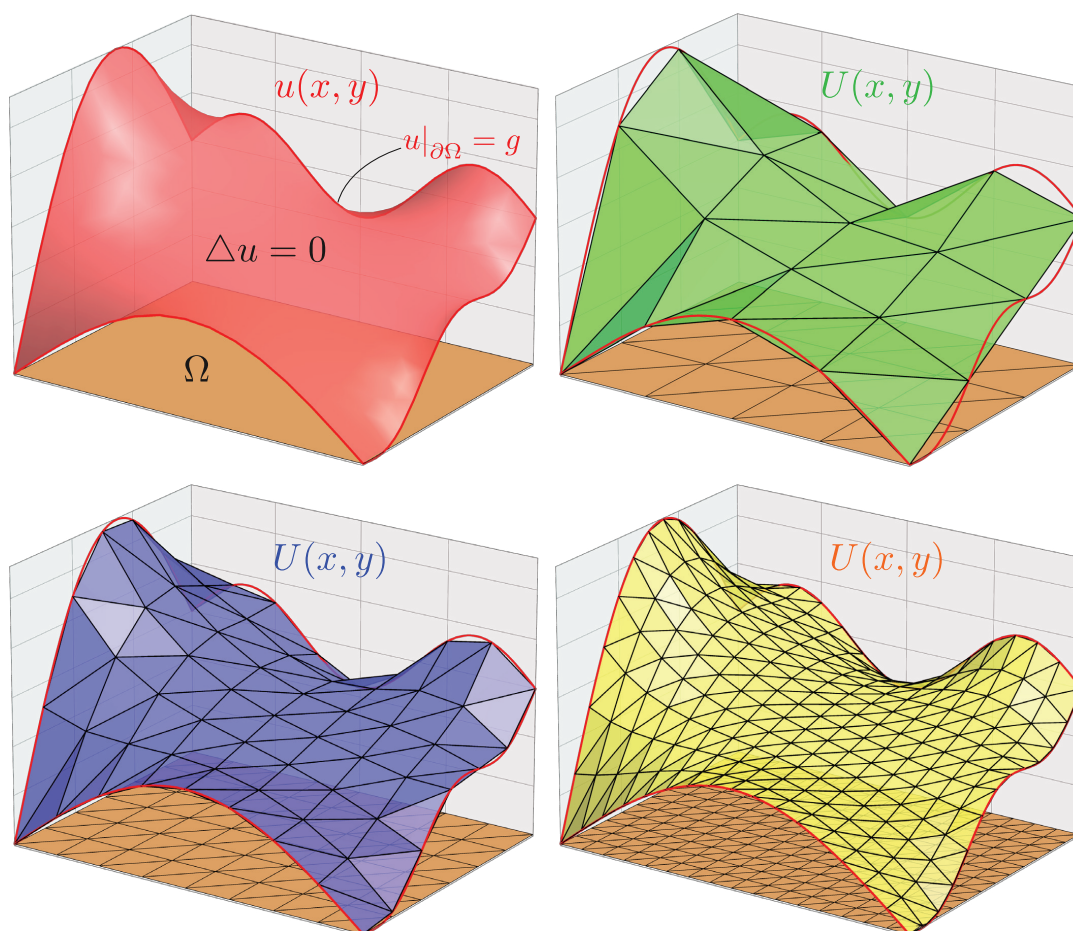


NUMERICKÉ MODELOVANIE POMOCOU METÓDY KONEČNÝCH PRVKOV



Lukáš Tomek, Karol Mikula

NUMERICKÉ MODELOVANIE POMOCOU METÓDY KONEČNÝCH PRVKOV

Lukáš Tomek, Karol Mikula

Učebnica sa zaoberá matematickým modelovaním fyzikálnych dejov a riešením modelov pomocou metódy konečných prvkov (MKP). V učebnici odvádzame 1D, 2D aj 3D matematické modely. MKP je formulovaná najprv pre 1D diferenciálne rovnice 2. a 4. rádu. Začína sa stacionárnymi úlohami a potom sa uvažuje aj nestacionárny prípad. MKP pre 2D úlohy sa ilustruje na stacionárnej rovnici 2. rádu. Učebnica obsahuje cvičenia, ktoré vedú študenta k vytvoreniu vlastných programov na riešenie úloh pomocou MKP.

Dielo je vydané pod medzinárodnou licenciou Creative Commons CC BY 4.0, ktorá povoľuje použitie, zdieľanie, prispôsobovanie, šírenie a reprodukovanie na ľubovoľnom médiu alebo v ľubovoľnom formáte, ak je uvedený pôvodný autor, zdroj a odkaz na Creative Commons licenciu, a ak sú vyznačené prípadné zmeny vykonané v diele. Viac informácií o licencií a použití diela na adrese: <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>.



© Ing. Mgr. Lukáš Tomek, PhD., prof. RNDr. Karol Mikula, DrSc.

Recenzenti: doc. RNDr. Peter Guba, PhD.
Ing. Martin Štiglic, PhD.
Ing. Matej Medľa, PhD.

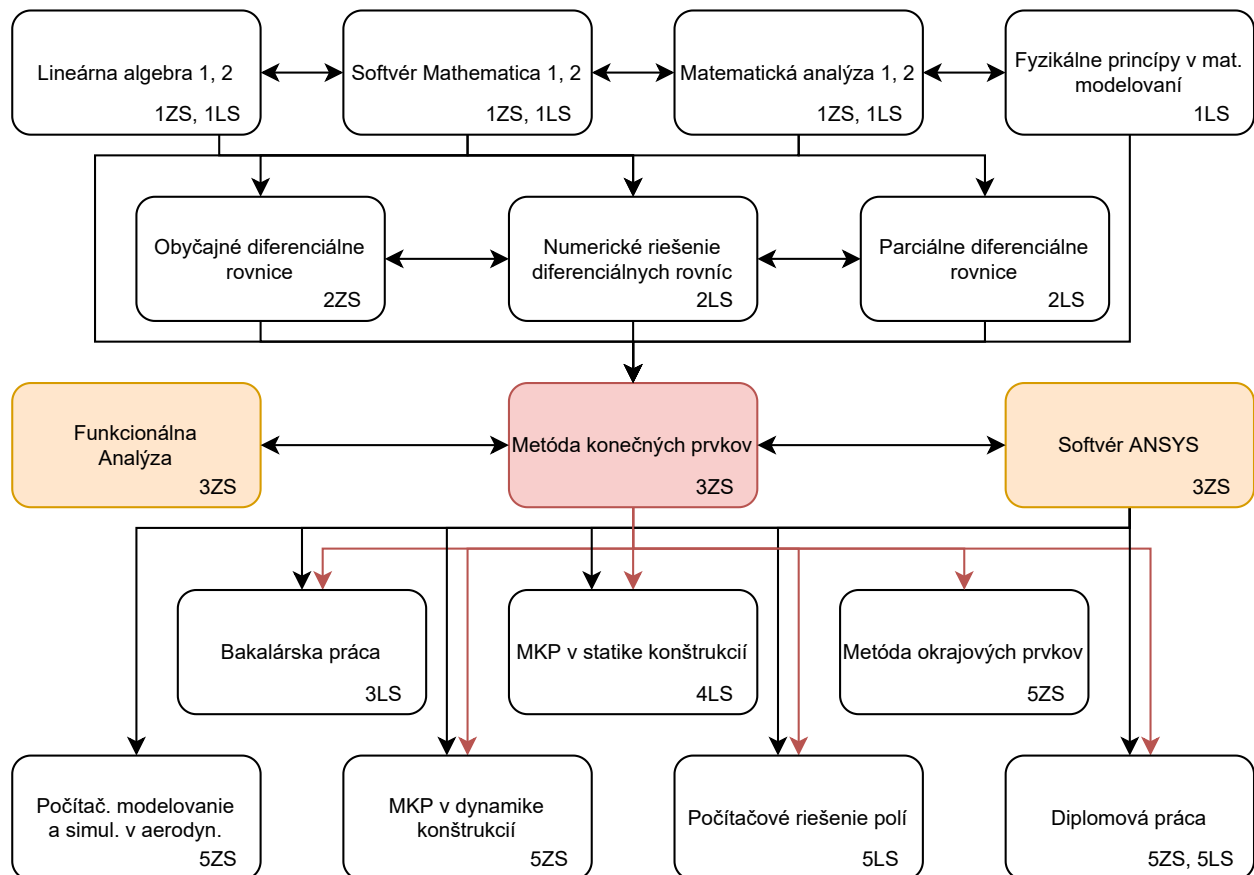
Schválila Edičná rada Stavebnej fakulty STU v Bratislave.

ISBN 978-80-227-5399-9

Predhovor

Táto učebnica vznikla k predmetu Metóda konečných prvkov (MKP) v študijnom programe [Matematicko-počítačové modelovanie](#) (MPM) na Stavebnej fakulte STU. Odporúčaná je aj doktorandom na Stavebnej fakulte, ktorí majú zapísané predmety Vybrané state z matematiky 1 a 2. Užitočná môže byť však pre kohokoľvek, kto sa zoznamuje s metódou konečných prvkov.

V [študijnom pláne MPM](#) je predmet MKP zaradený do zimného semestra 3. ročníka bakalárskeho štúdia a pozostáva z 2-hodinovej prednášky a 2-hodinového cvičenia. V mape predmetov na Obr. 1 vidíme, ako je predmet zasadený do študijného programu (na ktoré predmety nadväzuje, s ktorými súvisí a ktoré na ňom stavajú). Schéma naznačuje, aké znalosti sú potrebné na to, aby



Obr. 1. Mapa predmetov študijného programu Matematicko-počítačové modelovanie súvisiacich s predmetom Metóda konečných prvkov. Prerekvizity, súbežné predmety a nadväzujúce predmety.

človek rozumel tejto učebnici a zvládol MKP. Približne povedané, treba vedieť dosť veľa z matematickej analýzy, diferenciálnych rovníc a výhodou je vedieť niečo z fyziky.

Na cvičeniach študenti programujú v softvéri Wolfram Mathematica. Počas semestra vytvárajú programy na riešenie úloh metódou konečných diferencií, metódou vážených rezíduí a tri MKP programy:

1. MKP na riešenie 1D stacionárnej rovnice 2. rádu (4.1).
2. MKP na riešenie 1D nestacionárnej rovnice 2. rádu (7.4).
3. MKP na riešenie 2D stacionárnej izotropnej rovnice 2. rádu (9.3).

Na [stránke k predmetu](#) sú predpripravené súbory

- cv05, MKP pre 1D vedenie tepla (web).nb,
- cv11–13, MKP 2D (web).nb,

do ktorých študenti doprogramujú potrebné časti. Tvorba programov je v učebnici rozdelená do mnohých úloh, ktorých následnosť je uvedená v Tabuľke 2, v stĺpci „Cvičenie“ pod slovom „Programovanie“. Pre všetky úlohy v učebnici, v ktorých treba použiť softvér Wolfram Mathematica, používame značenie vo formáte:

Úloha ČÍSLO (Názov | Odporúčaný názov súboru.nb)

napríklad

Úloha 4.8 (Aproximačné funkcie | cv03, MKP, aproximacne funkcie.nb)

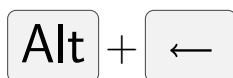
Odporúčaný názov súboru študentom pomôže zorientovať sa vo svojich programoch a na tieto názvy sa niekedy odvolávame aj v nadväzujúcich úlohách.

Študenti MPM sa paralelne učia pracovať v konečnoprvkovom softvéri ANSYS, preto sa občas v texte vyskytnú ukážky riešenia úloh v ANSYS-e, či poznámky o tom, ako s ANSYS-om súvisí to, čo vidíme v tejto učebnici.

V literatúre o MKP možno nájsť rôzne typy kníh. Niektoré stavajú na matematickom prístupe [2], iné sú zamerané skôr inžiniersky. Niektoré knihy, napríklad [12] aj táto učebnica, využívajú kombináciu oboch prístupov. Reddyho kniha [12] a kniha Brennerovej a Scotta [2] boli inšpiráciou na zostavovanie niektorých prednášok z predmetu MKP pre študentov MPM a prístup z týchto kníh sa preniesol aj do tejto učebnice. Okrem spomínaných kníh na ďalšie štúdium MKP odporúčame napríklad knihy [6, 14, 17, 8].

Aby bolo MKP jednoducho a pochopiteľne vysvetlené pre začiatočníkov, tak v tejto učebnici nerobíme *izoparametrickú formuláciu* MKP, ale pracujeme v kartézskych súradniciach (integruje sa cez x, y , nie cez lokálne súradnice ξ, η , vďaka čomu do hry nevstupujú jakobiány). Pri izoparametrickej formulácii sa napr. v 1D zoberie štandardný (jednotkový) element na intervale $\xi \in [-1, 1]$ a pomocou aproximačných funkcií $N_i(\xi)$ sa aproximuje geometria ľubovoľného elementu s uzlovými bodmi x_i^e ako $x(\xi) = \sum_{i=1}^{s+1} x_i^e N_i(\xi)$, čiže štandardný element sa transformuje na ľubovoľný. Formulácia v kartézskych súradniciach pomáha študentom pochopiť základné princípy MKP a pomerne jednoducho MKP implementovať. Samozrejme, bez izoparametrickej formulácie je ťažkopádne/nemožné urobiť a vysvetliť mnohé veci (krivočiare elementy, prútové a rámové konštrukcie, Gaussove kvadratury v 2D...). Izoparametrickú formuláciu sa ale študenti MPM naučia na ďalších predmetoch v rámci štúdia (MKP v statike konštrukcií, MKP v dynamike konštrukcií, Metóda okrajových prvkov a Počítačové riešenie polí, pozri mapu predmetov 1).

V učebnici vo veľkom využívame *referencovanie*. Pri čítaní elektronickej verzie učebnice je naozaj veľmi užitočné preklikávať sa medzi odkazmi a na *návrat späť* na miesto, z ktorého sa čitateľ odklikol využiť *klávesovú skratku* (nie scrollovať).¹ V populárnom prehliadači Adobe Acrobat Reader na návrat späť slúži skratka



¹Klávesové skratky vo všeobecnosti enormne zvyšujú rýchlosť a efektivitu práce. Napriek tomu stále veľká časť populácie ovláda len zopár základných skratiek (**Ctrl**+**C**, **Ctrl**+**V** a podobne). Je dobré sa pri práci s akýmkoľvek operačným systémom či softvérom naučiť a používať čo najviac užitočných skratiek.

ktorá prehliadač vráti na predchádzajúce zobrazenie. Na posunutie na nasledujúce zobrazenie slúži skratka **Alt** + **→** (je užitočná, keď sa preklikávame viackrát a chceme sa medzi jednotlivými miestami presúvať tam a späť).

Učebnica je rozdelená na tri časti. Časť I začína kapitolou 1, ktorá je úvodom k tejto učebnici. Ďalej v kapitole 2 predstavujeme a odvádzame niektoré matematické modely fyzikálnych dejov. V kapitole 3 hovoríme o niektorých numerických metódach, ktoré sa používajú na riešenie diferenciálnych rovníc. Časť II je venovaná MKP na riešenie 1D úloh. Začína sa riešením rovnice 2. rádu (kapitola 4), kapitola 5 pojednáva o MKP pre rovnicu 4. rádu (Eulerov-Bernoulliho nosník). V kapitole 6 sa na MKP pozrieme z hľadiska funkcionálnej analýzy, hovoríme o druhoch chýb, ktorých sa dopúšťame pri riešení úloh pomocou MKP a skúmame konvergenciu k presnému riešeniu. Nasleduje kapitola 7 o riešení nestacionárnych úloh a krátka kapitola 8 o numerickom integrovaní pomocou Gaussových kvadrátúr. Časť III (kapitola 9) je o riešení 2D úloh pomocou MKP. Pri prezentovaní MKP sa v jednotlivých kapitolách približne držíme všeobecného postupu uvedeného v sekcii 4.1. Sekcie, ktorých názov je označený hviezdíčkou sú doplnkové a nie je nevyhnutné ich čítať. Sú ale užitočné a netreba sa ich báť.

V Tabuľke 2 uvádzame približný harmonogram výuky MKP na MPM podľa tejto učebnice. Harmonogram je zostavený na 13 týždňov (13 prednášok a 13 cvičení). Na niektorých cvičeniach (hlavne zo začiatku semestra) sa čiastočne aj prednáša.

Niekoľko slov k matematickému značeniu. V učebnici rozlišujeme viacero typov „rovná sa“. Ich významy zosumarizujeme na jednom mieste v Tabuľke 1. Pre vektory v $\mathbb{R}^2$ alebo $\mathbb{R}^3$ používame

Tabuľka 1. Rôzne typy „rovná sa“.

Symbol	Význam	Príklad
$=$	Obyčajné rovná sa	$3 + 5 = 8$
$\approx$	Približne sa rovná	$\sin(0.05) \approx 0.05$
$:=$	Rovná sa podľa definície (často používame, keď chceme niečo označiť)	Zavedme označenie $F_{n+1} := F(t_{n+1})$ Výraz $F(t_{n+1})$ označme ako F_{n+1} .
$\coloneqq$	Rovná sa podľa definície, v opačnom garde	$(1 - \alpha)F(t_n) + \alpha F(t_{n+1}) \coloneqq F_{n,n+1}$ Výraz vľavo označme ako $F_{n,n+1}$.
$\equiv$	Identicky rovné	$f(x) \equiv 0$ funkcia f je identicky rovná nule (pre ľubovoľné x)
$\stackrel{!}{=}$	Rovná sa, ktoré nižšie odôvodníme	$\ u\ \stackrel{!}{=} \sqrt{(u, u)}$ 1. Definícia normy indukovanej skalárnym súčinom.
$\stackrel{!}{=}$	Chceme, aby sa rovnalo („má sa rovnať“)	$f(x) = 2x + 2 \stackrel{!}{=} 0, \Rightarrow x = -1$

označenie so šípkou, napríklad normálový vektor $\vec{n}$ alebo polohový vektor $\vec{r}$. Vektory v maticovom zápise sústav lineárnych rovníc ale značíme obyčajným písmom, napríklad $Ax = b$ (A je matica sústavy, x je vektor neznámych a b je vektor pravej strany). Zložky polohového vektora $\vec{r}$ značíme (x, y, z) alebo (x_1, x_2, x_3) podľa toho, ako je to v kontexte vhodné. Pre parciálne derivácie budeme niekedy používať aj skrátené značenie $\partial_t u := \frac{\partial u}{\partial t}$, $\partial_x^2 u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Deriváciu v smere normály (normálovú deriváciu) budeme označovať ako $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} := \vec{n} \cdot \nabla u$. Gradient (skalárnej) funkcie f značíme ∇f a divergenciu vektorovej funkcie (vektorového poľa) $\vec{F}$ označujeme $\nabla \cdot \vec{F}$.

Tabuľka 2. Približný harmonogram výuky MKP na MPM podľa tejto učebnice.

Týždeň	Prednáška	Cvičenie
1.	Predhovor 1 Úvod 2.1 Rovnica vedenia tepla v 1D	3.1 Metóda konečných diferencií Programovanie: Úloha 3.4 (MKD, Dirichlet) Úloha 3.6 (MKD, Dirichlet+Neumann)
2.	3.2 Variačné metódy 4 MKP pre DR 2. rádu, úvod 4.1 Algoritmus metódy konečných prvkov	4.2 Diskretizácia výpočtovej oblasti 4.3.1 Slabá formulácia Programovanie: Úloha 3.13 (Metóda vážených rezíduí)
3.	4.3.2 Aproximačné funkcie, lin. elem. 4.3.3 Dosadenie LK a AF do SF, lin. elem. 4.4.1 Glob. súst. rov., lin. elem.	4.3.2 Aproximačné funkcie, kvad. elem. 4.3.2 Aproximačné funkcie, ľub. stupeň Programovanie: Úloha 4.8 (Aproximačné funkcie)
4.	4.5 Využitie OP, lin. elem. Príklady 4.19, 4.25 (Glob. súst., lin. elem.) Poznámka 4.26 (Súvis MKP a MKD) 4.6 Rieš. glob. súst. a konštruk. prib. rieš. 4.3.3 Dosadenie LK a AF do SF, kvad. elem. Príklad 4.13 (Elem. súst., kvad. elem.) 4.4.2 Glob. súst. rov., kvad. elem.	5 MKP pre DR 4. rádu, dokončenie 5.1.1 Slabá formulácia Programovanie: Úlohy 4.15, 4.16 (Elem. mat. a pravá strana)
5.	5 MKP pre DR 4. rádu	Programovanie: Úloha 4.23 (Glob. mat. a p. s.) Úloha 4.27 (Využitie OP) Úloha 4.29 (Riešenie a vizualizácia)
6.	Poznámka 4.3 (SF na celej výpoč. oblasti) 4.3.2, Globálne aproximačné funkcie 4.7 *Globálny pohľad 6.1 Druhy chýb v MKP 6.2 Pojem klasického a slabého rieš., časť	6.4.2 Experimentálny rád konverencie Programovanie: Úloha 6.5 (Uzlové chyby) Úloha 6.38 (Výpočet chýb a EOC)
7.	6.2 Pojem klasického a slabého rieš., dokončenie 6.3 Ritzova-Galerkinova metóda	Veta 6.21 (Vlastnosť ortogonalita) Lemma 6.22 (Optimalita R-G metódy) 6.4.2 Rád presnosti MKP 8 *Numerické integrovanie – Gaussove kvadratúry Programovanie: Úloha 8.5 (Gaussove kvadratúry) Úloha 8.6 (Použitie Gaussových kvadratúr) Odporúčané samoštúdium: Zvyšné časti v 6.4 Odhad chyby R-G met.
8.	7 Rieš. nestac. úloh pomocou MKP, úvod 7.1 Základná myšlienka 7.2 Priestorová diskretizácia	2.5 Pozdĺžne deformácie prúta Programovanie: Úloha 4.34 (Deformácia piliera) Úloha 4.35 (Def. piliera, ANSYS)
9.	7.3 Časová diskretizácia 7.3.1 Čas. diskret., parabolická rov. 7.3.2 Čas. diskret., hyperbolická rov., iba idea	Programovanie: Úloha 7.9 (Nestac. RVT), po bod 7.
10.	2.2 Rovnica vedenia tepla v 2D a 3D 2.4 Priehyb membrány, časť	Programovanie: Úloha 7.9 (Nestac. RVT), od bodu 8. Úloha 8.8 (Použitie Gaussových kvadratúr) Úloha 7.10 (Preskúmanie schém)
11.	2.4 Priehyb membrány, dokončenie 9 MKP pre DR 2. rádu v 2D, úvod 9.1 Diskretizácia výpočtovej oblasti	Programovanie: Úloha 9.7 (Diskretizácia)
12.	9.2.1 Slabá formulácia 9.2.2 Aproximačné funkcie	Programovanie: Úloha 9.8 (Diskretizácia OP) Úloha 9.13 (Aproximačné funkcie) Úloha 9.22 (Elem. mat. a pravá strana)
13.	9.2.3 Dosadenie LK a AF do SF 9.2.4 Výpočet hraničných členov 9.3 Globálna sústava rovníc	9.6 Výpočet chýb a EOC Programovanie: Úloha 9.25 (Glob. mat. a pravá strana) Úloha 9.26 (Využitie OP) Úloha 9.29 (Riešenie a vizualizácia) Úloha 9.33 (Výpočet chýb a EOC)

Obsah

I	Predtým, než sa pustíme do MKP	1
1	Úvod	3
2	Matematické modely	5
2.1	Rovnica vedenia tepla v 1D	5
2.2	Rovnica vedenia tepla v 2D a 3D	8
2.3	Rovnica difúzie v 2D a 3D	12
2.4	Priehyb membrány	13
2.4.1	Celková práca na zmenu tvaru membrány	14
2.4.2	Nutná podmienka minima potenciálnej energie	16
2.4.3	Diferenciálna rovnica pre priechyby membrány	17
2.5	Pozdĺžne deformácie prúta	17
2.5.1	Okrajové podmienky	20
2.6	Eulerov-Bernoulliho nosník	21
2.6.1	Výpočet priečnej sily	23
2.6.2	Výpočet ohybového momentu	24
2.6.3	Okrajové podmienky	25
3	Numerické metódy	27
3.1	Metóda konečných diferencií	27
3.2	Variačné metódy	34
3.2.1	Naivný prístup	35
3.2.2	Variačná formulácia	35
3.2.3	Metóda vážených rezíduí	36
II	Metóda konečných prvkov pre 1D úlohy	39
4	MKP pre diferenciálnu rovnicu 2. rádu	41
4.1	Algoritmus metódy konečných prvkov	42
4.2	Diskretizácia výpočtovej oblasti	43
4.3	Sústava rovníc na elemente	43
4.3.1	Slabá formulácia	43
4.3.2	Aproximačné funkcie	45
4.3.3	Dosadenie približného riešenia a aproximačných funkcií do slabej formulácie	50
4.4	Globálna sústava rovníc	54
4.4.1	Lineárne elementy	54
4.4.2	Kvadratické elementy	56
4.5	Využitie okrajových podmienok pre lineárne elementy	57
4.6	Riešenie glob. sys. rovníc a konštrukcia približného rieš.	59
4.7	*Globálny pohľad	67

5	MKP pre DR 4. rádu (Eulerov-Bernoulliho nosník)	69
5.1	Sústava rovníc na elemente	69
5.1.1	Slabá formulácia	69
5.1.2	Aproximačné funkcie	72
5.1.3	Dosadenie približného riešenia a aproximačných funkcií do slabej formulácie	74
5.2	Globálna sústava rovníc	75
5.3	Využitie okrajových podmienok	76
5.4	Konštrukcia približného riešenia	77
6	Matematická analýza metódy konečných prvkov	79
6.1	Druhy chýb v MKP	79
6.2	Pojem klasického a slabého riešenia	84
6.3	Ritzova-Galerkinova metóda	88
6.4	Odhad chyby Ritzovej-Galerkinovej metódy	91
6.4.1	Konštrukcia priestoru V_n , v ktorom platí aproximačný predpoklad	96
6.4.2	Rád konverencie metódy konečných prvkov	97
6.4.3	Dôkaz Lemmy 6.36 (aproximačnej vety pre interpolant)	100
7	Riešenie nestacionárnych úloh pomocou MKP	103
7.1	Základná myšlienka	104
7.2	Priestorová diskretizácia	104
7.2.1	Diskretizácia výpočtovej oblasti	105
7.2.2	Sústava rovníc na elemente	105
7.3	Časová diskretizácia	107
7.3.1	Parabolická rovnica	108
7.3.2	Hyperbolická rovnica	113
8	*Numerické integrovanie – Gaussove kvadratúry	115
8.1	1-bodová Gaussova kvadratúra	115
8.2	2-bodová Gaussova kvadratúra	117
8.3	n -bodová Gaussova kvadratúra	118
III	Metóda konečných prvkov pre 2D úlohy	123
9	MKP pre diferenciálnu rovnicu 2. rádu v 2D	125
9.1	Diskretizácia výpočtovej oblasti	128
9.2	Sústava rovníc na elemente	130
9.2.1	Slabá formulácia	130
9.2.2	Aproximačné funkcie	131
9.2.3	Dosadenie približného riešenia a aproximačných funkcií do slabej formulácie	140
9.2.4	Výpočet hraničných členov	142
9.3	Globálna sústava rovníc	143
9.3.1	Spojitosť riešenia	143
9.3.2	Bilancia tokov	144
9.3.3	Spojenie rovníc do globálnej sústavy	145
9.3.4	Využitie okrajových podmienok	146
9.4	*Globálna sústava rovníc pre sieť s tromi elementami	149
9.5	Riešenie glob. sys. rovníc a konštrukcia približného rieš.	151
9.6	Výpočet chýb a experimentálneho rádu konverencie	154
A	Matematické nástroje	157
	Bibliografia	167

Časť I

Predtým, než sa pustíme do MKP

Kapitola 1

Úvod

Skoro každý jav v prírode (biologický, mechanický, geologický, meteorologický, prúdenie kvapalín...) sa dá opísať pomocou zákonov fyziky v tvare algebraických, diferenciálnych alebo integrálnych rovníc. Podobné matematické rovnice sa používajú aj v iných oblastiach, napríklad v spracovaní obrazu, počítačovom videní, strojovom učení, ekonómii, finančnom modelovaní a ďalších. Inžinieri a vedci majú pri matematickom skúmaní javov v podstate dve hlavné úlohy:

1. **Matematická formulácia procesu** (tvorba matematického modelu). Na opísanie procesu matematickým jazykom je potrebné rozumieť, ako skúmaný jav funguje a treba poznať matematické nástroje, ktorými možno proces vyjadriť.
2. **Riešenie matematického modelu**. Tvorba matematického modelu je často oveľa jednoduchšia úloha, než hľadanie riešenia matematického modelu. Úlohy sa riešia buď *analyticky* (čiže presne), čo možno len vo veľmi jednoduchých prípadoch, alebo vo všeobecnosti *numericke* (čiže približne) s použitím numerických metód (väčšinou implementovaných v aplikačných softvéroch).

Numerické metódy

Na hľadanie približných riešení diferenciálnych rovníc existujú rôzne numerické metódy. Používajú sa napríklad tieto:

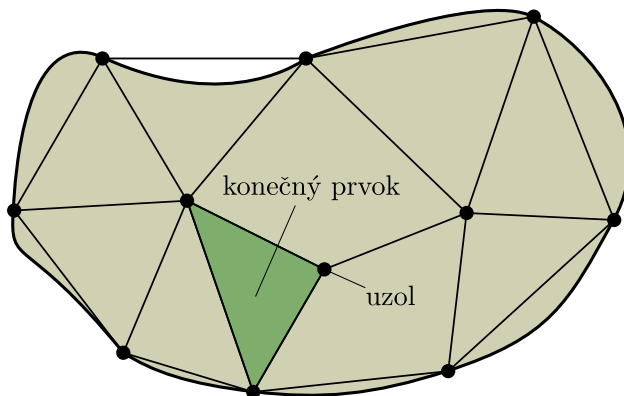
- **Metóda konečných diferencií**¹ (MKD alebo FDM – Finite Difference Method). Používa sa pre štvorcové alebo obdĺžnikové siete (resp. ich 1D či 3D analógie). V uzlových bodoch siete sa napíšu algebraické rovnice, ktoré aproximujú diferenciálne rovnice.
- **Variačné metódy**. Hlavnou myšlienkou je prepis diferenciálnej rovnice do tzv. variačnej formulácie (v tvare integrálu) a hľadanie riešenia v tvare lineárnej kombinácie $\sum_i c_i \phi_i$, kde ϕ_i sú vhodne zvolené aproximačné funkcie a c_i sú neznáme koeficienty. Koeficienty c_i sa určia tak, aby bola splnená variačná formulácia.
Existuje veľa variačných metód, napr. Galerkinova, Rayleigho-Ritzova alebo metóda vážených rezíduí. Metódy sa líšia výberom integrálneho tvaru, aproximačných funkcií a váhových funkcií. Na variačnom prístupe je založená aj *Metóda konečných prvkov* (MKP alebo FEM – Finite Element Method).
- **Metóda konečných objemov**² (MKO alebo FVM – Finite Volume Method)
- **Metóda okrajových prvkov**³ (MOP alebo BEM – Boundary Element Method)

¹Študenti MPM sa s ňou zoznámia na predmete Numerické riešenie diferenciálnych rovníc v letnom semestri 2. ročníka.

²Na MPM v rámci predmetov Numerické metódy v prúdení v zimnom semestri 4. ročníka a Spracovanie obrazu v letnom semestri 4. ročníka.

³Na MPM v predmete Metóda okrajových prvkov v zimnom semestri 5. ročníka.

Veľkým problémom klasických variačných metód⁴ je v prípade geometricky zložitejších výpočtových oblastí hľadanie aproximačných funkcií. Metóda konečných prvkov tento problém prekonáva systematickým postupom na hľadanie aproximačných funkcií. Výpočtová oblasť je reprezentovaná množinou geometricky jednoduchých oblastí, ktorým sa hovorí konečné prvky (elementy), pozri Obr. 1.1. Na každom konečnom prvku sa neznáma funkcia aproximuje lineárnou kombináciou polynómov ψ_i (elementových aproximačných funkcií) určitého stupňa v tvare $\sum_i u_i \psi_i$. V úlohe neznámych koeficientov vystupujú približné uzlové hodnoty u_i neznámej funkcie u ,⁵ ktoré sa hľadajú tak, aby bola splnená variačná formulácia.



Obr. 1.1. Nepravidelná výpočtová oblasť reprezentovaná sieťou konečných prvkov.

Myšlienka rozdelenia zložitej oblasti na jednoduchšie, na ktorých vieme vyjadriť želanú kvantitu, je veľmi prirodzený prístup. Použili ju už starovekí matematici pri výpočte obvodu kruhu, resp. približnej hodnoty čísla π , keď kruh aproximovali pravidelným vpísaným mnohoúhelníkom. Metóda konečných prvkov sa však formálne začala vyvíjať až v rokoch 1956 [16] a 1960 [1], pričom termín „finite element“ (konečný prvok) bol prvýkrát použitý v roku 1960 [3].

⁴Pod klasickými sa myslia také, kde sa variačný prístup aplikuje na celú výpočtovú oblasť.

⁵Ako uvidíme v kapitole 5, pri niektorých rovniciach vyšších rádov (napríklad rovniciach 4. rádu) sú koeficientami ešte aj približné hodnoty derivácií v uzlových bodoch.

Kapitola 2

Matematické modely

V tejto kapitole uvádzame odvodenie niektorých diferenciálnych rovníc, ktoré sú matematickými modelmi fyzikálnych dejov. V ďalších kapitolách potom tieto diferenciálne rovnice budeme riešiť pomocou rôznych numerických metód (hlavne metódou konečných prvkov).

2.1 Rovnica vedenia tepla v 1D

Teplo prúdi z miest s vyššou teplotou do miest s nižšou teplotou a rýchlosť prúdenia závisí od strmosti teplotného spádu. Matematicky to vyjadruje empirický *Fourierov zákon*, ktorý má v 1D tvar

$$q = -\lambda \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.1)$$

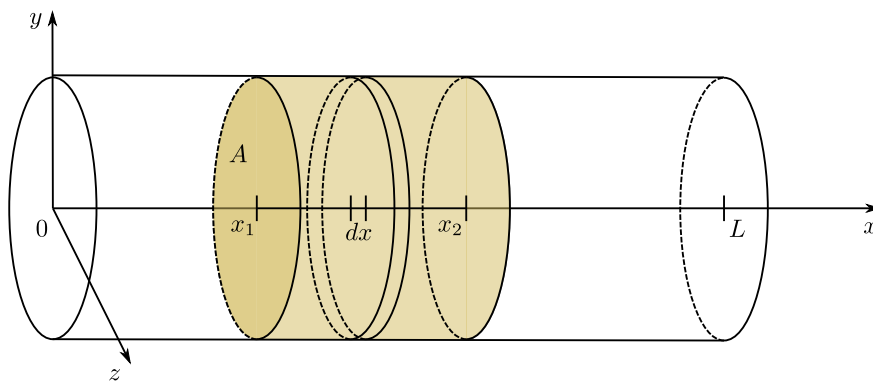
kde q je hustota tepelného toku, λ je koeficient (súčiniteľ) tepelnej vodivosti materiálu,¹ u je teplota a x je priestorová súradnica. Podrobnejší opis veličín a ich fyzikálne jednotky uvádzame v Tabuľke 2.1.

Existuje množstvo reálnych situácií, pri ktorých môžeme použiť 1D model vedenia tepla. Niektoré z nich uvedieme. Neznámou veličinou je vždy teplota $u(x, t)$, ktorá je funkciou polohy x a času t .

Množstvo tepla Q , ktoré teleso prijme pri zmene svojej teploty vyjadruje *kalorimetrická rovnica*

$$Q = mc(u_2 - u_1), \quad (2.2)$$

kde m je hmotnosť telesa, c je merná tepelná kapacita, u_1 je počiatočná a u_2 konečná teplota.



Obr. 2.1. Tyč s konštantným prierezom. Farebne je vyznačený valec $A \times [x_1, x_2]$, ktorý sa bude používať pri odvodení rovnice vedenia tepla.

¹Niekedy skráteno hovoríme aj „tepelná vodivosť“.

Uvažujme tyč s konštantným prierezom² A a s dĺžkou L , ktorej plášť je izolovaný (Obr. 2.1). Okrajové podmienky na podstavách $x = 0$ a $x = L$ nech nezávisia od súradníc y a z . Intenzita zdrojov tepla f nech v priestore závisí len od x . Za týchto podmienok je neznámou teplota $u(x, t)$, ktorá závisí od súradnice $x \in [0, L]$ a času $t \in [0, T]$. Naším cieľom je odvodiť diferenciálnu rovnicu pre funkciu $u(x, t)$.

Tabuľka 2.1. Prehľad veličín.

Veličina	Jednotka	Názov	Popis
$u(x, t)$	K	Teplota v mieste x a čase t	
$c(x)$	J/kg K	Merná tepelná kapacita	Množstvo tepla [J] potrebné na zohriatie 1 kg látky o 1 K
$\rho(x)$	kg/m ³	Hustota	
$f(x, t)$	J/m ³ s	Intenzita (hustota) zdrojov tepla	Množstvo tepla [J] vyprodukované v 1 m ³ za 1 s
$q(x, t)$	J/m ² s	Hustota tepelného toku	Množstvo tepla, ktoré prejde prierezom 1 m ² za 1 s
$\lambda(x)$	W/m K	Koeficient (súčiniteľ) tepelnej vodivosti	Množstvo tepla, ktoré prejde za 1 s medzi protiahlymi stenami jednotkovej kocky, keď sa ich teploty líšia o 1 K a ostatné steny sú izolované.

Pre infinitezimálny element dx s hmotnosťou $dm = \rho(x)Adx$ má kalorimetrická rovnica (2.2) tvar

$$dQ = dm c(x)[u(x, t_2) - u(x, t_1)] = Ac(x)\rho(x)[u(x, t_2) - u(x, t_1)]dx,$$

kde $t_1, t_2 \in (0, T]$ sú ľubovoľné časy. Pre teleso $A \times [x_1, x_2]$ (Obr. 2.1), kde $x_1, x_2 \in (0, L)$ sú ľubovoľné, sa celkové množstvo prijatého tepla vypočíta ako

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} Ac(x)\rho(x)[u(x, t_2) - u(x, t_1)] dx.$$

Bilancia tepla (zákon zachovania energie v integrálnom tvare) pre teleso $A \times [x_1, x_2]$ má tvar

$$\underbrace{\int_{x_1}^{x_2} Ac(x)\rho(x)[u(x, t_2) - u(x, t_1)] dx}_{\text{teplo, kt. prijme objem } A \times [x_1, x_2]} = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} Aq(x_1, t) dt}_{\text{teplo, kt. prišlo cez ľ. stenu}} - \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} Aq(x_2, t) dt}_{\text{teplo, kt. prišlo cez p. stenu}} + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} Af(x, t) dx dt}_{\text{teplo dodané zdrojmi}}. \quad (2.3)$$

Všimnime si, že pri teple, ktoré prišlo cez pravú stenu je znamienko mínus. Je tam z toho dôvodu, že smer do vnútra objemu je smerom proti orientácii osi x . Keďže prierez A je konštantný, môžeme A vykrátiť.

Úloha 2.1. S použitím Tabuľky 2.1 overte, že fyzikálny rozmer (jednotka) každého člena v rovnici (2.3) je správny (teda [J]).

Po úprave z rovnice (2.3) dostaneme

$$\int_{x_1}^{x_2} c(x)\rho(x)[u(x, t_2) - u(x, t_1)] dx + \int_{t_1}^{t_2} [q(x_2, t) - q(x_1, t)] dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x, t) dx dt$$

²Na tyč s konštantným prierezom sa obmedzujeme pre jednoduchosť výkladu. Odvodenie rovnice pre tyč s premenlivým prierezom $A(x)$ je analogické tomu, ako odvodzame rovnicu pre pozdĺžne deformácie prúta s premenlivým prierezom v sekcii 2.5.

a s použitím Newtonovho-Leibnizovho vzorca (A.1) v podintegrálnych výrazoch na ľavej strane dostaneme v každom člene integrály cez rovnakú oblasť, takže všetko môžeme napísať pod jeden integrál

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(c(x)\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} - f(x, t) \right) dx dt = 0. \quad (2.4)$$

Rovnica (2.4) má tvar

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} G(x, t) dx dt = 0, \quad \text{kde} \quad G(x, t) := c(x)\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} - f(x, t).$$

Keďže integračné hranice $t_1, t_2 \in (0, T]$ a $x_1, x_2 \in (0, L)$ sú ľubovoľné, musí byť podľa Vety A.5 funkcia G nulová skoro všade (až na množinu miery nula), $G(x, t) = 0$, z čoho dostávame *zákon zachovania energie v diferenciálnom tvare* (rovnice kontinuity)

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = f(x, t). \quad (2.5)$$

Rovnica kontinuity (2.5) obsahuje 2 neznáme funkcie $u(x, t)$ a $q(x, t)$. Potrebujeme teda ešte jednu rovnicu, aby sme úlohu vedeli riešiť.

Po dosadení Fourierovho zákona (2.1) do rovnice kontinuity (2.5) dostaneme *nestacionárnu rovnicu vedenia tepla* v 1D

$$c(x)\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f(x, t). \quad (2.6)$$

Z matematického pohľadu ide o *parabolickú rovnicu*. Rovnice tohto typu opisujú neustálené deje, ktoré spejú k ekvilibriu (rovnovážnemu stavu).

