}, n = 1, \dots, N_T$  tvar

$$\begin{aligned} & m(K) \frac{u_K^n - u_K^{n-1}}{k} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{int}} (u_K^n - u_L^n) \tau_{K|L} + \\ & \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext}} (u_K^n - g(y_{\sigma}, t_n)) \tau_{\sigma} + bm(K) u_K^n = m(K) f_K^n. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Teraz, analogicky ako v eliptickom prípade odčítame od rovnice (6.16) rovnicu (6.17) a dostaneme

$$m(K) \frac{e_K^n - e_K^{n-1}}{k} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{int}} (e_K^n - e_L^n) \tau_{K|L} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext}} (e_K^n) \tau_\sigma + bm(K) e_K^n = -S_K^n(x) - bm(k) \rho_K^n - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) R_{K,\sigma}^n - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext}} m(\sigma) \bar{R}_{K,\sigma}^n. \quad (6.18)$$

Pre jednotlivé členy na pravej strane poslednej rovnice platí odhad (6.15) a využijúc regularitu riešenia a Taylorov rozvoj aj:

$$|R_{K,\sigma}^n| + |\bar{R}_{K,\sigma}^n| + |\rho_K^n| \leq C_2 h, \quad (6.19)$$

kde  $C_2$  je konštanta závislá len na riešení  $u$  a veľkosti časového intervalu  $T$  (podrobnejšie pozri [6] strana 781, veta 9.3).

Vynásobíme teraz rovnicu (6.18) hodnotou  $e_K^n$  a sčítame cez všetky konečné objemy a dostaneme po úprave využijúc vlastnosť konečných objemov, ako sme urobili v prípade eliptických rovníc

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) \frac{e_K^n - e_K^{n-1}}{k} e_K^n + \sum_{\sigma \in \mathcal{E} \cap \mathcal{E}_{int}} (e_K^n - e_L^n)^2 \tau_{K|L} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E} \cap \mathcal{E}_{ext}} (e_K^n)^2 \tau_\sigma + \\ \sum_{K \in \mathcal{T}} bm(K) (e_K^n)^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}} (-S_K^n(x) - bm(k) \rho_K^n) e_K^n \\ - \sum_{K \in \mathcal{T}} \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) R_{K,\sigma}^n - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext}} m(\sigma) \bar{R}_{K,\sigma}^n \right) e_K^n. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Prvý člen na pravej strane rovnice môžeme odhadnúť použijúc vzťahy (6.15) a (6.19)

$$\begin{aligned} \left| \sum_{K \in \mathcal{T}} (-S_K^n(x) - bm(k) \rho_K^n) e_K^n \right| \leq C_1 (h+k) \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) |e_K^n| + C_2 b h \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) |e_K^n| \\ \leq C_1 (h+k) \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) |e_K^n| + C_3 h^2 + \frac{b}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) |e_K^n|^2, \end{aligned}$$

kde sme v druhej časti odhadu použili aj a jednoduchý odhad

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}, a, b \in \mathbb{R}. \quad (6.21)$$

pričom  $C_3$  je konštanta závislá len od riešenia  $u$  hodnôt  $b, m(\Omega)$  a veľkosti časového intervalu  $T$ . Využijúc tento odhad v rovnici (6.20) po roznásobení prvého člena na ľavej strane máme

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) \frac{(e_K^n)^2}{k} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E} \cap \mathcal{E}_{int}} (e_K^n - e_L^n)^2 \tau_{K|L} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E} \cap \mathcal{E}_{ext}} (e_K^n)^2 \tau_\sigma + \\ \frac{b}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) (e_K^n)^2 \leq \frac{1}{k} \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) |e_K^n e_K^{n-1}| + C_1 (h+k) \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) |e_K^n| + C_3 h^2 + \end{aligned}$$

$$\left| \sum_{K \in \mathcal{T}} \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) R_{K,\sigma}^n e_K^n + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext}} m(\sigma) \bar{R}_{K,\sigma}^n e_K^n \right) \right|$$

Na posledné členy v tomto odhade použijeme teraz analogickú techniku ako sa využíva aj v eliptickom prípade, kde opäť využijeme odhad (6.19) a techniku sumácie cez hrany konečných objemov, ktoré umožňujú zlúčiť aj chyby  $R_{K,\sigma}^n$  a  $\bar{R}_{L,\sigma}^n$  do spoločného člena, ktorý označíme  $R_\sigma^n$  a podobne aj pre hrany na hranici oblasti  $\Omega$ . Použijeme analogické označenie ako pri diskkrétnej  $H_0^1$  norme z definície 3.5):

$$\begin{aligned} \tau_\sigma &= \frac{m(\sigma)}{d_\sigma}, \\ D_\sigma e^n &= |e_K^n - e_L^n|, \text{ ak } \sigma \in \mathcal{E}_{int}, \sigma = K|L, \\ D_\sigma e^n &= |e_K^n - g(t_n, y_\sigma)|, \text{ ak } \sigma \in \mathcal{E}_{ext} \cap \mathcal{E}_K \end{aligned}$$

a dostávame

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{K \in \mathcal{T}} \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) R_{K,\sigma}^n e_K^n + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext}} m(\sigma) \bar{R}_{K,\sigma}^n e_K^n \right) \right| \\ & \leq \sum_{\sigma \in \mathcal{E} \cap \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) |R_\sigma^n| |D_\sigma e^n| + \sum_{\sigma \in \mathcal{E} \cap \mathcal{E}_{ext}} m(\sigma) |\bar{R}_\sigma^n| |D_\sigma e^n| \leq \\ & \leq \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \frac{m(\sigma)}{d_\sigma} (D_\sigma e^n)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} m(\sigma) d_\sigma (C_2 h)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \sqrt{C_2} N m(\Omega) h \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \frac{m(\sigma)}{d_\sigma} (D_\sigma e^n)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_4 h^2 + \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \frac{m(\sigma)}{d_\sigma} (D_\sigma e^n)^2 = \\ & C_4 h^2 + \frac{1}{2} \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{E} \cap \mathcal{E}_{int}} (e_K^n - e_L^n)^2 \tau_{K|L} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E} \cap \mathcal{E}_{ext}} (e_K^n)^2 \tau_\sigma \right), \end{aligned}$$

kde sme využili Cauchyho-Schwarzovu nerovnosť a odhad (6.19) a v ďalšom postupe fakt, že  $\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} m(\sigma) d_\sigma = N m(\Omega)$ , kde  $N$  je dimenzia priestoru. (platí pre polygonálnu konvexnú oblasť  $\Omega$  (pozri [6] strana 843, veta 17.1) a odhad (6.21).

Pritom  $C_4$  je konštanta závislá len od riešenia  $u$  hodnoty  $m(\Omega)$ , dimenzii  $N$  a veľkosti časového intervalu  $T$ .

Po úprave dostaneme

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k} \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) (e_K^n)^2 + \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E} \cap \mathcal{E}_{int}} (e_K^n - e_L^n)^2 \tau_{K|L} + \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E} \cap \mathcal{E}_{ext}} (e_K^n)^2 \tau_\sigma + \frac{b}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) (e_K^n)^2 \\ & \leq \frac{1}{k} \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) (e_K^n e_K^{n-1}) + C_1 (h+k) \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) e_K^n + C_4 h^2. \end{aligned}$$

Analogicky ako pre numerické riešenie definujeme aj chybovú funkciu

$$e_{\mathcal{T}}^n(x) = e_K^n, x \in K, K \in \mathcal{T}$$

a použijúc definíciu diskkrétnej  $H_0^1$  normy 3.5 dostaneme

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k} \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K)(e_K^n)^2 + \frac{1}{2} \|e_{\mathcal{T}}^n\|_{1, \mathcal{T}}^2 + \frac{1}{2} b \|e_{\mathcal{T}}^n\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ & \leq \frac{1}{k} \left| \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) e_K^n e_K^{n-1} \right| + C_1(h+k) \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) e_K^n + C_4 h^2. \end{aligned}$$

Teraz na ľavej strane vynecháme druhý a tretí člen, pretože sú nezáporné a celú nerovnicu vynásobíme  $k$ .

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} m(K)(e_K^n)^2 \leq \left| \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) e_K^n e_K^{n-1} \right| + C_1 k(h+k) \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) e_K^n + C_4 k h^2.$$

Keď uvážime, že prvý člen na ľavej strane nerovnosti predstavuje vlastne druhú mocninu normy chybovej funkcie v priestore  $L_2(\Omega)$  a prvý člen na pravej strane zase skalárny súčin dvoch chybových funkcií v  $L_2(\Omega)$  môžeme napísať

$$\|e_{\mathcal{T}}^n\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq |(e_{\mathcal{T}}^n, e_{\mathcal{T}}^{n-1})_{L_2(\Omega)}| + C_1 k(h+k) \|e_{\mathcal{T}}^n\|_{L_2(\Omega)}^2 + C_4 k h^2. \quad (6.22)$$

Na prvý člen na pravej strane použijeme Cauchyho-Schwarzovu nerovnosť a (6.21):

$$|(e_{\mathcal{T}}^n, e_{\mathcal{T}}^{n-1})_{L_2(\Omega)}| \leq \|e_{\mathcal{T}}^n\|_{L_2(\Omega)} \|e_{\mathcal{T}}^{n-1}\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{1}{2} \|e_{\mathcal{T}}^{n-1}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|e_{\mathcal{T}}^n\|_{L_2(\Omega)}^2$$

Po úprave máme z (6.22)

$$\|e_{\mathcal{T}}^n\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \|e_{\mathcal{T}}^{n-1}\|_{L_2(\Omega)}^2 + 2C_1 k(h+k) \|e_{\mathcal{T}}^n\|_{L_2(\Omega)} + 2C_4 k h^2. \quad (6.23)$$

Použijeme nerovnosť  $2ab \leq \varepsilon^2 a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon^2}$ , pre všetky  $a, b, \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$  a dostávame

$$2C_1 k(h+k) \|e_{\mathcal{T}}^n\|_{L_2(\Omega)} \leq \varepsilon^2 \|e_{\mathcal{T}}^{n-1}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} C_1^2 k^2 (h+k)^2.$$

Po dosadení do (6.23) máme

$$\|e_{\mathcal{T}}^n\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \|e_{\mathcal{T}}^{n-1}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \varepsilon^2 \|e_{\mathcal{T}}^n\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} C_1^2 k^2 (h+k)^2 + 2C_4 k h^2. \quad (6.24)$$

Zvoľme teraz  $\varepsilon^2 = \frac{k}{k+1}$  a z (6.24) po vynásobení hodnotou  $k+1$  dostaneme

$$\|e_{\mathcal{T}}^n\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq (k+1) \|e_{\mathcal{T}}^{n-1}\|_{L_2(\Omega)}^2 + C_1^2 k(h+k)^2 (k+1)^2 + 2C_4 k h^2 (k+1). \quad (6.25)$$

Ak by

$$\|e_{\mathcal{T}}^{n-1}\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c_{n-1} (h+k)^2$$

pre  $c_{n-1} \in \mathbb{R}_+$ , potom z (6.25), kde použijeme  $h \leq h+k$  a  $k < T$ , máme

$$\|e_{\mathcal{T}}^n\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c_n (h+k)^2$$

pre

$$c_n = (1+k)c_{n-1} + C_5 k,$$



kde  $C_5 = 2C_4(1 + T) + C_1^2(1 + T)^2$  je konštanta závislá len od riešenia  $u$  hodnôt  $b, \Omega$  (z vlastností konštánt  $C_1$  a  $C_4$ ) a veľkosti časového intervalu  $T$ .