V prípade, že sa teplota nemení s časom, čiže $\frac{\partial u}{\partial t} \equiv 0$ (vtedy ani funkcia f nemôže závisieť od času t), dostávame rovnicu *ustáleného (stacionárneho) vedenia tepla*

$$-\frac{d}{dx} \left(\lambda(x) \frac{du}{dx} \right) = f(x). \quad (2.7)$$

Je to tzv. *eliptická rovnica*. Rovnice eliptického typu vo všeobecnosti opisujú ustálené stavy.³

Okrajové podmienky

Pre nestacionárnu rovnicu vedenia tepla (2.6) budeme uvažovať 3 druhy okrajových podmienok. *Dirichletova* okrajová podmienka, napríklad

$$u(L, t) = g(t),$$

sa používa, keď chceme zadať hodnotu teploty na hranici oblasti. *Neumannova* okrajová podmienka, napríklad

$$\left(-\lambda(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = h(t)$$

zadáva hustotu tepelného toku na hranici oblasti. *Newtonova* (alebo tiež *Robinova*) okrajová podmienka pri vedení tepla definuje konvekciu na hranici oblasti, napríklad

$$\left(-\lambda(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = \kappa(u_{\text{ext}} - u(0, t)), \quad (2.8)$$

³Pre úplnosť: Existujú ešte aj *hyperbolické rovnice*, ktoré opisujú napríklad prúdenie kvapalín a plynov, šírenie vln a podobne. V sekcii 2.5 odvodíme jednu konkrétnu hyperbolickú rovnicu, a to pohybovú rovnicu pre deformáciu piliera.

kde κ je súčiniteľ prestupu tepla konvekciou (medzi materiálom a okolitým prostredím), ktorý má jednotku $\text{W}/\text{m}^2\text{K}$, a u_{ext} je teplota okolitého prostredia.⁴ Pre stacionárnu rovnicu vedenia tepla (2.7) používame stacionárne analógie uvedených okrajových podmienok (nezávisia od času).

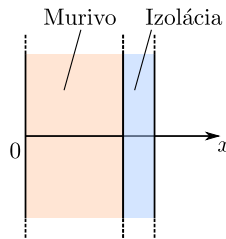
Často sa používajú aj tzv. *zmiešané* okrajové podmienky: Na každom okraji sa zadá iný typ okrajovej podmienky (napr. vľavo Dirichletova a vpravo Neumannova).

Počiatočná podmienka

Pre nestacionárnu rovnicu vedenia tepla (2.6) zadávame okrem okrajových podmienok aj počiatočnú podmienku, čiže hodnotu teploty v celej výpočtovej oblasti v čase $t = 0$

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (2.9)$$

Poznámka 2.2 (Nekonečná stena). Rovnica vedenia tepla v tvare (2.6) sa dá použiť aj na výpočet priebehu teploty v nekonečnej stene alebo ako približný model pre konečnú stenu v oblasti, ktorá je ďaleko od okrajov steny. Súradnicová os x je orientovaná v smere kolmo na stenu (v smere normály), pozri Obr. 2.2.



Obr. 2.2. Nekonečná stena vo zvislom reze.

2.2 Rovnica vedenia tepla v 2D a 3D

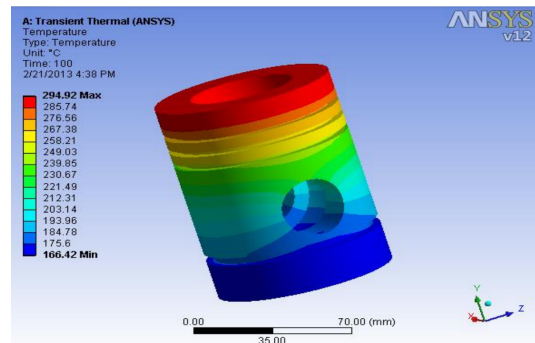
Odvoodenie rovnice vedenia tepla sa dá urobiť naraz pre 2D aj 3D výpočtovú oblasť. Pod výpočtovou oblasťou Ω si teda budeme predstavovať oblasť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ alebo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Chceme nájsť rovnicu, ktorá opisuje vedenie tepla v oblasti Ω v časovom intervale $(0, T]$. Neznámou je teplota $u(\vec{r}, t)$ v mieste $\vec{r} = (x, y) \in \Omega$ (resp. $\vec{r} = (x, y, z)$ v 3D úlohe) a čase $t \in (0, T]$.

Nech $V \subset \Omega$ je *ľubovoľná podoblasť* s hranicou ∂V . Vektor $\vec{n}$ bude označovať jednotkovú vonkajšiu normálu k hranici ∂V , Obr. 2.4. Vyberme ďalej *ľubovoľný časový podinterval* $[t_1, t_2] \subset (0, T]$.

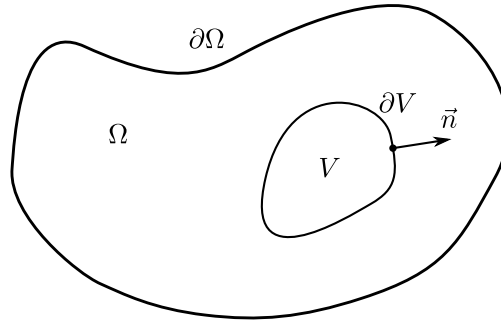
Podobne ako v sekcii 2.1 aj tu využijeme kalorimetrickú rovnicu (2.2). Pre infinitezimálny objem dV (v dvoch rozmeroch $dV = dx dy$ a v troch rozmeroch $dV = dx dy dz$) s hmotnosťou $dm = \rho(\vec{r})dV$ má kalorimetrická rovnica tvar

$$dQ = dm c(\vec{r})[u(\vec{r}, t_2) - u(\vec{r}, t_1)] = c(\vec{r})\rho(\vec{r})[u(\vec{r}, t_2) - u(\vec{r}, t_1)]dV,$$

⁴Ide o približný empirický vzťah. Hustota tepelného toku (rýchlosť, akou „tečie“ teplo cez hranicu) je úmerná rozdielu teploty okolia a teploty na hranici, pričom koeficient úmernosti κ je tým väčší, čím lepšie sa teplo prenáša medzi okolím a hranicou (závisí napríklad od prúdenia vzduchu v prostredí a podobne). V softvéri ANSYS sa κ nazýva film coefficient a u_{ext} je bulk (alebo ambient) temperature.



Obr. 2.3. Riešenie rovnice vedenia tepla pre piest spaľovacieho motora v softvéri ANSYS [7].

Obr. 2.4. Výpočtová oblasť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a podoblasť $V \subset \Omega$.

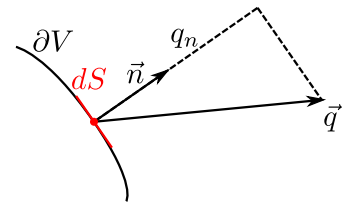
kde používame označenia z Tabuľky 2.1. Pre oblasť V sa celkové množstvo prijatého tepla vypočíta ako integrál

$$Q = \int_V c(\vec{r})\rho(\vec{r})[u(\vec{r}, t_2) - u(\vec{r}, t_1)] dV.$$

Bilancia tepla (zákon zachovania energie v integrálnom tvare) pre oblasť V v časovom intervale $[t_1, t_2]$ má tvar

$$\underbrace{\int_V c(\vec{r})\rho(\vec{r})[u(\vec{r}, t_2) - u(\vec{r}, t_1)] dV}_{\text{teplo, ktoré prijme objem } V} = - \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial V} \vec{q} \cdot \vec{n} dS dt}_{\text{teplo, ktoré prítieklo cez hranicu } \partial V} + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \int_V f(\vec{r}, t) dV dt}_{\text{teplo dodané zdrojmi}} \quad (2.10)$$

kde $\vec{q}(\vec{r}, t)$ je vektor hustoty tepelného toku. Skalárny súčin $\vec{q} \cdot \vec{n}$ vyjadruje priemet hustoty tepelného toku do normály ku hranici ∂V (normálovú zložku). Preto výraz $\vec{q} \cdot \vec{n} dS$ vyjadruje, koľko tepla pretečie cez infinitezimálny kúsok dS hranice ∂V za jednotku času (Obr. 2.5). Keďže $\vec{n}$ je vektor *vonkajšej* normály, tak integrál $\int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial V} \vec{q} \cdot \vec{n} dS dt$ vyjadruje množstvo tepla, ktoré z oblasti V *vytečie*. Práve preto je v bilancii (2.10) pred týmto integrálom znamienko *mínus*, aby sme vyjadrili množstvo tepla, ktoré *prítieklo*.

Obr. 2.5. Tok cez infinitezimálny kúsok hranice dS .

Úloha 2.3. Podobne ako v rovnici (2.3), aj tu v rovnici (2.10) čitateľovi odporúčame overiť, že fyzikálna jednotka každého člena je správna [J].

Aby všetky integrály mali rovnakú oblasť integrovania, tak na ľavej strane v podintegrálnom výraze využijeme Newtonov-Leibnizov vzorec (A.1) a v prvom člene na pravej strane Gaussovú vetu (A.2). Dostaneme

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_V c(\vec{r})\rho(\vec{r}) \frac{\partial u}{\partial t} dV dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_V \nabla \cdot \vec{q} dV dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_V f(\vec{r}, t) dV dt$$

a po úprave na jeden integrál vychádza

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_V \underbrace{\left[c(\vec{r})\rho(\vec{r}) \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{q} - f(\vec{r}, t) \right]}_{G(\vec{r}, t)} dV dt = 0.$$

Keďže oblasť V a interval $[t_1, t_2]$ sú ľubovoľné, tak podľa Vety A.5 a Vety A.6 musí byť funkcia $G(\vec{r}, t) := c(\vec{r})\rho(\vec{r}) \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{q} - f(\vec{r}, t)$ nulová skoro všade, z čoho dostávame *zákon zachovania energie v diferenciálnom tvare* (rovniciu kontinuity)

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{q} = f(\vec{r}, t). \quad (2.11)$$

Rovnica kontinuity (2.5) obsahuje 1 neznámu skalárnu funkciu $u(\vec{r}, t)$ a jednu neznámu vektorovú funkciu $\vec{q}(\vec{r}, t)$. Máme teda príliš veľa neznámych, potrebujeme pridať ďalšiu rovnicu (rovnice).

Poznámka 2.4. Predchádzajúci postup dokonca zahŕňa aj 1D prípad, ktorý sme uviedli v sekcii 2.1. Vtedy je výpočtová oblasť interval $\Omega = (0, L)$, jeho hranicou sú hranice intervalu, čiže body $\partial\Omega = \{0, L\}$. Podobne podoblasť je interval $V = [x_1, x_2]$ s hranicou $\partial V = \{x_1, x_2\}$. Vektory $\vec{q}$ a $\vec{n}$ sú jednozložkové (čiže sú to čísla), napríklad $\vec{n}(x_1) = -1$ a $\vec{n}(x_2) = 1$. Náhradou za Gaussovu vetu je Newtonov-Leibnizov vzorec (pozri Poznámku A.3). Odporúčame čitateľovi, aby si prešiel celý postup a premyslel si, ako sa zredukuje na 1D prípad. Rovnica kontinuity (2.11) sa teda v 1D zredukuje na tvar (2.5).

Fourierov zákon v 2D a 3D

Rovnako ako v 1D, aj tu využijeme *Fourierov zákon* (pozri sekcii 2.1), ktorý má v 2D, resp. 3D v prípade *izotropného* materiálu⁵ podobu

$$\vec{q} = -\lambda \nabla u, \quad \text{kde } \lambda = \lambda(\vec{r}), \quad (2.12)$$

čiže teplo tečie proti smeru teplotného gradientu (kolmo na izotermy). Všeobecne v prípade *anizotropného* materiálu má Fourierov zákon tvar

$$\vec{q} = -\Lambda \cdot \nabla u,$$

kde $\Lambda = \Lambda(\vec{r})$ je matica (presnejšie maticová funkcia)

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{bmatrix} \text{ (2D prípad),} \quad \text{resp.} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix} \text{ (3D prípad),}$$

pričom zložky $\Lambda_{ij} = \Lambda_{ij}(\vec{r})$ sú funkciami polohy. Vektor $\vec{q}$ v anizotropnom prípade vo všeobecnosti nie je rovnobežný s gradientom teploty (teplo netečie kolmo na izotermy).

Poznámka 2.5 (Drevo). Anizotropný materiál je napríklad drevo. Nech os z je orientovaná v smere vlákien, potom matica tepelnej vodivosti má podobu

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

pričom platí $\lambda_3 > \lambda_1, \lambda_2$, čiže vodivosť v smere vlákien je vyššia, než v smere kolmo na ne. V prípade, že sa matica tepelnej vodivosti anizotropného materiálu dá vyjadriť v tvare (2.13) hovoríme, že materiál je *ortotropný*.^a

^aLokálne sa to dá, samozrejme, vždy. Z lineárnej algebry vieme, že v každom bode $\vec{r} \in V$ môžeme nájsť takú bázu, že matica tepelnej vodivosti bude v nej mať diagonálny tvar. V prípade ortotropných materiálov je však táto báza rovnaká v každom bode.

Rovnica vedenia tepla

Po využití Fourierovho zákona (2.12) dostávame *nestacionárnu rovnicu vedenia tepla* pre izotropný materiál

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (\lambda \nabla u) = f(\vec{r}, t) \quad (2.14)$$

⁵Izotropný materiál má v každom smere rovnakú tepelnú vodivosť.

a pre anizotropný materiál

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (\Lambda \cdot \nabla u) = f(\vec{r}, t). \quad (2.15)$$

Z matematického hľadiska ide o parabolické rovnice (rovnako ako rovnica (2.6) v 1D).

Uvedme ešte tri špeciálne prípady izotropnej rovnice (2.14). Ak sa teplota nemení s časom, čiže $\frac{\partial u}{\partial t} \equiv 0$, dostávame rovnicu *ustáleného (stacionárneho) vedenia tepla*

$$-\nabla \cdot (\lambda \nabla u) = f(\vec{r}), \quad (2.16)$$

čo je z matematického hľadiska eliptická rovnica (porovnaj s rovnicou (2.7) v 1D). Ak tepelná vodivosť nezávisí od polohy ($\lambda \equiv \text{konšt.}$), tak dostávame *Poissonovu rovnicu*

$$-\lambda \Delta u = f(\vec{r}), \quad (2.17)$$

kde $\Delta u = \nabla \cdot \nabla u = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ je Laplaceov operátor. Ak nemáme zdroje tepla ($f \equiv 0$), Poissonova rovnica (2.17) sa redukuje na *Laplaceovu rovnicu*

$$\Delta u = 0.$$

Príklad 2.6 (Izotropná 2D stacionárna rovnica vedenia tepla). V dvojrozmernom prípade izotropnej stacionárnej rovnice vedenia tepla (2.16) detailný zápis rovnice vyzerá takto

$$-\partial_x (\lambda \partial_x u) - \partial_y (\lambda \partial_y u) = f(x, y), \quad \text{kde } \lambda = \lambda(x, y).$$

Príklad 2.7 (Anizotropná 2D stacionárna rovnica vedenia tepla). Anizotropnú 2D stacionárnu rovnicu vedenia tepla dostaneme ako špeciálny prípad rovnice (2.15). Detailný zápis má tvar

$$-\partial_x (\Lambda_{11} \partial_x u + \Lambda_{12} \partial_y u) - \partial_y (\Lambda_{21} \partial_x u + \Lambda_{22} \partial_y u) = f(x, y), \quad \text{kde } \Lambda_{ij} = \Lambda_{ij}(x, y).$$

Okrajové a počiatočné podmienky

Pre rovnicu vedenia tepla (2.14), resp. (2.15) uvažujeme, podobne ako v 1D, 3 druhy okrajových podmienok. *Dirichletovou* okrajovou podmienkou

$$u(\vec{r}, t) = g(\vec{r}, t), \quad \vec{r} \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T]$$

zadáваме teplotu u v bode $\vec{r}$ (a čase t) na hranici oblasti Ω .

Neumannova okrajová podmienka má tvar

$$q_n(\vec{r}, t) = h(\vec{r}, t), \quad \vec{r} \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T], \quad (2.18)$$

kde $q_n = \vec{q} \cdot (-\vec{n})$ označuje hustotu toku do vnútra oblasti.⁶ Špeciálne v izotropnom prípade s hustotou toku $\vec{q} = -\lambda \nabla u$ vychádza

$$q_n = \vec{q} \cdot (-\vec{n}) = \lambda \vec{n} \cdot \nabla u = \lambda \frac{\partial u}{\partial \vec{n}},$$

kde $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ označuje deriváciu v smere normály (normálovú deriváciu). Okrajová podmienka (2.18) v tomto prípade vlastne špecifikuje zmenu teploty v smere vonkajšej normály. Pri vedení tepla sa

⁶Je to naozaj hustota toku do *vnútra*, lebo $(-\vec{n})$ je *vnútorná* normála ku hranici $\partial\Omega$.

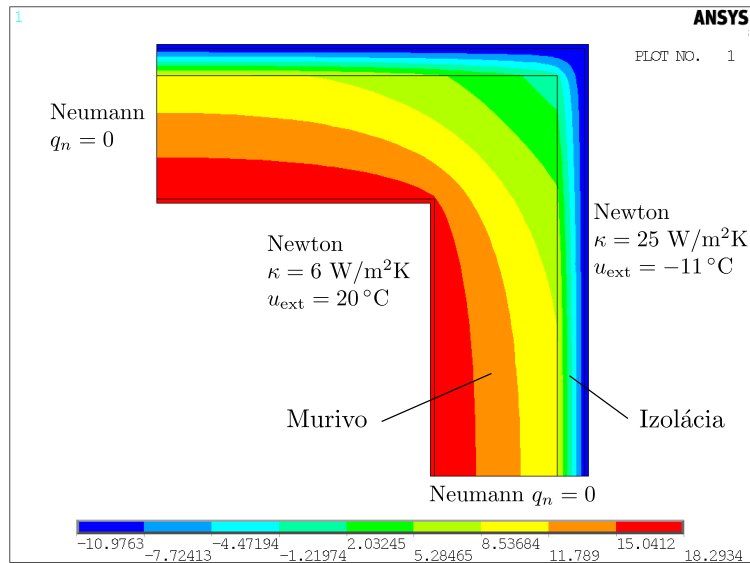
často uvažuje, že nejaká časť hranice je izolovaná, čiže ňou nepreteká žiaden tepelný tok, matematicky $q_n = 0$.⁷ Môžeme to prepísať aj na tvar $\vec{n} \cdot \nabla u = 0$, čiže gradient teploty je kolmý na normálu a rovnobežný s hranicou. To pre riešenie u v blízkosti nulového Neumanna znamená, že vrstevnice funkcie u (izotermy) sú kolmé na hranicu, pozri Obr. 2.6.

Newtonova (Robinova) okrajová podmienka definuje konvekciu v bode $\vec{r}$ na hranici oblasti

$$q_n(\vec{r}, t) = \kappa(u_{\text{ext}} - u(0, t)), \quad \vec{r} \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T],$$

kde na pravej strane používame rovnaké značenie ako v 1D, pozri vzťah (2.8). V stacionárnom prípade zo všetkých okrajových podmienok vypadne čas t .

Rovnako ako v 1D, aj tu sa bežne používajú zmiešané okrajové podmienky, čiže typ okrajovej podmienky sa pozdĺž hranice mení. Tak to vidíme napr. aj na Obr. 2.6, na niektorých častiach hranice je zadaná Newtonova, na niektorých Neumannova okrajová podmienka.



Obr. 2.6. Riešenie 2D stacionárnej rovnice vedenia tepla (2.16) v softvéri ANSYS. Ide o vodorovný rez kúta. Na vnútorných a vonkajších stenách bola zadaná konvekcia, ľavá a dolná hrana sú izolované. Izotermy by reálne mali byť kolmé na tieto hrany až v nekonečnej vzdialenosti od kúta. Štandardne sa takéto situácie modelujú orezaním detailu v dostatočnej vzdialenosti, aby vplyv tejto aproximácie v skúmaných miestach (v kúte) bol zanedbateľný.

Počiatková podmienka má úplne rovnaký tvar ako v 1D, pozri (2.9). Zadáme teplotu $u(\vec{r}, 0)$ v každom bode $\vec{r}$ oblasti Ω .

2.3 Rovnica difúzie v 2D a 3D

Vedenie tepla má veľa spoločného s ďalšími fyzikálnymi javmi, pri ktorých tečú nejaké kvantity, napríklad difúzia (napr. čaju vo vode, Obr. 2.7) alebo prúdenie vody v pórovitom prostredí. Odvozenie diferenciálnej rovnice sa preto robí rovnako, len tu vystupujú iné veličiny. Vždy sa najprv odvodí zákon zachovania (hmotnosti alebo energie) a skombinuje sa so zákonom, ktorý dáva do súvisu hustotu toku s gradientom neznámej. Ako príklad uvádzame nestacionárnu izotropnú rovnicu difúzie v 2D/3D.

Difúzia je samovoľné prenikanie častíc nejakej látky medzi častice inej látky spôsobené náhodným pohybom a zrážkami častíc



Obr. 2.7. Difúzia čaju vo vode.

⁷V softvéri ANSYS a iných konečnoprvkových softvéroch sa používa nulová Neumannova podmienka ako automatické (default) nastavenie. Čiže ak v rovnici vedenia tepla nezadáme na niektorom okraji oblasti žiadnu okrajovú podmienku, ANSYS tento okraj automaticky chápe ako izolovaný (neprehádza cez neho tepelný tok).

(Brownov pohyb). Tento proces makroskopicky opisuje rovnica difúzie. Neznámou veličinou je koncentrácia (hustota) difundujúcej látky $u(\vec{r}, t)$ v mieste $\vec{r}$ a čase t . Ako jednotku koncentrácie budeme používať kg/m^3 .⁸

V analógii s rovnicou (2.10) urobíme *bilanciu hmotnosti*, čiže napíšeme zákon zachovania hmotnosti v integrálnom tvare pre oblasť V (Obr. 2.4) v časovom intervale $[t_1, t_2]$. Na ľavej strane bude zmena hmotnosti látky v oblasti V a vpravo dôvody tejto zmeny

$$\underbrace{\int_V u(\vec{r}, t_2) dV}_{\text{hmot. látky v obj. } V \text{ v čase } t_2} - \underbrace{\int_V u(\vec{r}, t_1) dV}_{\text{hmot. látky v obj. } V \text{ v čase } t_1} = \underbrace{-\int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial V} \vec{j} \cdot \vec{n} dS dt}_{\text{hmot. látky, kt. prítiekla cez hranicu } \partial V} + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \int_V f(\vec{r}, t) dV dt}_{\text{hmotnosť látky dodanej zdrojmi}}. \quad (2.19)$$

Vektor $\vec{j}(\vec{r}, t)$ označuje hustotu (hmotnostného) toku⁹ $[\text{kg}/\text{m}^2\text{s}]$ a funkcia $f(\vec{r}, t)$ je intenzita zdrojov látky $[\text{kg}/\text{m}^3\text{s}]$.

Úloha 2.8. Podobne ako pri rovnici rovnici vedenia tepla overte, že fyzikálna jednotka každého člena v rovnici (2.19) je správna $[\text{kg}]$.

Rovnicu kontinuity (diferenciálny tvar zákona zachovania hmotnosti) získame úplne rovnakými krokmi, ako v sekcii 2.2. Na ľavej strane využijeme Newtonov-Leibnizov vzorec, v prvom člene na pravej strane Gaussovú vetu, všetko dáme pod jeden integrál a nakoniec využijeme ľubovoľnosť oblasti V a časového intervalu $[t_1, t_2]$. Rovnica kontinuity vychádza v tvare

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = f. \quad (2.20)$$

Rovnicu kontinuity treba skombinovať so vzťahom pre hustotu toku $\vec{j}$ vyjadrenú pomocou gradientu koncentrácie u . Látky majú tendenciu prenikať z prostredia s vyššou koncentráciou do prostredia s nižšou koncentráciou. Matematicky to vyjadruje *Fickov zákon*

$$\vec{j} = -D\nabla u,$$

kde $D(\vec{r})$ je *koeficient difúzie* $[\text{m}^2/\text{s}]$. Po dosadení Fickovho zákona do rovnice kontinuity (2.20) dostávame *rovniciu difúzie*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (D\nabla u) = f.$$

Poznámka 2.9 (Nelineárna difúzia). Niekedy sa koeficient difúzie uvažuje aj závislý od samotnej koncentrácie u , čiže $D(u, \vec{r})$. Vtedy je rovnica difúzie *nelineárna*. Matematické modely založené na nelineárnej difúzii sa veľmi často používajú v oblasti spracovania obrazu.^a

^aNa MPM o nich je reč na predmete Spracovanie obrazu v letnom semestri 4. ročníka.

2.4 Priehyb membrány

V sekciách 2.1 – 2.3 sme matematické modely tvorili tak, že sme skúmali fyzikálne zákony na malej časti výpočtovej oblasti a odvodili diferenciálnu rovnicu. V tejto časti si ukážeme, že fyzikálne zákony niekedy vedú priamo ku istej *integrálnej formulácii* na celej výpočtovej oblasti. Integrálna formulácia, ktorú tu odvodieme, sa nazýva *slabá formulácia* a ešte o nej bude reč, keď sa budeme

⁸Často sa používa aj jednotka mol/m^3 , kde mol je látkové množstvo.

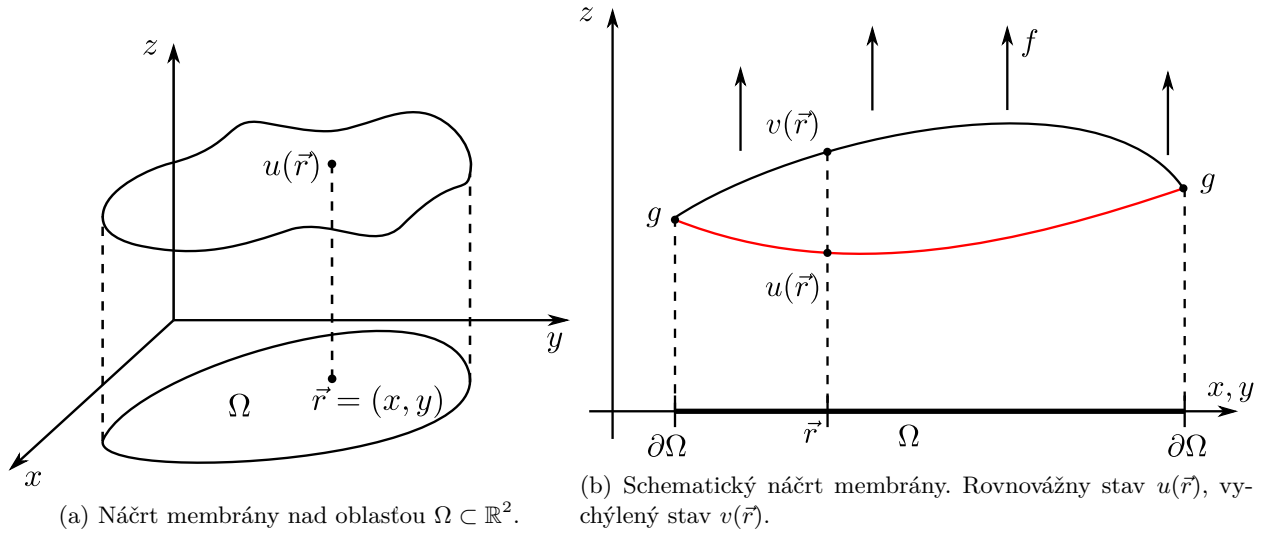
⁹Hovorí sa mu aj difúzny tok.

zaoberať metódou konečných prvkov.¹⁰ Zo slabej formulácie potom odvodíme diferenciálnu rovnicu pre priehyb membrány.¹¹

Pod membránou tu rozumieme pružnú blanu zanedbateľnej hrúbky, ktorá nekladie odpor v ohybe. Predpokladáme, že membrána je v rovnovážnom stave, pričom jej tvar budeme opisovať funkciou dvoch premenných $u(\vec{r}) = u(x, y)$, kde $\vec{r} := (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, pozri Obr. 2.9a. Ďalej predpokladajme, že posunutia membrány sú len vo zvislom smere (v smere osi z , čiže $u(\vec{r})$ vyjadruje posunutie v bode $\vec{r}$) a vonkajšie sily pôsobia taktiež len vo zvislom smere, Obr. 2.9b. Hustotu vonkajších síl (v jednotkách N/m^2) v mieste $\vec{r}$ označme ako $f(\vec{r})$, skrátene jej budeme hovoriť aj len „sila“. Napríklad gravitačná sila má hustotu $f = -\rho g$, kde ρ je plošná hustota membrány $[\text{kg}/\text{m}^2]$ a g je gravitačné zrýchlenie. V prípade, že je sila f nulová, tak membrána bude mať tvar *minimálnej plochy*, čiže takej plochy prichytenej na zadanú hranicu, ktorá má minimálny plošný obsah.¹² Takéto plochy sa s oblubou využívajú v architektúre, Obr. 2.8.



Obr. 2.8. Membránové prestrešenie pódia (Baltimore, USA).



Obr. 2.9. Náčrt membrány.

Budeme uvažovať membránu, ktorá je na hranici $\partial\Omega$ upevnená. To vyjadruje Dirichletova okrajová podmienka

$$u(\vec{r}) = g(\vec{r}), \quad \vec{r} \in \partial\Omega, \quad (2.21)$$

čiže funkcia $g(\vec{r})$ opisuje výšku, v ktorej je membrána v bode $\vec{r} \in \partial\Omega$ upevnená.

2.4.1 Celková práca na zmenu tvaru membrány

Predstavme si, že membránu deformujeme z rovnovážneho stavu $u(\vec{r})$ do nového vychýleného stavu $v(\vec{r})$, pričom funkcia $v(\vec{r})$ tiež spĺňa okrajovú podmienku (2.21) (hranicu teda nedeformujeme),

¹⁰Čiže slabá formulácia nie je len „matematický výmysel“, ako by sa to z pohľadu MKP mohlo zdať.

¹¹Odvodenie slabej formulácie, ktoré uvedieme, pochádza z knihy [10].

¹²V odvození, ktoré budeme robiť, sa v jednom kroku robí isté priblíženie, takže rovnica, ktorú dostaneme, opisuje minimálne plochy len približne.

pozri Obr. 2.9b. Na deformáciu je potrebné vykonať prácu W , ktorá je súčtom dvoch prác,

$$W = W_1 + W_2, \quad (2.22)$$

kde W_1 je *práca proti sile* f pôsobiacej na membránu zvonku a W_2 je *práca vynaložená na zmenu plošného obsahu membrány*, čiže práca proti vnútorným silám.

Práca proti vonkajšej sile vyjadruje pôsobenie sily po určitej dráhe. Na prenesenie infinitezimálneho kúska membrány nad ploškou $d\Omega = dx dy$ (ktorá je nad miestom $\vec{r}$) z výšky $u(\vec{r})$ do novej výšky $v(\vec{r})$ vykoná *sila prácu* (Obr. 2.9b)

$$\underbrace{f(\vec{r}) d\Omega}_{\text{sila}} \underbrace{(v(\vec{r}) - u(\vec{r}))}_{\text{dráha}} = f(\vec{r})(v(\vec{r}) - u(\vec{r})) d\Omega.$$

Nami vykonaná práca (proti sile f) na posunutie kúska $d\Omega$ bude s opačným znamienkom

$$dW_1 = -f(v - u)d\Omega = f(u - v)d\Omega.$$

V prípade gravitačnej sily máme $f = -\rho g$, ak navyše označíme rozdiel výšok ako $h = v - u$ a hmotnosť kúska $m = \rho d\Omega$, tak dostaneme známy vzorec pre potenciálnu energiu $dW_1 = mgh$. Prácu W_1 na posunutie všetkých častí membrány vypočítame ako

$$W_1 = \int_{\Omega} f(u - v) d\Omega. \quad (2.23)$$

Teraz vyjadríme prácu vynaloženú na zmenu plochy membrány. V rovnovážnom stave infinitezimálna oblasť $d\Omega$ na grafe funkcie $u(\vec{r})$ vytne plošku (Obr. A.5) s obsahom $dS(u) = \sqrt{1 + \|\nabla u\|^2} d\Omega$ (pozri rovnicu (A.13) a jej odvodenie) a na grafe funkcie $v(\vec{r})$ plošku $dS(v) = \sqrt{1 + \|\nabla v\|^2} d\Omega$. Na zmenu obsahu plošky preto treba vykonať prácu

$$dW_2 = p \left(\sqrt{1 + \|\nabla v\|^2} - \sqrt{1 + \|\nabla u\|^2} \right) d\Omega,$$

kde p je tuhosť membrány v jednotkách N/m, ktorá vyjadruje, ako veľmi je membrána napnutá.¹³ Na zmenu celkového plošného obsahu teda vynaložíme prácu

$$W_2 = \int_{\Omega} p \left(\sqrt{1 + \|\nabla v\|^2} - \sqrt{1 + \|\nabla u\|^2} \right) d\Omega. \quad (2.24)$$

Vzťah (2.24) je pomerne zložitý. Pri predpoklade, že membrána v rovnovážnom aj deformovanom stave má malé sklony, čiže normy gradientov $\|\nabla u\|$, $\|\nabla v\|$ sú malé, tak pre prácu W_2 môžeme urobiť *lineárne priblíženie* (*linearizáciu*) funkcie $h(\varepsilon) = \sqrt{1 + \varepsilon}$, kde $\varepsilon = \|\nabla u\|^2$, resp. $\varepsilon = \|\nabla v\|^2$ v okolí $\varepsilon = 0$. Taylorov rozvoj (A.4) nám do 1. rádu dáva

$$h(\varepsilon) = \sqrt{1 + \varepsilon} \approx h(0) + h'(0)\varepsilon = 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon}} \Big|_{\varepsilon=0} \varepsilon = 1 + \frac{1}{2} \varepsilon. \quad (2.25)$$

Po využití Taylorovho rozvoja (2.25) vo vzťahu (2.24) dostaneme

$$W_2 \approx \int_{\Omega} p \left[\left(1 + \frac{1}{2} \|\nabla v\|^2 \right) - \left(1 + \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 \right) \right] d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} p (\|\nabla v\|^2 - \|\nabla u\|^2) d\Omega. \quad (2.26)$$

Celková práca (2.22) na zmenu tvaru membrány teda s využitím vzťahov (2.23) a (2.26) vychádza

$$W = W_1 + W_2 = \int_{\Omega} f(u - v) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} p (\|\nabla v\|^2 - \|\nabla u\|^2) d\Omega. \quad (2.27)$$

¹³Tuhosť niekedy môže závisieť aj od miesta $\vec{r}$.

2.4.2 Nutná podmienka minima potenciálnej energie

Nech $U[u]$ a $U[v]$ označujú potenciálnu energiu membrány v stave u resp. v . Zákon zachovania energie hovorí, že celková práca na zmenu tvaru membrány sa rovná rozdielu potenciálnej energie vo vychýlenom stave $U[v]$ a v pôvodnom rovnovážnom stave $U[u]$

$$W = U[v] - U[u].$$

Teraz môžeme dosadiť vyjadrenie (2.27) za W a napísať vzťah pre potenciálnu energiu vo vychýlenom stave¹⁴

$$U[v] = U[u] + W = U[u] + \int_{\Omega} f(u - v) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} p \left(\|\nabla v\|^2 - \|\nabla u\|^2 \right) d\Omega. \quad (2.28)$$

Princíp minima potenciálnej energie hovorí, že v rovnovážnom stave u je potenciálna energia membrány najmenšia, čiže

$$U[u] \leq U[v] \quad \text{pre ľubovoľný tvar } v. \quad (2.29)$$

Ľubovoľný tvar v vieme vyjadriť ako rovnovážny stav u plus výchylka

$$v = u + tw, \quad (2.30)$$

kde t je ľubovoľné reálne číslo a w je ľubovoľné posunutie (výchylka) membrány, pre ktoré platí nulová Dirichletova okrajová podmienka

$$w(\vec{r}) = 0, \quad \vec{r} \in \partial\Omega. \quad (2.31)$$

Homogénna Dirichletova okrajová podmienka pre w je tu preto, aby u a v spĺňali rovnakú okrajovú podmienku. Tvar (2.30) dosadíme do (2.28), pričom ešte využijeme

$$\|\nabla v\|^2 = (\nabla u + t\nabla w) \cdot (\nabla u + t\nabla w) = \|\nabla u\|^2 + 2t\nabla u \cdot \nabla w + t^2\|\nabla w\|^2.$$

Po dosadení získame

$$U[v] = U[u + tw] = U[u] - t \int_{\Omega} fw d\Omega + t \int_{\Omega} p\nabla u \cdot \nabla w d\Omega + \frac{1}{2}t^2 \int_{\Omega} p\|\nabla w\|^2 d\Omega. \quad (2.32)$$

Výraz $U[u + tw]$ môžeme chápať ako funkciu premennej t . Z princípu minima potenciálnej energie (2.29) vieme, že minimum tejto funkcie sa rovná $U[u]$. Nadobúda sa v rovnovážnom stave u , teda vo funkcii $U[u + tw]$ sa dosahuje pre $t = 0$. Nutná podmienka minima funkcie $U[u + tw]$ preto má tvar

$$\left. \frac{dU[u + tw]}{dt} \right|_{t=0} = 0.$$

Po dosadení výrazu (2.32) dostávame

$$\begin{aligned} \left. \frac{dU[u + tw]}{dt} \right|_{t=0} &= \left(- \int_{\Omega} fw d\Omega + \int_{\Omega} p\nabla u \cdot \nabla w d\Omega + t \int_{\Omega} p\|\nabla w\|^2 d\Omega \right) \Big|_{t=0} \\ &= - \int_{\Omega} fw d\Omega + \int_{\Omega} p\nabla u \cdot \nabla w d\Omega = 0. \end{aligned}$$

Nutná podmienka minima potenciálnej energie teda vedie k tomu, že rovnovážny stav u spĺňa rovnicu

$$\int_{\Omega} p\nabla u \cdot \nabla w d\Omega = \int_{\Omega} fw d\Omega, \quad \text{pre všetky } w \text{ také, že } w|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.33)$$

Integrálna rovnica (2.33) sa zvykne nazývať aj *slabá formulácia* problému na celej výpočtovej oblasti Ω .¹⁵ O slabej formulácii budeme ešte veľa hovoriť v kapitolách 4 až 9, ktoré sa venujú samotnej metóde konečných prvkov. Funkcii w sa v kontexte slabej formulácie hovorí *váhová* (alebo testovacia) *funkcia*.

¹⁴Zobrazenie $U[\cdot]$ zobrazuje funkcie na čísla. Zobrazenia tohto typu sa nazývajú funkcionály.

¹⁵Pozri Poznámku 4.3 aj 9.14. Tu nám na pravej strane nevyšiel žiaden hraničný člen, lebo používame nulovú Dirichletovu okrajovú podmienku (2.31).

2.4.3 Diferenciálna rovnica pre priehyby membrány

Z integrálnej rovnice (2.33) teraz odvodíme diferenciálnu rovnicu pre priehyby membrány. Základná myšlienka je dostať obe strany rovnice (2.33) pod jeden integrál tak, aby sme mohli vyňať funkciu w a využiť jej ľubovoľnosť. Upravme podintegrálny výraz na ľavej strane rovnice¹⁶

$$p\nabla u \cdot \nabla w = \nabla \cdot [p(\nabla u)w] - \nabla \cdot (p\nabla u)w.$$

Po dosadení do rovnice (2.33) máme

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (p(\nabla u)w) d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \cdot (p\nabla u)w d\Omega = \int_{\Omega} fw d\Omega.$$

V prvom integráli použijeme Gaussovu vetu (Veta A.2, pričom zvolíme $\vec{F} = p(\nabla u)w$), pomocou ktorej prepíšeme integrál cez oblasť Ω na integrál po hranici $\partial\Omega$

$$\underbrace{\int_{\partial\Omega} (p(\nabla u)w) \cdot \vec{n} dS}_{=0} - \int_{\Omega} \nabla \cdot (p\nabla u)w d\Omega = \int_{\Omega} fw d\Omega.$$

Hraničný integrál je nulový, lebo podľa okrajovej podmienky (2.31) je funkcia w na hranici nulová. Po úprave dostávame

$$\int_{\Omega} \underbrace{(-\nabla \cdot (p\nabla u) - f)}_{G(\vec{r})} w d\Omega = 0.$$

Keďže w je ľubovoľná funkcia, tak podľa Vety A.24 musí byť funkcia $G := -\nabla \cdot (p\nabla u) - f$ nulová skoro všade, z čoho dostávame *diferenciálnu rovnicu pre priehyb membrány*

$$-\nabla \cdot (p\nabla u) = f. \quad (2.34)$$

Poznámka 2.10. Všimnime si, že matematický model (2.34) je identický stacionárnej rovnici vedenia tepla (2.16). Rovnakým matematickým modelom sa dajú opísať javy v mnohých ďalších oblastiach (napr. v elektromagnetizme alebo prúdení tekutín).

2.5 Pozdĺžne deformácie prúta



(a) Viaduc de Millau (Francúzsko [9]).



(b) Prútová konštrukcia mosta (California, USA [15]).