Teraz, ak si uvedomíme, že  $c_0 = 0$ , pretože  $\|e_{\mathcal{T}}^0\|_{L_2(\Omega)} = 0$ , zo vzťahu pre  $c_n$  a  $c_{n-1}$  indukciou máme

$$c_n \leq (1 + k)^2 c_{n-2} + (1 + k)C_5 + C_5 k \leq (1 + k)^3 c_{n-3} + (1 + k)^2 C_5 k + (1 + k)C_5 k + C_5 k \leq$$

$$(1 + k)^n c_0 + \sum_{m=1}^n (1 + k)^m C_5 \leq \sum_{m=1}^n ((1 + k)^{\frac{1}{k}})^{mk} C_5 \leq C_5 e^{2kn} \leq C_5 e^{2T}.$$

Teda vzťah (6.13) dostávame pre  $C^2 = C_5 e^{4T}$  □

## 6.2 Nelineárny prípad

Uvažujme parabolickú PDR druhého rádu definovanú na časo-priestorovej oblasti  $Q_T = \langle 0, T \rangle \times \Omega$ , kde  $T > 0, T \in \mathbb{R}, \Omega$  je polygonálna konvexná ohraničená oblasť v  $\mathbb{R}^N, N = 1, 2, 3$  s rovnicou

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \Delta \varphi(u(t, x)) = f(t, x), \quad t \in (0, T), \quad x \in \Omega \quad (6.26)$$

s okrajovými podmienkami:

$$\nabla \varphi(u(t, s)) \cdot \mathbf{n}(s) = 0, \quad t \in \langle 0, T \rangle, \quad s \in \partial\Omega, \quad (6.27)$$

kde  $\mathbf{n}(s)$  je jednotkový vektor vonkajšej normály ku  $\partial\Omega$  a počiatočnou podmienkou

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (6.28)$$

kde pre dáta úlohy platia

**Predpoklady (P):**

- $T > 0, T \in \mathbb{R}, \Omega$  je polygonálna konvexná ohraničená oblasť v  $\mathbb{R}^N, N = 1, 2, 3$ .
- $\varphi \in C(\mathbb{R})$  je neklesajúca lokálne Lipschitzovsky spojitá funkcia
- $u_0 \in L_\infty(\Omega)$
- $f \in L_\infty(\langle 0, T \rangle \times \Omega)$  s kladnými reálnymi hodnotami.

*Poznámka 6.2.* Takto definovaný nelineárny problém môže byť degenerovaný t.j. difúzny člen môže byť nulový.

Slabé riešenie tohoto problému je definované takto:

**Definícia 6.2 (Slabé riešenie).** Nech platia predpoklady (P). Funkciu  $u \in L_\infty(\langle 0, T \rangle, \Omega)$  nazývame slabým riešením problému (6.26),(6.27),(6.28), ak platí nasledujúca integrálna

identita

$$\int_0^T \int_{\Omega} \left( u(t, x) \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} + \varphi(u(t, x)) \Delta v + f(t, x) v(t, x) \right) dx dt \quad (6.29)$$

$$+ \int_{\Omega} u_0(x) v(0, x) dx = 0, \quad (6.30)$$

pre všetky funkcie  $v \in C^1(< 0, T), C^2(\bar{\Omega}))$  také, že  $\nabla v \cdot \mathbf{n} = 0$  na  $< 0, T) \times \partial\Omega$  a také, že  $v(T, x) = 0$  pre všetky  $x \in \Omega$ .

*Poznámka 6.3.* Takto definované slabé riešenie sa často v odbornej literatúre nazýva aj veľmi slabé riešenie.

Aj v tejto časti budeme predpokladať, že máme prípustnú mriežku a taktiež diskretizáciu v čase. Budeme používať aj všetky označenia z predchádzajúcej časti. Za týchto predpokladov môžeme skonštruovať analogicky aj numerickú schému pre nelineárny prípad. Jediná zmena bude v nelineárnom člene, kde máme dve možnosti:

- Vypočítať nelinearitu v predchádzajúcom časovom kroku a získame **explicitnú schému**. Nevýhodou každej explicitnej schémy je jej podmienená stabilita.
- Vypočítať nelinearitu v počítanom časovom kroku a získame **implicitnú schému**. Nevýhodou takejto implicitnej schémy je, že výsledný algebraický systém rovníc je nelineárny.

Numerickú schému pre nelineárny prípad dostaneme analogicky ako v lineárnom prípade. Teda predpoklady pre výpočtovú oblasť a diskretizáciu budú také isté ako v predchádzajúcej časti. Tak isto aj definícia numerického riešenia. Jediná (podstatná) zmena sa bude týkať difúzneho člena.

V tomto prípade teda máme pre  $l = n$  - implicitná schéma alebo  $l = n - 1$  - explicitná schéma podobne ako v predchádzajúcej časti pre  $\sigma = \sigma_{K|L} \in \mathcal{E}_{int}$

$$\int_{I_n} \int_{\sigma} \nabla \varphi(u(t, s)) \cdot \mathbf{n}_{\sigma}(s) ds dt \approx \frac{\varphi(u_L^l) - \varphi(u_K^l)}{d_{\sigma}} m(\sigma) k = (\varphi(u_L^l) - \varphi(u_K^l)) \tau_{K|L} k.$$

Keďže v tomto prípade máme homogénne Neumannove podmienky pre  $\sigma = \sigma_{K|L} \in \mathcal{E}_{ext}$  je tento integrál nulový, takže v schéme sa nebude vyskytovať.

### Explicitná schéma

Numerická scéma bude mať v tomto prípade tvar

$$m(K) \frac{u_K^n - u_K^{n-1}}{k} - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} (\varphi(u_L^{n-1}) - \varphi(u_K^{n-1})) \tau_{K|L} = m(K) f_K^{n-1} \quad \forall K \in \mathcal{T}, n = 1, \dots, N_T. \quad (6.31)$$

## Implicitná schéma

$$m(K) \frac{u_K^n - u_k^{n-1}}{k} - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} (\varphi(u_L^n) - \varphi(u_K^n)) \tau_{K|L} = m(K) f_K^n \quad \forall K \in \mathcal{T}, n = 1, \dots, N_T. \quad (6.32)$$

V tomto prípade sa existencia jediného numerického riešenia ukáže pomocou metódy pevného bodu [6], ktorá sa dá zároveň aplikovať aj ako iteračná metóda na výpočet numerického riešenia:

$$u_K^{n,0} = u_K^{n-1},$$

$$m(K) \frac{u_K^{n,m} - u_k^{n-1}}{k} - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} (\varphi(u_L^{n,m}) - \varphi(u_K^{n,m})) \tau_{K|L} = m(K) f_K^n \quad (6.33)$$

$$\forall K \in \mathcal{T} \quad \forall m = 1 \dots$$

Nasledujúca veta je vlastne princípom maxima pre numerické riešenie úlohy pomocou explicitnej schémy (pozri [6], strana 849 Lemma 18.1)