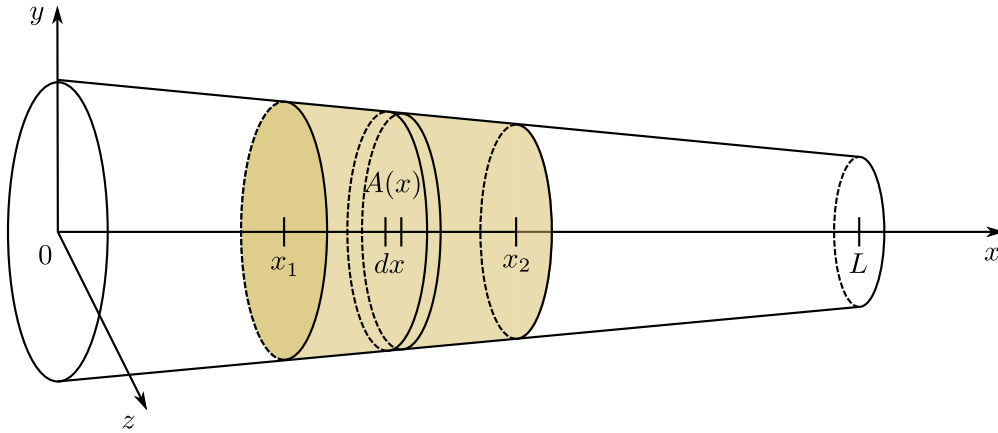
Obr. 2.10. Využitie prútov.

¹⁶Toto sa dá ľahko odvodiť rozpísaním skalárnych súčinov cez sumy a využitím Leibnizovho pravidla

$$\nabla \cdot (p(\nabla u)w) = \sum_i \partial_{x_i} (p(\partial_{x_i} u)w) = \sum_i (\partial_{x_i} (p \partial_{x_i} u)w + p \partial_{x_i} u \partial_{x_i} w) = \nabla \cdot (p\nabla u)w + p\nabla u \cdot \nabla w.$$

Použili sme značenie $x_1 := x$, $x_2 := y$.

Veľa reálnych konštrukcií je namáhaných ťahom alebo tlakom. Namáhanie ťahom, resp. tlakom je typické pre prúty. Prút je teleso, ktorého dĺžkový rozmer je oveľa väčší, ako priečne rozmery. Za prúty sa považujú napríklad stĺpy (pilieri, Obr. 2.10a) alebo tyče (Obr. 2.10b).



Obr. 2.11. Prút s premenlivým prierezom $A(x)$. Farebne je vyznačený výsek $[x_1, x_2]$, ktorý budeme používať pri odvodení matematického modelu.

V tejto časti odvodíme matematický model pre *pozdlžne deformácie* prúta. Uvažujme prút, ktorého os je priama a ktorý môže mať aj premenlivý prierez $A(x)$ (Obr. 2.11), ale hustota ρ a Youngov modul pružnosti E závisia len od pozdlžnej súradnice x . Ďalej uvažujme, že prút je namáhaný len osovými silami (t. j. v smere osi x , čiže tlakmi a ťahmi). Neznámou veličinou bude pozdlžne posunutie (deformácia) $u(x, t)$ v mieste $x \in (0, L)$ a čase $t \in (0, T]$.¹⁷ Prehľad všetkých veličín a ich jednotiek vidíme v Tabuľke 2.2.

Tabuľka 2.2. Prehľad veličín.

Veličina	Jednotka	Názov	Poznámka
$u(x, t)$	m	Pozdlžne posunutie v mieste x a čase t	
$\rho(x)$	kg/m ³	Hustota	
$f_{\text{obj}}(x)$	N/m ³	Intenzita (hustota) objemových síl	Napr. hustota gravitačnej sily $f_{\text{obj}} = -\rho g$
$A(x)$	m ²	Prierezová plocha v mieste x	
$\sigma(x, t)$	N/m ² =Pa	Osové napätie	
$E(x)$	N/m ² =Pa	Youngov modul pružnosti	
$\varepsilon(x, t)$	1 (bezrozmerné)	Relatívne predĺženie	

Pri odvodení rovnice použijeme známy (druhý) *Newtonov zákon*

$$F = ma, \quad (2.35)$$

kde m je hmotnosť telesa, F je celková sila pôsobiaca na teleso a a je jeho zrýchlenie.

Poznámka 2.11 (Výstižnejší zápis Newtonovho zákona). Tradičný zápis Newtonovho zákona v tvare (2.35) je praktický, ale je trochu nešťastný v tom, že nevystihuje podstatu tohto

¹⁷Posunutie teda nezávisí od priečných súradníc, všetky body v reze pre konkrétne x majú rovnaké posunutie $u(x, t)$.

zákona. Na pochopenie je výstižnejší zápis

$$a = \frac{F}{m}, \quad \text{alebo} \quad a = \frac{1}{m}F. \quad (2.36)$$

Povedané ľudskou rečou: ak na teleso pôsobí sila F , tak bude zrýchľovať so zrýchlením $a = \frac{F}{m}$, ktoré je úmerné sile F a koeficient úmernosti je $\frac{1}{m}$ (čiže, čím je hmotnosť m väčšia, tým je zrýchlenie menšie). Zápis (2.35) hovorí, ako máme vypočítať silu, keď vidíme teleso zrýchľujúce pod účinkom tejto sily. Zápis (2.36) hovorí, ako vypočítame zrýchlenie telesa, keď naňho budeme pôsobiť silou.

Newtonov zákon (teda *bilanciu síl*) napíšeme pre ľubovoľný výsek prúta – interval $[x_1, x_2]$ (Obr. 2.11). Ak $u(x, t)$ je posunutie v mieste x a čase t , tak rýchlosť $v(x, t)$ a zrýchlenie $a(x, t)$ sa počítajú ako

$$v = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad a = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Pre infinitezimálny element dx s hmotnosťou $dm = \rho(x)A(x)dx$ má Newtonov zákon (2.35) tvar

$$dF = dm a = \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx,$$

a po integrácii dostávame Newtonov zákon pre výsek prúta

$$F = \int_{x_1}^{x_2} \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx.$$

Celková sila F pôsobiaca na výsek $[x_1, x_2]$ sa skladá z objemových a plošných síl¹⁸

$$F = \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} f_{\text{obj}} A dx}_{\text{objemová sila}} + \underbrace{\sigma(x_2, t)A(x_2) - \sigma(x_1, t)A(x_1)}_{\text{plošné sily}},$$

kde $f_{\text{obj}}(x)$ je intenzita (hustota) objemových síl, $\sigma(x_2, t)A(x_2)$ je osová sila pôsobiaca na výsek cez pravú stenu a $\sigma(x_1, t)A(x_1)$ je osová sila pôsobiaca cez ľavú stenu, pričom $\sigma(x, t)$ je osové napätie v mieste x a čase t . Newtonova pohybová rovnica pre výsek $[x_1, x_2]$ má teda tvar

$$\int_{x_1}^{x_2} f_{\text{obj}} A dx + \underbrace{\sigma(x_2, t)A(x_2) - \sigma(x_1, t)A(x_1)}_{\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma A) dx} = \int_{x_1}^{x_2} \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx.$$

Na ľavej strane využívame Newtonov-Leibnizov vzorec (A.1). Všetky členy môžeme dať pod jeden integrál

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} (\sigma A) - f_{\text{obj}} A \right) dx = 0.$$

Keďže interval $[x_1, x_2]$ je ľubovoľný, tak podľa Vety A.5 musí byť podintegrálna funkcia nulová skoro všade, z čoho dostávame *pohybovú rovnicu*

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} (\sigma A) = f_{\text{obj}} A. \quad (2.37)$$

Rovnica (2.37) obsahuje 2 neznáme funkcie $u(x, t)$ a $\sigma(x, t)$. Potrebujeme teda ešte jednu rovnicu, ktorá tieto neznáme dáva do súvisu. Na to poslúži *Hookov zákon*

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.38)$$

¹⁸Objemové sily pôsobia v celom objeme telesa (napríklad gravitačná alebo elektrostatická sila). Plošné sily pôsobia cez styčnú plochu.

kde E je Youngov modul pružnosti materiálu a funkcia $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$ je relatívne (pomerné) predĺženie infinitezimálneho intervalu dx . Hookov zákon hovorí, že čím viac materiál deformujeme, tým väčšie napätie v ňom vzniká.

Poznámka 2.12 (Relatívne predĺženie). Vzorec pre relatívne predĺženie $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$ sa dá na intuitívnej úrovni ľahko odvodiť. Bod x sa posunie o $u(x, t)$, bod $x + \Delta x$ sa posunie o $u(x + \Delta x, t)$, čiže pôvodná vzdialenosť bodov Δx sa zmení o $u(x + \Delta x, t) - u(x, t)$, a preto relatívne predĺženie infinitezimálneho intervalu $dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x$ je

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Poznámka 2.13 (Osová sila). Osová sila sa počíta ako súčin osového napätia σ a prierezovej plochy A , čiže

$$F_{\text{os}} = \sigma A = AE \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Kladná osová sila $F_{\text{os}}(x, t)$ hovorí o tom, že prút je v bode x natahovaný, záporná hovorí o stlačení v bode x .

Po dosadení Hookovho zákona (2.38) do rovnice (2.37) konečne dostávame finálnu pohybovú rovnicu pre pozdĺžne deformácie prúta

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(AE \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f, \quad (2.39)$$

pričom sme zaviedli označenie $f := f_{\text{obj}} A$ (dĺžková hustota sily, jednotka N/m). Súčinu AE sa hovorí osová tuhosť. Z matematického hľadiska ide o *hyperbolickú rovnicu*. Rovnice tohto typu typicky opisujú neustálené deje, v tomto prípade pozdĺžne kmitanie prúta. Ak máme $A(x) \equiv \text{konšt.}$, $E(x) \equiv \text{konšt.}$ a $f(x) \equiv 0$, potom sa rovnica (2.39) redukuje na *vlnovú rovnicu*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

kde $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ označuje rýchlosť šírenia pozdĺžnych vĺn v prúte. V prípade, že sa posunutie nemení s časom, čiže $\frac{\partial u}{\partial t} \equiv 0$, dostávame rovnicu pre *ustálený stav*

$$-\frac{d}{dx} \left(AE \frac{du}{dx} \right) = f. \quad (2.40)$$

2.5.1 Okrajové podmienky

Pre rovnicu (2.39) budeme uvažovať 3 druhy okrajových podmienok. *Dirichletova* okrajová podmienka, napríklad

$$u(0, t) = g(t),$$

sa používa, keď chceme zadať hodnotu posunutia na konci prúta (najčastejšie ide o fixovanú podporu, čiže $u(0, t) = 0$). *Neumannova* okrajová podmienka, napríklad

$$\left(A(x) E(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=L} = F_L(t)$$

zadáva osovú silu $F_{\text{os}}(L, t)$ pôsobiacu na konci prúta (pozri Poznámku 2.13). Ak $F_L(t)$ je kladné, sila pôsobí v smere osi x , ak je $F_L(t)$ záporné, tak proti smeru. *Newtonova* (*Robinova*) okrajová

podmienka sa používa napríklad v prípade, ak máme pilier na pružnom podloží (os x smeruje nahor)

$$\left(A(x)E(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = k A(0) u(0, t), \quad (2.41)$$

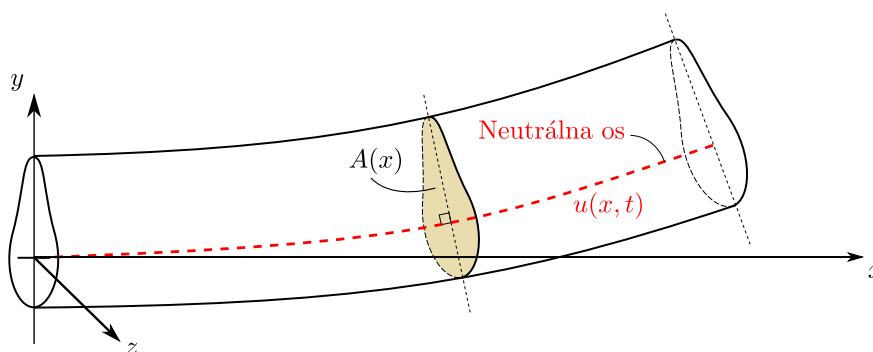
pričom používame najjednoduchší tzv. *Winklerov model* podložia, v ktorom je podložie modelované ako sústava pružín. Konštanta k [N/m³] sa nazýva koeficient ložnosti podložia (vyjadruje, aké je podložie tuhé), súčin $k A(0)$ [N/m] môžeme chápať ako tuhosť podpery (pružiny, ktorá pôsobí na dolnú stenu piliera).

2.6 Eulerov-Bernoulliho nosník

V tejto časti odvodíme matematický model, ktorý opisuje ohýbanie a priečne kmitanie nosníkov (Obr. 2.12), drevených trámov, dosiek či konárov stromov. Existuje viacero takýchto modelov,¹⁹ najjednoduchším je tzv. Eulerov-Bernoulliho nosník, ktorý sa v praxi používa veľmi často. Priečne deformácie sú komplikovanejšie než pozdĺžne, a ako uvidíme, dostaneme diferenciálnu rovnicu, ktorá je až 4. rádu v priestore. Nosník je úzke dlhé teleso, ktorého os je pred deformáciou priama, orientovať ju budeme v smere osi x . Nosník môže mať aj premenlivý prierez $A(x)$, Obr. 2.13. Pri deformácii na Obr. 2.13 sú (pomyslené) vlákna v hornej časti nosníka stláčané a v dolnej časti natahované. Niekde medzi nimi existuje os, ktorá nie je ani stláčaná, ani natahovaná, tej sa hovorí *neutrálna os*, Obr. 2.13. Pri odvodení matematického modelu budeme predpokladať, že prierezová plocha $A(x)$ zostáva pri deformácii nosníka rovinná a kolmá na neutrálnu os (neuvažujú sa teda šmykové deformácie).



Obr. 2.12. Železobetónové nosníky.



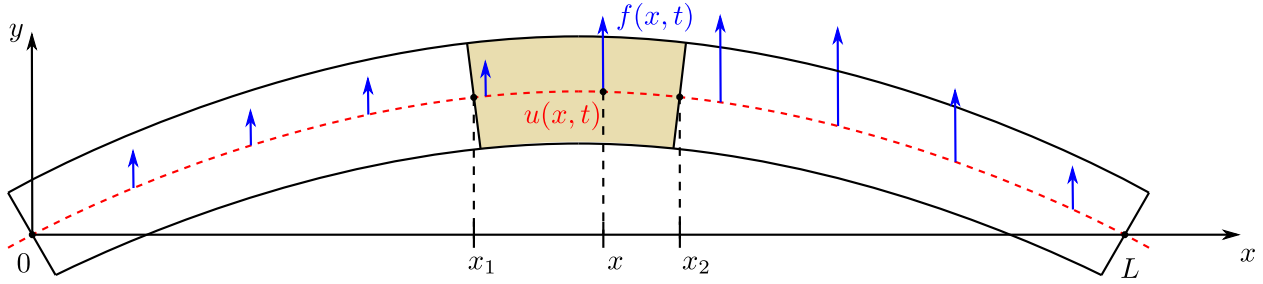
Obr. 2.13. Nosník premenlivého prierezu $A(x)$. Funkcia $u(x, t)$ opisuje posunutie neutrálnej osi.

Neznámou je priečna deformácia (priehyb) $u(x, t)$ [m], ktorá vyjadruje posunutie neutrálnej osi nosníka v mieste x a čase t .²⁰ Krivke $u(x, t)$ sa hovorí aj ohybová alebo priehybová čiara. Pri odvodení modelu vychádzame z *Newtonovho zákona* (2.35), podobne ako pri pozdĺžnych deformáciách nosníka v sekcii 2.5. Tentokrát ho však napíšeme pre priečnu zložku sily pôsobiacej v smere osi y . Newtonov zákon (teda *bilanciu síl*) urobíme pre ľubovoľný výsek nosníka – interval $[x_1, x_2]$

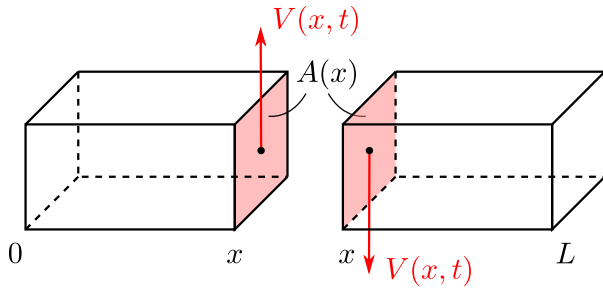
¹⁹Dobrý prehľad je napríklad v článku [4].

²⁰Myslím sa posunutie vo zvislom smere y . Posunutia v smere osi x a z neuvažujeme.

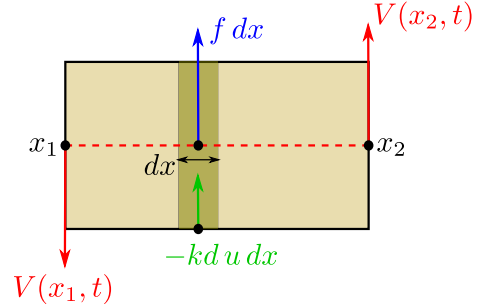
(Obr. 2.14). Keďže priečne zrýchlenie je $a = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, tak pre infinitezimálny element dx s hmotnosťou



Obr. 2.14. Nosník zatažený hustotou sily $f(x, t)$.



Obr. 2.15. Interpretácia priečnej sily $V(x, t)$.



Obr. 2.16. Sily pôsobiace na výsek $[x_1, x_2]$.

$dm = \rho(x)A(x)dx$ má Newtonov zákon (2.35) opäť tvar

$$dF = dm a = \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx,$$

a po integrácii dostávame Newtonov zákon pre výsek nosníka

$$F = \int_{x_1}^{x_2} \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx. \quad (2.42)$$

Zostáva určiť celkovú silu F pôsobiacu v smere osi y na výsek $[x_1, x_2]$. Tá sa skladá z viacerých síl (Obr. 2.16) a môžeme ju vyjadriť v tvare

$$F = \underbrace{V(x_2, t) - V(x_1, t)}_{\text{priečne sily}} + \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} f dx}_{\text{zataženie}} + \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} -k du dx}_{\text{reakcia podložia}}. \quad (2.43)$$

Symbol $V(x, t)$ označuje *priečnu silu* (angl. shear force) v mieste x a čase t . Môžeme si ju predstaviť tak, že keby sme nosník v mieste x v mysli prerezali na dva kusy (pozri Obr. 2.15), tak $V(x, t)$ je priečna sila, ktorá pôsobí na ľavý kus na priereze $A(x)$ smerom nahor (touto silou pôsobí pravý kus na ľavý). Na základe zákona akcie a reakcie sila pôsobiaca na pravý kus musí byť opačná. Práve preto máme v celkovej sile (2.43) priečne sily v tvare $V(x_2, t) - V(x_1, t)$, Obr. 2.16. Na každý infinitezimálny element dx pôsobí v smere osi y vonkajšia zvislá sila $f(x, t)dx$, kde $f(x, t)$ [N/m] je (dĺžková) hustota zvislej sily. Môže to byť vonkajšie zataženie alebo gravitačná sila (s hustotou $f(x, t) = -\rho g A(x)$). V prípade, že nosník je uložený na pružnom podloží, tak podložie tlačí na nosník. Ak podložie modelujeme Winklerovým modelom (pozri záver predchádzajúcej sekcie), tak na element dx pôsobí sila $-kd(x)u(x, t)dx$, kde $d(x)$ je šírka nosníka v mieste x a konštanta k [N/m³] koeficient ložnosti podložia. Znamienko mínus je tu preto, lebo pre záporné posunutia (nadol) podložie má tlačiť nahor, čiže kladnou silou.

Teraz celkovú silu (2.43) dosadíme do Newtonovho zákona (2.42), využijeme Newtonov-Leibnizov vzorec (A.1) pre priečnu silu a všetky členy dáme pod jeden integrál, čím získame

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k du - \frac{\partial V}{\partial x} - f \right) dx = 0.$$

Keďže interval $[x_1, x_2]$ je ľubovoľný, tak podľa Vety A.5 musí byť podintegrálna funkcia nulová a dostávame *pohybovú rovnicu*

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + kdu - \frac{\partial V}{\partial x} = f. \quad (2.44)$$

Máme v nej zatiaľ dve neznáme – posunutie $u(x, t)$ a priečnu silu $V(x, t)$, ktorú si ešte potrebujeme vyjadriť pomocou $u(x, t)$.

2.6.1 Výpočet priečnej sily

Na výpočet priečnej sily využijeme *Newtonov zákon pre rotačný pohyb*

$$\tau = I\alpha, \quad (2.45)$$

kde I je moment zotrvačnosti telesa, τ je celkový moment sily pôsobiacej na teleso a α je jeho uhlové zrýchlenie. Tento zákon použijeme pre malý element Δx a jeho rotáciu vzhľadom na stred (os rovnobežnú s osou z pretínajúcu neutrálnu os v bode $x + \frac{\Delta x}{2}$), pozri Obr. 2.18. Pri Eulerovom-Bernoulliho nosníku sa rotačný pohyb prierezových plôch $A(x)$ považuje za veľmi malý (zanedbateľný) a uhlové zrýchlenie α sa položí rovné nule.²¹ Zákon (2.45) sa teda redukuje na *rovnováhu momentov síl*, $\tau = 0$. Celkový moment sily je (rameno priečných síl je $\frac{\Delta x}{2}$)²²

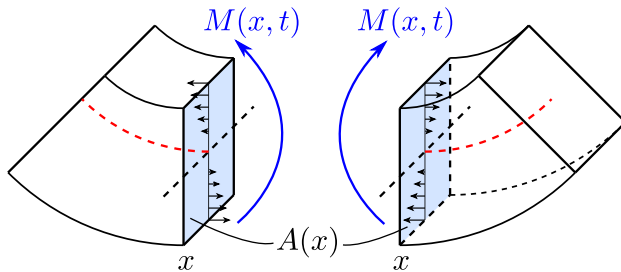
$$\tau = V(x, t) \frac{\Delta x}{2} + V(x + \Delta x, t) \frac{\Delta x}{2} + M(x + \Delta x, t) - M(x, t) \stackrel{!}{=} 0, \quad (2.46)$$

kde $M(x, t)$ označuje *ohybový moment* (angl. bending moment) v mieste x a čase t . Ohybový moment môžeme interpretovať nasledovne. Podobne ako pri priečnej sile, aj teraz si v mysli rozrežeme nosník v mieste x (Obr. 2.17) a ohybový moment $M(x, t)$ je *výslednica momentov osových síl*, ktoré pôsobia na ľavý kus (vzhľadom na os rovnobežnú s osou z prechádzajúcu bodom x na neutrálnej osi). Ohybovému momentu sa ešte budeme detailne venovať v sekcii 2.6.2. Zo zákona akcie a reakcie vyplýva, že na pravý kus pôsobí opačný moment rovnakej veľkosti. Z rovnice (2.46) po úprave máme

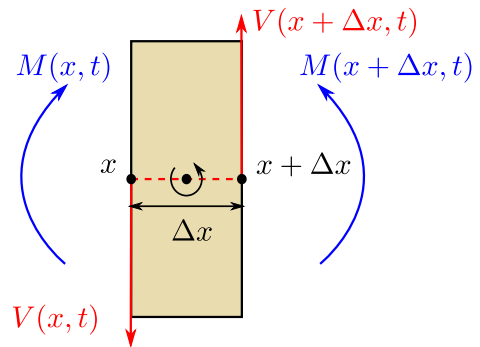
$$\frac{V(x, t) + V(x + \Delta x, t)}{2} + \frac{M(x + \Delta x, t) - M(x, t)}{\Delta x} = 0,$$

a po limitnom prechode $\Delta x \rightarrow 0$ získavame vzťah pre priečnu silu

$$V(x, t) = -\frac{\partial M}{\partial x}. \quad (2.47)$$



Obr. 2.17. Interpretácia ohybového momentu $M(x, t)$.



Obr. 2.18. Momenty síl pôsobiace na element Δx .

²¹To je rozumné priblíženie, ak je výška nosníka zanedbateľná oproti dĺžke a ak nie je nosník príliš „poprehýbaný“. Priblíženie môžeme chápať aj tak, že moment zotrvačnosti I elementu Δx je zanedbateľný. V niektorých modeloch, napríklad v Timoshenkovom-Ehrenfestovom modeli, sa tento efekt nezanedbáva.

²²Pripomínáme, že moment sily τ sa počíta ako $\tau = rF$, kde r je rameno sily F .

Poznámka 2.14 (A čo moment sily zataženia a sily podložia?). Prečo v celkovom momente (2.46) neuvažujeme momenty síl spôsobené zatažením resp. podloží? Tieto členy sú jednoducho vyššieho rádu malosti a sú zanedbateľné voči ohybovým momentom a momentom priečných síl, čo sa dá aj matematicky nahliadnuť. Napríklad pre silu spôsobenú zatažením, by jej celkový moment sily bol približne^a

$$\begin{aligned} -f\left(x + \frac{1}{4}\Delta x, t\right) \frac{\Delta x}{4} + f\left(x + \frac{3}{4}\Delta x, t\right) \frac{\Delta x}{4} \\ \approx -\left(f(x, t) + \partial_x f(x, t) \frac{1}{4}\Delta x\right) \frac{\Delta x}{4} + \left(f(x, t) + \partial_x f(x, t) \frac{3}{4}\Delta x\right) \frac{\Delta x}{4} \\ = \frac{1}{8} \partial_x f(x, t) (\Delta x)^2, \end{aligned}$$

čiže úmerný $(\Delta x)^2$. Tento člen teda aj po predelení Δx v limite $\Delta x \rightarrow 0$ vypadne.

^aPoužívame skrátené označenie pre parciálnu deriváciu $\partial_x f := \frac{\partial f}{\partial x}$.

Po využití vzťahu (2.47) teda pohybová rovnica (2.44) prejde na tvar

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + kdu + \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = f. \quad (2.48)$$

Zostáva nám ešte vhodne vyjadriť ohybový moment M .

2.6.2 Výpočet ohybového momentu

Na výpočet ohybového momentu $M(x, t)$ potrebujeme zosumovať momenty osových síl v celom priereze $A(x)$. Osová sila pôsobiaca na infinitezimálny plošný element $dA = dy dz$ sa vypočíta ako $-\sigma dA$ a rameno tejto sily je y , Obr. 2.19. Napätie $\sigma(x, y, t)$ je osovú napätie pôsobiace v smere osi x v priereze $A(x)$ vo výške y nad neutrálnou osou. Celkový moment sily teda bude

$$M(x, t) = - \int_{A(x)} y \sigma(x, y, t) dA.$$

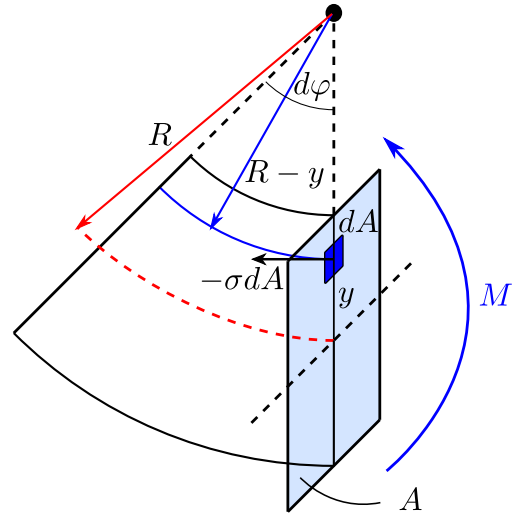
Vyjadriť si ešte osovú napätie $\sigma(x, y, t) = E(x)\varepsilon(x, y, t)$. Relatívne predĺženie ε „vlákna“ nosníka vo výške y nad neutrálnou osou sa podľa Obr. 2.19 vypočíta ako

$$\varepsilon = \frac{(R - y)d\varphi - R d\varphi}{R d\varphi} = -\frac{y}{R}, \quad (2.49) \quad \text{Obr. 2.19. Výpočet ohybového momentu.}$$

kde R je polomer krivosti neutrálnej osi, $R d\varphi$ je dĺžka vlákna pred deformáciou a $(R - y)d\varphi$ je dĺžka vlákna po deformácii. Aby vzťah (2.49) bol správny aj pre ohnutie nadol, tak pre ohnutie nadol chápeme R ako záporné. Keďže $\frac{1}{R}$ je podľa Definície A.12 znamienková krivosť, tak relatívne predĺženie (a teda aj napätie) je vlastne úmerné znamienkovej krivosti. Podľa Vety A.11 sa náš polomer krivosti R vypočíta ako

$$R = \frac{[1 + (\partial_x u)^2]^{\frac{3}{2}}}{\partial_x^2 u}.$$

Na tomto mieste urobíme priblíženie – budeme uvažovať iba malé sklony, čiže $|\partial_x u| \ll 1$. V tom prípade polomer krivosti je $R \approx \frac{1}{\partial_x^2 u}$. Relatívne predĺženie (2.49) teda vychádza $\varepsilon(x, y, t) =$



$-y\partial_x^2 u(x, t)$. Teraz môžeme vyjadriť celkový moment osových síl $M(x, t)$ (ohybový moment)

$$M = - \int_{A(x)} y \sigma dA \stackrel{1.}{=} - \int_{A(x)} y E \varepsilon dA \stackrel{2.}{=} \int_{A(x)} y^2 E \partial_x^2 u dA \stackrel{3.}{=} E \partial_x^2 u \underbrace{\int_{A(x)} y^2 dA}_{=: I(x)} \stackrel{4.}{=} EI \partial_x^2 u, \quad (2.50)$$

kde sme postupne využili

1. Vzťah $\sigma = E\varepsilon$.
2. Vzťah $\varepsilon = -y\partial_x^2 u$.
3. Vyňatie „konštánt“ (funkcií nezávislých od y a z) pred integrál.
4. Označenie integrálu.

Zosumarizujeme naše zistenia. *Ohybový moment* M [Nm] a *priečna sila* V [N] sa podľa vzťahov (2.50) a (2.47) počítajú ako

$$M(x, t) = E(x)I(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad V(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(E(x)I(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \quad (2.51)$$

kde funkcia $I(x)$ [m⁴] je tzv. *moment zotrvačnosti prierezovej plochy* $A(x)$ a počíta sa ako

$$I(x) := \int_{A(x)} y^2 dy dz. \quad (2.52)$$

Výrazu $b(x) = E(x)I(x)$ [Nm²] sa hovorí ohybová tuhosť a vyjadruje, aké náročné je nosník v mieste x ohnúť – závisí od materiálu a tvaru prierezovej plochy $A(x)$, čo je intuitívne zrejmé. Na základe vzťahu (2.50) dostávame z rovnice (2.48) finálnu pohybovú rovnicu pre priečne kmitanie nosníka v tvare

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + kdu + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = f, \quad (2.53)$$

čo je diferenciálna rovnica 4. rádu.

Poznámka 2.15 (Interpretácia derivácií u). Videli sme, že derivácie posunutia u majú jasnú geometrickú, resp. fyzikálnu interpretáciu: 1. derivácia je sklon neutrálnej osi, 2. derivácia úzko súvisí s ohybovým momentom a 3. derivácia zase s priečnou silou.

V prípade, že sa posunutie nemení s časom, čiže $\frac{\partial u}{\partial t} \equiv 0$, a nosník nie je na podklade ($k = 0$), tak dostávame *Eulerovu-Bernoulliho rovnicu* v štandardnom tvare

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(E(x)I(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \right) = f(x), \quad (2.54)$$

ktorá opisuje priečne deformácie nosníka v ustálenom stave.

Poznámka 2.16 (Použitie v praxi). Zaujímavosťou je, že matematický model (2.54) bol odvodený matematikmi (Euler, Bernoulli) už okolo roku 1750. V stavebníctve sa tento model začal používať až od čias Eiffela (okolo roku 1887).

2.6.3 Okrajové podmienky

Keďže rovnica (2.53), resp. (2.54) je diferenciálna rovnica 4. rádu, tak je potrebné zadať 4 okrajové podmienky, dve na každej strane výpočtovej oblasti, aby sme mohli rovnicu riešiť. V tejto časti sa pozrieme na to, aké sú typické prípady okrajových podmienok.

Votknutý koniec. Ak je nosník na konci pevne fixovaný, čiže sa nemôže posúvať ani otáčať, hovoríme, že je votknutý. Votknutie v bode $x = 0$ zapíšeme ako

$$u(0, t) = u_0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \theta_0,$$

čiže nosník je uchytený vo výške u_0 nad osou x a sklon je θ_0 . Najčastejšie sa používa votknutie $u_0 = 0$, $\theta_0 = 0$.

Podopretý koniec. Podopretie znamená, že posunutie fixujeme a ohybový moment je nulový, čiže napríklad podopretie v bode $x = 0$ sa matematicky vyjadrí ako

$$u(0, t) = u_0, \quad M(0, t) = \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=0} = 0.$$

Rovnako sa formuluje *zavesenie* aj *kľbové pripojenie* nosníka (nosník sa v kľbe môže voľne otáčať).

Voľný koniec. Ak je koniec nosníka voľný, znamená to, že je na ňom nulový ohybový moment aj priečna sila. Napríklad pre voľný koniec $x = L$ máme okrajové podmienky

$$M(L, t) = \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=L} = 0, \quad V(L, t) = \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right] \Big|_{x=L} = 0.$$

Zaťažný koniec. Koniec nosníka môže byť zaťažný *zvislou silou*, čiže

$$M(L, t) = \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=L} = 0, \quad V(L, t) = \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right] \Big|_{x=L} = V_0.$$

Existujú aj ďalšie možnosti, ktoré nebudeme rozoberať. Napríklad koniec nosníka môže byť odpružený, nosník môže byť podopretý a súčasne zaťažný momentom sily. Okrajová podmienka sa môže meniť aj v čase. Dôležité je, že na každom konci (v bode $x = 0$ aj $x = L$) musia byť zadané dve okrajové podmienky, pričom:

- V prvej okrajovej podmienke špecifikujeme buď posunutie u alebo priečnu silu $-\frac{\partial}{\partial x} \left(b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$.
- V druhej podmienke špecifikujeme buď sklon $\frac{\partial u}{\partial x}$ alebo ohybový moment $b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Nemôžeme teda zadať zároveň posunutie a zvislú silu, resp. súčasne sklon a ohybový moment. Fyzikálne to nedáva zmysel.

K okrajovým podmienkam pre Eulerov-Bernoulliho nosník sa ešte vrátíme v kontexte metódy konečných prvkov v Poznámke 5.2.

Poznámka 2.17 (Kombinácie okrajových podmienok). Niektoré kombinácie pravej a ľavej okrajovej podmienky majú v stavebníctve svoje špeciálne názvy. Napríklad, ak je nosník na jednej strane votknutý a na druhej voľný, hovorí sa mu konzola alebo konzolový nosník. Situácii, keď sú oba konce podopreté, sa hovorí jednoducho podopretý nosník alebo tiež jednoduchý (prostý) nosník.

Kapitola 3

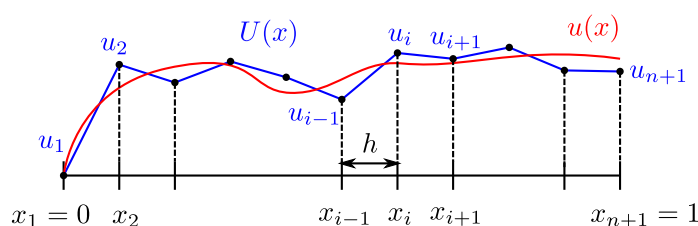
Numerické metódy

Predtým, než začneme s metódou konečných prvkov, uvedieme niektoré numerické (približné) metódy na riešenie diferenciálnych rovníc v jednej dimenzii. V sekcii 3.1 budeme hovoriť o metóde konečných diferencií a v sekcii 3.2 o variačných metódach.

3.1 Metóda konečných diferencií

Metóda konečných diferencií (MKD) je numerická metóda, pri ktorej sa *diferenciálna rovnica* aproximuje *systémom algebraických rovníc*, pričom na aproximáciu derivácií sa používajú *konečné diferencie*. V tejto časti si pripomenieme základné princípy MKD.¹ Najprv sa pozrieme na to, ako sa konštruuje sieť a ako sa v jej uzloch aproximujú prvé a druhé derivácie. Potom budeme pomocou MKD riešiť konkrétne úlohy.

Majme výpočtovú oblasť $\Omega = (0, 1)$. Diskretizujme ju na konečný počet intervalov $[x_i, x_{i+1}]$, kde $i = 1, \dots, n$, pričom $x_1 = 0$ a $x_{n+1} = 1$ (Obr. 3.1). Uvažujme rovnomernú sieť, čiže $x_{i+1} - x_i = h$ pre všetky $i = 1, \dots, n$. Namiesto presného riešenia $u(x)$ hľadáme približné (numerické) riešenie $U(x)$, ktorého uzlové hodnoty v bodoch $x_1, \dots, x_{n+1}$ budeme označovať $u_1, \dots, u_{n+1}$ (čiže $U(x_i) =: u_i$). Numerické riešenie $U(x)$ je dané lineárnou interpoláciou hodnôt u_i (Obr. 3.1). Od numerického riešenia by sme chceli, aby sa jeho hodnoty so zjemňovaním siete blížili k uzlovým hodnotám presného riešenia, čiže $u_i \xrightarrow{h \rightarrow 0} u(x_i)$.



Obr. 3.1. Výpočtová oblasť $\Omega = (0, 1)$ s rovnomernou sieťou s uzlovými bodmi $x_1, \dots, x_{n+1}$, presné riešenie $u(x)$ (červená) a približné riešenie $U(x)$ (modrá) s hodnotami $u_1, \dots, u_{n+1}$ v uzlových bodoch.

Derivácie v diferenciálnej rovnici nahradíme konečnými diferenciami, ktoré odvodíme pomocou *Taylorovho rozvoja* (Veta A.9) presného riešenia v uzlových bodoch. Pozrieme sa na situáciu v okolí bodu x_i , Obr. 3.2. Hodnotu funkcie u v bode x_{i+1} , resp. x_{i-1} vieme pomocou Taylorovho rozvoja funkcie $u(x)$ v bode x_i vyjadriť ako

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + u'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2}u''(x_i)(x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{1}{3!}u'''(x_i)(x_{i+1} - x_i)^3 + \frac{1}{4!}u^{(4)}(x_i)(x_{i+1} - x_i)^4 + \dots,$$

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) + u'(x_i)(x_{i-1} - x_i) + \frac{1}{2}u''(x_i)(x_{i-1} - x_i)^2 + \frac{1}{3!}u'''(x_i)(x_{i-1} - x_i)^3 + \frac{1}{4!}u^{(4)}(x_i)(x_{i-1} - x_i)^4 + \dots$$

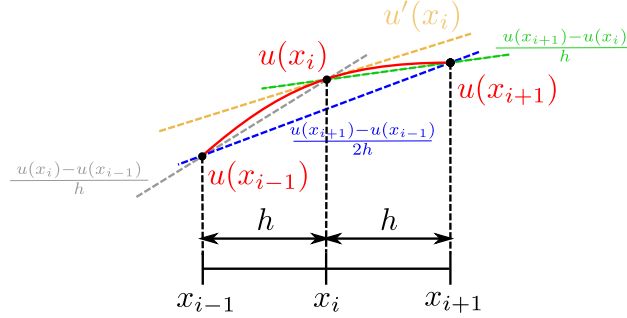
¹Pre študentov MPM to bude v podstate opakovanie z predmetu Numerické riešenie diferenciálnych rovníc z letného semestra 2. ročníka.

Ak využijeme, že $x_{i+1} - x_i = h$ resp. $x_{i-1} - x_i = -h$, dostaneme

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + u'(x_i)h + \frac{1}{2}u''(x_i)h^2 + \frac{1}{3!}u'''(x_i)h^3 + \frac{1}{4!}u^{(4)}(x_i)h^4 + O(h^5), \quad (3.1)$$

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - u'(x_i)h + \frac{1}{2}u''(x_i)h^2 - \frac{1}{3!}u'''(x_i)h^3 + \frac{1}{4!}u^{(4)}(x_i)h^4 + O(h^5), \quad (3.2)$$

kde $O(h^5)$ označuje členy rádu h^5 a menšie,²



Obr. 3.2. Aproximácia derivácie v bode x_i doprednou, spätnou a centrálnou diferenciou.

Aproximácia 1. derivácie

Z rozvoja (3.1) úpravou dostávame

$$\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} = u'(x_i) + \underbrace{\frac{1}{2}u''(x_i)h + O(h^2)}_{\text{zanedbáme}}. \quad (3.3)$$

Ak je sieť dostatočne hustá, čiže hodnota h je malá a funkcia $u(x)$ má ohraňčenú druhú deriváciu, tak vo vzťahu (3.3) môžeme zanedbať členy rádu h a vyššie,

$$u'(x_i) \approx \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h}. \quad (3.4)$$

Aproximáciu prvej derivácie vzťahom (3.4) nazývame *dopredná diferenciacia*.³ Chyba aproximácie (3.4) je úmerná h , a teda aproximácia je *prvého rádu presnosti*. Keď riešime konkrétnu úlohu metódou konečných diferencií, tak derivácie funkcie u v uzlových bodoch x_i nahrádzame konečnými diferenciami. Dostaneme tak sústavu algebraických rovníc, v ktorej sú neznámymi uzlové hodnoty $u(x_1), \dots, u(x_{n+1})$. Keďže pri aproximácii konečnými diferenciami sa dopúšťame chyby, tak nemôžeme očakávať, že hodnoty, ktoré dostaneme riešením systému, budú presné uzlové hodnoty $u(x_i)$, $i = 1, \dots, n+1$. Dostaneme nejaké približné hodnoty, ktoré označujeme $u_i \approx u(x_i)$, $i = 1, \dots, n+1$. Približné hodnoty sú zafaržené chybou rovnakého rádu, ako konečné diferencie. Pri aproximácii prvej derivácie doprednou diferenciou teda môžeme priamo nahrádzať prvú deriváciu pomocou približných hodnôt takto

$$u'(x_i) \rightarrow \frac{u_{i+1} - u_i}{h}. \quad (3.5)$$

Podobne z rozvoja (3.2) dostaneme aproximáciu 1. derivácie *spätnou diferenciou*

$$u'(x_i) \rightarrow \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, \quad (3.6)$$

ktorá je tiež *prvého rádu presnosti*. Ak od vzťahu (3.1) odčítame vzťah (3.2), máme

$$u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}) = 2u'(x_i)h + \frac{2}{3!}u'''(x_i)h^3 + O(h^5)$$

²V angličtine sa tomuto značeniu hovorí „Big O notation“.

³Pozeralme sa z bodu x_i *dopredu* na bod x_{i+1} .

a z toho

$$\frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2h} = u'(x_i) + \underbrace{\frac{1}{3!}u'''(x_i)h^2 + O(h^4)}_{\text{zanedbáme}}. \quad (3.7)$$

Prvú deriváciu funkcie u v bode x_i môžeme teda nahrádzať aj *centrálnou diferenciou*

$$u'(x_i) \rightarrow \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}. \quad (3.8)$$

Zo vzťahu (3.7) vidíme, že táto aproximácia 1. derivácie je *druhého rádu presnosti* (zanedbali sme členy, v ktorých je h^2).

Poznámka 3.1 (Geometrická interpretácia konečných diferencií). Predchádzajúce aproximácie môžeme interpretovať takto (pozri Obr. 3.2): sklon (čiže deriváciu) $u'(x_i)$ nahradzame pri doprednej diferencii (3.4) smernicou (sklonom) priamky prechádzajúcej bodmi $(x_i, u(x_i))$ a $(x_{i+1}, u(x_{i+1}))$, pri spätnej diferencii smernicou priamky prechádzajúcej cez body $(x_{i-1}, u(x_{i-1}))$ a $(x_i, u(x_i))$ a pri centrálnej diferencii smernicou priamky prechádzajúcej cez body $(x_{i-1}, u(x_{i-1}))$ a $(x_{i+1}, u(x_{i+1}))$. Všimnime si, že centrálna diferencia (3.8) je vlastne priemernou hodnotou doprednej diferencie (3.5) a spätnej diferencie (3.6).

Aproximácia 2. derivácie

Zo vzťahov (3.1) a (3.2) teraz potrebujeme vyjadriť druhú deriváciu $u''(x_i)$. Ak rovnice sčítame, dostaneme

$$u(x_{i-1}) + u(x_{i+1}) = 2u(x_i) + u''(x_i)h^2 + \frac{2}{4!}u^{(4)}(x_i)h^4 + O(h^6)$$

a po úprave

$$\frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}))}{h^2} = u''(x_i) + \underbrace{\frac{2}{4!}u^{(4)}(x_i)h^2 + O(h^4)}_{\text{zanedbáme}}. \quad (3.9)$$

Takže 2. deriváciu funkcie u v bode x_i môžeme nahradiť *centrálnou diferenciou*

$$u''(x_i) \rightarrow \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}. \quad (3.10)$$

Zo vzťahu (3.9) vidíme, že táto aproximácia je *druhého rádu presnosti*.

Príklad 3.2 (MKD, Dirichlet). Majme okrajovú úlohu

$$\begin{aligned} -\frac{d^2u}{dx^2} &= f(x), & x \in (0, 1), \\ u(0) &= 0, & u(1) = 1. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Ide vlastne o stacionárnu rovnicu vedenia tepla (2.7), v ktorej máme $\lambda(x) \equiv 1$. Vyríšme úlohu pomocou metódy konečných diferencií. Druhú deriváciu budeme aproximovať v bodoch $x_2, \dots, x_n$, v ktorých počítame neznáme hodnoty $u_2, \dots, u_n$ (Obr. 3.1). Pravú stranu $f(x)$ jednoducho vyčíslime v bodoch $x_2, \dots, x_n$. V bodoch x_1 a x_{n+1} , kde sú zadané okrajové podmienky, napíšeme namiesto aproximácie rovnice aproximáciu okrajových podmienok (v tomto prípade zadávame presné hodnoty). S využitím centrálnej diferencie (3.10) dostá-

vame systém rovníc (pre prehľadnosť sme rovnice 2 až n prenásobili h^2)

$$\begin{array}{ll}
 \text{1. rovnica} & u_1 = 0, \\
 \text{2. rovnica} & -u_1 + 2u_2 - u_3 = f(x_2)h^2, \\
 \text{3. rovnica} & -u_2 + 2u_3 - u_4 = f(x_3)h^2, \\
 & \vdots \\
 \text{\textit{i}. rovnica} & -u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1} = f(x_i)h^2, \\
 & \vdots \\
 \text{\textit{n}. rovnica} & -u_{n-1} + 2u_n - u_{n+1} = f(x_n)h^2, \\
 \text{(n+1). rovnica} & u_{n+1} = 1.
 \end{array}$$

Maticový zápis systému je

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & & & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & & & 0 & 1 \end{bmatrix}}_K \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \\ u_{n+1} \end{bmatrix}}_U = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ f(x_2)h^2 \\ \vdots \\ f(x_i)h^2 \\ \vdots \\ f(x_n)h^2 \\ 1 \end{bmatrix}}_F. \quad (3.12)$$

Sústava (3.12) obsahuje $n+1$ rovníc a $n+1$ neznámych $u_1, \dots, u_{n+1}$. Má jediné riešenie. Lineárnou interpoláciou získaných hodnôt $u_1, \dots, u_{n+1}$ získame približné riešenie $U(x)$ okrajovej úlohy (3.11).

Tieto skriptá sú zamerané hlavne na hľadanie približných riešení úloh. V Úlohách 3.3 a 3.5 si zľahka pripomenieme, ako sa v jednoduchom prípade hľadá analytické riešenie.

Úloha 3.3. Nájdite analytické riešenie okrajovej úlohy

$$\begin{aligned}
 -\frac{d^2u}{dx^2} &= 12x^2, & x \in (0, 1), \\
 u(0) &= 0, & u(1) = 1.
 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ide teda o úlohu (3.11), v ktorej zvolíme $f(x) = 12x^2$.

Riešenie. Diferenciálnu rovnicu integrujeme, postupne dostávame

$$\begin{aligned}
 -\frac{du}{dx} &= 4x^3 + c, \\
 -u(x) &= x^4 + cx + d \quad \Rightarrow \quad u(x) = -x^4 - cx - d.
 \end{aligned}$$

Využitím okrajových podmienok získame neznáme konštanty c a d .

$$\begin{aligned}
 u(0) &= -d \stackrel{!}{=} 0 & \Rightarrow & d = 0, \\
 u(1) &= -1 - c - 0 \stackrel{!}{=} 1 & \Rightarrow & c = -2.
 \end{aligned}$$

Našli sme teda presné (analytické) riešenie úlohy (3.13), ktoré má tvar

$$u(x) = 2x - x^4. \quad (3.14)$$

■

Úloha 3.4 (MKD, Dirichlet | cv01, MKD.nb). Naprogramujte MKD z Príkladu 3.2. Zvoľte pravú stranu $f(x) = 12x^2$ (ako v Úlohe 3.3).

1. Nájdite presné riešenie (3.14) okrajovej úlohy (3.13) aj pomocou príkazu `DSolve` a vykreslite ho.
2. Definujte premenné n, h a $x_1, \dots, x_{n+1}$.
3. Definujte maticu systému K a pravú stranu F .
4. Vyriešte systém pomocou `U=LinearSolve[K,F]`.
5. Vykreslite presné aj približné riešenie úlohy do jedného obrázka. Body približného riešenia pospájajte lomenou čiarou. Pre $n = 2$ a $n = 4$ riešenie vidíme na Obr. 3.3.
6. Vypočítajte L_2 normu chyby (tzv. L_2 -chybu) ako

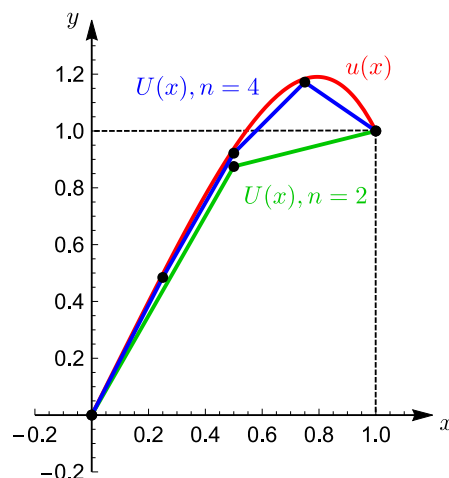
$$L_2\text{-chyba} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} h (u_i - u(x_i))^2}.$$

Ide o aproximáciu normy

$$\|U - u\|_{L_2} = \sqrt{\int_0^1 (U(x) - u(x))^2 dx},$$

ktorá meria vzdialenosť približného riešenia $U(x)$ od presného riešenia $u(x)$. Oveľa viac o L_2 -chybe budeme hovoriť v kontexte MKP v kapitole 6.

7. Postupne zjemňujte sieť tak, že h sa pri každom zjemnení zmenší na polovicu (čiže $n = 2, 4, 8, 16, \dots$). Ukladajte si L_2 -chyby a sledujte, ako sa chyba zmenšuje. Mala by klesať druhým rádom, čiže pri každom zjemnení približne na štvrtinu predchádzajúcej chyby.



Obr. 3.3. Približné riešenie $U(x)$ Úlohy 3.4 pre $n = 2$, $n = 4$ a presné riešenie $u(x)$.

Úloha 3.5. Nájdite analytické riešenie okrajovej úlohy

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} \left((1+x) \frac{du}{dx} \right) &= -18x^2, & x \in (0, 1), \\ u(0) &= 1, & u'(1) = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Je to stacionárna rovnica vedenia tepla (2.7), v ktorej máme $\lambda(x) = 1+x$ a $f(x) = -18x^2$.

Riešenie. Diferenciálnu rovnicu integrujeme, postupne dostávame

$$-(1+x) \frac{du}{dx} = -6x^3 + c \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \frac{6x^3}{1+x} - \frac{c}{1+x}.$$

Využitím Neumannovej okrajovej podmienky môžeme už teraz vypočítať integračnú konštantu c

$$u'(1) = 3 - \frac{c}{2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad c = 6.$$

Zatiaľ teda máme

$$u'(x) = \frac{6x^3}{1+x} - \frac{6}{1+x} = \frac{6(x^3 - 1)}{1+x}.$$

Pri druhej integrácii využijeme substitučnú metódu

$$\begin{aligned} u(x) &= 6 \int \frac{x^3 - 1}{1+x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Substitúcia} \\ t = 1+x \Rightarrow x = t-1 \\ dt = dx \end{array} \right\} = 6 \int \frac{(t^3 - 3t^2 + 3t - 1) - 1}{t} dt \\ &= 6 \int \left(t^2 - 3t + 3 - \frac{2}{t} \right) dt = 2t^3 - 9t^2 + 18t - 12 \ln t + d \\ &= 2(1+x)^3 - 9(1+x)^2 + 18(1+x) - 12 \ln(1+x) + d. \end{aligned}$$

Na výpočet integračnej konštanty d využijeme Dirichletovu okrajovú podmienku

$$u(0) = 2 - 9 + 18 + d \stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad d = -10.$$

Po úpravách získavame analytické riešenie úlohy (3.15) v tvare

$$u(x) = 1 + 6x - 3x^2 + 2x^3 - 12 \ln(1+x). \quad (3.16)$$

■

Úloha 3.6 (MKD, Dirichlet + Neumann | cv01, MKD.nb). Vyriešte okrajovú úlohu (3.15) pomocou metódy konečných diferencií.

1. Ľavú stranu je výhodné rozderivovať, čiže rovnica prejde na tvar

$$-\frac{du}{dx} - (1+x) \frac{d^2u}{dx^2} = -18x^2,$$

a potom použiť centrálnu konečnú diferenciu. Napíšte si systém rovníc a zapíšte ho v maticovom tvare.

2. Neumannovu okrajovú podmienku $u'(1) = 0$ aproximujte pomocou spätnej diferencie (3.6) ako

$$u'(x_{n+1}) \approx \frac{u_{n+1} - u_n}{h} \quad (3.17)$$

3. Naprogramujte riešenie úlohy, prejdite celý postup z Úlohy 3.4.
4. Ako sa správa chyba pri zjemňovaní siete? Klesá druhým rádom?
5. Ak chceme získať metódu druhého rádu, treba na aproximáciu Neumannovej okrajovej podmienky použiť spätnú diferenciu druhého rádu. Na jej odvodenie použijeme Taylorove rozvoje

$$u(x_{n-1}) = u(x_{n+1}) + u'(x_{n+1}) \underbrace{(x_{n-1} - x_{n+1})}_{-2h} + \frac{1}{2}u''(x_{n+1})4h^2 - \frac{1}{3!}u'''(x_{n+1})8h^3 + O(h^4)$$

$$u(x_n) = u(x_{n+1}) - u'(x_{n+1})h + \frac{1}{2}u''(x_{n+1})h^2 - \frac{1}{3!}u'''(x_{n+1})h^3 + O(h^4).$$

Potrebuje sa zbaviť člena úmerného h^2 (ak by nevypadol, dostali by sme znova len aproximáciu prvého rádu), a preto od prvej rovnice odčítame 4-násobok druhej

$$u(x_{n-1}) - 4u(x_n) = -3u(x_{n+1}) + 2u'(x_{n+1})h - \frac{1}{3!}u'''(x_{n+1})4h^3 + O(h^4)$$

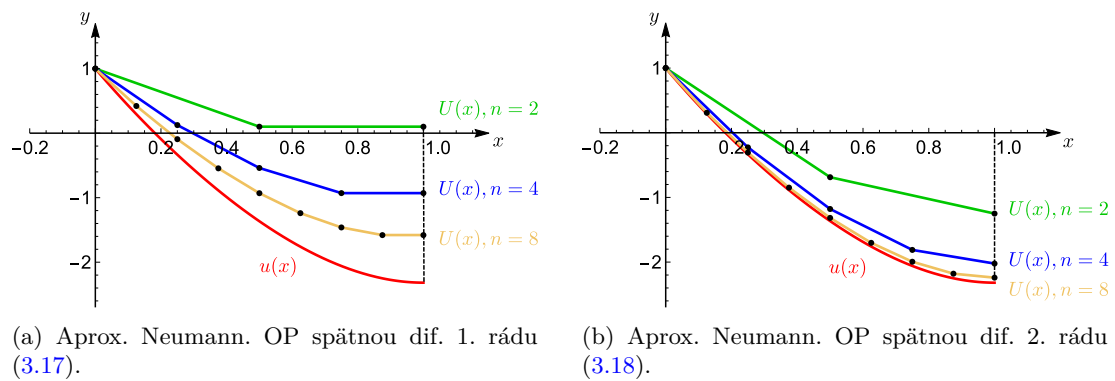
a po úprave

$$\frac{\frac{1}{2}u(x_{n-1}) - 2u(x_n) + \frac{3}{2}u(x_{n+1}))}{h} = u'(x_{n+1}) - \underbrace{\frac{1}{3!}u'''(x_{n+1})2h^2 + O(h^3)}_{\text{zanedbáme}}.$$

Takže spätná diferencia druhého rádu je

$$u'(x_{n+1}) \approx \frac{\frac{1}{2}u_{n-1} - 2u_n + \frac{3}{2}u_{n+1}}{h}. \quad (3.18)$$

Použite túto spätnú diferenciu na aproximáciu Neumannovej okrajovej podmienky a overte, či chyba klesá druhým rádom.



Obr. 3.4. Riešenie Úlohy 3.6 pre $n = 2, 4, 8$.

Na Obr. 3.4 vidíme presné riešenie (3.16) spolu s riešením pomocou MKD pre obe aproximácie Neumannovej okrajovej podmienky. Aj vizuálne je zrejmé, že aproximácia druhého rádu (3.18) dáva presnejšie a rýchlejšie konvergujúce riešenie, než aproximácia (3.17).

Poznámka 3.7 (Celkový rád presnosti numerickej metódy). V Úlohe 3.6 dochádza k zaujímavému javu. Derivácie v diferenciálnej rovnici sme aproximovali s presnosťou 2. rádu. Ak

na aproximáciu okrajovej podmienky použijeme spätnú diferenciu, ktorá má len presnosť 1. rádu, zníži to rád celej metódy napriek tomu, že sa táto „horšia aproximácia“ používa len v jednom bode. Ako v mnohých oblastiach života, aj tu platí, že „reťaz je len taká pevná, ako jej najslabší článok“.

3.2 Variačné metódy

V tejto časti sa budeme zaoberať variačnými metódami. V MKP sa riešenie na každom konečnom prvku hľadá podobne ako v jednoduchých variačných metódach. Preto je poučné pozrieť sa na variačné metódy predtým, než sa pustíme do MKP.

Hlavné myšlienky variačných metód budeme ilustrovať na konkrétnom príklade. Uvažujme opäť okrajovú úlohu (3.15), čiže

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} \left((1+x) \frac{du}{dx} \right) &= -18x^2, & x \in (0, 1), \\ u(0) &= 1, & u'(1) = 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Diferenciálnu rovnicu môžeme napísať aj v tvare, kde je ľavá strana rozderivovaná

$$-\frac{du}{dx} - (1+x) \frac{d^2u}{dx^2} = -18x^2, \quad (3.20)$$

Približné riešenie úlohy budeme hľadať v tvare lineárnej kombinácie

$$U(x) = \phi_0(x) + \sum_{i=1}^N c_i \phi_i(x) = \phi_0(x) + c_1 \phi_1(x) + c_2 \phi_2(x) + \dots + c_N \phi_N(x), \quad (3.21)$$

kde funkcia $\phi_0(x)$ spĺňa okrajové podmienky, funkcie $\phi_1(x), \dots, \phi_N(x)$ sú dopredu zvolené *aproximačné funkcie*, ktoré spĺňajú homogénne okrajové podmienky (s nulovou pravou stranou) a c_i sú *neznáme koeficienty*, niekedy sa im hovorí aj stupne voľnosti. Otázka je, ako ich vypočítať.

Na hľadanie približného riešenia v tvare (3.21) zvolíme napríklad

$$\phi_0(x) = 1.$$

Táto funkcia spĺňa okrajové podmienky $\phi_0(0) = 1$ a $\phi_0'(1) = 0$.⁴ Ďalej zvolíme ostatné aproximačné funkcie takto

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= x^2 - 2x, \\ \phi_2(x) &= x^3 - 3x, \\ &\vdots \\ \phi_N(x) &= x^{N+1} - (N+1)x. \end{aligned}$$

Zvolené funkcie $\phi_1, \dots, \phi_N$ naozaj spĺňajú homogénne okrajové podmienky $\phi_i(0) = 0$ a $\phi_i'(1) = 0$.

Poznámka 3.8 (Viac dimenzií). Pri 1D úlohách je pomerne jednoduché zvoliť aproximačné funkcie $\phi_0(x), \dots, \phi_N(x)$. Pri viacrozmerných a nepravidelných oblastiach to môže byť vo všeobecnosti veľmi ťažká úloha.

Uvažujme $N = 2$, teda hľadáme približné riešenie

$$U(x) = 1 + c_1 (x^2 - 2x) + c_2 (x^3 - 3x). \quad (3.22)$$

Zostáva vypočítať koeficienty c_1 a c_2 .

⁴Možnosť je (nekonečne) veľa, mohli by sme napríklad zvoliť aj funkciu $\phi_0(x) = \cos(\pi x)$, ktorá tiež spĺňa okrajové podmienky.

3.2.1 Naivný prístup

Skúsme dosadiť približné riešenie (3.22) do diferenciálnej rovnice (3.20), čiže riešime rovnicu

$$-\frac{dU}{dx} - (1+x)\frac{d^2U}{dx^2} = -18x^2.$$

Po dosadení za U dostaneme

$$-\left[c_1(2x-2) + c_2(3x^2-3)\right] - (1+x)[2c_1 + 6c_2x] = -18x^2$$

a po úprave

$$(2c_1 + 3c_2 - 2c_1) + (-2c_1 - 2c_1 - 6c_2)x + (-3c_2 - 6c_2 + 18)x^2 = 0. \quad (3.23)$$

Rovnica (3.23) hovorí, že polynóm na ľavej strane rovnice má byť nulový a to pre všetky $x \in (0, 1)$, preto koeficient pri každej mocnine x musí byť nulový, teda

$$\begin{aligned} 3c_2 &= 0, \\ -4c_1 - 6c_2 &= 0, \\ -9c_2 + 18 &= 0, \end{aligned}$$

čo je sústava troch rovníc s dvoma neznámymi c_1 a c_2 .⁵ Podľa prvej rovnice musí platiť $c_2 = 0$ a podľa tretej $c_2 = 2$, to je spor, sústava teda nemá riešenie. To znamená, že požiadavka, aby diferenciálna rovnica (3.20) pre funkciu $U(x)$ platila presne, je príliš silná. Potrebujeme nájsť spôsob, ktorým pre N neznámych koeficientov $c_1, \dots, c_N$ dostaneme sústavu N *lineárne nezávislých rovníc*.

3.2.2 Variačná formulácia

Variačné metódy sú založené na prepise diferenciálnej rovnice do istej *integrálnej formulácie*. Definujme *rezíduum* ako rozdiel ľavej a pravej strany rovnice (3.19), resp. (3.20) s tým, že namiesto presného riešenia u budeme mať približné riešenie U

$$R(x) = -\frac{d}{dx} \left((1+x)\frac{dU}{dx} \right) + 18x^2 = -\frac{dU}{dx} - (1+x)\frac{d^2U}{dx^2} + 18x^2.$$

Ako sme videli v predchádzajúcej časti, požiadavka $R(x) = 0$ je príliš silná a vo všeobecnosti nevieme vypočítať koeficienty $c_1, \dots, c_N$.⁶ Rezíduum $R(x)$ vynásobíme ľubovoľnou *váhovou funkciou* $w(x)$ a integrujme na celej výpočtovej oblasti. Dostaneme tzv. *variačnú formuláciu* rovnice (3.19)

$$\int_0^1 R(x)w(x) dx = 0 \quad \text{pre ľubovoľné } w(x). \quad (3.24)$$

Formulácii sa hovorí „*variačná*“ preto, lebo funkcia w sa môže ľubovoľne meniť – variovať. Niekedy sa formulácia (3.24) nazýva aj *vážené rezíduum* alebo aj *vážený integrál*.

Poznámka 3.9 (Súvis so slabou formuláciou). V niektorých variačných metódach sa integrálna rovnica (3.24) ešte upravuje na tvar tzv. *slabej formulácie*, o ktorej budeme hovoriť v sekcii 4.3.1.

⁵Sústava je preurčená, máme viac rovníc ako neznámych. Takéto sústavy vo všeobecnosti nemusia mať riešenie.

⁶Rovnica $R(x) = 0$ platí, len ak namiesto U uvažujeme presné riešenie u .

Poznámka 3.10 (*Ako to vidí funkcionálna analýza). Funkcie tvoria vektorový priestor. Funkcie R a w sú prvky (vektory) tohto priestoru. Integrál

$$(R, w) = \int_0^1 R w \, dx \quad (3.25)$$

možno chápať ako skalárny súčin vektorov R a w (pozri Definíciu A.18). Diferenciálna rovnica (3.19), v ktorej vymeníme u za U tvrdí, že vektor R má byť nulový. Variačná formulácia (3.24) hovorí, že skalárny súčin vektora R s ľubovoľným vektorom w je nulový. Inak povedané, rezíduum R je kolmé na ľubovoľnú funkciu w .

Ako vieme z lineárnej algebry na $\mathbb{R}^n$, ak skalárny súčin nejakého vektora $v \in \mathbb{R}^n$ s ľubovoľným vektorom $w \in \mathbb{R}^n$ je nulový (vektor v je kolmý na všetko), nutne musí byť vektor v nulový. V tomto tvrdení dokonca stačí namiesto ľubovoľného w zobrať n lineárne nezávislých vektorov (tvoriacich bázu $\mathbb{R}^n$).

3.2.3 Metóda vážených rezíduí

Ak je integrál (3.24) nulový pre ľubovoľnú funkciu $w(x)$, potom je rezíduum $R(x)$ nulové, a teda U by bolo presným riešením. Vo variačných metódach sa ale „uskromníme“ s tým, že za váhovú funkciu $w(x)$ budeme postupne voliť N lineárne nezávislých funkcií $w_1(x), \dots, w_N(x)$, máme teda rovnice

$$\int_0^1 R w_1 \, dx = 0, \quad \dots \quad \int_0^1 R w_N \, dx = 0.$$

Po integrovaní ľavých strán dostaneme systém N lineárnych rovníc pre neznáme koeficienty $c_1, \dots, c_N$.

Poznámka 3.11 (*Ako to vidí funkcionálna analýza). Funkcie $w_1, \dots, w_N$ môžeme chápať ako vektory v nekonečnorozmernom priestore funkcií, ktoré tvoria bázu N -rozmerného podpriestoru. Rezíduum teda nebude úplne nulové, ale bude kolmé (v zmysle skalárneho súčinu (3.25)) na N lineárne nezávislých vektorov $w_1, \dots, w_N$

$$(R, w_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.26)$$

To znamená, že projekcia rezídua R do podpriestoru generovaného funkciami (vektormi) $w_1, \dots, w_N$ bude nulová. Čím väčšie je N , tým je podpriestor „väčší“ a tým máme väčšiu šancu priblížiť sa k presnému riešeniu.

Príklad 3.12. Vyriešme okrajovú úlohu (3.19) metódou vážených rezíduí pre $N = 2$. Máme riešiť rovnicu

$$\int_0^1 \left[-\frac{d}{dx} \left((1+x) \frac{dU}{dx} \right) + 18x^2 \right] w(x) \, dx = 0,$$

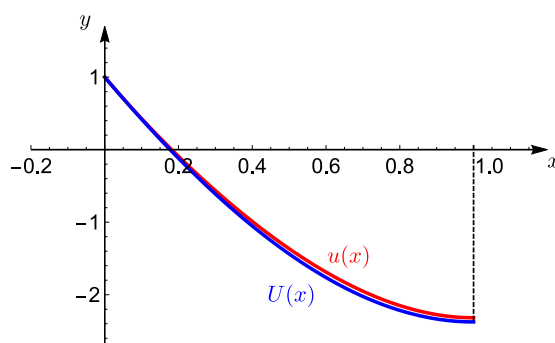
pre dve nezávislé váhové funkcie $w(x)$, pričom $U(x)$ je dané vzťahom (3.22). Zvoľme napríklad $w_1(x) = 1$ a $w_2(x) = x$. Dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} \int_0^1 R w_1 \, dx &= \int_0^1 \left[-\frac{d}{dx} \left((1+x) \frac{d[1 + c_1(x^2 - 2x) + c_2(x^3 - 3x)]}{dx} \right) + 18x^2 \right] 1 \, dx = 6 - 2c_1 - 3c_2 \stackrel{!}{=} 0, \\ \int_0^1 R w_2 \, dx &= \int_0^1 \left[-\frac{d}{dx} \left((1+x) \frac{d[1 + c_1(x^2 - 2x) + c_2(x^3 - 3x)]}{dx} \right) + 18x^2 \right] x \, dx = \frac{9}{2} - \frac{4}{3}c_1 - \frac{11}{4}c_2 \stackrel{!}{=} 0, \end{aligned}$$

ktorých riešením je $c_1 = 2, c_2 = \frac{2}{3}$ a približné riešenie úlohy (3.19) teda je

$$U(x) = 1 + 2(x^2 - 2x) + \frac{2}{3}(x^3 - 3x).$$

Približné riešenie $U(x)$ vidíme vykreslené spolu s presným riešením $u(x)$ (pozri tvar (3.16)). Už pre $N = 2$ sme teda získali približné riešenie, ktoré sa vizuálne veľmi podobná na presné (Obr. 3.5).



Obr. 3.5. Presné riešenie $u(x)$ a približné riešenie $U(x)$ získané metódou vážených rezíduí.

Úloha 3.13 (Metóda vážených rezíduí | cv02, Metoda vazenych rezidui.nb). Naprogramujte riešenie úlohy (3.19) metódou vážených rezíduí pre $N = 2, 3, 4$ (prípadne to môžete skúsiť pre všeobecné N).

1. Pomocou `DSolve` nájdite presné riešenie $u(x)$ okrajovej úlohy (3.19) a vykreslite ho.
2. Definujte funkcie ϕ_i, U, R a $w_i(x) = x^{i-1}$.
3. Vypočítajte $c_1, \dots, c_N$ riešením systému rovníc $\int_0^1 R w_1 dx = 0, \dots, \int_0^1 R w_N dx = 0$.
4. Získajte približné riešenie dosadením $c_1, \dots, c_N$ do U .
5. Vykreslite presné aj približné riešenie úlohy do jedného obrázka.
6. Vypočítajte L_2 -chybu ako

$$L_2\text{-chyba} = \sqrt{\int_0^1 (U(x) - u(x))^2 dx}.$$

7. Porovnajete chyby pre $N = 2, 3, 4$, chyba by mala klesať s rastúcim N .

Poznámka 3.14 (*Špeciálne voľby váhových funkcií). Za váhové funkcie $w_1(x), \dots, w_N(x)$ môžeme postupne voliť aj aproximačné funkcie $\phi_1(x), \dots, \phi_N(x)$. Pri tomto výbere sa metóde niekedy hovorí aj *Galerkinova metóda*.

Ďalšia zaujímavá voľba vychádza z jednoduchšej otázky: Ako dosiahnuť pri fixovanom N čo *najmenšie možné rezíduum*? (V zmysle normy indukovanej skalárnym súčinom (3.25), pozri Definíciu A.19.) Minimalizujeme štvorec normy rezídua, čiže integrál

$$\|R\|^2 = (R, R) = \int_0^1 R^2 dx.$$

Nutná podmienka minima hovorí, že derivácia podľa koeficientov c_i pre všetky $i = 1, \dots, N$

má byť nulová, čiže

$$\frac{\partial \|R\|^2}{\partial c_i} = \int_0^1 \frac{\partial R^2}{\partial c_i} dx = \int_0^1 2R \frac{\partial R}{\partial c_i} dx = 2 \left(R, \frac{\partial R}{\partial c_i} \right) \stackrel{!}{=} 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.27)$$

Slovne: rezíduum je najmenšie vtedy, keď je kolmé na funkcie $\frac{\partial R}{\partial c_i}$. V metóde vážených rezíduí vyžadujeme kolmosť rezídua na váhové funkcie w_i , pozri Poznámku 3.11. Ak porovnáme podmienku (3.27) s podmienkou (3.26), zisťujeme, že ideálna voľba váhových funkcií (minimalizujúca rezíduum) je

$$w_i = \frac{\partial R}{\partial c_i}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Pri takejto voľbe váhových funkcií sa metóde vážených rezíduí hovorí aj *metóda najmenších štvorcov*.

Úloha 3.15 (Metóda vážených rezíduí | cv02, Metoda vazenych rezidui.nb). Vo vašom programe z Úlohy 3.13 si vyskúšajte meniť váhové funkcie w_i .

1. Skúšajte rôzne (lineárne nezávislé a spojité) funkcie. Buďte naozaj kreatívni, voľte polynómy, odmocniny, sin, cos, arctan, ... Presvedčte sa, že metóda vážených rezíduí stále pekne funguje.
2. Vyskúšajte Galerkinovu metódu, čiže $w_i = \phi_i$.
3. Skúste aj metódu najmenších štvorcov, čiže $w_i = \frac{\partial R}{\partial c_i}$.
4. Porovnajme metódy z hľadiska L_2 -chyby aj normy rezíduí R .

Koeficienty c_i , L_2 -chyby aj normy $\|R\|$ vidíme v Tabuľkách 3.2 a 3.3, môžeme ich porovnať aj s Tabuľkou 3.1. Vidíme, že najmenšie rezíduá naozaj vychádzajú pre metódu najmenších štvorcov. Najmenšie rezíduum však ešte nezaručuje najmenšiu L_2 -chybu (čiže vzdialenosť približného riešenia od presného). Z hľadiska L_2 -chyby je na tom jednoznačne najlepšie Galerkinova metóda.

Tabuľka 3.1. Výsledky pre metódu vážených rezíduí s váhovými funkciami $w_i(x) = x^{i-1}$.

N	c_1	c_2	c_3	c_4	L_2 -chyba	$\ R\ $
2	2.	0.6667			0.03482	0.8944
3	2.727	-0.7273	0.6818		0.002347	0.2062
4	2.933	-1.511	1.633	-0.3733	0.0002655	0.04444

Tabuľka 3.2. Výsledky pre metódu vážených rezíduí s Galerkinovými váh. funkciami $w_i = \phi_i$.

N	c_1	c_2	c_3	c_4	L_2 -chyba	$\ R\ $
2	1.615	0.8462			0.007545	0.8737
3	2.565	-0.5362	0.6087		0.0009003	0.2174
4	2.879	-1.392	1.526	-0.3392	0.0001188	0.05

Tabuľka 3.3. Výsledky pre metódu vážených rezíduí s váhovými funkciami $w_i = \frac{\partial R}{\partial c_i}$.

N	c_1	c_2	c_3	c_4	L_2 -chyba	$\ R\ $
2	1.776	0.7755			0.02114	0.8571
3	2.675	-0.6451	0.6445		0.00266	0.2004
4	2.921	-1.471	1.587	-0.3558	0.0002793	0.04339

Časť II

Metóda konečných prvkov pre 1D úlohy

Kapitola 4

MKP pre diferenciálnu rovnicu 2. rádu

Touto kapitolou začíname výklad samotnej metódy konečných prvkov (MKP¹). Postupovať budeme tak, že najprv na konkrétnom príklade vysvetlíme, ako sa pomocou MKP rieši 1D diferenciálna rovnica 2. rádu. V ďalších kapitolách sa pozrieme na MKP pre rovnicu 4. rádu, riešenie nestacionárnych úloh, ale aj MKP pre 2D úlohu.

V mnohých praktických úlohách treba riešiť obyčajnú diferenciálnu rovnicu 2. rádu tvaru

$$-\frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{du}{dx} \right) = f(x), \quad x \in (0, L), \quad (4.1)$$

kde neznámou je funkcia $u(x)$. Vstupmi (dátami) úlohy sú materiálová charakteristika $a(x)$, intenzita zdrojov (resp. vonkajších síl) $f(x)$ a okrajové podmienky zadané na hranici výpočtovej oblasti $\Omega = (0, L)$ (čiže v bodoch $x = 0$ a $x = L$). Funkciu $u(x)$ sa niekedy hovorí *primárna neznáma* a funkciu

$$q(x) = -a(x) \frac{du}{dx} \quad (4.2)$$

sa hovorí *sekundárna neznáma* alebo aj *tok*. Budeme uvažovať okrajové podmienky

$$u(0) = u_0, \quad \left(a(x) \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=L} = Q_L, \quad (4.3)$$

kde u_0 a Q_L sú zadané čísla.

Okrajové podmienky majú vo všeobecnosti tvar

$$\begin{aligned} \alpha_1 u(0) + \beta_1 \left(-a(x) \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=0} &= g_1, \\ \alpha_2 u(L) + \beta_2 \left(a(x) \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=L} &= g_2, \end{aligned} \quad (4.4)$$

kde α_1, β_1, g_1 a α_2, β_2, g_2 sú zadané konštanty. Prípád $\beta_i = 0$ zodpovedá *Dirichletovej* okrajovej podmienke, kde zadávame hodnotu primárnej neznámej $u(x)$ na hranici. Ak $\alpha_i = 0$, hovoríme o *Neumannovej* okrajovej podmienke, pri ktorej je vlastne na hranici zadaná hodnota sekundárnej neznámej $q(x)$. Ak je α_i aj β_i nenulové, ide o *Newtonovu* okrajovú podmienku.²

V prípade okrajových podmienok (4.3) teda máme v bode $x = 0$ Dirichletovu okrajovú podmienku ($\alpha_1 = 1, \beta_1 = 0, g_1 = u_0$) a v bode $x = L$ Neumannovu okrajovú podmienku ($\alpha_2 = 0, \beta_2 = 1, g_2 = Q_L$).

Matematický model (4.1) má množstvo aplikácií vo fyzike, ale aj v iných oblastiach. Niektoré z aplikácií spolu s významom jednotlivých veličín uvádzame v Tabuľke 4.1.

¹Mimochodom je to užitočná skratka pre tých, ktorí si často zabudnú kľúče či peňaženku. Keď vychádzate z domu, treba skontrolovať, či máte so sebou MKP – Mobil, Kľúče, Peňaženku.

²Odporúčame čitateľovi, aby všeobecný tvar okrajových podmienok (4.4) porovnal s okrajovými podmienkami pre 1D rovnicu vedenia tepla (sekcia 2.1) alebo pre pozdĺžne deformácie prúta (sekcia 2.5). Napríklad Newtonovej okrajovej podmienke (2.8) tu zodpovedá voľba $\alpha_1 = \kappa, \beta_1 = 1, g_1 = \kappa u_{\text{ext}}$.

Tabuľka 4.1. Niektoré aplikácie rovnice (4.1). Tabuľka je veľmi široká, preto je rozdelená na dve.

Aplikácia	Primárna neznáma $u(x)$	Sekundárna neznáma $q(x)$	Zdrojový člen $f(x)$
Vedenie tepla	Teplota	Intenzita (hustota) tepelného toku	Hustota zdrojov tepla
Difúzia látky	Koncentrácia látky	Difúzny tok	Hustota zdrojov látky
Pozdĺžne deformácie prúta (tyče, stĺpa)	Posunutie v smere osi	Osová sila	Hustota objemových síl
Prúdenie vody v pórovitom prostredí	Hydraulický potenciál (piezometrická výška)	Hydraulický (Darcyho) tok	Hustota zdrojov vody
Elektrostatika	Elektrostatický potenciál	Elektrická indukcia	Hustota elektrického náboja

Aplikácia	Materiálová charakteristika $a(x)$	Empirický zákon $q = -a \frac{du}{dx}$
Vedenie tepla	Koeficient tepelnej vodivosti	Fourierov zákon
Difúzia látky	Koeficient difúzie	Fickov zákon
Pozdĺžne deformácie prúta (tyče, stĺpa)	Osová tuhosť $EA(x)$ $E =$ Youngov modul pružnosti $A(x) =$ plocha prierezu	Hookov zákon
Prúdenie vody v pórovitom prostredí	Koeficient hydraulickej vodivosti	Darcyho zákon
Elektrostatika	Elektrická permitivita	Elektrostatické pole je potenciálové (práca vynaložená na prenos bodového náboja z bodu A do bodu B nezávisí od trajektórie)

4.1 Algoritmus metódy konečných prvkov

Riešenie úloh pomocou metódy konečných prvkov pozostáva z niekoľkých základných krokov, ktoré zhrnieme v nasledujúcom algoritme. Podľa tohto algoritmu budeme postupovať aj vo viacrozmerných úlohách, či diferenciálnych rovniciach vyšších rádov. Algoritmus treba chápať ako približnú osnovu. Občas niektoré kroky vynecháme alebo posunieme na neskôr.

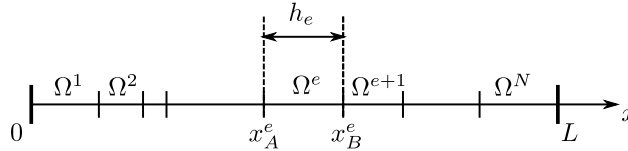
1. Diskretizácia výpočtovej oblasti.
 - (a) Reprezentácia výpočtovej oblasti sieťou konečných prvkov (elementov).
 - (b) Očíslovanie elementov a uzlových bodov (lokálne aj globálne), konštrukcia matice spojitosti.
 - (c) Výpočet geometrických parametrov elementov (dĺžky, plochy,...) a súradníc uzlových bodov.
2. Zostrojenie sústavy rovníc na elemente.
 - (a) Zostrojenie slabej formulácie diferenciálnej rovnice na elemente.
 - (b) Zostrojenie aproximačných (tvarových) funkcií na elemente.
 - (c) Dosadenie približného riešenia a aproximačných funkcií do slabej formulácie.
3. Spojenie elementových sústav rovníc do globálneho systému lineárnych rovníc.
 - (a) Zabezpečenie spojitosti riešenia (primárnych neznámych) na styku elementov (zavedenie globálneho číslovania neznámych).
 - (b) Bilancia tokov (sekundárnych neznámych) na styku elementov.
 - (c) Spojenie elementových rovníc na základe 3a a 3b.
4. Využitie okrajových podmienok v globálnom systéme rovníc.
5. Riešenie globálneho systému rovníc³ a konštrukcia približného riešenia.
6. Spracovanie výsledkov.
 - (a) Výpočet požadovaných kvantít na základe uzlových hodnôt riešenia z kroku 5.
 - (b) Vizualizácia výsledkov.

³Toto už je v podstate úloha z lineárnej algebry. V prípade viacrozmerných úloh a vysokého počtu elementov však môže ísť o sústavu s miliónmi neznámych, na ktorej riešenie sa často používajú rôzne približné iteračné metódy.

Vo zvyšných častiach tejto kapitoly budeme ilustrovať celý algoritmus metódy konečných prvkov na diferenciálnej rovnici (4.1) s okrajovými podmienkami (4.4).

4.2 Diskretizácia výpočtovej oblasti

Výpočtovú oblasť $\Omega = (0, L)$ v modelovej úlohe (4.1) diskretizujeme na N elementov Ω^e , $e = 1, \dots, N$ (Obr. 4.1). Každý element je interval $\Omega^e = [x_A^e, x_B^e]$, pričom intervaly môžu mať rôznu veľkosť $h^e = |\Omega^e| = x_B^e - x_A^e$.



Obr. 4.1. Diskretizácia výpočtovej oblasti $\Omega = (0, L)$.

V závislosti od toho, aký typ elementu zvolíme, sa budú v sekcii 4.3.2 konštruovať uzlové body na elemente. V sekcii 4.3.2 a 4.4 budeme hovoriť aj o globálnom číslovaní uzlových bodov. Maticu spojitosti spomínanú v kroku 1b v 1D úlohách nie je nutné zavádzať, ale ešte sa k nej vrátíme v Poznámke 9.6.