**Veta 6.2 (Stabilita numerického riešenia pre explicitnú schému).** Nech platia predpoklady (P). Nech  $\mathcal{T}$  je prípustná mriežka a  $k > 0$  definuje časovú diskretizáciu. Nech

$$U = \|u_0\|_{L_\infty(\Omega)} + T \|f\|_{L_\infty((0,T) \times \Omega)}$$

a

$$B = \sup_{-U \leq x < y \leq U} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y}$$

Označme

$$C_K = \frac{1}{B \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \tau_\sigma}, \forall K \in \mathcal{T} \quad (6.34)$$

Nech platí:

$$k < m(K) C_K, \forall K \in \mathcal{T} \quad (6.35)$$

Potom funkcia  $u_{k,\mathcal{T}}$ , ktorá je riešením (6.31), (6.10), (6.6) spĺňa:

$$\|u_{k,\mathcal{T}}\|_{L_\infty((0,T) \times \Omega)} \leq U \quad (6.36)$$

*Dôkaz.* Nech  $n \in \{1, 2, \dots, N_T\}$  a predpokladajme, že  $u_K^{n-1} \in \langle -U, U \rangle \quad \forall K \in \mathcal{T}$ .

Pre  $\forall K \in \mathcal{T}$  prepíšeme schému (6.31) do tvaru

$$u_K^n = u_K^{n-1} - \frac{k}{m(K)} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} (\varphi(u_L^{n-1}) - \varphi(u_K^{n-1})) \tau_{K|L} + k f_K^{n-1}$$

a upravíme

$$u_K^n = \left( 1 - \frac{k}{m(K)} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \tau_{K|L} \frac{\varphi(u_L^{n-1}) - \varphi(u_K^{n-1})}{u_L^{n-1} - u_K^{n-1}} \right) u_K^{n-1} +$$

$$\frac{k}{m(K)} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \tau_{K|L} \frac{\varphi(u_L^{n-1}) - \varphi(u_K^{n-1})}{u_L^{n-1} - u_K^{n-1}} u_L^{n-1} + k f_K^{n-1},$$

kde definujeme

$$\frac{\varphi(u_L^{n-1}) - \varphi(u_K^{n-1})}{u_L^{n-1} - u_K^{n-1}} = 0 \text{ ak } u_L^{n-1} - u_K^{n-1} = 0.$$

Teraz využijeme predpoklady pre nelineárnu funkciu  $\varphi$  definované v predpokladoch (P) a znení lemy, kde vieme

$$\frac{\varphi(u_L^{n-1}) - \varphi(u_K^{n-1})}{u_L^{n-1} - u_K^{n-1}} \leq B \quad \forall K, L \in \mathcal{T}$$

a z predpokladov lemy z podmienky (6.35) hneď máme

$$\frac{k}{C_K m(K)} < 1,$$

a preto

$$\begin{aligned} |u_K^n| &\leq \left(1 - \frac{kB}{m(K)}\right) \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \tau_{K|L} \sup_{L \in \mathcal{T}} |u_L^{n-1}| + \frac{kB}{m(K)} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \tau_{K|L} \sup_{L \in \mathcal{T}} |u_L^{n-1}| + k |f_K^{n-1}| = \\ &\left(1 - \frac{k}{m(K)C_K}\right) \sup_{L \in \mathcal{T}} |u_L^{n-1}| + \frac{k}{m(K)C_K} \sup_{L \in \mathcal{T}} |u_L^{n-1}| + k |f_K^{n-1}|. \end{aligned}$$

Využijúc teraz vlastnosti funkcie  $f$  dokončíme odhad

$$|u_K^n| \leq \sup_{L \in \mathcal{T}} |u_L^{n-1}| + k \|f\|_{L^\infty(Q_T)}.$$

A keďže sme odhad urobili pre ľubovoľné  $K \in \mathcal{T}$ , záverom máme

$$\sup_{K \in \mathcal{T}} |u_K^n| \leq \sup_{L \in \mathcal{T}} |u_L^{n-1}| + k \|f\|_{L^\infty(Q_T)}.$$

Využijúc teraz tento odhad v indukcii pre  $n \in \{1, 2, \dots, N_T\}$  máme

$$\sup_{K \in \mathcal{T}} |u_K^n| \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + nk \|f\|_{L^\infty(Q_T)}$$

Záverom použijeme definíciu numerického riešenia a fakt, že  $nk \leq T \quad \forall n \in \{0, 1, \dots, N_T\}$  a odhadneme

$$\|u_{k, \mathcal{T}}\| \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + T \|f\|_{L^\infty(Q_T)} = U.$$

□

*Poznámka 6.4.* Nech pre diskretizáciu  $N$  dimenzionálnej oblasti  $\Omega$  s označením  $h = \text{size}(\mathcal{T})$  platí, že existujú kladné reálne čísla  $\alpha, \beta, \gamma$ , také že:  $m(K) > \alpha h^N$ ,  $m(\partial K) \leq \beta h^{N-1}$  pre všetky  $K \in \mathcal{T}$  a  $d_\sigma \geq \gamma h$  pre všetky  $\sigma \in \mathcal{E}_{int}$ , potom  $k \leq Ch^2$  pre  $C = \frac{\alpha\gamma}{B\beta}$  vo vzťahu (6.35).

*Poznámka 6.5.* Podobný výsledok sa dá ukázať aj pre implicitnú schému, avšak bez podmienky (6.35).

*Poznámka 6.6.* Nech  $\{k_n, \mathcal{T}_n\}_{n \in \mathcal{N}}$  je postupnosť prípustných diskretizácií a časových krokov a nech  $\{u_{k_n, \mathcal{T}_n}\}_{n \in \mathcal{N}}$  je príslušná postupnosť numerických riešení (6.31), (6.10), (6.6). Potom vďaka (6.36) existuje funkcia  $u \in L_\infty((0, T) \times \Omega)$  a podpostupnosť  $\{u_{k_n, \mathcal{T}_n}\}_{n \in \mathcal{N}}$ , ktorá konverguje k  $u$  v slabej\* topológii.

Predchádzajúca podmienka hovorí o existencii funkcie  $u$ , ku ktorej podpostupnosť riešení v istej topológii konverguje, ale treba ukázať jej konvergenciu ku slabému riešeniu nášho problému.