Približné (numerické) riešenie na elemente Ω^e budeme označovať ako $U^e(x)$, $x \in \Omega^e$. Celkové približné riešenie $U(x)$, $x \in [0, L]$ získame poskladaním funkcií $U^e(x)$ do jednej funkcie, čiže

$$U(x) = \begin{cases} U^1(x), & x \in \Omega^1, \\ U^2(x), & x \in \Omega^2, \\ \vdots & \\ U^N(x), & x \in \Omega^N. \end{cases}$$

4.3 Sústava rovníc na elemente

4.3.1 Slabá formulácia

Vyberme jeden element $\Omega^e = [x_A^e, x_B^e]$. Vynásobme diferenciálnu rovnicu (4.1) váhovou funkciou⁴ $w(x)$ a výsledok zintegrujme na elemente Ω^e . Dostaneme variačnú formuláciu

$$\int_{x_A^e}^{x_B^e} -\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) w \, dx = \int_{x_A^e}^{x_B^e} f w \, dx. \quad (4.5)$$

Na ľavej strane prenesieme jednu deriváciu na váhovú funkciu, využijeme na to integráciu *per partes*

$$\int_a^b g' h \, dx = [gh]_a^b - \int_a^b g h' \, dx$$

pričom $g' = -\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right)$, $h = w$, a teda $g = -a \frac{du}{dx}$, $h' = \frac{dw}{dx}$.

Dostaneme

$$\left[-a \frac{du}{dx} w \right]_{x_A^e}^{x_B^e} + \int_{x_A^e}^{x_B^e} a \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} \, dx = \int_{x_A^e}^{x_B^e} f w \, dx$$

a po rozpísaní hraničného člena máme

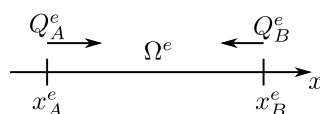
$$-\left(a \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=x_B^e} w(x_B^e) - \left(-a \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=x_A^e} w(x_A^e) + \int_{x_A^e}^{x_B^e} a \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} \, dx = \int_{x_A^e}^{x_B^e} f w \, dx. \quad (4.6)$$

⁴Používa sa aj názov *testovacia funkcia*.

Zavedme označenia

$$\begin{aligned} Q_A^e &:= \left(-a \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=x_A^e} && \text{tok dovnútra elementu zľava,} \\ Q_B^e &:= \left(a \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=x_B^e} && \text{tok dovnútra elementu sprava.} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Poznámka 4.1. Všimnime si, že v toku Q_A^e (zľava) figuruje štandardné znamienko mínus (porovnaj s definíciou (4.2)) a v toku Q_B^e (sprava) je neštandardne plus. Je to preto, že v bode x_B^e je smer dovnútra elementu orientovaný proti smeru osi x (Obr. (4.2)).



Obr. 4.2. Toky Q_A^e a Q_B^e dovnútra elementu $\Omega^e = [x_A^e, x_B^e]$.

Hraničné členy v rovnici (4.6) prehodíme na pravú stranu a dostávame *slabú formuláciu* diferenciálnej rovnice (4.1) na elemente Ω^e

$$\int_{x_A^e}^{x_B^e} a \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dx = \int_{x_A^e}^{x_B^e} f w dx + Q_A^e w(x_A^e) + Q_B^e w(x_B^e). \quad (4.8)$$

Poznámka 4.2 (Prečo „slabá“ formulácia?). V pôvodnej rovnici (4.1) je potrebné, aby existovala druhá derivácia neznámej $u(x)$ (preto, aby výraz na ľavej strane mal zmysel). V slabej formulácii (4.8) stačí, ak existuje prvá derivácia $u(x)$ skoro všade. Požiadavka na $a(x)$ v rovnici (4.1) je, aby bola funkcia diferencovateľná, v slabej formulácii (4.8) funkcia $a(x)$ môže byť dokonca aj nespojitá (na množine bodov miery nula).^a Na funkcie $u(x)$ aj $a(x)$ sú v rovnici (4.8) slabšie požiadavky, preto sa formulácia sa nazýva slabá.

Slabá formulácia je vlastne špeciálny druh variačnej formulácie (preto sa jej niekedy hovorí len variačná formulácia), v ktorej po vynásobení váhovou funkciou a integrácii ešte navyše prenášame derivácie na váhovú funkciu.

^aTo je dobrá správa, pretože v praxi sa to často stáva. Napríklad ak v rovnici vedenia (2.7) tepla uvažujeme viacero materiálov (napríklad stena izolovaná polystyrénom, pozri Obr. 2.2), tak na styku materiálov je tepelná vodivosť $\lambda(x)$ nespojitá funkcia.

Poznámka 4.3 (Slabá formulácia na celej výpočtovej oblasti). Túto poznámku uvádzame pre potrebu neskoršej referencie. Ak pri odvodení slabej formulácie namiesto integrácie cez element $\Omega^e = [x_A^e, x_B^e]$ integrujeme cez celú oblasť $\Omega = (0, L)$, dostaneme *slabú formuláciu na celej výpočtovej oblasti* Ω

$$\int_0^L a \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dx = \int_0^L f w dx + Q_A^1 w(0) + Q_B^N w(L), \quad (4.9)$$

kde

$$Q_A^1 := \left(-a \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=0}, \quad Q_B^N := \left(a \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=L}. \quad (4.10)$$

Poznámka 4.4 (Iný zápis variačnej formulácie (4.5)). Variačná formulácia (4.5) sa často najprv zapisuje v tvare

$$\int_{x_A^e}^{x_B^e} \underbrace{\left[-\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) - f \right]}_{R \text{ (rezíduum)}} w dx = 0,$$

čiže v tvare váženého rezídua (pozri rovnicu (3.24)), a až potom sa presunie integrál z fw doprava. Pozri aj Poznámky 3.9 a 3.10.

4.3.2 Aproximačné funkcie

Približné riešenie $U^e(x)$ na elemente Ω^e budeme hľadať v tvare *lineárnej kombinácie aproximačných funkcií*. V MKP musí približné riešenie na elemente vo všeobecnosti spĺňať nasledujúce požiadavky:

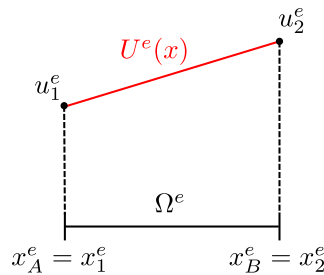
1. Približné riešenie na elemente je *polynóm*.⁵
2. *Polynóm* musí byť *úplný*, čo znamená, že musí obsahovať všetky mocniny x od nulte po najvyššiu.
3. *Derivácie*, ktoré sa vyskytujú v *slabej formulácii*, musia byť vo všeobecnosti pre polynóm *nenulové* (v prípade slabej formulácie (4.8) musí byť nenulová 1. derivácia).
4. Musia byť splnené *interpolačné podmienky* pre primárne neznáme.

Lineárne elementy

Najjednoduchšie funkcie, ktoré spĺňajú podmienky 1. až 4. pre slabú formuláciu (4.8) sú *lineárne polynómy*. Približné riešenie na elemente Ω^e teda stačí hľadať v tvare

$$U^e(x) = c_1 + c_2 x, \quad (4.11)$$

kde c_1, c_2 sú zatiaľ neznáme čísla. Elementom s lineárnym priebehom približného riešenia sa hovorí



Obr. 4.3. Lineárna funkcia $U^e(x)$ interpolujúca uzlové hodnoty u_1^e, u_2^e .

lineárne elementy. Tieto elementy majú dva uzlové body $x_1^e = x_A^e$ a $x_2^e = x_B^e$. Neznáme koeficienty c_1, c_2 v (4.11) určíme tak, aby boli v uzlových bodoch splnené *interpolačné podmienky* (Obr. 4.3)

$$U^e(x_1^e) = u_1^e, \quad U^e(x_2^e) = u_2^e, \quad (4.12)$$

kde u_1^e, u_2^e označujú hodnotu približného riešenia v uzlových bodoch x_1^e, x_2^e . Po dosadení funkcie (4.11) do (4.12) dostaneme sústavu lineárnych rovníc pre koeficienty c_1, c_2

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 x_1^e &= u_1^e, \\ c_1 + c_2 x_2^e &= u_2^e, \end{aligned} \quad \text{resp. maticovo} \quad \begin{bmatrix} 1 & x_1^e \\ 1 & x_2^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{bmatrix}.$$

⁵S polynómami sa dobre pracuje, ľahko sa derivujú a integrujú.

Použitím Cramerovho pravidla ľahko dostaneme riešenie v tvare

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} u_1^e & x_1^e \\ u_2^e & x_2^e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1^e \\ 1 & x_2^e \end{vmatrix}} = \frac{u_1^e x_2^e - u_2^e x_1^e}{x_2^e - x_1^e}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & u_1^e \\ 1 & u_2^e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1^e \\ 1 & x_2^e \end{vmatrix}} = \frac{u_2^e - u_1^e}{x_2^e - x_1^e}.$$

Po dosadení riešenia do (4.11) máme

$$U^e(x) = \frac{u_1^e x_2^e - u_2^e x_1^e}{x_2^e - x_1^e} + \frac{u_2^e - u_1^e}{x_2^e - x_1^e} x = \underbrace{u_1^e \left(\frac{x_2^e - x}{x_2^e - x_1^e} \right)}_{\psi_1^e(x)} + \underbrace{u_2^e \left(\frac{x - x_1^e}{x_2^e - x_1^e} \right)}_{\psi_2^e(x)}.$$

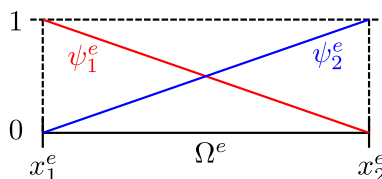
Dostali sme *približné riešenie na elemente* v tvare lineárnej kombinácie

$$U^e(x) = u_1^e \psi_1^e(x) + u_2^e \psi_2^e(x), \quad (4.13)$$

kde funkcie

$$\psi_1^e(x) = \frac{x_2^e - x}{x_2^e - x_1^e} = \frac{1}{h^e}(x_2^e - x), \quad \psi_2^e(x) = \frac{x - x_1^e}{x_2^e - x_1^e} = \frac{1}{h^e}(x - x_1^e) \quad (4.14)$$

sú *lineárne aproximačné funkcie*, vykresľujeme ich na Obr. 4.4.



Obr. 4.4. Aproximačné funkcie ψ_1^e a ψ_2^e .

Poznámka 4.5. Všimnime si, že platí $\psi_1^e(x_1^e) = 1$, $\psi_1^e(x_2^e) = 0$ a naopak $\psi_2^e(x_1^e) = 0$, $\psi_2^e(x_2^e) = 1$, čo sa dá kompaktne zapísať ako $\psi_i^e(x_j^e) = \delta_{ij}$, kde δ_{ij} je Kroneckerov delta symbol (pozri Definíciu A.14).

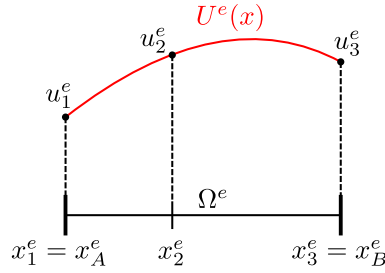
Kvadratické elementy

Pri kvadratických elementoch (elementoch druhého stupňa) uvažujeme približné riešenie U^e na elemente Ω^e v tvare *kvadratickej funkcie*

$$U^e(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2, \quad (4.15)$$

kde c_1, c_2, c_3 sú tri zatiaľ neznáme parametre, na ktorých určenie budeme potrebovať tri uzlové body $x_1^e = x_A^e$, x_2^e a $x_3^e = x_B^e$ (parabola je jednoznačne určená tromi bodmi). Uzlový bod x_2^e sa môže nachádzať kdekoľvek medzi bodmi x_1^e a x_3^e (nie nutne v strede), ale väčšinou sa umiestňuje do stredu. Parametre c_1, c_2, c_3 vo funkcii (4.15) určíme znova pomocou interpolačných podmienok, ktoré majú v tomto prípade (podľa Obr. 4.5) tvar

$$\begin{aligned} U^e(x_1^e) &= c_1 + c_2 x_1^e + c_3 (x_1^e)^2 = u_1^e, \\ U^e(x_2^e) &= c_1 + c_2 x_2^e + c_3 (x_2^e)^2 = u_2^e, \\ U^e(x_3^e) &= c_1 + c_2 x_3^e + c_3 (x_3^e)^2 = u_3^e, \end{aligned} \quad \text{resp. maticovo} \quad \begin{bmatrix} 1 & x_1^e & (x_1^e)^2 \\ 1 & x_2^e & (x_2^e)^2 \\ 1 & x_3^e & (x_3^e)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \end{bmatrix}.$$

Obr. 4.5. Kvadratická funkcia $U^e(x)$ interpolujúca uzlové hodnoty u_1^e, u_2^e, u_3^e .

Použitím Cramerovho pravidla dostaneme

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} u_2^e & x_2^e & (x_2^e)^2 \\ u_3^e & x_3^e & (x_3^e)^2 \end{vmatrix}}{D^e}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1^e & (x_1^e)^2 \\ 1 & x_3^e & (x_3^e)^2 \end{vmatrix}}{D^e}, \quad c_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1^e & u_1^e \\ 1 & x_2^e & u_2^e \\ 1 & x_3^e & u_3^e \end{vmatrix}}{D^e}, \quad \text{kde} \quad D^e := \begin{vmatrix} 1 & x_1^e & (x_1^e)^2 \\ 1 & x_2^e & (x_2^e)^2 \\ 1 & x_3^e & (x_3^e)^2 \end{vmatrix}.$$

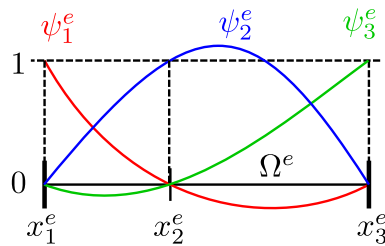
Po dosadení c_1, c_2, c_3 do (4.15) a úprave na tvar lineárnej kombinácie uzlových hodnôt (detailnú postupnosť úprav neuvádzame)

$$U^e(x) = u_1^e \psi_1^e(x) + u_2^e \psi_2^e(x) + u_3^e \psi_3^e(x), \quad (4.16)$$

získame *kvadratické aproximačné funkcie*

$$\psi_1^e(x) = \frac{(x - x_2^e)(x - x_3^e)}{(x_1^e - x_2^e)(x_1^e - x_3^e)}, \quad \psi_2^e(x) = \frac{(x - x_1^e)(x - x_3^e)}{(x_2^e - x_1^e)(x_2^e - x_3^e)}, \quad \psi_3^e(x) = \frac{(x - x_1^e)(x - x_2^e)}{(x_3^e - x_1^e)(x_3^e - x_2^e)}. \quad (4.17)$$

Všimnime si, že pre uzlové hodnoty znova platí $\psi_i^e(x_j^e) = \delta_{ij}$ (pozri Poznámku 4.5). Kvadratické aproximačné funkcie sú vykreslené na Obr. 4.6.

Obr. 4.6. Kvadratické aproximačné funkcie $\psi_1^e, \psi_2^e, \psi_3^e$.

Poznámka 4.6 (Lagrangeove interpolačné funkcie). Keďže funkcia $U^e(x)$ v tvare (4.16) interpoluje uzlové hodnoty, tak aproximačné funkcie sa nazývajú aj *interpolačné funkcie*. V odvodení interpolačných funkcií (4.14) aj (4.17) sa využívali len samotné *hodnoty* funkcie $U^e(x)$ v uzlových bodoch a nie *derivácie* $U^e(x)$ v uzlových bodoch. Takéto interpolačné funkcie sa vo všeobecnosti nazývajú *Lagrangeove interpolačné funkcie*. V prípade, že sa interpolujú aj *derivácie*, hovoríme o *Hermiteových interpolačných funkciách* (bude o nich reč v sekcii 5.1.2).

Elementy ľubovoľného stupňa

V praxi sa väčšinou používajú buď lineárne alebo kvadratické elementy. Pre úplnosť uvedieme aj *elementy stupňa s* , pre ktoré má približné riešenie na elemente tvar

$$U^e(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + \cdots + c_{s+1}x^s = \sum_{i=1}^{s+1} c_i x^{i-1}, \quad (4.18)$$

resp. v podobe lineárnej kombinácie uzlových hodnôt a aproximačných funkcií

$$U^e(x) = u_1^e \psi_1^e(x) + \cdots + u_{s+1}^e \psi_{s+1}^e(x) = \sum_{i=1}^{s+1} u_i^e \psi_i^e(x), \quad (4.19)$$

kde

$$\psi_i^e(x) = \frac{(x - x_1^e) \cdots (x - x_{i-1}^e)(x - x_{i+1}^e) \cdots (x - x_{s+1}^e)}{(x_i^e - x_1^e) \cdots (x_i^e - x_{i-1}^e)(x_i^e - x_{i+1}^e) \cdots (x_i^e - x_{s+1}^e)} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{s+1} \frac{x - x_j^e}{x_i^e - x_j^e}, \quad i = 1, \dots, s+1 \quad (4.20)$$

sú *aproximačné funkcie* (resp. Lagrangeove interpolačné funkcie) *stupňa s* , pričom $x_1^e = x_A^e, x_2^e, \dots, x_{s+1}^e = x_B^e$ sú uzlové body na elemente. Všimnime si, že pre uzlové hodnoty aproximačných funkcií (4.20) opäť platí vlastnosť $\psi_i^e(x_j^e) = \delta_{ij}$. Aproximačné funkcie majú aj nasledujúce užitočné vlastnosti.

Veta 4.7. Pre aproximačné funkcie (4.20) platí

$$\sum_{i=1}^{s+1} \psi_i^e(x) = 1, \quad \sum_{i=1}^{s+1} \frac{d\psi_i^e}{dx} = 0, \quad \text{pre všetky } x \in \Omega^e = [x_A^e, x_B^e].$$

Dôkaz. Druhý vzťah je dôsledkom prvého (stačí ho zderivovať). Prvý vzťah sa dá overiť takto. Uvažujme konštantnú funkciu $U^e(x) \equiv c = \text{konšt.}$ Všetky uzlové hodnoty sú nutne rovnaké, $u_i^e = c$. Zo vzťahu (4.19) dostaneme $c = \sum_{i=1}^{s+1} c \psi_i^e(x)$. Predelíme konštantou c a dostaneme prvý vzťah. $\square$

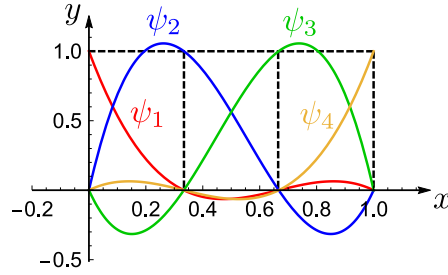
Úloha 4.8 (Aproximačné funkcie | cv03, MKP, `aproximacne_funkcie.nb`). Zostrojte aproximačné funkcie pre element stupňa s dvoma spôsobmi:

- Pomocou interpolačných podmienok, čiže naprogramovaním postupu, ktorým sme hľadali lineárne a kvadratické aproximačné funkcie. Postup treba zovšeobecniť pre polynóm (4.18). Postupne je potrebné:
 - Napísať si (na papier) interpolačné podmienky.
 - Definovať maticu a pravú stranu sústavy interpolačných podmienok (cez príkaz `Table`).
 - Vyriešením sústavy pomocou `LinearSolve` získať koeficienty $c_1, \dots, c_{s+1}$.
 - Dosadiť koeficienty $c_1, \dots, c_{s+1}$ do (4.18), upraviť na tvar (4.19).
 - Identifikovať aproximačné funkcie $\psi_1^e(x), \dots, \psi_{s+1}^e(x)$. Použiť príkaz `Coefficient`.
- Pomocou Lagrangeovho tvaru (4.20). Pri konštrukcii sa zídne príkaz `Product`.

Aproximačné funkcie konštruujete symbolicky, bez dosádzania konkrétnych hodnôt za uzlové body x_i^e .

V oboch prípadoch nakoniec vykreslite aproximačné funkcie pre element s koncovými bodmi $x_A = 0, x_B = 1$. Najprv skonštruujte uzlové body $x_i, i = 1, \dots, s+1$ (element rozdeľte

rovnomerne), a potom ich dosadíte do symbolických aproximačných funkcií. Na Obrázku 4.7 vidíme vykreslené kubické ($s = 3$) aproximačné funkcie.



Obr. 4.7. Kubické aproximačné funkcie $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ pre element $\Omega^1 = [0, 1]$.

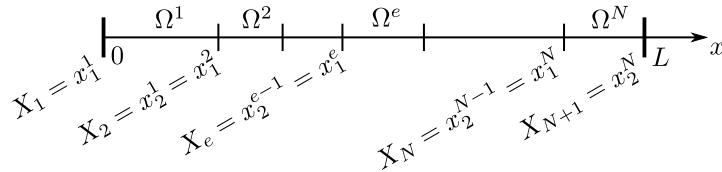
Globálne aproximačné funkcie

Aproximačným funkciám $\psi_i^e(x)$ sa niekedy hovorí aj *lokálne* alebo *elementové aproximačné funkcie*. Pripomínáme, že aproximačná funkcia $\psi_i^e(x)$ bola definovaná len na elemente $\Omega^e = [x_A^e, x_B^e]$. Pomocou lokálnych aproximačných funkcií sa konštruujú *globálne aproximačné funkcie* definované na (uzávere) celej výpočtovej oblasti $\bar{\Omega} = [0, L]$ a sú dôležité v kontexte globálneho pohľadu na MKP (sekcia 4.7) a matematickej analýzy MKP (kapitola 6).

Konštrukciu opíšeme najprv pre *lineárne elementy*. Doteraz sme používali tzv. *lokálne číslovanie uzlových bodov* x_i^e , kde $i = 1, 2$ a $e = 1, \dots, N$. *Globálne číslovanie* uzlových bodov zavádzame takto (Obr. 4.8)

$$X_1 = x_1^1, \quad X_2 = x_1^2 = x_2^1, \dots, X_e = x_2^{e-1} = x_1^e, \dots, X_N = x_2^{N-1} = x_1^N, \quad X_{N+1} = x_2^N. \quad (4.21)$$

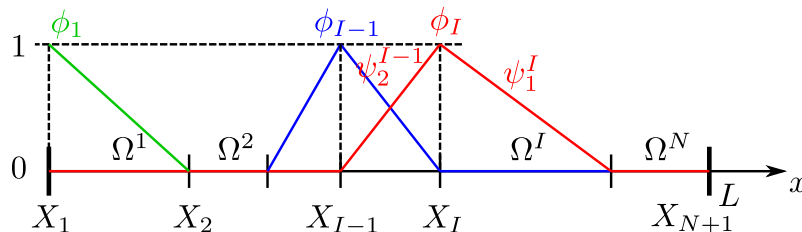
Namiesto pôvodných dvoch indexov sú teda všetky uzlové body číslované jedným globálnym indexom. Globálna aproximačná funkcia $\phi_I(x)$ prislúchajúca globálnemu uzlovému bodu X_I sa pomocou



Obr. 4.8. Globálne číslovanie uzlových bodov.

elementových aproximačných funkcií definuje ako (Obr. 4.9)

$$\phi_I(x) = \begin{cases} \psi_2^{I-1}(x), & x \in \Omega^{I-1}, \\ \psi_1^I(x), & x \in \Omega^I, \\ 0, & \text{inak.} \end{cases} \quad (4.22)$$



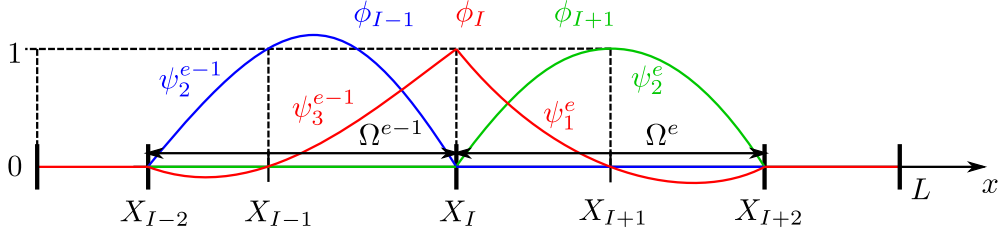
Obr. 4.9. Globálne aproximačné funkcie pre lineárne elementy.

Všimnime si, že funkcia $\phi_I(x)$ nadobúda hodnotu 1 v uzlovom bode X_I a vo všetkých ostatných uzlových bodoch hodnotu 0 (Obr. 4.9), čo môžeme kompaktne zapísať v tvare

$$\phi_I(X_J) = \delta_{IJ}, \quad (4.23)$$

pozri Definíciu A.14.

Globálne aproximačné funkcie pre elementy *vyššieho stupňa* sa konštruujú tak, že zafixujeme uzlové hodnoty $\phi_I(X_I) = 1$ a $\phi_I(X_J) = 0$ pre $J \neq I$ a tieto hodnoty na každom elemente interpolujeme pomocou elementových aproximačných funkcií. Globálne aproximačné funkcie $\phi_{I-1}(x)$, $\phi_I(x)$ a $\phi_{I+1}(x)$ prislúchajúce uzlovým bodom X_{I-1} , X_I a X_{I+1} sú pre kvadratické elementy načrtnuté na Obr. 4.10.



Obr. 4.10. Globálne aproximačné funkcie pre kvadratické elementy.

4.3.3 Dosadenie približného riešenia a aproximačných funkcií do slabej formulácie

Lineárny element

Na získanie sústavy rovníc na elemente Ω^e použijeme nasledujúci postup. V slabej formulácii (4.8) za neznámu funkciu $u(x)$ dosadíme približné riešenie $U^e(x)$ na elemente v tvare (4.13) a za váhovú funkciu $w(x)$ postupne dosádzame aproximačné funkcie $\psi_1^e(x)$ a $\psi_2^e(x)$.

Prvá elementová rovnica. Zoberme najprv $w = \psi_1^e$, po dosadení máme

$$\int_{x_1^e}^{x_2^e} a \frac{d(u_1^e \psi_1^e + u_2^e \psi_2^e)}{dx} \frac{d\psi_1^e}{dx} dx = \int_{x_1^e}^{x_2^e} f \psi_1^e dx + Q_1^e \underbrace{\psi_1^e(x_1^e)}_{=1} + Q_2^e \underbrace{\psi_1^e(x_2^e)}_{=0}. \quad (4.24)$$

V hraničných členoch na pravej strane využijeme vlastnosti aproximačných funkcií (pozri Poznámku 4.5) a na ľavej strane rozderivujeme približné riešenie

$$\int_{x_1^e}^{x_2^e} a \left(u_1^e \frac{d\psi_1^e}{dx} + u_2^e \frac{d\psi_2^e}{dx} \right) \frac{d\psi_1^e}{dx} dx = \int_{x_1^e}^{x_2^e} f \psi_1^e dx + Q_1^e.$$

Nakoniec ľavú stranu rozdelíme na súčet dvoch integrálov a dostaneme *prvú elementovú rovnicu*

$$u_1^e \underbrace{\int_{x_1^e}^{x_2^e} a \frac{d\psi_1^e}{dx} \frac{d\psi_1^e}{dx} dx}_{K_{11}^e} + u_2^e \underbrace{\int_{x_1^e}^{x_2^e} a \frac{d\psi_2^e}{dx} \frac{d\psi_1^e}{dx} dx}_{K_{12}^e} = \underbrace{\int_{x_1^e}^{x_2^e} f \psi_1^e dx}_{f_1^e} + Q_1^e.$$

Druhá elementová rovnica. Analogicky postupujeme pre $w = \psi_2^e$, po dosadení máme

$$\int_{x_1^e}^{x_2^e} a \frac{d(u_1^e \psi_1^e + u_2^e \psi_2^e)}{dx} \frac{d\psi_2^e}{dx} dx = \int_{x_1^e}^{x_2^e} f \psi_2^e dx + Q_1^e \underbrace{\psi_2^e(x_1^e)}_{=0} + Q_2^e \underbrace{\psi_2^e(x_2^e)}_{=1}. \quad (4.25)$$

V hraničných členoch opäť dosadíme uzlové hodnoty aproximačných funkcií a ľavú stranu rozdelíme na dva integrály. *Druhá elementová rovnica* vychádza

$$u_1^e \underbrace{\int_{x_1^e}^{x_2^e} a \frac{d\psi_1^e}{dx} \frac{d\psi_2^e}{dx} dx}_{K_{21}^e} + u_2^e \underbrace{\int_{x_1^e}^{x_2^e} a \frac{d\psi_2^e}{dx} \frac{d\psi_2^e}{dx} dx}_{K_{22}^e} = \underbrace{\int_{x_1^e}^{x_2^e} f \psi_2^e dx}_{f_2^e} + Q_2^e.$$

Sústava rovníc na elemente. Na elemente $\Omega^e = [x_1^e, x_2^e]$ sme získali sústavu rovníc

$$\begin{aligned} K_{11}^e u_1^e + K_{12}^e u_2^e &= f_1^e + Q_1^e, \\ K_{21}^e u_1^e + K_{22}^e u_2^e &= f_2^e + Q_2^e, \end{aligned} \quad (4.26)$$

kde používame označenia

$$K_{ij}^e := \int_{x_1^e}^{x_2^e} a \frac{d\psi_j^e}{dx} \frac{d\psi_i^e}{dx} dx, \quad f_i^e := \int_{x_1^e}^{x_2^e} f \psi_i^e dx. \quad (4.27)$$

Sústavu (4.26) môžeme zapísať v maticovom tvare

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e \end{bmatrix}}_{K^e} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{bmatrix}}_{u^e} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1^e \\ f_2^e \end{bmatrix}}_{f^e} + \underbrace{\begin{bmatrix} Q_1^e \\ Q_2^e \end{bmatrix}}_{Q^e}. \quad (4.28)$$

Matica K^e sa nazýva *elementová matica tuhosti*,⁶ u^e je stĺpec primárnych neznámych, f^e je *elementová pravá strana* a Q^e sú hraničné členy. Všimnime si, že matica tuhosti je *symetrická* matica (čiže $K_{ij}^e = K_{ji}^e$).

Poznámka 4.9 (Počet neznámych a rovníc). V sústave (4.26) máme 4 neznáme u_1^e, u_2^e a Q_1^e, Q_2^e . Dohromady na všetkých elementoch $\Omega^1, \dots, \Omega^N$ máme $4N$ neznámych a len $2N$ rovníc, takúto sústavu teda zatiaľ nevieme jednoznačne riešiť.

Príklad 4.10 (Elementová sústava rovníc pre $a \equiv \text{konšt.}$, $f \equiv \text{konšt.}$). Nájdime elementovú sústavu rovníc pre lineárny element v prípade, že funkcie $a(x)$ a $f(x)$ sú konštantné na elemente Ω^e , čiže $a \equiv a_e = \text{konšt.}$ a $f \equiv f_e = \text{konšt.}$ Na výpočet prvkov K_{ij}^e matice tuhosti potrebujeme derivácie aproximačných funkcií (4.14). Vychádza $\frac{d\psi_1^e}{dx} = -\frac{1}{h^e}$ a $\frac{d\psi_2^e}{dx} = \frac{1}{h^e}$. Prvky matice tuhosti teda sú

$$\begin{aligned} K_{11}^e &= \int_{x_1^e}^{x_2^e} a \frac{d\psi_1^e}{dx} \frac{d\psi_1^e}{dx} dx = \int_{x_1^e}^{x_2^e} a_e \left(-\frac{1}{h^e}\right) \left(-\frac{1}{h^e}\right) dx = \frac{a_e}{(h^e)^2} \underbrace{\int_{x_1^e}^{x_2^e} dx}_{h^e} = \frac{a_e}{h^e}, \\ K_{12}^e &= \int_{x_1^e}^{x_2^e} a \frac{d\psi_2^e}{dx} \frac{d\psi_1^e}{dx} dx = \int_{x_1^e}^{x_2^e} a_e \left(\frac{1}{h^e}\right) \left(-\frac{1}{h^e}\right) dx = -\frac{a_e}{h^e}, \\ K_{21}^e &= -\frac{a_e}{h^e}, \quad K_{22}^e = \frac{a_e}{h^e}. \end{aligned}$$

Prvky f_i^e elementovej pravej strany vychádzajú

$$f_1^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} f_e \psi_1^e dx = f_e \underbrace{\int_{x_1^e}^{x_2^e} \psi_1^e dx}_{h^e/2} = \frac{f_e h^e}{2}, \quad f_2^e = \frac{f_e h^e}{2},$$

pričom hodnotu integrálu $\int_{x_1^e}^{x_2^e} \psi_1^e dx$ môžeme jednoducho vypočítať ako obsah plochy pod krivkou $\psi_1^e(x)$ na Obr. 4.4, čiže plochu pravouhlého trojuholníka s podstavou h^e a výškou 1, čo je $h^e/2$. Elementová matica tuhosti K^e a pravá strana f^e majú teda tvar

$$K^e = \frac{a_e}{h^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad f^e = \frac{f_e h^e}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

⁶Názov je historicky odvodený od toho, že pri pozdĺžnych deformáciách prútov reprezentuje materiálová charakteristika $a(x)$ osovú tuhosť (pozri sekciu 2.5 a Tabuľku 4.1).

a elementová sústava rovníc (4.28) má v tomto špeciálnom prípade podobu

$$\frac{a_e}{h^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{bmatrix} = \frac{f_e h^e}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1^e \\ Q_2^e \end{bmatrix}.$$

Poznámka 4.11 (Matica tuhosti a pravá strana v ANSYS). V softvéri ANSYS sa pre 1D vedenie tepla používa element LINK33. Diferenciálna rovnica (4.1) sa v označení, ktoré používa ANSYS, zapisuje ako

$$-\frac{d}{dx} \left(AK_x \frac{du}{dx} \right) = A \ddot{q},$$

pričom $K_x = \lambda$ je koeficient tepelnej vodivosti a $\ddot{q} = f$ je intenzita zdrojov tepla a A je prierezová plocha (ktorú my uvažujeme konštantnú), veľkosť elementu sa označuje ako $L = h^e$. Ak si otvoríme ponuku Help ku elementu LINK33, nájdeme tam elementovú maticu a pravú stranu v tvare

$$[K_e^t] = \frac{AK_x}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \{Q_e\} = \frac{\ddot{q} AL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

čo presne zodpovedá vzťahom (4.29). Pre pozdĺžne deformácie prúta sa v softvéri ANSYS používa element LINK180, ktorý má analogické elementové matice a pravé strany. V ANSYS-e je LINK180 implementovaný ako 3D prúťový element. Ak ho orientujeme v smere osi x a pomocou okrajových podmienok zafixujeme posuny v smere osi y a z , tak presne zodpovedá modelu z tejto učebnice.

Kvadratický element

Slabú formuláciu (4.8) najprv prepíšeme do označení pre kvadratické elementy

$$\int_{x_1^e}^{x_3^e} a \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dx = \int_{x_1^e}^{x_3^e} f w dx + Q_1^e w(x_1^e) + Q_3^e w(x_3^e).$$

Za funkciu $u(x)$ dosadíme približné riešenie na elemente (4.16) a za váhovú funkciu $w(x)$ postupne dosádzame aproximačné funkcie $\psi_1^e(x)$, $\psi_2^e(x)$ a $\psi_3^e(x)$. Prvá elementová rovnica má tvar (integrál na ľavej strane tentokrát rozdelíme na 3 integrály)

$$u_1^e \underbrace{\int_{x_1^e}^{x_3^e} a \frac{d\psi_1^e}{dx} \frac{d\psi_1^e}{dx} dx}_{K_{11}^e} + u_2^e \underbrace{\int_{x_1^e}^{x_3^e} a \frac{d\psi_2^e}{dx} \frac{d\psi_1^e}{dx} dx}_{K_{12}^e} + u_3^e \underbrace{\int_{x_1^e}^{x_3^e} a \frac{d\psi_3^e}{dx} \frac{d\psi_1^e}{dx} dx}_{K_{13}^e} = \int_{x_1^e}^{x_3^e} f \psi_1^e dx + Q_1^e \underbrace{\psi_1^e(x_1^e)}_{=1} + Q_3^e \underbrace{\psi_1^e(x_3^e)}_{=0}.$$

V hraničných členoch využívame vlastnosti aproximačných funkcií (pozri komentár pod vzťahmi (4.17)). Druhá a tretia elementová rovnica vyzerajú takto

$$\begin{aligned} K_{21}^e u_1^e + K_{22}^e u_2^e + K_{23}^e u_3^e &= f_2^e + Q_1^e \underbrace{\psi_2^e(x_1^e)}_{=0} + Q_3^e \underbrace{\psi_2^e(x_3^e)}_{=0}, \\ K_{31}^e u_1^e + K_{32}^e u_2^e + K_{33}^e u_3^e &= f_3^e + Q_1^e \underbrace{\psi_3^e(x_1^e)}_{=0} + Q_3^e \underbrace{\psi_3^e(x_3^e)}_{=1}, \end{aligned}$$

pričom používame označenia

$$K_{ij}^e := \int_{x_1^e}^{x_3^e} a \frac{d\psi_j^e}{dx} \frac{d\psi_i^e}{dx} dx, \quad f_i^e := \int_{x_1^e}^{x_3^e} f \psi_i^e dx. \quad (4.30)$$

Sústavu rovníc na elemente Ω^e môžeme zapísať v maticovom tvare

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & K_{13}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e & K_{23}^e \\ K_{31}^e & K_{32}^e & K_{33}^e \end{bmatrix}}_{K^e} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \end{bmatrix}}_{u^e} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1^e \\ f_2^e \\ f_3^e \end{bmatrix}}_{f^e} + \underbrace{\begin{bmatrix} Q_1^e \\ 0 \\ Q_3^e \end{bmatrix}}_{Q^e}. \quad (4.31)$$

Poznámka 4.12 (Počet neznámych a rovníc). V sústave (4.31) máme 5 neznámych u_1^e, u_2^e, u_3^e a Q_1^e, Q_3^e . Dohromady na všetkých N elementoch máme $5N$ neznámych, ale len $3N$ rovníc.

Príklad 4.13 (Elementová matica tuhosti a pravá strana pre $a \equiv \text{konšt.}$, $f \equiv \text{konšt.}$). V prípade, že funkcie $a(x)$ a $f(x)$ sú konštantné na elemente Ω^e , čiže $a \equiv a_e = \text{konšt.}$, $f \equiv f_e = \text{konšt.}$, a uzlový bod x_2^e je presne v strede elementu, vyjde matica tuhosti K^e a pravá strana f^e takto (čitateľ si to môže overiť podobne, ako sme to robili v Príklade 4.10)

$$K^e = \frac{a_e}{3h^e} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}, \quad f^e = \frac{f_e h^e}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

Všimnime si, že súčet prvkov v každom riadku (aj stĺpci) matice K^e je 0. Toto vďaka Vete 4.7 platí úplne vo všeobecnosti (napríklad aj v (4.29)), čiže

$$\sum_{j=1}^{s+1} K_{ij}^e = \sum_{j=1}^{s+1} \int_{x_A^e}^{x_B^e} a \frac{d\psi_j^e}{dx} \frac{d\psi_i^e}{dx} dx = \int_{x_A^e}^{x_B^e} a \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{s+1} \frac{d\psi_j^e}{dx} \right)}_{=0} \frac{d\psi_i^e}{dx} dx = 0.$$

Poznámka 4.14 (Element ľubovoľného stupňa). Vo všeobecnosti pre element stupňa s do slabšej formulácie (4.8) dosádzame za $u(x)$ približné riešenie na elemente (4.19) a za váhovú funkciu $w(x)$ postupne $s+1$ aproximačných funkcií (4.20). Elementová sústava obsahuje $s+1$ rovníc a $s+3$ neznámych $u_1^e, \dots, u_{s+1}^e, Q_1^e, Q_{s+1}^e$.

Úloha 4.15 (Elementové matice a pravé strany, $h^e = 1$ | cv04, MKP, el.mat. a p.strany, 1 element.nb). Majme element stupňa s , ktorého koncové body sú $x_A^e = 0, x_B^e = 1$. Zostrojte elementovú maticu K^e a pravú stranu f^e pre $a(x) \equiv 1$ a $f(x) \equiv 1$. Výsledok pre $s = 1, 2$ porovnajte so vzťahmi (4.29) a (4.32). Použite aproximačné funkcie v Lagrangeovom tvare (4.20) z Úlohy 4.8.

Úloha 4.16 (Elementové matice a pravé strany, N elementov | cv04, MKP, el. matice a p. strany.nb). Majme okrajovú úlohu

$$-\frac{d}{dx} \left((1+x) \frac{du}{dx} \right) = -18x^2, \quad x \in (0, 1), \quad (4.33)$$

$$u(0) = 1, \quad u'(1) = 0,$$

čiže v tomto prípade $a(x) = 1+x$ a $f(x) = -18x^2$. Túto okrajovú úlohu sme riešili aj analyticky (pozri Úlohu 3.5) a presné riešenie nám vyšlo v tvare (3.16). Na vytvorenie elementových

matíc a pravých strán postupne urobte nasledujúce kroky.

1. Výpočtovú oblasť $[0, 1]$ rovnomerne rozdeľte na N elementov stupňa s , definujte ich koncové body x_A^e, x_B^e a uzlové body x_i^e pre všetky $i = 1, \dots, s+1$ a pre $e = 1, \dots, N$.
2. Zostrojte aproximačné funkcie ψ_i^e pomocou Lagrangeovho tvaru (4.20).
3. Podľa vzťahov (4.27), (4.30) skonštruujte pre všeobecné s elementové matice tuhosti K^e a pravé strany f^e , pre $e = 1, \dots, N$.

Najprv zvolte $a(x) \equiv 1$ a $f(x) \equiv 1$ a overte, či pre rôzne e dostávate rovnaké matice (pre $s = 1, 2$ ich aj môžete porovnať s (4.29) a (4.32)). Pri riešení môžete využiť súbor `cv04`, `MKP`, `el.matice` a `p.strany`, `1 element.nb` z Úlohy 4.15. Môžete si zo stránky stiahnuť predpripravený súbor `cv05`, `MKP pre 1D vedenie tepla (web).nb` a doplniť doňho potrebné časti.^a

^aPripravená je najmä definícia výpočtovej oblasti, okrajové podmienky, presné riešenie a niekoľko vizualizácií.

4.4 Globálna sústava rovníc

4.4.1 Lineárne elementy

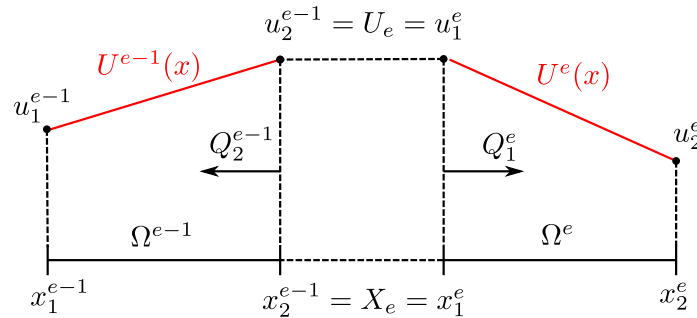
Na spojenie elementových sústav rovníc (4.28) (pre $e = 1, \dots, N$) do globálnej sústavy rovníc využijeme dva princípy

1. *Spojitosť približného riešenia* $U(x)$, čiže primárnej neznámej, na styku elementov (pozri Obr. 4.11).

$$u_2^{e-1} = u_1^e$$

2. *Bilancia tokov* (resp. rovnováha síl), čiže sekundárnych neznámych, na styku elementov

$$Q_2^{e-1} + Q_1^e = 0 \quad (\text{resp. } Q_2^{e-1} = -Q_1^e) \quad (4.34)$$



Obr. 4.11. Styk elementov Ω^{e-1} a Ω^e .

Poznámka 4.17 (Interpretácia bilancie tokov). Bilanciu tokov (4.34) nemôžeme interpretovať ako spojitosť funkcie $a \frac{dU}{dx}$, kde $U(x)$ je približné riešenie. (Pri lineárnych elementoch ani nie je možné vo všeobecnosti dosiahnuť spojitosť prvej derivácie.) Bilanciu môžeme interpretovať ako aproximáciu spojitosti funkcie $a \frac{du}{dx}$, kde $u(x)$ je presné riešenie, čiže

$$\left(a \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x_2^{e-1}} + \left(-a \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x_1^e} = 0.$$

Spojitosť riešenia zabezpečíme zavedením *globálneho číslovania* uzlových bodov a neznámych. Namiesto pôvodných lokálnych označení uzlových bodov x_1^e, x_2^e , $e = 1, \dots, N$ a neznámych u_1^e, u_2^e , $e = 1, \dots, N$ budeme používať globálne číslovanie uzlových bodov (4.21) a globálne číslovanie primárnych neznámych

$$U_1 = u_1^1, \quad U_2 = u_2^1 = u_1^2, \dots \quad U_e = u_2^{e-1} = u_1^e, \dots \quad U_N = u_2^{N-1} = u_1^N, \quad U_{N+1} = u_2^N. \quad (4.35)$$

Bilanciu tokov zabezpečíme sčítaním vhodných elementových rovníc tak, aby sme na pravej strane mohli využiť rovnicu (4.34). Napíšme si sústavy rovníc pre elementy Ω^{e-1} a Ω^e .

$$\begin{aligned} \Omega^{e-1} : \quad & \begin{aligned} K_{11}^{e-1} u_1^{e-1} + K_{12}^{e-1} u_2^{e-1} &= f_1^{e-1} + Q_1^{e-1}, \\ K_{21}^{e-1} u_1^{e-1} + K_{22}^{e-1} u_2^{e-1} &= f_2^{e-1} + Q_2^{e-1}, \end{aligned} \\ \Omega^e : \quad & \begin{aligned} K_{11}^e u_1^e + K_{12}^e u_2^e &= f_1^e + Q_1^e, \\ K_{21}^e u_1^e + K_{22}^e u_2^e &= f_2^e + Q_2^e. \end{aligned} \end{aligned}$$

Tok Q_2^{e-1} sa nachádza v druhej rovnici na elemente Ω^{e-1} a tok Q_1^e je v prvej rovnici na elemente Ω^e . Sčítaním týchto rovníc dostaneme

$$\begin{array}{ccccccc} K_{21}^{e-1} u_1^{e-1} + K_{22}^{e-1} u_2^{e-1} + K_{11}^e u_1^e + K_{12}^e u_2^e & = & f_2^{e-1} + f_1^e + \underbrace{Q_2^{e-1} + Q_1^e}_{=0} \\ \parallel & & & & & & \\ U_{e-1} & & U_e & & U_e & & U_{e+1} \end{array}$$

kde využijeme bilanciu tokov (4.34) a po prepise do globálneho číslovania neznámych máme

$$K_{21}^{e-1} U_{e-1} + (K_{22}^{e-1} + K_{11}^e) U_e + K_{12}^e U_{e+1} = f_2^{e-1} + f_1^e.$$

Toto sčítanie urobíme pre všetkých $N - 1$ bilancií tokov na $N - 1$ stykoch elementov. Prvá rovnica prvého elementu a druhá rovnica posledného elementu zostanú nezmenené. *Globálny systém rovníc* môžeme zapísať v maticovom tvare

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & \dots & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 + K_{11}^3 & & & \vdots \\ \vdots & 0 & & \ddots & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & K_{21}^{N-1} + K_{11}^N & K_{12}^N & K_{22}^N \end{bmatrix}}_K \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_N \\ U_{N+1} \end{bmatrix}}_U = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1^1 + Q_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 + f_1^3 \\ \vdots \\ f_2^{N-1} + f_1^N \\ f_2^N + Q_2^N \end{bmatrix}}_F \quad (4.36)$$

kde K je globálna matica tuhosti, U je vektor globálnych uzlových neznámych a F je globálna pravá strana. Matica K je symetrická a má iba 3 nenulové diagonály.

Poznámka 4.18 (Počet neznámych a rovníc). Sústava (4.36) obsahuje $N + 1$ rovníc a máme v nej $N + 3$ neznámych $U_1, \dots, U_{N+1}$ a Q_1^1, Q_2^N (porovnaj s Poznámkou 4.9). Máme teda 2 neznáme navyše. Máme k dispozícii ešte 2 rovnice z okrajových podmienok (4.3) (resp. (4.4) vo všeobecnosti), ktoré využijeme v sústave a získame sústavu $N + 1$ rovníc s $N + 1$ neznámymi (pozri sekciu 4.5).

Príklad 4.19 (Globálna sústava rovníc v špeciálnom prípade). Nájdime globálnu sústavu rovníc pre lineárne elementy v prípade, že funkcia $a(x)$ sa rovná jednej (konštantná) na celej výpočtovej oblasti $\Omega = (0, 1)$, čiže $a(x) \equiv 1$; pravá strana $f(x)$ je konštantná na každom elemente Ω^e , čiže $f(x) \equiv f_e = \text{konšt.}$ pre $x \in \Omega^e$; a navyše máme rovnomernú sieť, čiže

$h^e = h = \text{konšt.}$ Podľa Príkladu 4.10 máme elementové matice a pravé strany v tvare

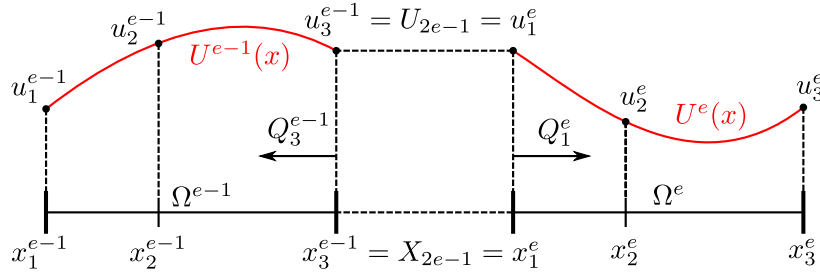
$$K^e = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad f^e = \frac{f_e h}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Globálna sústava rovníc (4.36) bude teda vyzeráť takto

$$\frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & & & \\ \vdots & 0 & & \ddots & & \\ & & & & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_N \\ U_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}f_1 h + Q_1^1 \\ \frac{1}{2}(f_1 + f_2)h \\ \frac{1}{2}(f_2 + f_3)h \\ \vdots \\ \frac{1}{2}(f_{N-1} + f_N)h \\ \frac{1}{2}f_N h + Q_2^N \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

4.4.2 Kvadratické elementy

Na spojenie elementových sústav rovníc (4.31) ($e = 1, \dots, N$) do globálnej sústavy rovníc využijeme znova spojitost približného riešenia $U(x)$, čiže $u_3^{e-1} = u_1^e$ a bilanciú tokov na styku elementov, čiže $Q_3^{e-1} + Q_1^e = 0$ (pozri Obr. 4.12). Sčítavať sa teda bude 3. rovnica na elemente Ω^{e-1} s 1.



Obr. 4.12. Spojenie elementov Ω^{e-1} a Ω^e .

rovniciou na elemente Ω^e . V globálnom číslovaní budeme mať $2N + 1$ uzlových hodnôt približného riešenia $U_1 = u_1^1, U_2 = u_2^1, U_3 = u_3^1 = u_1^2, \dots, U_{2N-1} = u_3^{N-1} = u_1^N, U_{2N} = u_2^N, U_{2N+1} = u_3^N$. Globálny systém rovníc bude mať tvar

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & 0 & \cdots & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & K_{13}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 & K_{23}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 + K_{11}^3 & K_{12}^3 & & \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & K_{21}^3 & K_{22}^3 & & \\ & & \vdots & \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & K_{33}^N \end{bmatrix}}_K \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{2N+1} \end{bmatrix}}_U = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1^1 + Q_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 + f_1^2 \\ f_2^2 \\ \vdots \\ f_2^N \\ f_3^N + Q_3^N \end{bmatrix}}_F \quad (4.38)$$

Poznámka 4.20 (Počet neznámych a rovníc). V sústave (4.38) máme $2N + 1$ rovníc a $2N + 3$ neznámych $U_1, \dots, U_{2N+1}$ a Q_1^1, Q_3^N (porovnaj s Poznámkou 4.12). Máme teda opäť 2 neznáme navyše a jednoznačne riešiteľný systém získame využitím 2 rovníc z okrajových podmienok (4.3) (resp. (4.4)).

Poznámka 4.21 (Elementy ľubovoľného stupňa). Vo všeobecnosti pre elementy stupňa s využijeme spojitost približného riešenia, čiže $u_{s+1}^{e-1} = u_1^e$ a bilanciú tokov $Q_{s+1}^{e-1} + Q_1^e = 0$, takže opäť sa sčítava posledná rovnica na elemente Ω^{e-1} s 1. rovnicou na elemente Ω^e . Celkovo budeme mať $n = sN + 1$ globálnych uzlových bodov (aj primárnych neznámych). V globálnej sústave bude $sN + 3$ neznámych $U_1, \dots, U_{sN+1}$, Q_1^1, Q_{s+1}^N a $sN + 1$ rovníc.

Poznámka 4.22 (Sčítavanie viacerých rovníc). V niektorých aplikáciách (napríklad pri pozdĺžnych deformáciách prútov) sa môžu v jednom uzlovom bode spájať viaceré elementy, vtedy má bilancia tokov (resp. síl) zložitejší tvar a sčítavajú sa viac než len 2 rovnice.

Úloha 4.23 (Globálna matica a pravá strana | cv05, MKP pre 1D vedenie tepla.nb). Do vášho programu cv04, MKP, el.matrice a p.strany.nb (Úloha 4.16) na riešenie okrajovej úlohy (4.33) doprogramujte konštrukciu globálnej matice tuhosti K a pravej strany F . Najprv vytvorte nulovú maticu (resp. vektor) správnej veľkosti. Potom do nej na správne miesta pripočítavajte elementové matice K^e (resp. pravé strany f^e). Netreba to robiť cez 3 cykly (cez e, i a j), dá sa to urobiť elegantnejšie pripočítavaním celých matíc. Ak chceme napríklad pripočítať celú 3×3 maticu B na riadky 3 až 5 a stĺpce 2 až 4 väčšej matice A , dá sa to urobiť takto: $A[[3;;5,2;;4]] += B$.

4.5 Využitie okrajových podmienok pre lineárne elementy

Využitie okrajových podmienok budeme ilustrovať na MKP s *lineárnymi elementami*. V prípade použitia elementov vyššieho stupňa využijeme okrajové podmienky úplne analogicky.

Vo všeobecnosti máme pre úlohu (4.1) zadané okrajové podmienky v tvare (4.4). Najprv okrajové podmienky prepíšme do reči našich neznámych, čiže v ľavej okrajovej podmienke využijeme $U_1 = u(0)$, $Q_1^1 = \left(-a(x) \frac{du}{dx}\right) \Big|_{x=0}$ a v pravej $U_{N+1} = u(L)$, $Q_2^N = \left(a(x) \frac{du}{dx}\right) \Big|_{x=L}$.

$$\begin{aligned} \alpha_1 u(0) + \beta_1 \left(-a(x) \frac{du}{dx}\right) \Big|_{x=0} &= g_1, & \alpha_1 U_1 + \beta_1 Q_1^1 &= g_1, \\ \alpha_2 u(L) + \beta_2 \left(a(x) \frac{du}{dx}\right) \Big|_{x=L} &= g_2, & \alpha_2 U_{N+1} + \beta_2 Q_2^N &= g_2. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Dirichletovu okrajovú podmienku, ktorá nastáva v prípade $\beta_1 = 0$ (resp. $\beta_2 = 0$), v systéme (4.36) využijeme tak, že namiesto prvej (resp. poslednej) rovnice napíšeme rovnicu $\alpha_1 U_1 = g_1$ (resp. $\alpha_2 U_{N+1} = g_2$). V maticovom zápise sa to v prvom (resp. poslednom) riadku prejaví takto

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ U_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ g_2 \end{bmatrix}.$$

V prípade *Neumannovej* a *Newtonovej* okrajovej podmienky, čiže ak $\beta_1 \neq 0$ (resp. $\beta_2 \neq 0$), si vyjadríme zo vzťahov (4.39) neznámu Q_1^1 (resp. Q_2^N), čiže

$$Q_1^1 = \frac{g_1 - \alpha_1 U_1}{\beta_1}, \quad \text{resp.} \quad Q_2^N = \frac{g_2 - \alpha_2 U_{N+1}}{\beta_2}, \quad (4.40)$$

dosadíme do pravej strany prvej (resp. poslednej) rovnice v sústave (4.36) a člen s neznámou U_1 (resp. s U_{N+1}) prehodíme na ľavú stranu. V maticovom zápise sústavy sa to v prvom (resp.

poslednom) riadku prejaví takto

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 + \frac{\alpha_1}{\beta_1} & K_{12}^1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 + \frac{g_1}{\beta_1} \\ \vdots \end{bmatrix}, \text{ resp. } \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & 0 & K_{21}^N & K_{22}^N + \frac{\alpha_2}{\beta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ U_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ f_2^N + \frac{g_2}{\beta_2} \end{bmatrix}.$$

Využitím okrajových podmienok sme získali sústavu $N+1$ lineárnych rovníc s $N+1$ neznámymi $U_1, \dots, U_{N+1}$, ktorú môžeme jednoznačne riešiť.

Poznámka 4.24 (Nulový Neumann). V prípade nulovej Neumannovej podmienky máme $\alpha_i = 0$, $g_i = 0$, takže príslušné Q vyjde nulové. Preto v takom prípade v globálnom systéme netreba robiť žiadnu úpravu. V softvéri ANSYS a iných konečnoprvkových softvéroch sa zrejme aj preto používa nulová Neumannova podmienka ako automatické (default) nastavenie. Pozri aj poznámku pod čiarou číslo 7 na strane 12.

Príklad 4.25 (Globálna sústava rovníc v špeciálnom prípade). Majme okrajovú úlohu

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 u}{dx^2} &= f(x), & x \in (0, 1), \\ u(0) &= 0, & u(1) = 1, \end{aligned} \quad (4.41)$$

kde funkcia $f(x)$ je konštantná na každom elemente. V Prípade 4.19 sme napísali globálnu sústavu rovníc pre túto úlohu. Dirichletove okrajové podmienky $u(0) = 0, u(1) = 1$ vo všeobecnom značení (4.39) zodpovedajú $\alpha_1 = 1, \beta_1 = 0, g_1 = 0$ a $\alpha_2 = 1, \beta_2 = 0, g_2 = 1$. Po vynásobení sústavy (4.37) veľkosťou elementu h a využití okrajových podmienok má sústava podobu

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & & & \vdots \\ \vdots & 0 & & \ddots & & 0 \\ & & & & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_N \\ U_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}(f_1 + f_2)h^2 \\ \frac{1}{2}(f_2 + f_3)h^2 \\ \vdots \\ \frac{1}{2}(f_{N-1} + f_N)h^2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Poznámka 4.26 (Súvis MKP a MKD). Úlohu (4.41) sme vlastne už riešili v Prípade 3.2 metódou konečných diferencií a vyšla nám sústava (3.12). V nej ale na pravej strane vystupujú hodnoty $f(x)$ v uzlových bodoch, kde je ale tunajšia špeciálna funkcia $f(x)$ nespojitá (na susedných elementoch to môže byť rôzna konštanta). Rozumná aproximácia v uzlových bodoch je priemer $f(X_e) = \frac{1}{2}(f_{e-1} + f_e)$, ktorý môžeme podosádzať do pravej strany (3.12) a po zosúladení značenia ($x_i \leftrightarrow X_I$, $u_i \leftrightarrow U_I$) zistíme, že je to úplne rovnaká sústava, ako nám vyšla tu. Čitateľ si možno hovorí: „Tak počkať, načo sa trápime s celým MKP, keď nám nakoniec aj tak vyjde obyčajná metóda konečných diferencií?“. Treba si ale uvedomiť, že tu sme skúmali len veľmi špeciálny prípad (konštantné $a(x)$, Dirichletove OP, rovnomerná sieť, lineárne elementy,...). MKP umožňuje veľmi prirodzene používať napríklad aj *nerovnomerné siete*, či *vyšší stupeň aproximácie riešenia* na elemente. MKP sa teda v istom zmysle dá chápať ako zovšeobecnenie metódy konečných diferencií.

Úloha 4.27 (Využitie okrajových podmienok | cv05, MKP pre 1D vedenie tepla.nb). Do programu cv05, MKP pre 1D vedenie tepla.nb (Úloha 4.23) pre riešenie okrajovej úlohy

(4.33) doplňte využitie okrajových podmienok (4.39). Pri implementácii ľavej aj pravej okrajovej podmienky treba rozlíšiť, či β_i je alebo nie je nulové a podľa toho upraviť maticu K a vektor pravej strany F .

V prípade úlohy (4.33) treba nastaviť v bode $x = 0$ Dirichletovu okrajovú podmienku ako $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$, $g_1 = 1$ a v bode $x = 1$ Neumannovu okrajovú podmienku ako $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 1$, $g_2 = 0$.

4.6 Riešenie globálneho systému rovníc a konštrukcia približného riešenia

Na riešenie globálneho systému rovníc je potrebné zvoliť vhodnú metódu. Jedna možnosť je použiť *priame metódy*, napr. Gaussovu elimináciu⁷ alebo v prípade lineárnych elementov môžeme použiť Thomasov algoritmus⁸. Druhou možnosťou sú *iteračné (približné) metódy*, napr. Gaussova-Seidelova metóda, SOR alebo BiCGStab.⁹

Konštrukciu približného riešenia opíšeme *pre lineárne elementy*. Pre elementy vyššieho stupňa postupujeme úplne analogicky. Vyriešením globálneho systému rovníc (4.36) získame uzlové neznáme v globálnom číslovaní, čiže $U_1, \dots, U_{N+1}$. Na to, aby sme vedeli skonštruovať približné riešenie $U^e(x) = u_1^e \psi_1^e(x) + u_2^e \psi_2^e(x)$ na elementoch Ω^e , $e = 1, \dots, N$, potrebujeme pomocou (4.35) priradiť hodnoty elementovým neznámymi u_1^e, u_2^e , $e = 1, \dots, N$. Celkové približné (numerické) riešenie $U(x)$, $x \in [0, L]$ rovnice (4.1) s okrajovými podmienkami (4.4) získané metódou konečných prvkov s lineárnymi elementami je

$$U(x) = \begin{cases} \begin{array}{cc} U_1 & U_2 \\ \parallel & \parallel \\ U^1(x) = u_1^1 \psi_1^1(x) + u_2^1 \psi_2^1(x), & x \in \Omega^1, \\ U^2(x) = u_1^2 \psi_1^2(x) + u_2^2 \psi_2^2(x), & x \in \Omega^2, \\ \parallel & \parallel \\ U_2 & U_3 \\ \vdots & \\ U^N(x) = u_1^N \psi_1^N(x) + u_2^N \psi_2^N(x), & x \in \Omega^N. \\ \parallel & \parallel \\ U_N & U_{N+1} \end{array} \end{cases} \quad (4.42)$$

Poznámka 4.28 (Dopočítanie Q -čok). Dosť často nás pri vyhodnotení výsledkov okrem primárnych neznámych $U_1, \dots, U_{N+1}$ zaujímajú aj sekundárne neznáme Q_1^1 a Q_2^N na hranici výpočtovej oblasti. Môžeme ich po vyriešení globálneho systému (vypočítaní primárnych neznámych) ľahko dopočítať. Vyjadríme Q_1^1 resp. Q_2^N z prvej, resp. poslednej rovnice v systéme (4.36)

$$\begin{aligned} Q_1^1 &= K_1 U - f_1^1, \\ Q_2^N &= K_{N+1} U - f_2^N, \end{aligned}$$

kde K_1 a K_{N+1} označujú prvý a posledný riadok matice K . Ak teda v počítačovej implementácii využitia okrajových podmienok upravujeme maticu K a pravú stranu F , je potrebné si prvý a posledný riadok uložiť.

⁷Nevýhodou je, že pri Gaussovej eliminácii je potrebné pamätať si celú maticu tuhosti K , čo je pri veľkom počte neznámych problém. Navyše, výpočtová zložitosť je n^3 , kde n je počet neznámych.

⁸Stačí do pamäte uložiť len 3 nenulové diagonály. Výpočtová zložitosť je n^1 .

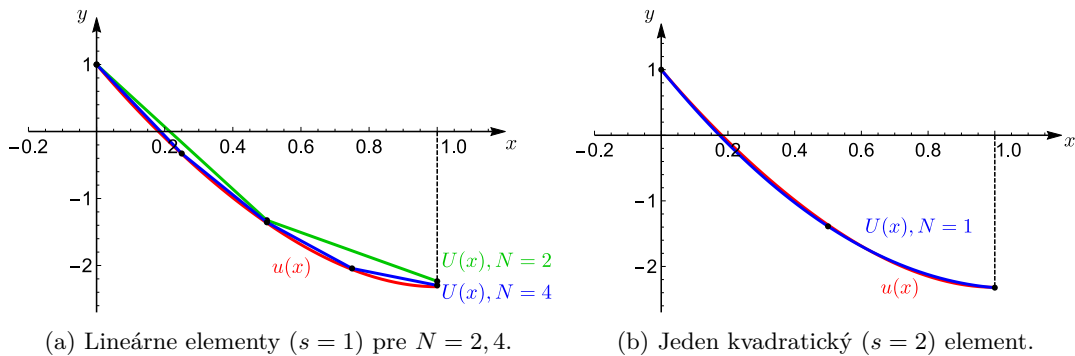
⁹Výhodou týchto metód je, že stačí v pamäti držať len nenulové prvky matice K .

Ak by nás zaujímali všetky Q -čka (aj tie vnútri výpočtovej oblasti), tak si ich môžeme podobným spôsobom vyjadriť z elementových rovníc (4.26). Ak využijeme globálne číslovanie neznámych (4.35), tak okrem Q -čok na pravej strane je všetko známe, čiže sekundárne neznáme Q_1^e a Q_2^e vypočítame ako

$$\begin{aligned} Q_1^e &= K_{11}^e U_e + K_{12}^e U_{e+1} - f_1^e, \\ Q_2^e &= K_{21}^e U_e + K_{22}^e U_{e+1} - f_2^e. \end{aligned}$$

Úloha 4.29 (Riešenie a vizualizácia | cv05, MKP pre 1D vedenie tepla.nb). Otvorte program cv05, MKP pre 1D vedenie tepla.nb (Úloha 4.27) pre riešenie okrajovej úlohy (4.33).

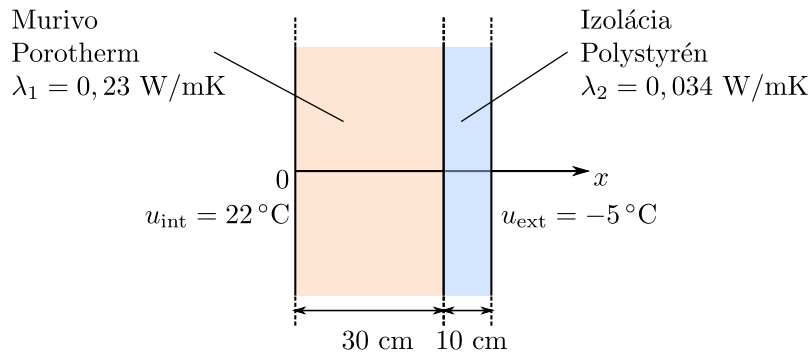
1. Doplňte riešenie systému rovníc (stačí pomocou funkcie `LinearSolve`).
2. Priradte hodnoty elementovým uzlovým neznámym u_i^e pre všetky $i = 1, \dots, s+1$ a pre $e = 1, \dots, N$.
3. Skonstruujte približné riešenia $U^e(x)$ na elementoch podľa vzťahu (4.19).
4. Pomocou funkcie `Piecewise` spojte funkcie $U^e(x)$ do celkového približného riešenia $U(x)$ (pre lineárne elementy má tvar (4.42)).
5. Vykreslite približné riešenie $U(x)$ spolu s presným riešením $u(x)$, ktoré má tvar (3.16). Pre lineárne a kvadratické elementy tieto grafy vidíme na Obr. 4.13. Pri použití kvadratických elementov vychádza už pri jednom elemente približné riešenie, ktoré je vizuálne takmer na nerozoznanie od presného riešenia.



Obr. 4.13. Riešenie okrajovej úlohy (4.33) pomocou MKP.

Poznámka 4.30 (Porovnanie s metódou konečných diferencií). Okrajovú úlohu (4.33) sme už riešili aj pomocou metódy konečných diferencií (pozri Úlohu 3.6). Grafickým porovnaním približných riešení na Obrázkoch 4.13a a 3.4b vidíme, že pri rovnakom počte uzlových bodov dáva MKP presnejšie riešenie.

Úloha 4.31 (Izolovaná stena | cv08, MKP izolovana stena.nb). Pomocou vášho programu cv05, MKP pre 1D vedenie tepla.nb z Úlohy 4.29 nájdite priebeh teploty v izolovanej stene na Obr. 4.14. Murivo je Porotherm s hrúbkou $d_1 = 30$ cm a tepelnou vodivosťou $\lambda_1 = 0.23$ W/mK. Izolácia je extrudovaný polystyrén s hrúbkou $d_2 = 10$ cm a tepelnou vodivosťou $\lambda_2 = 0.034$ W/mK. Teplota v interiéri na povrchu muriva je $u_{\text{int}} = 22^\circ\text{C}$ a teplota v exteriéri na povrchu izolácie je $u_{\text{ext}} = -5^\circ\text{C}$.



Obr. 4.14. Izolovaná stena z Úloh 4.31, 4.32 a 4.33.

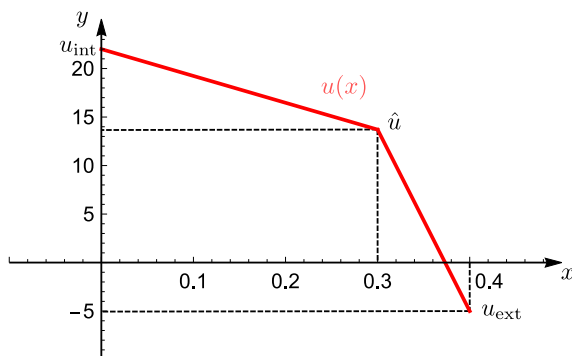
1. Upravte parametre výpočtovej oblasti.
2. Nastavte funkciu $a(x)$ ako

$$a(x) = \lambda(x) = \begin{cases} \lambda_1, & x \in [0, d_1], \\ \lambda_2, & x \in (d_1, d], \end{cases} \quad (4.43)$$

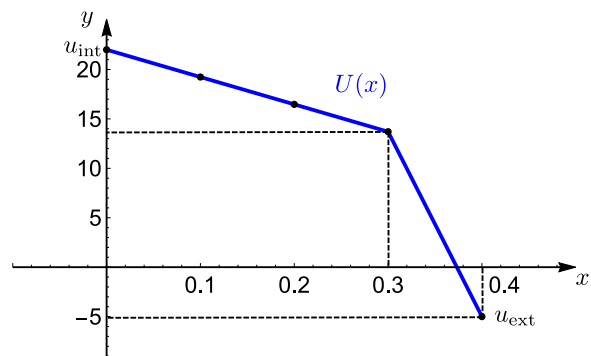
kde $d = d_1 + d_2$.

3. Tepelné zdroje v tomto prípade nemáme, čiže $f(x) \equiv 0$.
4. Nastavte (Dirichletove) okrajové podmienky.
5. Vhodne nastavte počet elementov a stupeň elementu. Tepelná vodivosť je nespojitá a vhodná sieť je preto taká, pri ktorej bod nespojitosti leží na styku elementov.^a Postačujúci stupeň elementu sa dá odhadnúť, keď si odpoviete na otázku: „Aký očakávame priebeh presného riešenia na jednotlivých elementoch?“
6. Vyriešte úlohu a vykreslite MKP riešenie $U(x)$. Riešenie pre 4 lineárne elementy vidíme na Obr. 4.15b.
7. Porozmýšľajte, prečo má riešenie taký priebeh, aký vidíme na Obr. 4.15b, čiže po častiach lineárny s relatívne miernym spádom teploty v stene a prudkým spádom v izolácii.

^aToto je pri tvorbe siete v MKP všeobecne používaná zásada. Bude o nej reč v sekcii 9.1.



(a) Presné riešenie z Úlohy 4.32.



(b) MKP riešenie z Úlohy 4.31.

Obr. 4.15. MKP dáva v niektorých situáciách dokonca presné riešenie.

Úloha 4.32 (Izolovaná stena, presné riešenie). Nájdite presné riešenie $u(x)$ Úlohy 4.31.

Riešenie. Keďže tepelná vodivosť $a(x)$ je nespojitá funkcia (4.43), tak diferenciálna rovnica (4.1) nemá dobrý zmysel ($a(x)$ nie je diferencovateľné v bode $x = d_1$), pozri Poznámku 4.2. Tzv. *klasické riešenie* úlohy teda *neexistuje*. Existuje ale tzv. *slabé riešenie*, ktoré teraz nájdeme.¹⁰

Vyriešme úlohu nasledujúcim postupom. Výpočtovú oblasť $[0, d]$ rozdelíme na podoblasti $[0, d_1]$ a $[d_1, d]$, na ktorých má diferenciálna rovnica (4.1) dobrý zmysel. Celkové riešenie budeme hľadať v tvare

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \in [0, d_1], \\ u_2(x), & x \in (d_1, d]. \end{cases} \quad (4.44)$$

Funkcie $u_1(x)$ a $u_2(x)$ „zošijeme“ v bode $x = d_1$ tak, aby bolo celkové riešenie $u(x)$ spojité a aby v bode $x = d_1$ bol spojitý tepelný tok $q = -a \frac{du}{dx}$, čiže aby platila bilancia tokov (teplo sa nemôže strácať – to, čo pritečie zľava, musí odtiecť doprava). Matematicky zošívanie vyzerá takto:

$$\begin{aligned} \text{Spojitosť riešenia:} \quad & u_1(d_1) = u_2(d_1) =: \hat{u}. \\ \text{Spojitosť toku:} \quad & -\lambda_1 \frac{du_1}{dx} \Big|_{x=d_1} = -\lambda_2 \frac{du_2}{dx} \Big|_{x=d_1}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Nájdime funkcie $u_1(x)$, $u_2(x)$ ktoré sú riešeniami okrajových úloh

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} \left(\lambda_1 \frac{du_1}{dx} \right) &= 0, \quad x \in (d_1, d), & \text{resp.} & & -\frac{d}{dx} \left(\lambda_2 \frac{du_2}{dx} \right) &= 0, \quad x \in (0, d_1), \\ u_1(0) &= u_{\text{int}}, \quad u_1(d_1) = \hat{u}, & & & u_2(d_1) &= \hat{u}, \quad u_2(d) = u_{\text{ext}}. \end{aligned}$$

Musia to teda byť lineárne funkcie (majú mať nulové druhé derivácie) spĺňajúce uvedené Dirichletove okrajové podmienky. Takýmito funkciami sú

$$u_1(x) = u_{\text{int}} + \frac{\hat{u} - u_{\text{int}}}{d_1} x, \quad u_2(x) = \hat{u} + \frac{u_{\text{ext}} - \hat{u}}{d_2} (x - d_1). \quad (4.46)$$

Číslo $\hat{u}$ predstavuje zatiaľ neznámu teplotu v bode $x = d_1$. Zistíme ju využitím spojitosti tokov (4.45), po dosadení našich $u_1(x)$, $u_2(x)$ dostávame podmienku

$$-\lambda_1 \frac{\hat{u} - u_{\text{int}}}{d_1} = -\lambda_2 \frac{u_{\text{ext}} - \hat{u}}{d_2},$$

z ktorej si vyjadríme $\hat{u}$ v tvare

$$\hat{u} = \frac{\frac{\lambda_1}{d_1} u_{\text{int}} + \frac{\lambda_2}{d_2} u_{\text{ext}}}{\frac{\lambda_1}{d_1} + \frac{\lambda_2}{d_2}}, \quad (4.47)$$

čiže $\hat{u}$ je akýsi vážený priemer hodnôt u_{int} a u_{ext} .

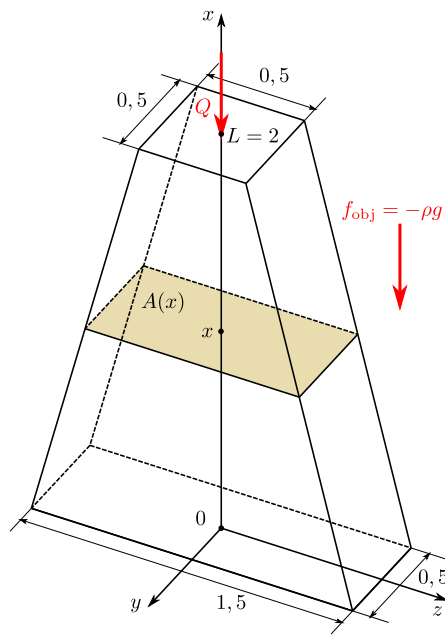
Celkovým presným riešením je teda po častiach definovaná funkcia (4.44), v ktorej $u_1(x)$, $u_2(x)$ majú tvar (4.46) a číslo $\hat{u}$ vypočítame pomocou vzťahu (4.47). Presné riešenie vykresľujeme na Obr 4.15a. ■

Napriek tomu, že MKP je približná metóda, tak v tomto prípade sme pomocou MKP dostali dokonca presné riešenie. Takto úžasne funguje MKP v niektorých špecifických úlohách a viac to rozoberieme v sekcii 6.1.

¹⁰O tom, čo to je slabé a klasické riešenie ešte budeme veľa hovoriť v kapitole 6. V riešení Úlohy 6.16 aj overíme, že tunajšie $u(x)$ je naozaj slabým riešením.

Úloha 4.33 (Izolovaná stena, porovnanie riešení | cv08, MKP izolovana.stena.nb). V programe z Úlohy 4.31 si vykreslite aj presné riešenie $u(x)$ z Úlohy 4.32. O zhodnosti približného a presného riešenia sa presvedčte graficky aj výpočtom ich rozdielu $U(x) - u(x)$ v uzlových bodoch.

Úloha 4.34 (Deformácia piliera mosta | cv08, deformacia.piliera.nb). Začnite z programu cv05, MKP pre 1D vedenie tepla.nb (Úloha 4.29). Upravte program tak, aby riešil nasledujúcu úlohu o deformácii piliera mosta, čiže rovnicu (2.40), čo je vlastne aplikácia matematického modelu (4.1), kde $a(x) = A(x)E(x)$.



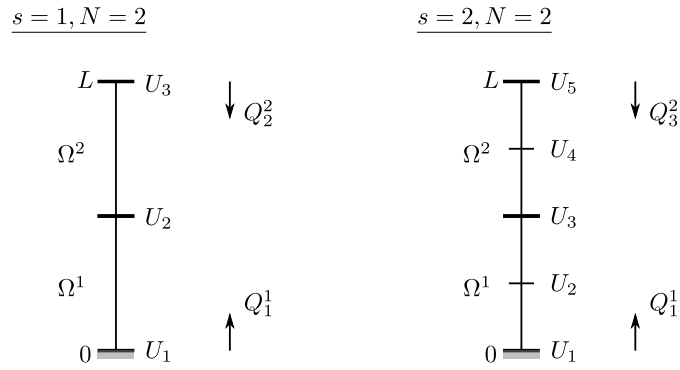
Obr. 4.16. Pilier mosta s premenlivým prierezom $A(x)$. Rozmery sú uvedené v metroch.

Betónový pilier s premenlivým prierezom $A(x)$, ktorého geometria je na Obr. 4.16, stojí na pevnom základe a na jeho hornú stenu pôsobí tlaková sila $Q = -5$ kN (mínus, lebo pôsobí nadol). V matematickej reči tieto okrajové podmienky vyzerajú takto (pozri sekciu 2.5.1)

$$u(0) = 0, \quad \left(A(x)E \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=L} = Q = -5000,$$

čiže v mieste $x = 0$ je zadaná Dirichletova okrajová podmienka a v mieste $x = L$ je Neumanova okrajová podmienka. Okrem tlakovej sily na pilier pôsobí aj gravitačná sila, ktorej hustota je $f_{\text{obj}} = -\rho g$, čiže pravá strana má (podľa sekcie 2.5) tvar $f(x) = f_{\text{obj}}A(x) = -\rho g A(x)$. Použite gravitačné zrýchlenie $g = 10$ kg m/s². Betón má hustotu $\rho = 2500$ kg/m³ a Youngov modul pružnosti $E = 28$ GPa.^a

1. Na základe Obrázka 4.16 napíšte funkciu $A(x)$ pre prierezovú plochu.
2. Nastavte funkcie $a(x)$, $f(x)$, výpočtovú oblasť a okrajové podmienky (4.39) tak, aby zodpovedali tejto úlohe.
3. Vyriešte úlohu pomocou MKP s dvoma elementami ($N = 2$) pre stupeň elementu $s = 1$ a $s = 2$. Použite rovnomerné siete z Obr. 4.17.



Obr. 4.17. Model piliera tvorený sieťou s dvoma elementami. Vľavo lineárne elementy ($s = 1$), vpravo kvadratické elementy ($s = 2$).

4. Vypočítajte hodnoty posunutí vo všetkých uzlových bodoch a reakčné sily v koncových bodoch výpočtovej oblasti (v prípade $s = 1$ sú to Q_1^1, Q_2^2 a pre $s = 2$ sú to Q_1^1, Q_3^2), pozri Poznámku 4.28. Overte rovnováhu síl, čiže to, že reakčná sila Q_1^1 , ktorou základ (podpera) pôsobí na pilier, sa rovná súčtu veľkosti sily pôsobiacej na hornú stenu a celkovej gravitačnej sily (treba si najprv vypočítať objem piliera).
5. Vizualizácia výsledkov (dobrovoľná podúloha): Vykreslite pôvodný aj deformovaný pilier do jedného obrázka podobne, ako to je to na Obr. 4.18. Deformácie sú veľmi malé, preto ich preškálujte tak, aby bolo kvalitatívne vidieť, čo sa deje.

^aPri zadávaní vstupov programu si treba dať pozor na správne jednotky, najistejšie je pracovať v základných jednotkách.

Riešenie. Numerické hodnoty posunutí a reakčných síl vyjdú takto (označenia premenných sú na Obr. 4.17):

$s = 1, \quad N = 2$		$s = 2, \quad N = 2$	
$U_1 = 0 \mu\text{m},$	$Q_1^1 = 30 \text{ kN},$	$U_1 = 0 \mu\text{m},$	$Q_1^1 = 30 \text{ kN},$
$U_2 = -1.2381 \mu\text{m},$		$U_2 = -0.6627 \mu\text{m},$	
$U_3 = -2.1111 \mu\text{m},$	$Q_2^2 = -5 \text{ kN},$	$U_3 = -1.2247 \mu\text{m},$	
		$U_4 = -1.6926 \mu\text{m},$	
		$U_5 = -2.0797 \mu\text{m},$	$Q_3^2 = -5 \text{ kN}.$

Horná stena piliera teda klesne približne o $2 \mu\text{m}$ a základ pôsobí na stĺp silou 30 kN .