*Poznámka 6.7.* V sekcii pre lineárny prípad pre eliptické rovnice sme uvažovali homogénne Dirichetove podmienky, a teda sme pracovali v priestore  $H_0^1(\Omega)$ . V tomto priestore sa ekvivalentná norma dá definovať aj len pomocou gradientu funkcie (ako ihneď vyplýva z Friedrichsovej nerovnosti). Preto sme aj v tomto prípade definovali tzv. diskrétnu  $H_0^1$  normu. V tejto časti uvažujeme s Neumanovými podmienkami a teda pracujeme v priestore  $H_1(\Omega)$ , kde takto definované zobrazenie nie je norma, ale len tzv. polonorma (z vlastností normy nespĺňa podmienku, že norma je nulová práve vtedy, keď je daný prvok nulový). Teraz navyše pracujeme s parabolickými rovnicami, takže musíme definovať časopriestorovú analógiu diskkrétnej  $H_0^1$  normy zo vzťahu (3.5). Táto sa bude dať definovať pre všetky funkcie, ktoré budú v priestore a čase po častiach konštantné analogicky, ako sme definovali numerické riešenie.

**Definícia 6.3 (Priestor  $X(k, \mathcal{T})$ ).** Priestorom všetkých po častiach konštantných funkcií, ktoré sú dané ako hodnoty v reprezentatívnom bode každého konečného objemu v každom časovom reze  $t_n = nk$ , t.j. na časovom intervale  $I_n$  budeme nazývať priestor  $X(k, \mathcal{T})$ . Jeho funkcie sú definované

$$\psi_{k, \mathcal{T}}(t, x) = \psi_K^n, \quad x \in K, t \in I_n.$$

**Definícia 6.4 (Diskrétna  $L_2((0, T), H^1(\Omega))$  polonorma).** Nech  $T > 0, T \in \mathbb{R}$  a  $\Omega$  je polygonálna konvexná ohraničená oblasť v  $\mathbb{R}^N$ ,  $N = 1, 2, 3$ . Nech je  $\mathcal{T}$  prípustná diskretizácia ako v definícii (3.1) a  $k \in (0, T)$ . Potom pre  $u \in X(k, \mathcal{T})$  definujeme diskrétnu  $L_2((0, T), H^1(\Omega))$  polonormu takto:

$$|u|_{1, k, \mathcal{T}} = \left( \sum_{n=0}^{N_T} k \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \tau_\sigma (u_L^n - u_K^n)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (6.37)$$

kde  $\tau_\sigma = \frac{m(\sigma)}{d_\sigma}$  a  $\sigma = K|L$ .

Podobne ako v eliptickom prípade konvergenciu zabezpečí Kolmogorovo kritérium kompaktnosti 1.24 v tomto prípade v priestore  $L_2((0, T), \Omega)$ . K tomu sú, analogicky ako pre eliptické rovnice z vety 3.5, potrebné výsledky pre posun v priestore a čase.

Postupné kroky sú (pozri [6], strana 851 Lemma 18.2 a 18.3):

**Veta 6.3 (Posun v priestore pre numerické riešenie).** Nech  $\Omega$  je polygonálna konvexná ohraničená oblasť v  $\mathbb{R}^N$  a  $(0, T)$ ,  $T > 0, T \in \mathbb{R}$ . Nech  $\mathcal{T}$  je prípustná mriežka

v zmysle definície (3.1) a  $k > 0$  definuje časovú diskretizáciu na danom intervale. Nech funkcia  $u \in X(k, \mathcal{T})$ . Definujme pre  $\forall \eta \in \mathbb{R}^N$  oblasť  $\Omega_\eta = \{x \in \Omega; [x, x + \eta] \subset \Omega\}$ . Potom

$$\|u(t, \cdot + \eta) - u(t, \cdot)\|_{L_2(\Omega_\eta)}^2 \leq |u|_{1,k,\mathcal{T}}^2 |\eta| (|\eta| + 2\text{size}(\mathcal{T})), \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^N \quad (6.38)$$

Dôkaz pozri [6].

Teraz keď si uvedomíme, že pre oblasť  $\Omega_\eta$  definovanú vo vete 6.3 platí:  $\Omega - \Omega_\eta \subset \cup_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} \bar{\omega}_\eta$ ;  $\omega_\eta = \{y - s\eta; y \in \sigma, s \in [0, 1]\}$ , potom  $m(\Omega - \Omega_\eta) \leq |\eta| m(\partial\Omega)$ , pretože  $m(\bar{\omega}_\eta) \leq |\eta| m(\sigma)$ . Tento poznatok je dôležitý pre ďalšiu vetu:

**Veta 6.4.** Nech  $\Omega$  je polygonálna konvexná ohraničená oblasť v  $\mathbb{R}^N$  a  $(0, T)$ ,  $T > 0, T \in \mathbb{R}$ . Nech  $\mathcal{T}$  je prípustná mriežka v zmysle definície (3.1) a  $k > 0$  definuje časovú diskretizáciu na danom intervale. Nech funkcia  $u \in X(k, \mathcal{T})$ . Definujme  $\tilde{u} = u$  na  $(0, T) \times \Omega$  and  $\tilde{u} = 0$  na  $\mathbb{R}^{N+1} - (0, T) \times \Omega$ . Potom  $\forall \eta \in \mathbb{R}^N$  platí:

$$|\eta| \left( \| \tilde{u}(\cdot, \cdot + \eta) - \tilde{u}(\cdot, \cdot) \|_{L_2(\mathbb{R}^{N+1})}^2 + 2m(\partial\Omega) \| u \|_{L_\infty((0,T) \times \Omega)}^2 \right) \leq |u|_{1,k,\mathcal{T}}^2 (|\eta| + 2\text{size}(\mathcal{T})), \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^N \quad (6.39)$$

Dôkaz pozri [6].

Z uvedených viet vyplýva, že pre posun približného riešenia v priestore a čase je potrebný odhad pre funkciu v diskretnej  $L_2((0, T), H^1(\Omega))$  polonorme. Naša úloha je ale nelineárna s nelineárnou definovanou funkciou  $\varphi$ , a preto treba dokázať odhad tejto funkcie v uvedenej polonorme.

**Veta 6.5 (Odhad polonormy difúznej nelinearity).** Nech platia predpoklady (P). Nech  $\mathcal{T}$  je prípustná mriežka v zmysle definície (3.1) a  $k > 0$  definuje časovú diskretizáciu na danom intervale. Nech  $\xi \in (0, 1)$  a pre časový krok  $k$  platí:

$$k < (1 - \xi) \frac{m(K)}{B \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} \tau_\sigma}, \quad \forall K \in \mathcal{T} \quad (6.40)$$

Nech funkcia  $u_{k,\mathcal{T}}$ , je daná vzťahmi (6.31), (6.10), (6.6). Nech

$$U = \|u_0\|_{L_\infty(\Omega)} + T \|f\|_{L_\infty((0,T) \times \Omega)}$$

a  $B$  je Lipschitzovská konštanta funkcie  $\varphi$  na intervale  $[-U, U]$ . Potom existuje konštanta  $F_1 \geq 0$  závislá len od dát  $\Omega, T, u_0, f, \varphi$  a  $\xi$ , že platí:

$$|\varphi(u_{k,\mathcal{T}})|_{1,k,\mathcal{T}}^2 \leq F_1 \quad (6.41)$$

Dôkaz pozri [6].

*Poznámka 6.8.* Podobný výsledok sa dá ukázať aj pre implicitnú schému avšak bez podmienky (6.40) [6].

**Veta 6.6 (Posun v čase pre nelineárny člen v numerickej schéme).** Nech platia predpoklady (P). Nech  $\mathcal{T}$  je prípustná mriežka v zmysle definície (3.1) a  $k > 0$  definuje

časovú diskretizáciu na danom intervale. Nech funkcia  $u_{k,\mathcal{T}}$  je daná vzt'ahmi (6.31), (6.10), (6.6). Nech

$$U = \|u_{k,\mathcal{T}}\|_{L_\infty((0,T)\times\Omega)}$$

a  $B$  je Lipschitzovská konštanta funkcie  $\varphi$  na intervale  $[-U, U]$ . Potom pre  $\forall \tau \in (0, T)$  platí:

$$\begin{aligned} & \|\varphi(u_{k,\mathcal{T}}(\cdot + \tau, \cdot)) - \varphi(u_{k,\mathcal{T}}(\cdot, \cdot))\|_{L_2((0,T-\tau)\times\Omega)}^2 \leq \\ & 2B\tau \left( |\varphi(u_{k,\mathcal{T}})|_{1,k,\mathcal{T}}^2 + BTm(\Omega)U\|f\|_{L_\infty((0,T)\times\Omega)} \right) \quad \forall \tau \in (0, T) \end{aligned} \quad (6.42)$$

Dôkaz pozri [6].

**Veta 6.7 (Konvergencia numerického riešenia).** Nech platia predpoklady (P) a nech

$$U = \|u_0\|_{L_\infty(\Omega)} + T\|f\|_{L_\infty((0,T)\times\Omega)}$$

a

$$B = \sup_{-U \leq x < y \leq U} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y}.$$

Nech  $\xi \in (0, 1)$  je dané reálne číslo. Pre  $m \in \mathcal{N}$  je  $\mathcal{T}_m$  je prípustná mriežka v zmysle definície (3.1) a  $k_m > 0$  definuje časovú diskretizáciu na danom intervale a pre  $k_m$  platí podmienka

$$k_m < (1 - \xi)m(K)C_K, \forall K \in \mathcal{T} \quad (6.43)$$

pre túto prípustnú mriežku a časový krok. Nech  $u_{k_m, \mathcal{T}_m} \in X(k_m, \mathcal{T}_m)$  je daná vzt'ahmi (6.31), (6.6), (6.10). Nech ďalej  $\text{size}(\mathcal{T}_m) \rightarrow 0$  as  $m \rightarrow \infty$ . Potom existuje podpostupnosť postupnosti numerických riešení, ktorú znovu označíme  $u_{k_m, \mathcal{T}_m}$ , ktorá konverguje k slabému riešeniu (6.26), (6.27), (6.28) ak  $m \rightarrow \infty$  v nasledujúcom zmysle

- $\{u_{k_m, \mathcal{T}_m}\}$  konverguje k  $u$  v  $L_\infty((0, T) \times \Omega)$  v slabej\* topológii.
- $\{\varphi(u_{k_m, \mathcal{T}_m})\}$  konverguje k  $\varphi(u)$  v  $L_1((0, T) \times \Omega)$ .

Dôkaz pozri [6], strana 859 veta 18.1.