V Tabuľke 4.2 ešte vidíme porovnanie uzlových hodnôt posunutí MKP riešení s uzlovými hodnotami presného riešenia, ktoré má tvar $u(x) = \frac{1}{22,4} (5x^2 - 30x + 6 \ln(\frac{x}{3} - 1)) \mu\text{m}$ (môžete overiť). Všimnime si, že MKP riešenie sa spresňuje s rastúcim N . Pre $s = 2$ a $N = 2$ je MKP riešenie už veľmi presné (odchýlky na úrovni 4. desatinného miesta). Zaujímavé je aj porovnanie lineárnych a kvadratických elementov. Pre $s = 1$ a $N = 2$ máme 3 globálne uzlové body, rovnako ako pre $s = 2$, a $N = 1$. Pre $s = 2$ však dostávame presnejšie riešenie. Rovnako dopadne porovnanie prípadov $s = 1, N = 4$ a $s = 2, N = 2$, v ktorých máme 5 uzlových bodov. MKP riešenie je pre $s = 2$ opäť presnejšie.

Z porovnania uzlových hodnôt sme získali istú predstavu o presnosti našich MKP riešení. Presnosť MKP riešenia a jeho konvergenciu k presnému riešeniu budeme detailnejšie skúmať v kapitole 6. ■

Tabuľka 4.2. Porovnanie absolútnych hodnôt posunutí v mikrometroch. Uvádzame hodnoty presného riešenia (zaokrúhleného na 4 desatinné miesta) a MKP riešeni pre stupne elementu $s = 1, 2$ a rôzne počty elementov N .

$x[\text{m}]$	Presné riešenie	MKP riešenie				
		Lineárne elementy ($s = 1$)			Kvadratické elementy ($s = 2$)	
		$N = 1$	$N = 2$	$N = 4$	$N = 1$	$N = 2$
0	0	0	0	0	0	0
0.5	0.6627			0.6642		0.6627
1	1.2247		1.2381	1.2281	1.2257	1.2247
1.5	1.6924			1.6979		1.6926
2	2.08	2.2024	2.1111	2.0878	2.0779	2.0797

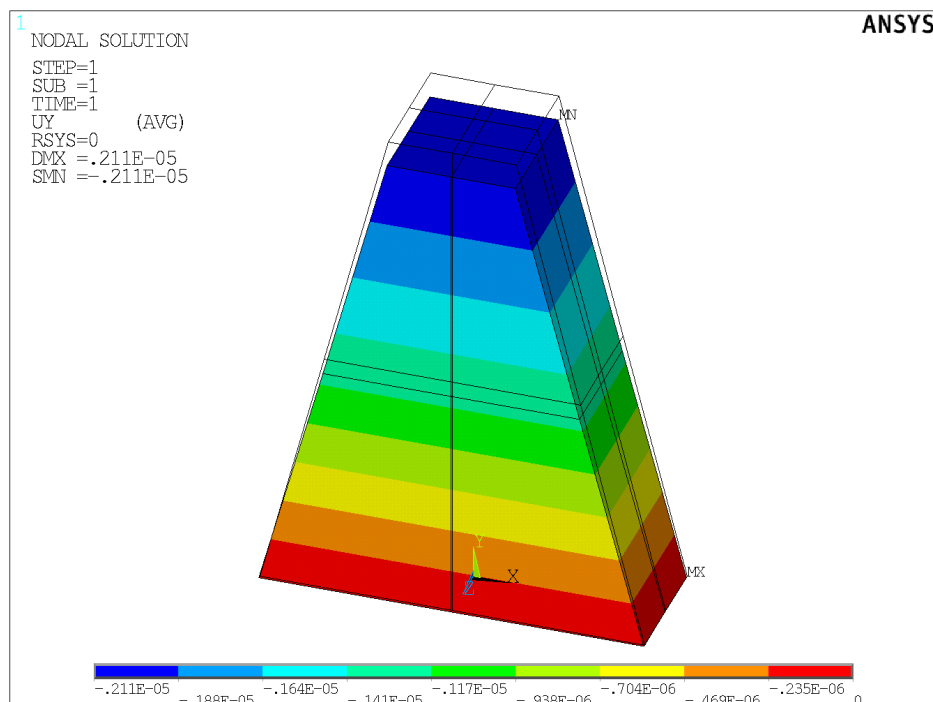
Úloha 4.35 (Deformácia piliera mosta, ANSYS). Overte výsledky Úlohy 4.34 v programe ANSYS v prostredí Mechanical APDL.

- Pre použitie lineárnych elementov zvolte typ elementu BEAM188.^a
 - Main Menu > Preprocessor > Element Type > Add/Edit/Delete > Add > BEAM188
 - Zadefinujte materiálové vlastnosti – hustotu $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$ a Youngov modul pružnosti $E = 28 \text{ GPa}$.
 - Main Menu > Preprocessor > Material Props > Material Models
 - Structural > Linear > Elastic > Isotropic EX = 28e9
 - Structural > Density DENS = 2500
 - Zadefinujte premenlivý prierez $A(x)$.^b
 - Main Menu > Preprocessor > Sections > Beam
 - Common Sections ID = 1, Name = spodok, B = 1.5, H = 0.5
 - Common Sections ID = 2, Name = vrch, B = 0.5, H = 0.5
 - Taper Sections > By XYZ Location
 - * SECTYPE (ID) = 3, NAME = pilier
 - * Beginning Section ID = 1 spodok, XYZ Loc. = (0,0,0)
 - * Ending Section ID = 2 vrch, XYZ Loc. = (0,2,0)
 - Vymodelujte geometriu piliera. Modelujeme zvislú úsečku s koncovými bodmi (0,0,0) a (0,2,0). Prierez nemodelujeme, ten vstupuje do výpočtu cez Sections.
 - Main Menu > Preprocessor > Modeling > Create
 - Keypoints > In Active CS 1: (0,0,0), 2: (0,2,0)
 - Lines > Lines > Straight Line > Klik na body 1 a 2
 - Na geometrii vytvorte sieť tvorenú dvoma elementami.
 - Main Menu > Preprocessor > Meshing > Mesh Tool
 - Element Attributes > Global > Set > SECNUM = 3 pilier
 - Size Controls > Global > Set NDIV = 2
 - Mesh Klik na čiaru
- Overte správnosť vytvorenia siete.
- Horná lišta > PlotCtrls > Style > Size and Shape /ESHAPE = On
- Zadajte okrajové podmienky a zaťaženia.
 - Main Menu > Preprocessor > Loads > Define Loads > Apply > Structural
 - Displacement > On Keypoints > Klik na bod 1 DOFs to be constr. = All DOF, VALUE = 0
 - Force > On Keypoints > Klik na bod 2 Direction of force = FY, VALUE = -5000
 - Inertia > Gravity > Global ACELY = 10
 - Spustite riešenie.

- Main Menu > Solution > Solve > Current LS
8. Vizualizujte výsledky (Obr. 4.18) a porovnajte numerické hodnoty s výsledkami Úlohy 4.34.
- Main Menu > General Postproc
 - Plot Results > Contour Plot > Nodal Solu > Nodal Solution > DOF Solution > Y-Comp. of displ.
 - List Results > Nodal Solution > Nodal Solution > DOF Solution > Y-Comp. of displ.
 - List Results > Reaction Solu > FY
- Ak sa výsledky presne zhodujú, treba sa potešiť, ak nie, niekde je chyba, musí to sedieť presne. Môžete skúsiť tu aj v Úlohe 4.34 voliť väčší počet elementov, výsledky by sa mali vždy zhodovať.
9. Pre použitie kvadratických elementov zvolte typ elementu BEAM189 a prepočítajte. Stačí vymazať aktuálnu sieť,
- Main Menu > Preprocessor > Meshing > Mesh Tool > Clear > Klik na čiaru
- vymazať element BEAM188 a pridať element BEAM189,
- Main Menu > Preprocessor > Element Type > Add/Edit/Delete
 - BEAM188 > Delete
 - Add > BEAM189
- vysietťovať,
- Main Menu > Preprocessor > Meshing > Mesh Tool > Mesh
- a potom už len prejsť krokmi 7. a 8. Výsledky sa musia aj tu presne zhodovať s tými z Úlohy 4.34.

^aVäčšinou si pri prútoch vystačíme s elementom LINK180 (pozri Poznámku 4.11). Tu je ale problém v tom, že pre LINK180 sa nedá použiť premenlivý prierez. Preto sme zvolili element BEAM188, ktorý sa pri namáhaní čistým tlakom/tahom (žiadny ohyb) správa rovnako ako LINK180.

^bLokálna x -ová súradnica pôjde pozdĺž elementov, ale geometriu ako takú budeme orientovať v smere globálnej osi y .



Obr. 4.18. Vizualizácia posunutí v smere zvislej osi (tu os y) v programe ANSYS Mechanical APDL.

Úloha 4.36 (*Ďalšie reálne úlohy). V Úlohách 4.31 a 4.34 sme pomocou programu `cv05`, MKP pre 1D vedenie tepla.nb (Úloha 4.29) riešili dve reálne situácie. Skúste vymyslieť ďalšie reálne problémy a vyriešiť ich pomocou vášho programu. Napríklad:

- Vedenie tepla v stene, tyči či drôte, len s inou geometriou, tepelnou vodivosťou alebo inými okrajovými podmienkami. Skúste napríklad Newtonove, čiže konvekciu (2.8) na hranici. O tom, ako ju do programu zadať pomocou všeobecných okrajových podmienok (4.4) sme písali v poznámke pod čiarou číslo 2 na strane 41.
- Pozdĺžne deformácie piliera alebo tyče s inou geometriou, či iným zaťažením. Tyč môže napríklad aj visieť zo stropu a zaťažíte ju na dolnom konci závažím s nejakou hmotnosťou. Tyč môže dokonca visieť aj na pružine a pilier môže stáť na pružnom podklade, pozri sekciu 2.5.1.

4.7 *Globálny pohľad

Je veľmi užitočné rozmyslieť si, ako sa dá na MKP pozrieť z pohľadu *globálnych aproximačných funkcií* ϕ_I (pozri sekciu 4.3.2) a ako súvisí *globálna sústava* rovníc so slabou formuláciou na celej výpočtovej oblasti (4.9). Budeme to ilustrovať na MKP s *lineárnymi elementami*.¹¹

Naše celkové približné riešenie $U(x)$ vieme zapísať pomocou globálnych aproximačných funkcií $\phi_I(x)$ v tvare

$$U(x) = \sum_{I=1}^{N+1} U_I \phi_I(x), \quad (4.48)$$

kde U_I je približná hodnota riešenia v globálnom uzlovom bode X_I . Zápis (4.48) sa dá ľahko overiť – v uzlových bodoch platí (využívame vlastnosť (4.23))

$$U(X_J) = \sum_{I=1}^{N+1} U_I \underbrace{\phi_I(X_J)}_{\delta_{IJ}} = U_J,$$

čiže približné riešenie $U(x)$ naozaj interpoluje uzlové hodnoty U_I . Interpolácia pomocou funkcií ϕ_I je lineárna, a teda zápis približného riešenia v tvare (4.48) je naozaj ekvivalentný zápisu (4.42).

Celkové približné riešenie $U(x)$ spĺňa množstvo elementových rovníc ((4.24) resp. (4.25) pre všetky $e = 1, \dots, N$). Pozrime sa na situáciu okolo globálneho uzlového bodu X_I . Vyberme na predchádzajúcom elemente Ω^{I-1} druhú rovnicu a na nasledujúcom elemente Ω^I prvú rovnicu

$$\int_{x_1^{I-1}}^{x_2^{I-1}} a \frac{dU}{dx} \frac{d\psi_2^{I-1}}{dx} dx = \int_{x_1^{I-1}}^{x_2^{I-1}} f \psi_2^{I-1} dx + Q_2^{I-1}, \quad (4.49)$$

$$\int_{x_1^I}^{x_2^I} a \frac{dU}{dx} \frac{d\psi_1^I}{dx} dx = \int_{x_1^I}^{x_2^I} f \psi_1^I dx + Q_1^I. \quad (4.50)$$

Keď rovnice sčítame, dostávame

$$\int_{x_1^{I-1}}^{x_2^{I-1}} a \frac{dU}{dx} \frac{d\psi_2^{I-1}}{dx} dx + \int_{x_1^I}^{x_2^I} a \frac{dU}{dx} \frac{d\psi_1^I}{dx} dx = \int_{x_1^{I-1}}^{x_2^{I-1}} f \psi_2^{I-1} dx + \int_{x_1^I}^{x_2^I} f \psi_1^I dx + \underbrace{Q_2^{I-1} + Q_1^I}_0,$$

¹¹Táto časť je síce označená hviezdíčkou (dá sa vynechať), ale môže čitateľovi veľmi pomôcť v tom, aby mu „všetko do seba pekne zapadalo“, hlavne v súvislosti s náročnejšou matematickou kapitolou 6.

kde sme využili bilanciú tokov (4.34). Ak ešte využijeme definíciu globálnych aproximačných funkcií (4.22), dostávame rovnicu pre I -ty globálny uzlový bod¹²

$$\int_0^L a \frac{dU}{dx} \frac{d\phi_I}{dx} dx = \int_0^L f \phi_I dx.$$

V prípade, že sa zaujímame o prvý (resp. posledný) globálny uzlový bod, čiže $I = 1$ (resp. $I = N+1$), tak uvažujeme len rovnicu (4.50) (resp. (4.49)) a na pravej strane zostane aj hraničný člen. Keď to zhrnieme, tak pre ľubovoľný uzlový bod $X_I, I = 1, \dots, N+1$ môžeme zodpovedajúcu rovnicu zapísať v kompaktnom tvare

$$\int_0^L a \frac{dU}{dx} \frac{d\phi_I}{dx} dx = \int_0^L f \phi_I dx + Q_1^1 \phi_I(0) + Q_2^N \phi_I(L).$$

Všimnime si, že rovnakú rovnicu dostaneme, ak v slabej formulácii na celej výpočtovej oblasti (4.9) dosadíme za u naše celkové približné riešenie U a za váhovú funkciu w dosadíme globálnu aproximačnú funkciu ϕ_I .

To znamená, že odvodenie globálnej sústavy rovníc (4.36) by sme mohli začať aj zo slabej formulácie na celej výpočtovej oblasti (4.9), za u dosadiť približné riešenie v tvare (4.48) a za váhovú funkciu w postupne všetky globálne aproximačné funkcie $\phi_I, I = 1, \dots, N+1$. Prvky globálnej matice tuhosti a globálnej pravej strany v sústave (4.36) by sa pomocou globálnych aproximačných funkcií počítali ako

$$K_{IJ} := \int_0^L a \frac{d\phi_J}{dx} \frac{d\phi_I}{dx} dx, \quad F_I := \int_0^L f \phi_I dx + Q_1^1 \phi_I(0) + Q_2^N \phi_I(L).$$

Poznámka 4.37 (Pripomenutie metódy vážených rezíduí). Čitateľovi odporúčame pripomenúť si sekciu 3.2 o variačných metódach, kde sme podobne do variačnej formulácie na celej výpočtovej oblasti (3.24) postupne dosádzali lineárne nezávislé funkcie w_i , čím sme dostali sústavu rovníc pre neznáme koeficienty c_i . Tu v metóde konečných prvkov sú neznámymi koeficientami práve uzlové hodnoty.

¹²Integrály sú síce formálne cez celú výpočtovú oblasť $\Omega = (0, L)$, ale nenulové príspevky dostaneme len pri integrovaní cez elementy Ω^{I-1} a Ω^I .

Kapitola 5

MKP pre diferenciálnu rovnicu 4. rádu (Eulerov-Bernoulliho nosník)

V tejto kapitole sa budeme zaoberať metódou konečných prvkov pre diferenciálnu rovnicu 4. rádu v 1D. Na MKP je fascinujúce, že postup je v podstate rovnaký pre ľubovoľnú rovnicu. Rovnako ako v kapitole 4, aj teraz budeme postupovať podľa algoritmu zo sekcie 4.1. Postup MKP vysvetlíme na diferenciálnej rovnici

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(b(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \right) = f(x), \quad x \in (0, L), \quad (5.1)$$

ktorá opisuje priečne deformácie nosníka a odvodili sme ju v sekcii 2.6. Neznámou je priečna deformácia (posunutie) $u(x)$ [m]. Funkcia $f(x)$ [N/m] je hustota vonkajšej sily v smere zvislej osi y . Funkcia $b(x) = E(x)I(x)$ [Nm²] je tzv. ohybová tuhosť, pričom E [Pa] je Youngov modul pružnosti a I [m⁴] je moment zotrvačnosti prierezovej plochy definovaný vzťahom (2.52). Keďže ide o rovnicu 4. rádu, je potrebné k nej zadať 4 okrajové podmienky, dve na každej strane. O okrajových podmienkach sme detailne hovorili v sekcii 2.6.3 a pozrieme sa na ne aj tu v kontexte MKP v Poznámke 5.2.

5.1 Sústava rovníc na elemente

5.1.1 Slabá formulácia

Výpočtovú oblasť $\Omega = (0, L)$ diskretizujeme na elementy $\Omega^e = [x_1^e, x_2^e]$, kde $e = 1, \dots, N$, rovnako ako v sekcii 4.2. Na odvodenie slabej formulácie vynásobíme diferenciálnu rovnicu (5.1) váhovou funkciou $w(x)$ a integrujeme na elemente Ω^e

$$\int_{x_1^e}^{x_2^e} \frac{d^2}{dx^2} \left(b \frac{d^2 u}{dx^2} \right) w \, dx = \int_{x_1^e}^{x_2^e} f w \, dx.$$

Na to, aby sme preniesli *polovicu derivácií* pod integrálom na ľavej strane z neznámej $u(x)$ na *váhovú funkciu* $w(x)$, využijeme 2-krát integráciu *per partes* $\int_a^b g' h \, dx = [gh]_a^b - \int_a^b gh' \, dx$. Pri prvom *per partes* vezmeme

$$g' = \frac{d^2}{dx^2} \left(b \frac{d^2 u}{dx^2} \right), \quad h = w, \quad \text{a teda} \quad g = \frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2 u}{dx^2} \right), \quad h' = \frac{dw}{dx}$$

a dostaneme

$$\left[\frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2 u}{dx^2} \right) w \right]_{x_1^e}^{x_2^e} - \int_{x_1^e}^{x_2^e} \frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \frac{dw}{dx} \, dx = \int_{x_1^e}^{x_2^e} f w \, dx.$$

V druhom per partes zoberieme

$$g' = \frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2 u}{dx^2} \right), \quad h = \frac{dw}{dx}, \quad \text{a teda} \quad g = b \frac{d^2 u}{dx^2}, \quad h' = \frac{d^2 w}{dx^2},$$

čiže vychádza (mínus v hraničnom člene zámerne dávame dovnútra)

$$\left[\frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2 u}{dx^2} \right) w \right]_{x_1^e}^{x_2^e} + \left[-b \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{dw}{dx} \right]_{x_1^e}^{x_2^e} + \int_{x_1^e}^{x_2^e} b \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} dx = \int_{x_1^e}^{x_2^e} f w dx.$$

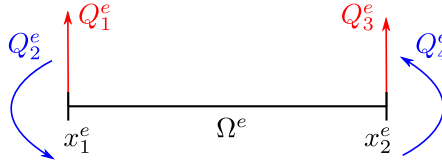
Slabá formulácia diferenciálnej rovnice (5.1) má teda tvar

$$\int_{x_1^e}^{x_2^e} b \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} dx = \int_{x_1^e}^{x_2^e} f w dx + Q_1^e w(x_1^e) + Q_2^e \frac{dw}{dx} \Big|_{x_1^e} + Q_3^e w(x_2^e) + Q_4^e \frac{dw}{dx} \Big|_{x_2^e}, \quad (5.2)$$

kde $Q_1^e, \dots, Q_4^e$ označujú

$$\begin{aligned} Q_1^e &:= \frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \Big|_{x_1^e}, & Q_2^e &:= \left(-b \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \Big|_{x_1^e}, \\ Q_3^e &:= - \frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \Big|_{x_2^e}, & Q_4^e &:= \left(b \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \Big|_{x_2^e}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Poznámka 5.1 (Identifikácia primárnych a sekundárnych neznámych). Primárne a sekundárne neznáme rozpoznáme pohľadom na hraničné členy v slabej formulácii. *Primárne neznáme* identifikujeme tak, že u vyjadríme v takom tvare, v akom sa v hraničných členoch vyskytuje váhová funkcia w , čiže zo slabej formulácie (5.2) máme $u_1^e, \theta_1^e = \frac{dU^e}{dx} \Big|_{x_1^e}$ a $u_2^e, \theta_2^e = \frac{dU^e}{dx} \Big|_{x_2^e}$.^a Neznáme θ_1^e, θ_2^e sú sklony približnej priehybovej čiary $U^e(x)$ v uzlových bodoch x_1^e, x_2^e , pozri Obr. 5.3. *Sekundárne neznáme* identifikujeme z hraničných členov ako koeficienty pri váhovej funkcii a jej deriváciách. V prípade slabej formulácie (5.2) sme ich označili ako $Q_1^e, \dots, Q_4^e$ a hovorí sa im zovšeobecnené sily, pričom pri odvodení Eulerovej-Bernoulliho rovnice v sekcii 2.6 sme videli (pozri vzťahy (2.51)), že výrazy Q_1^e, Q_3^e [N] sú vlastne priečne sily a Q_2^e, Q_4^e [Nm] ohybové momenty pôsobiace na element v uzlových bodoch x_1^e, x_2^e , pozri Obr. 5.1. Ich orientácia sa ozrejní, keď porovnáme vzťahy (5.3), (2.51) a pozrieme na Obr. 2.15 a Obr. 2.17.



Obr. 5.1. Interpretácia sekundárnych neznámych na elemente.

^aNiektorí autori používajú pri deriváciách konvenciu s opačným znamienkom, čiže $\theta_i^e = - \frac{dU^e}{dx} \Big|_{x_i^e}$ a výrazy pre Q_2^e a Q_4^e potom majú opačné znamienko.

Poznámka 5.2 (Klasifikácia okrajových podmienok). Okrajové podmienky rozdeľujeme na dva typy:

- **Obmedzujúce** alebo tiež geometrické (angl. *essential* alebo *geometric*), ktoré predpisujú okrajové podmienky pre *primárne* neznáme, čiže pre Eulerov-Bernoulliho nosník (5.1) predpíšeme deformáciu u a sklon $\theta = \frac{du}{dx}$ na hranici. V prípade rovnice vedenia tepla (4.1) je to teplota u na hranici.
- **Prirodzené** alebo tiež silové (angl. *natural* alebo *force*), ktoré predpisujú okrajové podmienky pre *sekundárne* neznáme, čiže pre rovnicu (5.1) špecifikujeme ohybový moment $M = b \frac{d^2u}{dx^2}$, resp. priečnu silu $V = -\frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2u}{dx^2} \right)$ na hranici. Pre rovnicu (4.1) špecifikujeme tok $q = -a \frac{du}{dx}$ na hranici (prostredníctvom Neumannovej alebo Newtonovej okrajovej podmienky (4.4)).

Pre rovnicu (5.1) zadávame 4 okrajové podmienky (dve na každom okraji výpočtovej oblasti). V každom z bodov $x = 0$ resp. $x = L$ zadáme 2 okrajové podmienky takto:

1. Špecifikujeme buď posunutie $u(x)$ alebo priečnu silu $V = -\frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2u}{dx^2} \right)$.
2. Špecifikujeme buď sklon $\theta = \frac{du}{dx}$ alebo ohybový moment $M = b \frac{d^2u}{dx^2}$.

Možností je pomerne veľa, niektoré sme rozobrali v sekcii 2.6.3.

Poznámka 5.3. V pôvodnej rovnici (5.1) je potrebné, aby existovala štvrtá derivácia neznámej $u(x)$. V slabej formulácii (5.2) stačí, ak existuje druhá derivácia $u(x)$ skoro všade. Požiadavka na $b(x)$ v rovnici (5.1) je, aby bola 2-krát diferencovateľná, v slabej formulácii (5.2) funkcia $b(x)$ môže byť dokonca aj nespojitá (na množine bodov miery nula).

Aj v tejto kapitole pomocou MKP vyriešime konkrétnu úlohu. Bude to nasledujúca rovnica 4. rádu so zmiešanými okrajovými podmienkami.

Úloha 5.4 (Analytické riešenie). Nájdite analytické riešenie okrajovej úlohy

$$\begin{aligned} \frac{d^4u}{dx^4} &= -5, & x \in (0, 1), \\ u(0) &= 0, \quad u'(0) = 0, & u'''(1) = -2, \quad u''(1) = 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Je to vlastne rovnica (5.1), v ktorej máme konštantnú materiálovú charakteristiku $b(x) \equiv 1$ a pravú stranu $f(x) \equiv -5$, čiže nosník dĺžky 1 m je po celej dĺžke zaťažovaný smerom nadol priečnou silou s hustotou 5 N/m. Konfrontujme ešte okrajové podmienky s Poznámkami 5.1 a 5.2. Na ľavom okraji máme $u(0) = 0$ a $u'(0) = 0$, čo znamená, že nosník je takzvané votknutý – v bode $x = 0$ je fixované posunutie, aj sklon nosníka. Na pravom okraji máme $u'''(1) = -2$, čiže tu pôsobí priečna sila 2 N smerom nahor,^a a $u''(1) = 0$, čiže tu nepôsobí žiadny moment sily.

^aPriečna sila na pravom okraji je $Q_3^N = -\frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2u}{dx^2} \right) \Big|_{x_2^N} = -u'''(1) = +2$.

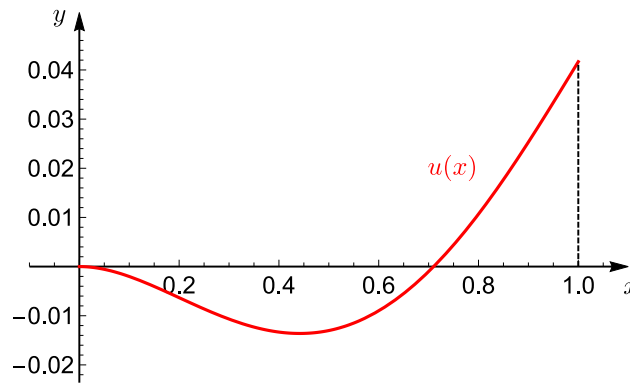
Riešenie. Diferenciálnu rovnicu 4-krát integrujeme a postupne dostávame

$$\begin{aligned}\frac{d^3u}{dx^3} &= -5x + c_1, \\ \frac{d^2u}{dx^2} &= -\frac{5}{2}x^2 + c_1x + c_2, \\ \frac{du}{dx} &= -\frac{5}{6}x^3 + \frac{c_1}{2}x^2 + c_2x + c_3, \\ u(x) &= -\frac{5}{24}x^4 + \frac{c_1}{6}x^3 + \frac{c_2}{2}x^2 + c_3x + c_4.\end{aligned}$$

Využitím okrajovej podmienky $u(0) = 0$ máme $c_4 = 0$, z podmienky $u'(0) = 0$ zase plynie $c_3 = 0$. Okrajová podmienka $u'''(1) = -2$ dáva $u'''(1) = -5 + c_1 \stackrel{!}{=} -2$, čiže $c_1 = 3$ a napokon z podmienky $u''(1) = 0$ dostávame $u''(1) = -\frac{5}{2} + 3 + c_2 \stackrel{!}{=} 0$, čiže $c_2 = -\frac{1}{2}$. Našli sme teda presné riešenie úlohy (5.4), ktoré má tvar

$$u(x) = -\frac{5}{24}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2. \quad (5.5)$$

Riešenie vykresľujeme na Obr. 5.2. Tvar grafu intuitívne dáva zmysel: Na ľavom okraji je nosník naozaj votknutý, v ľavej časti je vidno prehnutie nadol kvôli zaťaženiu priečnou silou s hustotou $f(x) = -5$. Pravý koniec nosníka je ale zahnutý nahor, čo je spôsobené priečnou silou pôsobiaceou v bode $x = 1$ nahor. ■



Obr. 5.2. Presné riešenie okrajovej úlohy (5.4).

5.1.2 Aproximačné funkcie

Podľa požiadaviek 1. – 3. na približné riešenie $U^e(x)$ zo sekcie 4.3.2 by pre slabú formuláciu (5.2) stačila kvadratická funkcia $U^e(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2$ (je to úplný polynóm s nenulovou 2. deriváciou). Na splnenie 4 *interpolačných podmienok* (Obr. 5.3)

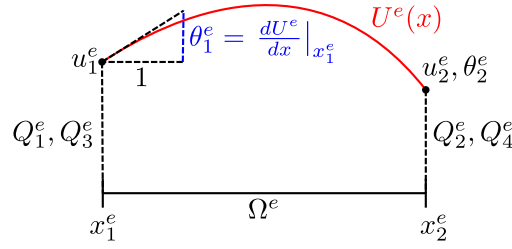
$$\begin{aligned}U^e(x_1^e) &= u_1^e, & \frac{dU^e}{dx}(x_1^e) &= \theta_1^e, \\ U^e(x_2^e) &= u_2^e, & \frac{dU^e}{dx}(x_2^e) &= \theta_2^e,\end{aligned}$$

ale potrebujeme *polynóm so 4 voľnými parametrami*

$$U^e(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3. \quad (5.6)$$

Na získanie interpolačných podmienok pre polynóm (5.6) potrebujeme ešte jeho deriváciu, ktorá je

$$\frac{dU^e}{dx} = c_2 + 2c_3x + 3c_4x^2.$$

Obr. 5.3. Kubická funkcia $U^e(x)$ interpolujúca uzlové hodnoty u_1^e, u_2^e a uzlové sklony θ_1^e, θ_2^e .

Interpoláčn  podmienky teda majú tvar

$$\begin{aligned} U^e(x_1^e) &= c_1 + c_2 x_1^e + c_3 (x_1^e)^2 + c_4 (x_1^e)^3 = u_1^e, \\ \frac{dU^e}{dx}(x_1^e) &= c_2 + 2c_3 x_1^e + 3c_4 (x_1^e)^2 = \theta_1^e, \\ U^e(x_2^e) &= c_1 + c_2 x_2^e + c_3 (x_2^e)^2 + c_4 (x_2^e)^3 = u_2^e, \\ \frac{dU^e}{dx}(x_2^e) &= c_2 + 2c_3 x_2^e + 3c_4 (x_2^e)^2 = \theta_2^e, \end{aligned} \quad \text{resp.} \quad \begin{bmatrix} 1 & x_1^e & (x_1^e)^2 & (x_1^e)^3 \\ 0 & 1 & 2x_1^e & 3(x_1^e)^2 \\ 1 & x_2^e & (x_2^e)^2 & (x_2^e)^3 \\ 0 & 1 & 2x_2^e & 3(x_2^e)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^e \\ \theta_1^e \\ u_2^e \\ \theta_2^e \end{bmatrix}.$$

Vyriešením systému získame parametre $c_1, \dots, c_4$, ktoré dosadíme do polynómu (5.6) a upravíme na tvar lineárnej kombinácie primárnych uzlových neznámych, čiže

$$U^e(x) = u_1^e \psi_1^e(x) + \theta_1^e \psi_2^e(x) + u_2^e \psi_3^e(x) + \theta_2^e \psi_4^e(x). \quad (5.7)$$

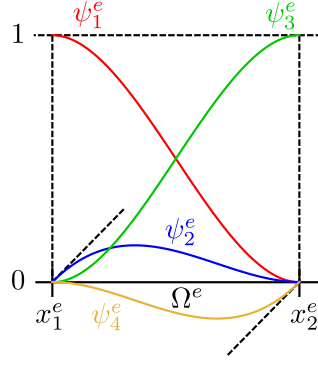
Detailný postup úprav nebudeme  v dzať, čitateľ si to môže vysk sať. Podstatn  je výsledok, ktorému sa budeme snažiť porozumieť. V sledn e aproxima n  funkcie ψ_i^e , $i = 1, \dots, 4$ (Obr. 5.4) m  žeme zapísať v tvare $\psi_i^e(x) = \hat{\psi}_i^e(t(x))$, pričom používame funkciu $t(x) = \frac{1}{h^e}(x - x_1^e)$, kde $h^e = x_2^e - x_1^e$. Funkcia $t(x)$ je transformácia, ktor  zobrazuje interval $[x_1^e, x_2^e]$ na jednotkov  interval $[0, 1]$. Funkcie $\hat{\psi}_i^e(t)$, $i = 1, \dots, 4$ sa dajú zapísať v tvare

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_1^e(t) &= 2t^3 - 3t^2 + 1, & \hat{\psi}_2^e(t) &= h^e(t^3 - 2t^2 + t), \\ \hat{\psi}_3^e(t) &= -2t^3 + 3t^2, & \hat{\psi}_4^e(t) &= h^e(t^3 - t^2). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Uzlov  hodnoty aproxima n ch funkcií a ich derivácií s 

$$\begin{aligned} \psi_1^e(x_1^e) &= 1, & \frac{d\psi_1^e}{dx}(x_1^e) &= 0, & \psi_1^e(x_2^e) &= 0, & \frac{d\psi_1^e}{dx}(x_2^e) &= 0, \\ \psi_2^e(x_1^e) &= 0, & \frac{d\psi_2^e}{dx}(x_1^e) &= 1, & \psi_2^e(x_2^e) &= 0, & \frac{d\psi_2^e}{dx}(x_2^e) &= 0, \\ \psi_3^e(x_1^e) &= 0, & \frac{d\psi_3^e}{dx}(x_1^e) &= 0, & \psi_3^e(x_2^e) &= 1, & \frac{d\psi_3^e}{dx}(x_2^e) &= 0, \\ \psi_4^e(x_1^e) &= 0, & \frac{d\psi_4^e}{dx}(x_1^e) &= 0, & \psi_4^e(x_2^e) &= 0, & \frac{d\psi_4^e}{dx}(x_2^e) &= 1. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Poznámka 5.5 (Uzlov  hodnoty a derivácie). Vlastnosti (5.9) sú zrejm  aj bez počítania. Napríklad aproxima n  funkciu ψ_1^e dostaneme zo vzťahu (5.7) pre tak to hodnoty neznámych: $u_1^e = 1$, $\theta_1^e = 0$, $u_2^e = 0$, $\theta_2^e = 0$, čiže funkcia ψ_1^e musí mať v bode x_1^e hodnotu 1 a nulov  deriváciu, v bode x_2^e hodnotu 0 a tiež nulov  deriváciu (pozri Obr. 5.4). Odpor  ujeme čitateľovi, aby si rozmyslel vlastnosti ostatných aproximačných funkcií a porovnal ich s Obr. 5.4.



Obr. 5.4. Hermiteove interpolačné funkcie.

Poznámka 5.6 (Hermiteove interpolačné funkcie). V odvodení interpolačných funkcií (5.8) sa využívali hodnoty funkcie $U^e(x)$ v uzlových bodoch a aj derivácie $\frac{dU^e}{dx}$ v uzlových bodoch. Takéto interpolačné funkcie sa vo všeobecnosti nazývajú *Hermiteove interpolačné funkcie* (pozri Poznámku 4.6). Interpolácii (5.7) sa hovorí aj *kubický splajn* (angl. cubic Hermite spline).

Úloha 5.7 (*Aproximačné funkcie | MKP pre DR 4. radu.nb). Uvažujme okrajovú úlohu (5.4), ktorú sme vyriešili aj analyticky a presné riešenie nám vyšlo v tvare (5.5). V tejto a ďalších úlohách ju postupne vyriešime pomocou MKP.

1. Výpočtovú oblasť $\Omega = (0, 1)$ rovnomerne diskretizujte na N elementov $\Omega^e = [x_1^e, x_2^e]$, $e = 1, \dots, N$ (vypočítajte h^e , skonštruujte x_1^e, x_2^e).
2. Na každom elemente zostrojte aproximačné funkcie pomocou zápisu (5.8).^a
3. Na jednom z elementov si aproximačné funkcie vykreslite a porovnajte ich tvar s grafmi na Obr. 5.4.

^aJe užitočné urobiť aj symbolické odvodenie, podobne ako sme to robili v Úlohe 4.8.

5.1.3 Dosadenie približného riešenia a aproximačných funkcií do slabej formulácie

V slabej formulácii (5.2) za funkciu $u(x)$ dosadíme približné riešenie na elemente (5.7) a za váhovú funkciu $w(x)$ postupne dosádzame aproximačné funkcie $\psi_1^e(x), \dots, \psi_4^e(x)$. Prvá elementová rovnica (pre $w = \psi_1^e$) má tvar

$$\int_{x_1^e}^{x_2^e} b \frac{d^2(u_1^e \psi_1^e + \theta_1^e \psi_2^e + u_2^e \psi_3^e + \theta_2^e \psi_4^e)}{dx^2} \frac{d^2 \psi_1^e}{dx^2} dx = \int_{x_1^e}^{x_2^e} f \psi_1^e dx + Q_1^e \underbrace{\psi_1^e(x_1^e)}_{=1} + Q_2^e \underbrace{\frac{d\psi_1^e}{dx} \Big|_{x_1^e}}_{=0} + Q_3^e \underbrace{\psi_1^e(x_2^e)}_{=0} + Q_4^e \underbrace{\frac{d\psi_1^e}{dx} \Big|_{x_2^e}}_{=0}.$$

V hraničných členoch využívame vlastnosti aproximačných funkcií (5.9). Integrál na ľavej strane rozdelíme na 4 integrály a vyjmeme pred integrály konštanty $u_1^e, \theta_1^e, u_2^e, \theta_2^e$. Dostaneme prvú elementovú rovnicu v tvare

$$u_1^e K_{11}^e + \theta_1^e K_{12}^e + u_2^e K_{13}^e + \theta_2^e K_{14}^e = f_1^e + Q_1^e,$$

kde používame označenia

$$K_{ij}^e := \int_{x_1^e}^{x_2^e} b \frac{d^2 \psi_j^e}{dx^2} \frac{d^2 \psi_i^e}{dx^2} dx, \quad f_i^e := \int_{x_1^e}^{x_2^e} f \psi_i^e dx. \quad (5.10)$$

Podobne pre $w = \psi_2^e$ dostaneme druhú rovnicu

$$u_1^e K_{21}^e + \theta_1^e K_{22}^e + u_2^e K_{23}^e + \theta_2^e K_{24}^e = f_2^e + \underbrace{Q_1^e \psi_2^e(x_1^e)}_{=0} + \underbrace{Q_2^e \frac{d\psi_2^e}{dx} \Big|_{x_1^e}}_{=1} + \underbrace{Q_3^e \psi_2^e(x_2^e)}_{=0} + \underbrace{Q_4^e \frac{d\psi_2^e}{dx} \Big|_{x_2^e}}_{=0}.$$

Zvyšné dve rovnice sú

$$\begin{aligned} u_1^e K_{31}^e + \theta_1^e K_{32}^e + u_2^e K_{33}^e + \theta_2^e K_{34}^e &= f_3^e + Q_3^e, \\ u_1^e K_{41}^e + \theta_1^e K_{42}^e + u_2^e K_{43}^e + \theta_2^e K_{44}^e &= f_4^e + Q_4^e. \end{aligned}$$

Elementovú sústavu rovníc môžeme zapísať v maticovom tvare

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & K_{13}^e & K_{14}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e & K_{23}^e & K_{24}^e \\ K_{31}^e & K_{32}^e & K_{33}^e & K_{34}^e \\ K_{41}^e & K_{42}^e & K_{43}^e & K_{44}^e \end{bmatrix}}_{K^e} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1^e \\ \theta_1^e \\ u_2^e \\ \theta_2^e \end{bmatrix}}_{f^e} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1^e \\ f_2^e \\ f_3^e \\ f_4^e \end{bmatrix}}_{f^e} + \underbrace{\begin{bmatrix} Q_1^e \\ Q_2^e \\ Q_3^e \\ Q_4^e \end{bmatrix}}_{f^e}. \quad (5.11)$$

Poznámka 5.8 (Počet neznámych a rovníc). V sústave (5.11) je 8 neznámych $u_1^e, \theta_1^e, u_2^e, \theta_2^e$ a $Q_1^e, Q_2^e, Q_3^e, Q_4^e$. Dohromady na všetkých elementoch $\Omega^1, \dots, \Omega^N$ máme $8N$ neznámych a len $4N$ rovníc. Sústavy treba opäť spojiť do jedného systému.

Úloha 5.9 (*Elementové matice a pravé strany, N elementov | MKP pre DR 4. radu.nb). Začnite z programu MKP pre DR 4. radu.nb z Úlohy 5.7. Podľa vzťahov (5.10) skonštruujte elementové matice tuhosti K^e a pravé strany f^e , pre $e = 1, \dots, N$.

5.2 Globálna sústava rovníc

Na spojenie elementových sústav rovníc (5.11) (pre $e = 1, \dots, N$) do globálnej sústavy využijeme *spojitosť primárnych neznámych*, čiže samotného riešenia $U(x)$ a jeho derivácie $\Theta = \frac{dU}{dx}$. Spojitosť riešenia na stykoch elementov zabezpečíme zavedením globálneho číslovania $U_e = u_2^{e-1} = u_1^e$ a spojitosť derivácie globálnym číslovaním $\Theta_e = \theta_2^{e-1} = \theta_1^e$.

Máme 2 typy tokov, resp. zovšeobecnených síl: priečne sily Q_1^e, Q_3^e a momenty síl Q_2^e, Q_4^e (pozri definíciu (5.3)). Preto *bilancia síl* na styku elementov tentokrát pozostáva z dvoch rovníc

$$\begin{aligned} Q_3^{e-1} + Q_1^e &= 0 && \text{bilancia priečných síl,} \\ Q_4^{e-1} + Q_2^e &= 0 && \text{bilancia momentov síl.} \end{aligned}$$

Sčítavať teda budeme:

- 3. rovnicu na elemente Ω^{e-1} s 1. rovnicou na elemente Ω^e ,
- 4. rovnicu na elemente Ω^{e-1} s 2. rovnicou na elemente Ω^e .