## 6.3 Cvičenia.

1. Pre neznámu funkciu  $u(t, x)$ , kde  $t \in [0, T]$ ,  $T > 0$  a  $x \in \langle a, b \rangle$ ,  $a < b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  napíšte lineárnu parabolickú rovnicu s difúznym koeficientom rovným 1 a nenulovou pravou stranou. Na hranici je daná homogénna Neumannova podmienka. Počiatočná podmienka úlohy je daná funkciou  $u_0(x)$ .  
Napíšte matematický model tejto úlohy.  
Definujte slabé riešenie tejto úlohy.  
Napíšte implicitnú numerickú schému založenú na Rotheho metóde a metóde konečných objemov pre túto úlohu.
2. Pre neznámu funkciu  $u(t, x, y)$ , kde  $t \in [0, 1]$ , a  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  s hranicou  $\partial\Omega$  je obdĺžnik s hranou 1 v smere osi  $x$  a hranou 8 v smere osi  $y$  a ľavým dolným rohom v počiatku súradnicovej sústavy napíšte lineárnu parabolickú rovnicu s difúznym koeficientom rovným  $x^2 + 8y$  a nenulovou pravou stranou rovnou funkciou  $f(x, y) = 6xy$ . Na hranici  $\partial\Omega$  je daná nehomogénna Dirichletova podmienka s hodnotou 6. Počiatočná podmienka úlohy je daná konštantnou funkciou  $u_0(x, y) = 6$ .  
Napíšte matematický model tejto úlohy.  
Definujte slabé riešenie tejto úlohy.  
Napíšte implicitnú numerickú schému založenú na Rotheho metóde a metóde konečných objemov pre túto úlohu.
3. Pre neznámu funkciu  $u(t, x, y)$ , kde  $t \in [0, 12]$  a  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  s hranicou  $\partial\Omega$  je štvorec s hranou 6 a ľavým dolným rohom v počiatku súradnicovej sústavy napíšte lineárnu parabolickú rovnicu s difúznym koeficientom rovným  $(x + 6y^2)$  a nenulovou pravou stranou rovnou  $f(t, x, y) = t + 6x + y$ . Na hranici  $\partial\Omega$  je daná nehomogénna Neumannova podmienka s hodnotou 9. Počiatočná podmienka úlohy je daná funkciou  $u_0(x) = 6x + 2y$ .  
Napíšte matematický model tejto úlohy.  
Definujte slabé riešenie tejto úlohy.  
Napíšte implicitnú numerickú schému založenú na Rotheho metóde a metóde konečných objemov pre túto úlohu.
4. Pre neznámu funkciu  $u(t, x, y)$ , kde  $t \in [0, 20]$  a  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  s hranicou  $\partial\Omega$  je štvorec s hranou 2 a ľavým dolným rohom v počiatku súradnicovej sústavy napíšte lineárnu parabolickú rovnicu s difúznym koeficientom rovným  $(x + 2y)$  a nenulovou pravou stranou rovnou  $f(t, x, y) = t + xy$ . Na hranici  $\partial\Omega$  je daná homogénna Neumannova podmienka. Počiatočná podmienka úlohy je daná funkciou  $u_0(x) = xy$ .  
Napíšte matematický model tejto úlohy.  
Definujte slabé riešenie tejto úlohy.  
Napíšte implicitnú numerickú schému založenú na Rotheho metóde a metóde konečných objemov pre túto úlohu.
5. Pre neznámu funkciu  $u(t, x, y)$ , kde  $t \in [0, 5]$  a  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  s hranicou  $\partial\Omega$  je štvorec s hranou 3 a ľavým dolným rohom v počiatku súradnicovej sústavy napíšte lineárnu parabolickú rovnicu s difúznym koeficientom rovným  $(x + y)$  a nenulovou pravou stranou rovnou  $f(t, x, y) = t^2 + xy$ . Hranica  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ . Na časti hranice  $\Gamma_1$ , ktorú tvoria úsečky štvorca ležiace na súradnicových osiach je daná homogénna Neumannova podmienka. Na časti hranice  $\Gamma_2$ , ktorú tvoria zvyšné dve úsečky štvorca je daná nehomogénna Dirichletova podmienka tvaru  $u(t, s_1, s_2) = t + s_1s_2$ , kde



$(s_1, s_2) \in \Gamma_2$ . Počiatočná podmienka úlohy je daná funkciou  $u_0(x) = xy$ .

Napište matematický model tejto úlohy.

Definujte slabé riešenie tejto úlohy.

Napište implicitnú numerickú schému založenú na Rotheho metóde a metóde konečných objemov pre túto úlohu.

6. Pre neznámu funkciu  $u(t, x, y)$ , kde  $t \in [0, 5]$  a  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  s hranicou  $\partial\Omega$  je štvorec s hranou 4 a ľavým dolným rohom v počiatku súradnicovej sústavy napíšte lineárnu parabolickú rovnicu s difúznym koeficientom rovným  $(x^2 + y^2)$  a nenulovou pravou stranou rovnou  $f(t, x, y) = t + x + y$ . Hranica  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ . Na časti hranice  $\Gamma_1$ , ktorú tvoria úsečky štvorca ležiace na súradnicových osiach je daná nehomogénna Neumannova podmienka  $\frac{\partial u(t, s_1, s_2)}{\mathbf{n}} = t - s_1 - s_2$ , kde  $(s_1, s_2) \in \Gamma_1$ . Na časti hranice  $\Gamma_2$ , ktorú tvoria zvyšné dve úsečky štvorca je daná homogénna Dirichletova podmienka. Počiatočná podmienka úlohy je daná funkciou  $u_0(x) = -0,5(x^2 + y^2)$ .

Napište matematický model tejto úlohy.

Definujte slabé riešenie tejto úlohy.

Napište implicitnú numerickú schému založenú na Rotheho metóde a metóde konečných objemov pre túto úlohu.

# Kapitola 7

## Namiesto záveru

Na predchádzajúcich stranách sme sa pokúsili zhrnúť základné poznatky z teórie numerickej analýzy diferenciálnych rovníc a vysvetliť ich použitie pre eliptické a parabolické diferenciálne rovnice.

Na tomto poli je dnes už vyoraná veľká brázda poznatkov na riešenie nielen lineárnych ale aj rôznych nelineárnych modelov, ktoré majú v technickej praxi veľký význam. Nedá mi nespomenúť, že svojou troškou do mlyna prispela aj naša katedra, a preto by som na týchto posledných stránkach rada spomenula aspoň niektoré publikácie členov našej katedry, ktoré sa zaoberajú touto problematikou.

Tieto práce sa zaoberajú nelineárnymi modelmi, ktoré vychádzajú prevažne z problémov spracovania obrazu. Niektoré sú venované hlavne numerickej analýze navrhnutých diskretizačných schém založených na metodike konečných objemov. Iné okrem navrhnutia vylepšených schém ukazujú na príkladoch, kde sa dá nájsť presné riešenie, experimentálny rád konvergenzie (EOC- experimental order of convergence) a porovnávajú ho s teoretickými výsledkami. Iné sú venované aj metóde tzv. diskrétnych duálnych objemov (DDFV), ktoré sú v niektorých prípadoch veľmi dobrým prostriedkom na numerické výpočty úloh z praxe.

Zo všetkých článkov kolegov z našej katedry vyberám aspoň niekoľko, v ktorých poznania chtivý čitateľ nájde aj hodnotnú a obsiahlu ďalšiu literatúru k tejto téme.

[11],[16],[14],[13],[17],[23],[19],[12],[15],[20],[21],[22],[24],[25],[26],[29],[27],[28],[31], [30]

Verím, že čitateľ, ktorého daná problematika zaujala a chcel by sa jej venovať aj ďalej, nájde v nižšie uvedených článkoch zdroj nových informácií a podnetov k svojej vedeckej práci.



# Literatúra

- [1] Arsenin A.: *Matematická fyzika* Alfa, 1977
- [2] Bock I.: *Matematická fyzika*, skriptá SVŠT Bratislava 1987
- [3] Brenner S.C., Scott L.R.: *The Mathematical Theory of Finite Element methods*, Springer 2002, ISBN 978-0-387-75933-3
- [4] Kufner A., John O., Fučík S.: *Function spaces*, ACADEMIA, Prague 1977
- [5] Ladyzenskaja A., SOLLONIKOV V.A., URALCEVA N.N.: *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, AMS Providence 1968
- [6] Eymard R., Gallouet T., Herbin R. : *The finite volume method*, in: Handbook for Numerical Analysis, Vol.7 Ph. Ciarlet, J. L. Lions, eds., Elsevier, 2000, ISBN 0 444 50350-1
- [7] Handlovičová A., Tibenský M.: *Základy funkcionálnej analýzy a variačného počtu*, Svf STU učebnica 2016, ISBN 978-80-227-4559-8
- [8] Kačur J.: *Method of Rothe in evolution equations* TEUBNER-TEXTE zur Mathematik , Leipzig
- [9] Rektorys K: *Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky* SNTL Praha 1974,ISBN 04-033-74
- [10] Tveito A., Winther R.: *Introduction to Partial Differential Equations. A computational Approach* Springer Verlag Berlin 2009, ISBN 978-3-540-88704-1
- [11] Mikula K., Ramarosy N.: *Semi-implicit finite volume scheme for solving nonlinear diffusion equations in image processing*, Numer. Math., vol. 89, no. 3 pp 561-590, 2001
- [12] Krivá Z., Mikula K.: *An adaptive finite volume scheme for solving olving nonlinear diffusion equations in image processing*, Journal for Visual Communication and Image Representation, vol. 13, no.1/2 pp.22-35, 2002
- [13] Handlovičová A.,Mikula K., Sgallari F.: *Semi-implicit complementary volume scheme for solving level set like equations in image processing and curve evolution*, Numer. Math., vol. 93, no. 4. pp. 675–695, 2003

- [14] Mikula K., Sarti A., Sgallari F.: *Co-volume method for Riemannian mean curvature flow in subjective surfaces multiscale segmentation*, Comput. Visual. Sci., vol 9, no. 1 pp. 23–31, 2006
- [15] Frolkovič P., Mikula K.: *Flux-based level set method: a finite volume method for evolving interfaces*, Applied Numerical Mathematics, vol. 57, no. 4 pp. 436-454 2007
- [16] Handlovičová A., Mikula K.: *Stability and consistency of the semi-implicit co-volume scheme for regularized mean curvature flow equation in level set formulation*, Appl. Math., Praha, vol 58, no 2 pp. 105-129, 2008
- [17] Drblíková O., Mikula K.: *Convergence analysis of finite volume scheme for nonlinear tensor anisotropic diffusion in image processing*, SIAM J. Numer. Anal. vol 46, no 1. pp 37-60, 2008
- [18] Mikula K., and Peyriéras N., Remešíková M., Sarti A.: *3D embryogenesis image segmentation by the generalized subjective surface method using the finite volume technique*, Finite Volumes for Complex Applications V, Wiley, pp.585–592, 2008
- [19] Drblíková O., Handlovičová A., Mikula K.: *Error estimates of the Finite Volume Scheme for the Nonlinear Tensor-Driven Anisotropic Diffusion*, Applied Numerical Mathematics, vol 59, pp.2548–2570, 2009
- [20] Mikula K., Remešíková M.: *Finite volume schemes for the generalized subjective surface equation in image segmentation*, Kybernetika, vol. 45, no. 4 pp. 646-656, 2009
- [21] Mikula K., Ševčovič D., Balažovjeh M.: *A simple, fast and stabilized flowing finite volume method for solving general curve evolution equations*, Communications in Computational Physics, vol. 7, vo. 1 pp. 195-211, 2010
- [22] Eymard R. , Handlovičová A., Mikula K.: *Study of a finite volume scheme for the regularised mean curvature flow level set equation*, IMA Journal on Numerical Analysis, vol. 31 pp. 813-846, 2011
- [23] Handlovičová, A., Kotorová, D.: *Numerical analysis of a semi-implicit DDFV scheme for the regularized curvature driven level set equation in 2D* Kybernetika, vol. 49. pp. 829–854. 2013
- [24] Kútík P., Mikula K.: *Diamond-cell finite volume scheme for the Heston model*(, Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S (DCDS-S) vol. 8, no 5 pp. 913 - 931, 2015
- [25] Krivá Z., Handlovičová A., Mikula K.: *Adaptive cell-centered finite volume method for diffusion equations on a consistent quadtree grid*, Advances in Computational Mathematics, vol 42, Issue 2, pp 249-277, 2015
- [26] Hahn J., Mikula K., Frolkovič P., Basara B.: *Inflow-Based Gradient Finite Volume Method for a Propagation in a Normal Direction in a Polyhedron Mesh*, Journal of Scientific Computing, July 2017, vol 72, Issue 1, pp. 442–465, 2017

- [27] Droniou J., Medřa M., Mikula K.: *Design and analysis of finite volume methods for elliptic equations with oblique derivatives; application to Earth gravity field modelling*, Journal of Computational Physics, vol 398, 2019
- [28] Tomek L., Mikula K.: *Discrete duality finite volume method with tangential redistribution of points for surfaces evolving by mean curvature*, ESAIM: M2AN Mathematical modelling and numerical analysis, vol 53, no 6, pp. 1797-1840 2019
- [29] Hahn J., Mikula K., Frokovič P., Basara B.: *Finite volume method with the Soner boundary condition for computing the signed distance function on polyhedral meshes*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2021
- [30] Tibenský M., Handlovičová A.: *Convergence analysis of the discrete duality finite volume scheme for the regularised Heston model* Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S, Vol.14 pp. 1181–1195. (2021)
- [31] Handlovičová A., Mikula K.: *Finite volume schemes for the affine morphological scale space (AMSS) model*, Tatra Mountains Mathematical Publications, vol. 80 pp. 53-70 2021

doc. RNDr. Angela Handlovičová, CSc.

## NUMERICKÁ ANALÝZA DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave vo Vydavateľstve SPEKTRUM STU,  
Bratislava, Vazovova 5, v roku 2023.

Edícia skrípt

Rozsah 109 strán, 5 obrázkov, 4,474 AH, 4,630 VH, 1. vydanie, edičné číslo 6159, vydané  
v elektronickej forme.

85 – 221 – 2023

ISBN 978-80-227-5337-1