V globálnom číslovaní budeme mať $2N + 2$ primárnych uzlových neznámych $U_1, \Theta_1, \dots, U_{N+1}, \Theta_{N+1}$. Globálny systém rovníc má tvar

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{14}^1 & 0 & \cdots & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & K_{24}^1 & 0 & \cdots & 0 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 + K_{11}^2 & K_{34}^1 + K_{12}^2 & K_{13}^2 & K_{14}^2 & 0 \\ K_{41}^1 & K_{42}^1 & K_{43}^1 + K_{21}^2 & K_{44}^1 + K_{22}^2 & K_{23}^2 & K_{24}^2 & 0 \\ 0 & 0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 + K_{11}^3 & K_{34}^2 + K_{12}^3 & K_{13}^3 \\ & & K_{41}^2 & K_{42}^2 & K_{43}^2 + K_{21}^3 & K_{44}^2 + K_{22}^3 & K_{23}^3 \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & K_{31}^3 & K_{32}^3 & \\ & & \vdots & \vdots & & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & K_{44}^N \end{bmatrix}}_K \begin{bmatrix} U_1 \\ \Theta_1 \\ U_2 \\ \Theta_2 \\ \vdots \\ U_{N+1} \\ \Theta_{N+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1^1 + Q_1^1 \\ f_2^1 + Q_2^1 \\ f_3^1 + f_1^2 \\ f_4^1 + f_2^2 \\ f_3^2 + f_1^3 \\ \vdots \\ f_3^N + Q_3^N \\ f_4^N + Q_4^N \end{bmatrix}}_F. \quad (5.12)$$

Poznámka 5.10 (Počet neznámych a rovníc). V globálnej sústave máme $2N + 2$ rovníc a celkovo $2N + 6$ neznámych $U_1, \Theta_1, \dots, U_{N+1}, \Theta_{N+1}$ a $Q_1^1, Q_2^1, Q_3^N, Q_4^N$. Máme teda 4 neznáme navyše. Systém s jednoznačným riešením získame využitím 4 rovníc z okrajových podmienok.

Úloha 5.11 (*Globálna matica a pravá strana | MKP pre DR 4. radu.nb). Do vášho programu MKP pre DR 4. radu.nb (Úloha 5.9) pre riešenie okrajovej úlohy (5.4) doprogramujte konštrukciu globálnej matice tuhosti K a pravej strany F . Najprv vytvorte nulovú maticu (resp. vektor) správnej veľkosti. Potom do nej na správne miesta pripočítavajte elementové matice K^e (resp. pravé strany f^e). Podobne ako v Úlohe 4.23, aj tu sa dá pripočítavanie robiť elegantne blokovo (nie cez 3 cykly).

5.3 Využite okrajových podmienok

Okrajové podmienky sa pre rovnicu 4. rádu využijú podobne, ako pri rovnici 2. rádu v sekcii 4.5. Možných okrajových podmienok je pomerne veľa, nebudeme tu detailne analyzovať, ako sa v sústave využije každá z nich. Hlavná myšlienka je úplne rovnaká, ako pri MKP pre rovnice 2. rádu v sekcii 4.5:

1. Okrajové podmienky prepíšeme do reči neznámych $U_1, \Theta_1, U_{N+1}, \Theta_{N+1}, Q_1^1, Q_2^1, Q_3^N, Q_4^N$.
2. Geometrické okrajové podmienky, čiže $U_i = \text{konšt.}$, resp. $\Theta_i = \text{konšt.}$ sa využijú tak, že rovnicu $U_i = \text{konšt.}$, resp. $\Theta_i = \text{konšt.}$ napíšeme namiesto príslušnej rovnice v globálnej sústave (5.12).
3. Prirodzené okrajové podmienky sa využijú tak, že si z každej najprv vyjadríme Q_i^e , a potom dosadíme do pravej strany globálnej sústavy (5.12). Ak vyjadrenie obsahuje nejaké členy s primárnymi neznámymi, tak tie prehodíme na ľavú stranu.

Takýmto spôsobom využijeme okrajové podmienky aj v nasledujúcej úlohe.

Úloha 5.12 (*Využitie okrajových podmienok | MKP pre DR 4. radu.nb). Do programu MKP pre DR 4. radu.nb (Úloha 5.9) na riešenie okrajovej úlohy (5.4) doplňte využitie okrajových podmienok. V reči uzlových neznámych vyzerajú okrajové podmienky takto

$$\begin{aligned} u(0) = 0, & \rightarrow U_1 = 0, & u'''(1) = -2 & \rightarrow Q_3^N = 2, \\ u'(0) = 0, & \rightarrow \Theta_1 = 0, & u''(1) = 0 & \rightarrow Q_4^N = 0. \end{aligned}$$

5.4 Konštrukcia približného riešenia

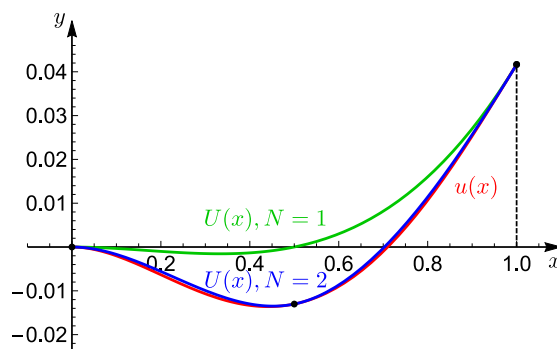
Vyriešením globálneho systému rovníc (5.12) získame primárne uzlové neznáme v globálnom číslovaní, čiže $U_1, \Theta_1, \dots, U_{N+1}, \Theta_{N+1}$. Aby sme vedeli skonštruovať približné riešenie (5.7) na elementoch $\Omega^e, e = 1, \dots, N$, potrebujeme priradiť hodnoty elementovým neznámymi, čiže $u_1^e = U_e, \theta_1^e = \Theta_e, u_2^e = U_{e+1}, \theta_2^e = \Theta_{e+1}, e = 1, \dots, N$. Celkové približné riešenie $U(x), x \in [0, 1]$ okrajovej úlohy (5.4) získané metódou konečných prvkov teda je

$$U(x) = \begin{cases} U^1(x) = U_1\psi_1^1(x) + \Theta_1\psi_2^1(x) + U_2\psi_3^1(x) + \Theta_2\psi_4^1(x), & x \in \Omega^1, \\ U^2(x) = U_2\psi_1^2(x) + \Theta_2\psi_2^2(x) + U_3\psi_3^2(x) + \Theta_3\psi_4^2(x), & x \in \Omega^2, \\ \vdots \\ U^N(x) = U_N\psi_1^N(x) + \Theta_N\psi_2^N(x) + U_{N+1}\psi_3^N(x) + \Theta_{N+1}\psi_4^N(x), & x \in \Omega^N. \end{cases}$$

Poznámka 5.13 (Dopočítanie Q -čok). Ak nás okrem primárnych neznámych zaujímajú aj sekundárne neznáme Q_i^e (pričné sily a ohybové momenty) na hranici výpočtovej oblasti, či dokonca na hraniciach elementov, môžeme ich po vyriešení globálneho systému (vypočítaní primárnych neznámych) dopočítavať analogicky, ako pri rovnici 2. rádu. Jednoducho si vyjadríme Q_i^e z príslušnej rovnice, pozri Poznámku 4.28.

Úloha 5.14 (Riešenie a vizualizácia | MKP pre DR 4. radu.nb). Do programu MKP pre DR 4. radu.nb (Úloha 5.12) doprogramujte nasledujúce:

1. Doplňte riešenie systému rovníc pomocou funkcie `LinearSolve`.
2. Priradte hodnoty primárnym elementovým uzlovým neznámym $u_1^e, \theta_1^e, u_2^e, \theta_2^e$ pre všetky $e = 1, \dots, N$.
3. Skonštruujte približné riešenia $U^e(x)$ na elementoch.
4. Pomocou funkcie `Piecewise` spojte funkcie $U^e(x)$ do celkového približného riešenia $U(x)$.
5. Vykreslite približné riešenie $U(x)$ spolu s presným riešením $u(x)$, ktoré má tvar (5.5). Grafy pre rôzny počet elementov N vidíme na Obr. 5.5. Vidíme, že už pri použití dvoch elementov je približné riešenie vizuálne veľmi blízko k presnému riešeniu.



Obr. 5.5. Riešenie okrajovej úlohy (5.4) pomocou MKP pre $N = 1$ a $N = 2$.

Poznámka 5.15 (Eulerov-Bernoulliho nosník v ANSYS-e). Ak by sme chceli diferenciálnu rovnicu (5.1), resp. konkrétne okrajovú úlohu (5.4) riešiť v ANSYS-e, tak je potrebné použiť

zastaralý dvojuzlový element BEAM4. Jeho osovému namáhaniu zodpovedá matematický model pre pozdĺžne deformácie prúta zo sekcie 2.5, čiže rovnaký model ako pri elemente LINK180 (pozri Poznámku 4.11). Pri priečnom namáhaní a ohýbaní sa správa ako Eulerov-Bernoulliho nosník. Tento element je implementovaný ako 3D nosníkový element. Ak nosník vymodelujeme v smere osi x a pomocou okrajových podmienok zafixujeme posunutia v smere osí x a z , ako aj rotácie okolo osí x a y tak dostaneme presne model z tejto učebnice.

Štandardne sa na modelovanie nosníkov v súčasnosti používa dvojuzlový element BEAM188 (resp. 3-uzlový BEAM189), ktorý je založený na presnejšom Timoshenkovom-Ehrenfestovom modeli nosníka [12], ktorý uvažuje aj šmykové deformácie.

Kapitola 6

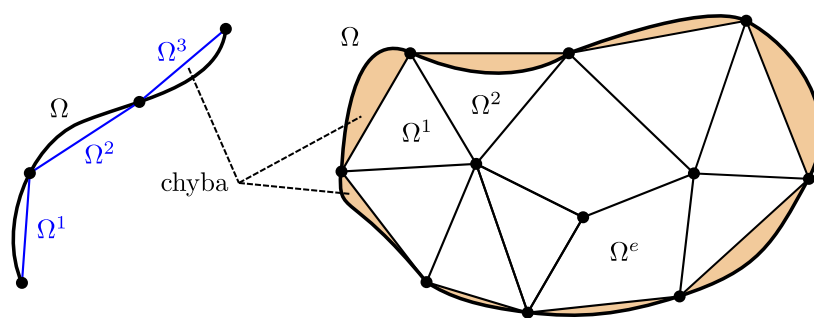
Matematická analýza metódy konečných prvkov

V tejto kapitole sa na MKP trochu pozrieme z hľadiska numerickej a funkcionálnej analýzy. Budeme hovoriť o druhoch chýb, ktorých sa dopúšťame pri riešení úloh pomocou MKP a budeme skúmať *konvergenciu približného riešenia k presnému riešeniu*. Úlohou kapitoly nie je skúmať konvergenciu pre prípad ľubovoľnej okrajovej úlohy, či stupňa elementu, ale skôr sprostredkovať čitateľovi na jednoduchom príklade obraz o tom, ako sa konvergencia dá vyšetrovať.

6.1 Druhy chýb v MKP

Metóda konečných prvkov je približná (numericke) metóda, preto sa pri riešení úloh pomocou MKP dopúšťame chyby. Celková chyba pozostáva z viacerých druhov chýb:

1. **Chyba pri aproximácii výpočtovej oblasti.** Ak je výpočtová oblasť Ω krivočiara a aproximujeme ju napr. v 1D množinou úsečiek alebo v 2D množinou polygónov,¹ dopúšťame sa chyby, pretože namiesto pôvodnej výpočtovej oblasti Ω používame približnú výpočtovú oblasť $\tilde{\Omega} = \bigcup_{e=1}^N \Omega^e$. Pri zjemňovaní siete je výpočtová oblasť aproximovaná stále presnejšie a táto chyba klesá. Chyba môže byť aj nulová, napr. v prípade, že oblasť Ω sa skladá z úsečiek (ako v kapitolách 4 a 5) alebo v 2D ak má Ω po častiach lineárnu hranicu.²



Obr. 6.1. Chyba pri diskretizácii výpočtovej oblasti Ω v 1D a 2D.

2. Numerické chyby.

- (a) Zaokrúhľovanie čísel pri výpočtoch v počítači.
- (b) Numerické integrovanie, teda vyčísľovanie integrálov pomocou približných metód, napríklad pomocou Gaussových kvadrátúr, pozri kapitolu 8.
- (c) Použitie približnej (iteračnej) metódy na riešenie globálnej sústavy rovníc.

¹Trochu predbiehame, o diskretizácii v 2D bude reč v kapitole 9.

²V MKP sa niekedy používajú aj krivočiare elementy, vďaka ktorým sa táto diskretizačná chyba dá zredukovať.

Tieto chyby sú väčšinou veľmi malé v porovnaní s ostatnými.

3. **Aproximácia riešenia.** V tejto kapitole budeme skúmať chybu, ktorá vzniká aproximáciou presného riešenia $u(x)$ približným riešením $U(x)$, ktoré má v prípade rovnice 2. rádu (4.1) a MKP s elementami stupňa s tvar

$$U(x) = \begin{cases} U^1(x) = \sum_{i=1}^{s+1} u_i^1 \psi_i^1(x), & x \in \Omega^1, \\ U^2(x) = \sum_{i=1}^{s+1} u_i^2 \psi_i^2(x), & x \in \Omega^2, \\ \vdots \\ U^N(x) = \sum_{i=1}^{s+1} u_i^N \psi_i^N(x), & x \in \Omega^N. \end{cases}$$

Aproximačná chyba je definovaná ako funkcia $\varepsilon(x) = U(x) - u(x)$. Budeme analyzovať L_2 normu chyby

$$\|\varepsilon\|_{L_2} = \|U - u\|_{L_2} = \sqrt{\int_0^L (U - u)^2 dx} \quad (6.1)$$

a *energetickú normu chyby*, ktorá je pre rovnicu (4.1) definovaná ako

$$\|\varepsilon\|_A = \|U - u\|_A = \sqrt{\int_0^L a(U' - u')^2 dx}. \quad (6.2)$$

Často sa vzťah (6.1) skrátene nazýva L_2 chyba a vzťah (6.2) *energetická chyba*.³ Normy (6.1) a (6.2) vlastne vyjadrujú *vzdialenosť približného riešenia U od presného riešenia u* .⁴ Cieľom analýzy v tejto kapitole je odhadnúť tieto normy chyby a zistiť, ako sa normy menia pri zjemňovaní siete.

MKP je *približná metóda*, ale v niektorých špeciálnych prípadoch môže dávať aj *presné riešenie* úlohy (čiže chyba môže byť nulová, $\varepsilon(x) \equiv 0$). Na ilustráciu sa na jeden takýto prípad detailne pozrieme.

Veta 6.1 (*MKP dáva presné riešenie v uzlových bodoch pre konštantné $a(x)$). Majme diferenciálnu rovnicu (4.1) s okrajovými podmienkami (4.4). Nech $a(x) \equiv a = \text{konšt.}$, potom MKP s lineárnymi elementami dáva *v uzlových bodoch presné riešenie*.

Poznámka 6.2 (Veta 6.1 platí pre ľubovoľné $f(x)$). Ako uvidíme z dôkazu, veta naozaj platí bez ohľadu na to, ako si zvolíme pravú stranu $f(x)$.

Dôkaz. Veta 6.1 platí pre všeobecné okrajové podmienky (4.4). Dôkaz nerobíme pre všetky kombinácie okrajových podmienok. Na ilustráciu uvažujeme nasledujúce kombinácie, z ktorých už by malo byť zrejme, že to funguje vo všeobecnosti.

1. *Dirichlet+Neumann*, čiže okrajové podmienky (4.3).
2. *Newton+Newton* (resp. Neumann), čiže okrajové podmienky (4.4), v ktorých sú β_1 a β_2 nenulové a $a(x) \equiv 1$.

³Značenie indexom A pochádza z operátorového zápisu diferenciálnej rovnice (4.1), čiže $Au = f$, kde A je diferenciálny operátor definovaný ako $Au = -\frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{du}{dx} \right)$.

⁴Pozri Definíciu A.17 metriky (vzdialenosti) indukovanej normou.

Pre jednoduchosť uvažujme rovnomernú sieť s elementami dĺžky h .⁵

Diferenciálnu rovnicu (4.1) si pre $a(x) \equiv a = \text{konšt.}$ môžeme prepísať na tvar

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{f(x)}{a} =: \hat{f}(x),$$

čo možno chápať ako rovnicu (4.1), v ktorej volíme $a(x) \equiv 1$ a $f(x) = \hat{f}(x)$. Presné riešenie⁶ $u(x)$ spĺňa slabú formuláciu (4.9), pričom platí (4.10). Ak za váhovú funkciu $w(x)$ zvolíme globálnu aproximačnú funkciu $\phi_I(x)$ (definovanú vzťahom (4.22)), dostaneme

$$\int_0^L \frac{du}{dx} \frac{d\phi_I}{dx} dx = \int_0^L \hat{f} \phi_I dx + \left(-\frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=0} \phi_I(0) + \left(\frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=L} \phi_I(L). \quad (6.3)$$

Približné riešenie $U(x)$ spĺňa slabú formuláciu (4.9) (pre $a \equiv 1$ a $f = \hat{f}$), kde konštanty $Q_A^1 = Q_1^1$ a $Q_B^N = Q_2^N$ a priori nie sú známe. Pre voľbu $w(x) = \phi_I(x)$ máme

$$\int_0^L \frac{dU}{dx} \frac{d\phi_I}{dx} dx = \int_0^L \hat{f} \phi_I dx + Q_1^1 \phi_I(0) + Q_2^N \phi_I(L). \quad (6.4)$$

Skúmame (aproximačnú) chybu $\varepsilon(x) = U(x) - u(x)$, preto vzťahy (6.4) a (6.3) od seba odčítame. Po úprave vychádza

$$\int_0^L \frac{d(\overbrace{U-u}^{\varepsilon})}{dx} \frac{d\phi_I}{dx} dx = \left(Q_1^1 - \left(-\frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=0} \right) \phi_I(0) + \left(Q_2^N - \left(\frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=L} \right) \phi_I(L). \quad (6.5)$$

Dirichlet+Neumann. Uvažujme teraz okrajové podmienky (4.3). Druhý člen na pravej strane rovnice (6.5) je nulový vďaka Neumannovej okrajovej podmienke

$$Q_2^N = Q_L = \frac{du}{dx} \Big|_{x=L}.$$

Ak integrál v (6.5) rozdelíme na súčet integrálov cez všetky elementy, tak takmer všetky integrály vypadnú, lebo globálna aproximačná funkcia ϕ_I je na väčšine elementov nulová.

Pre $I = 2, \dots, N$ nám zostane

$$\int_{X_{I-1}}^{X_I} \frac{d\varepsilon}{dx} \underbrace{\frac{d\phi_I}{dx}}_{\frac{1}{h}} dx + \int_{X_I}^{X_{I+1}} \frac{d\varepsilon}{dx} \underbrace{\frac{d\phi_I}{dx}}_{-\frac{1}{h}} dx = \left(Q_1^1 - \left(-\frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=0} \right) \underbrace{\phi_I(0)}_{=0},$$

kde sme na výpočet derivácií využili definíciu (4.22) a vzťahy (4.14) (pozri aj Obr. 4.9 a tiež Príklad 4.10). Ak ešte využijeme Newtonov-Leibnizov vzorec (A.1), dostaneme

$$\frac{1}{h} [\varepsilon]_{X_{I-1}}^{X_I} - \frac{1}{h} [\varepsilon]_{X_I}^{X_{I+1}} = 0.$$

Zavedme zjednodušené označenie $\varepsilon_I := \varepsilon(X_I)$ pre chybu v uzlovom bode X_I . V tomto označení máme

$$(\varepsilon_I - \varepsilon_{I-1}) - (\varepsilon_{I+1} - \varepsilon_I) = 0,$$

a teda

$$-\varepsilon_{I-1} + 2\varepsilon_I - \varepsilon_{I+1} = 0, \quad (6.6)$$

⁵Veta 6.1 platí aj pre nerovnomernú sieť. Rovnomernú sieť používame pre lepšiu prehľadnosť dôkazu.

⁶Lepšie povedané, *presné slabé riešenie*. O slabom riešení sa viac hovorí v sekcii 6.2.

Pre $I = 1$ vzťah (6.5) nepotrebuje, pretože v bode X_1 platí pre presné riešenie $u(x)$ aj pre približné riešenie $U(x)$ Dirichletova okrajová podmienka (pozri (4.3)), čiže $u(X_1) = u_0$ a $U(X_1) = u_0$, a preto

$$\varepsilon_1 = \varepsilon(X_1) = U(X_1) - u(X_1) = 0, \quad (6.7)$$

čiže v bode X_1 je chyba automaticky nulová.

Pre $I = N + 1$ nám zo vzťahu (6.5) zostane

$$\int_{X_N}^{X_{N+1}} \frac{d\varepsilon}{dx} \underbrace{\frac{d\phi_{N+1}}{dx}}_{\frac{1}{h}} dx = 0,$$

z čoho máme po využití Newtonovho-Leibnizovho vzorca rovnicu

$$\varepsilon_{N+1} - \varepsilon_N = 0. \quad (6.8)$$

Rovnice (6.6), (6.7) a (6.8) tvoria sústavu rovníc pre neznáme uzlové chyby $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N+1}$, ktorú môžeme zapísať v tvare

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Matica tejto sústavy je *regulárna* (dá sa ukázať, že determinant je rovný 1).

Newton+Newton. Pozrime sa teraz na prípad Newtonových, resp. Neumannových okrajových podmienok, čiže podmienok (4.4) pre $\beta_1, \beta_2 \neq 0$. Vyjadríme si z nich výrazy pre (analytické) toky potrebné na pravej strane vzťahu (6.5)

$$\left(-\frac{du}{dx}\right)\Big|_{x=0} = \frac{g_1 - \alpha_1 u(0)}{\beta_1}, \quad \left(\frac{du}{dx}\right)\Big|_{x=L} = \frac{g_2 - \alpha_2 u(L)}{\beta_2}. \quad (6.9)$$

Okrajové podmienky (4.4) vyjadrené v reči MKP neznámych majú tvar (4.39), z ktorého vyjadríme (numerické) toky

$$Q_1^1 = \frac{g_1 - \alpha_1 U_1}{\beta_1}, \quad Q_2^N = \frac{g_2 - \alpha_2 U_{N+1}}{\beta_2}. \quad (6.10)$$

Po dosadení tokov (6.9) a (6.10) vzťah (6.5) prejde na tvar

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{d\varepsilon}{dx} \frac{d\phi_I}{dx} dx &= -\frac{\alpha_1}{\beta_1} \underbrace{(U_1 - u(0))}_{\varepsilon(0)=\varepsilon_1} \phi_I(0) - \frac{\alpha_2}{\beta_2} \underbrace{(U_{N+1} - u(L))}_{\varepsilon(L)=\varepsilon_{N+1}} \phi_I(L) \\ &= -\frac{\alpha_1}{\beta_1} \varepsilon_1 \phi_I(0) - \frac{\alpha_2}{\beta_2} \varepsilon_{N+1} \phi_I(L). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Ľavú stranu upravíme analogicky, ako v prípade Dirichlet+Neumann.

Pre $I = 2, \dots, N$ zo vzťahu (6.11) dostaneme, rovnako ako predtým, rovnicu (6.6), lebo celá pravá strana vypadne vďaka $\phi_I(0) = 0$ a $\phi_I(L) = 0$.

Pre $I = 1$ máme $\phi_I(0) = 1$ a $\phi_I(L) = 0$, takže zo vzťahu (6.11) nám zostane

$$\int_{X_1}^{X_2} \frac{d\varepsilon}{dx} \underbrace{\frac{d\phi_1}{dx}}_{-\frac{1}{h}} dx = -\frac{\alpha_1}{\beta_1} \varepsilon_1,$$

z čoho máme

$$-\frac{1}{h}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = -\frac{\alpha_1}{\beta_1}\varepsilon_1, \quad \text{resp.} \quad \left(1 + \frac{\alpha_1}{\beta_1}h\right)\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 0. \quad (6.12)$$

Pre $I = N + 1$ máme $\phi_I(0) = 0$ a $\phi_I(L) = 1$, takže vzťah (6.11) prejde na

$$\int_{X_N}^{X_{N+1}} \frac{d\varepsilon}{dx} \underbrace{\frac{d\phi_{N+1}}{dx}}_{\frac{1}{h}} dx = -\frac{\alpha_2}{\beta_2}\varepsilon_{N+1},$$

z čoho máme

$$\frac{1}{h}(\varepsilon_{N+1} - \varepsilon_N) = -\frac{\alpha_2}{\beta_2}\varepsilon_{N+1}, \quad \text{resp.} \quad -\varepsilon_N + \left(1 + \frac{\alpha_2}{\beta_2}h\right)\varepsilon_{N+1} = 0. \quad (6.13)$$

Rovnice (6.12), (6.7) a (6.13) tvoria sústavu, ktorú môžeme zapísať v tvare

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{\alpha_1}{\beta_1}h & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & -1 & 2 \\ 0 & & \dots & 0 & -1 & 1 + \frac{\alpha_2}{\beta_2}h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dá sa ukázať, že determinant matice sústavy je rovný $\frac{Nh\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1}{\beta_1\beta_2}h$. V praxi bývajú koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ nezáporné.⁷ Matica je teda singulárna len v prípade, ak na oboch okrajoch máme Neumannovu okrajovú podmienku ($\alpha_1, \alpha_2 = 0$). To je ale dobre známy prípad, v ktorom (numerické ani presné) riešenie úlohy nie je jednoznačné.⁸ V ostatných prípadoch je matica sústavy regulárna.⁹

Keďže *matice* sústavy sú v oboch prípadoch *regulárne*, tak *riešenie* oboch sústav je *triviálne*

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_{N+1} = 0,$$

čiže *chyba v uzloch je nulová* a približné MKP riešenie sa v uzloch zhoduje s presným slabým riešením, teda

$$U_1 = u(X_1), \quad U_2 = u(X_2), \quad \dots \quad U_{N+1} = u(X_{N+1}).$$

□

Dôsledok 6.3. V prípade, že presné riešenie je lineárne na každom elemente, tak pomocou MKP dostávame *presné riešenie* dokonca na *celej* výpočtovej *oblasti*. Príklad takejto situácie sme videli v Úlohe 4.31, pozri aj Obr. 4.15.

Poznámka 6.4 (Presné riešenie v hraničných uzlových bodoch pre $a(x) \equiv \text{konšt.}$). Dá sa ukázať, že pri riešení okrajovej úlohy (4.1), (4.4) pre $a(x) \equiv a = \text{konšt.}$ pomocou MKP s elementami vyššieho stupňa dostávame presné riešenie vo všeobecnosti len v hraničných uzlových bodoch elementov.

⁷Napríklad Newtonovej okrajovej podmienke (2.8) zodpovedá voľba $\alpha_1 = \kappa$, $\beta_1 = 1$ a podmienke (2.41) zodpovedá $\alpha_1 = k A(0)$, $\beta_1 = 1$.

⁸Ak máme nejaké riešenie, tak všetky ostatné riešenia získame pripočítaním ľubovoľnej konštanty.

⁹Pozorného čitateľa možno napadne, či menovateľ nemôže byť nulový. Nemôže, rozoberáme prípad $\beta_1, \beta_2 \neq 0$.

Úloha 6.5 (Uzlové chyby | cv06, MKP pre 1D vedenie tepla, chyby a EOC.nb). Začnite z programu cv05, MKP pre 1D vedenie tepla.nb (Úloha 4.29) na riešenie okrajovej úlohy (4.33). Porovnajte uzlové hodnoty presného riešenia $u(x)$ a približného riešenia $U(x)$. Experimentálne na viacerých príkladoch overte, že pre $a(x) \equiv \text{konšt.}$ dáva MKP v hraničných uzloch elementov presné riešenie.

6.2 Pojem klasického a slabého riešenia

V nasledujúcich častiach kapitoly 6 budeme pre jednoduchosť chybu $\varepsilon(x) = U(x) - u(x)$ skúmať na *modelovej okrajovej úlohe*¹⁰

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in (0, 1), \quad (6.14a)$$

$$u(0) = 0, \quad u'(1) = 0. \quad (6.14b)$$

Diferenciálna rovnica (6.14a) je vlastne rovnica (4.1), v ktorej sme zvolili $a(x) \equiv 1$ a $L = 1$. Keďže ide o špeciálny prípad úlohy uvažovanej vo Vete 6.1, tak v uzlových bodoch je chyba $\varepsilon(x)$ nulová. Budeme sa zaujímať ešte o L_2 normu (6.1) a energetickú normu (6.2) chyby $\varepsilon(x)$.

Definícia 6.6 (Klasické riešenie). Nech pravá strana f je spojitá funkcia ($f \in C([0, 1])$). Ak funkcia $u \in C^2([0, 1])$ spĺňa v každom bode $x \in (0, 1)$ diferenciálnu rovnicu (6.14a) a spĺňa aj okrajové podmienky (6.14b), potom funkciu u nazývame *klasickým riešením* okrajovej úlohy (6.14).

Metóda konečných prvkov v skutočnosti hľadá približné riešenie (*aproximáciu*) k tzv. *slabému riešeniu*, ktoré je všeobecnejším pojmom než klasické riešenie.

Na definíciu *slabého riešenia* potrebujeme najprv skonštruovať priestor funkcií, do ktorého bude patriť slabé riešenie.

Slabá formulácia na celej výpočtovej oblasti $\Omega = (0, 1)$ (pozri Poznámku 4.3) má podľa (4.9) v našom prípade tvar

$$\int_0^1 u'(x)w'(x) dx = \int_0^1 f(x)w(x) dx - u'(0)w(0) + u'(1)w(1), \quad (6.15)$$

kde $w(x)$ označuje váhovú funkciu. Pri definícii slabého riešenia sa používajú *váhové funkcie*, ktoré *spĺňajú obmedzujúce* (essential) *okrajové podmienky*, pozri klasifikáciu okrajových podmienok v Poznámke 5.2. V okrajovej úlohe (6.14) je podmienka $u(0) = 0$ obmedzujúcou okrajovou podmienkou, a preto váhová funkcia $w(x)$ musí spĺňať okrajovú podmienku $w(0) = 0$. Ak túto podmienku spolu s okrajovou podmienkou $u'(1) = 0$ využijeme v slabej formulácii (6.15), hraničné členy vypadnú a dostaneme

$$\int_0^1 u'w' dx = \int_0^1 fw dx. \quad (6.16)$$

Pre integrály v slabej formulácii (6.16) budeme používať nasledujúce označenia

$$(f, w) := \int_0^1 fw dx, \quad (6.17)$$

$$(u, w)_A := \int_0^1 u'w' dx. \quad (6.18)$$

¹⁰Záver, ku ktorým pridáme, platia všeobecne pre rovnicu (4.1) s okrajovými podmienkami (4.4), resp. aj pre zložitejšie úlohy, ale všeobecné dôkazy by boli komplikovanejšie.

Symbol $(\cdot, \cdot)$ je *skalárny súčin v priestore* $L_2(0, 1)$.¹¹ Symbol $(\cdot, \cdot)_A$ je tzv. *energetický skalárny súčin*. Označenie indexom A pochádza z operátorového zápisu diferenciálnej rovnice (6.14a) v tvare $Au = f$, kde $A = -\frac{d^2}{dx^2}$ je operátor (záporne vzatej) druhej derivácie, ktorého definičným oborom je množina $D_A = \{u \in C^2([0, 1]), u(0) = 0\}$, čiže funkcie spojité až do 2. derivácie, ktoré majú nulovú hodnotu v bode $x = 0$.¹²

Úloha 6.7. Ukážte, že výrazy (6.17), (6.18) naozaj spĺňajú všetky vlastnosti skalárneho súčinu (čiže symetria, linearita a nezápornosť, pozri Definíciu A.18).

Riešenie. 1. Výraz $(u, v) = \int_0^1 uv \, dx$ definuje skalárny súčin. Nezápornosť je zrejmá, keďže vo výraze $(u, u) = \int_0^1 u^2 \, dx \geq 0$ sa integruje kvadrát. Ďalej musí platiť, že $(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$. Implikácia $\Leftarrow$ je triviálna (integrál nulovej funkcie je nulový). Pozrime sa na implikáciu $\Rightarrow$. Rovnica $(u, u) = \int_0^1 u^2 \, dx = 0$ hovorí, že integrál z nezápornej funkcie u^2 je nulový. Nutne teda musí platiť, že pod integrálom je vlastne nulová funkcia,¹³ $u^2 = 0$, a teda aj $u = 0$. Symetria vyplýva zo symetrie násobenia funkcií

$$(u, v) = \int_0^1 uv \, dx = \int_0^1 vu \, dx = (v, u).$$

Podobne linearita je dôsledkom linearity násobenia funkcií a linearity integrálu

$$(u + cv, w) = \int_0^1 (u + cv)w \, dx = \int_0^1 (uw + cvw) \, dx = \int_0^1 uw \, dx + c \int_0^1 vw \, dx = (u, w) + c(v, w).$$

2. Výraz $(u, v)_A = \int_0^1 u'v' \, dx$ definuje skalárny súčin. Nezápornosť je opäť zrejmá, keďže vo výraze $(u, u)_A = \int_0^1 (u')^2 \, dx \geq 0$ sa tiež integruje kvadrát. Ďalej musí platiť, že $(u, u)_A = 0 \Leftrightarrow u = 0$. Implikácia $\Leftarrow$ je opäť triviálna. Ukážme implikáciu $\Rightarrow$. Rovnica $(u, u)_A = \int_0^1 (u')^2 \, dx = 0$ hovorí, že integrál z nezápornej funkcie $(u')^2$ je nulový. Nutne teda musí platiť, že $u' = 0$, a teda u je konštantná funkcia. V definičnom obore operátora A sú ale iba funkcie, ktoré sú nulové v bode $x = 0$, čo spomedzi konštantných funkcií spĺňa iba funkcia $u = 0$. Symetria a linearita prejdú úplne analogicky ako pri skalárnom súčine (u, v) . Pri linearite sa využije navyše len to, že derivácia je lineárny operátor, čiže $(u + cv)' = u' + cv'$. ■

Skalárny súčin (6.17) indukuje L_2 normu (6.1) a energetický skalárny súčin (6.18) indukuje energetickú normu (6.2) (pre $a = 1$), pozri Definíciu A.19 normy indukovanej skalárnym súčinom. Viac detailov možno nájsť v literatúre z funkcionálnej analýzy, napríklad [5, 13].

S použitím nových označení (6.17), (6.18) slabá formulácia (6.16) prejde na tvar

$$(u, w)_A = (f, w), \quad \text{pre všetky } w \text{ z priestoru } V, \quad (6.19)$$

kde *priestor* V je definovaný ako

$$V = \{w \in L_2(0, 1) \mid (w, w)_A < \infty, w(0) = 0\},$$

čiže priestor funkcií, ktoré majú konečnú L_2 normu $\|w\|_{L_2} = \sqrt{(w, w)} < \infty$, konečnú energetickú normu $\|w\|_A = \sqrt{(w, w)_A} < \infty$ a spĺňajú okrajovú podmienku $w(0) = 0$.¹⁴

¹¹Priestor $L_2(0, 1)$ je vektorový priestor funkcií, ktorých druhá mocnina je Lebesgueovsky integrovateľná, čiže funkcia w je z priestoru $L_2(0, 1)$ ak $(w, w) = \int_0^1 w^2 \, dx < \infty$, inak povedané, má konečnú L_2 normu $\|w\|_{L_2} = \sqrt{(w, w)} < \infty$.

¹²Z funkcionálnej analýzy vieme, že ak máme pozitívny operátor, čiže $(Au, u) \geq 0$ pre ľubovoľné $u \in D_A$, tak z neho vieme vyrobiť skalárny súčin [5, 13].

¹³Presnejšie nulová skoro všade až na množinu bodov miery nula. Tieto funkcie sa však vo funkcionálnej analýze chápú ako ekvivalentné nulovej funkcii a implikácia $\Rightarrow$ sa potom chápe v zmysle tried ekvivalencie [13, 5].

¹⁴Zjednodušene povedané, funkcia $w \in V$ a jej derivácia musia mať nejaké vlastnosti. V priestore $L_2(0, 1)$ nie sú žiadne požiadavky na deriváciu, a teda priestor V je podpriestorom $L_2(0, 1)$.

Definícia 6.8 (Slabé riešenie). Nech funkcia f je z priestoru $L_2(0, 1)$. *Slabým riešením* (alebo tiež *zovšeobecneným riešením*) okrajovej úlohy (6.14) nazývame funkciu u z priestoru V takú, že pre všetky váhové funkcie $w \in V$ platí

$$(u, w)_A = (f, w).$$

Poznámka 6.9 (Presnejšia definícia priestoru V). V kontexte funkcionálnej analýzy je priestor V je istým Hilbertovým priestorom, ktorý je podpriestorom *Sobolevovho priestoru* $W_2^1(\Omega)$, kde $\Omega = (0, 1)$, pozri napríklad knihy [2, 5, 13]. Priestor V sa dá definovať ako

$$V = \{w \in W_2^1(\Omega), w(0) = 0\}.$$

Poznámka 6.10. Dá sa ukázať, že funkcie z priestoru V sú spojité. Viac sa o tom hovorí v knihe [2].

Poznámka 6.11 (Lax-Milgram). Dôležitá otázka je, či vlastne slabé riešenie je jednoznačné. O tom, že *slabé riešenie* je naozaj *jednoznačné*, pojednáva *Laxova-Milgramova veta*, pozri literatúru venovanú funkcionálnej analýze [2, 5, 13].

V ďalších častiach tejto kapitoly budeme skúmať, či riešenie získané metódou konečných prvkov konverguje k slabému riešeniu.

Poznámka 6.12. Všimnime si, že v definícii slabého riešenia vystupuje len Dirichletova okrajová podmienka (v definícii priestoru V) a nevystupuje tu Neumannova okrajová podmienka $u'(1) = 0$.

Poznámka 6.13. Priestor V je „väčší“, než priestor funkcií u , ktoré pripúšťa úloha (6.14). V rovnici (6.14a) je potrebné, aby existovala 2. derivácia, v priestore V sú slabšie požiadavky, preto sa riešenie nazýva slabé. To znamená, že môže nastať aj situácia, keď klasické riešenie problému neexistuje, ale slabé riešenie existuje. Slabé riešenie je teda všeobecnejší pojem.

Máme teda dve rôzne definície riešenia úlohy (6.14): klasické a slabé riešenie. Je preto zaujímavé pozrieť sa detailnejšie na to, aký je medzi nimi súvis a či a za akých okolností sú riešenia totožné.

Veta 6.14. Ak u je klasickým riešením úlohy (6.14), potom je aj slabým riešením.

Dôkaz. Vyplýva to z toho, ako sme prišli k slabej formulácii (6.19), a teda k Definícii 6.8 slabého riešenia. Na začiatku sme uvažovali klasické riešenie $u \in C^2([0, 1])$, vynásobili diferenciálnu rovnicu (6.14a) váhovou funkciou w , integrovali, použili integráciu per partes a okrajové podmienky, čím sme dostali slabú formuláciu (6.19). O funkcii u ani o $f \in C([0, 1])$ sme nepredpokladali nič navyše, a preto klasické riešenie u je zároveň aj slabým riešením. $\square$

Pri opačnom garde je situácia zložitejšia. Slabé riešenie nie je nutne vždy aj klasickým riešením. Platí to len za istých podmienok.

Veta 6.15. Nech $f \in C([0, 1])$ a u je slabé riešenie úlohy (6.14), pričom navyše $u \in C^2([0, 1])$. Potom je funkcia u aj klasickým riešením.

Dôkaz. Hlavnou myšlienkou dôkazu je použitie integrácie per partes $\int_a^b g'h \, dx = [gh]_a^b - \int_a^b gh' \, dx$ na ľavej strane slabej formulácie (6.19) resp. (6.16). Vezmime $g' = w'$ a $h = u'$. Práve na tomto mieste potrebujeme predpoklad vety o existencii druhej derivácie, $u \in C^2([0, 1])$. Ľavá strana v (6.16) sa teda upraví takto

$$\int_0^1 u'w' \, dx = [u'w]_0^1 - \int_0^1 u''w \, dx = u'(1)w(1) - u'(0)\underbrace{w(0)}_{=0} - \int_0^1 u''w \, dx. \quad (6.20)$$

Ako sme hovorili Poznámke 6.10, funkcie v priestore V sú spojité, a teda hodnoty $w(0)$ a $w(1)$ sú dobre definované (konečné) čísla, navyše platí $w(0) = 0$ z definície priestoru V . Po dosadení výrazu (6.20) do slabej formulácie (6.19) dostávame

$$u'(1)w(1) - \int_0^1 u''w \, dx = \int_0^1 fw \, dx, \quad \text{pre ľubovoľné } w \in V. \quad (6.21)$$

Potrebujeme ukázať, že funkcia u spĺňa diferenciálnu rovnicu (6.14a) aj okrajové podmienky (6.14b).
 1. časť: Funkcia u spĺňa diferenciálnu rovnicu. Vo vzťahu (6.21) si môžeme zvoliť ľubovoľné $w \in V$. Zvoľme také funkcie w , že $w(1) = 0$.¹⁵ Vďaka tomu vypadne hraničný člen a máme

$$\begin{aligned} - \int_0^1 u''w \, dx &= \int_0^1 fw \, dx, \\ \int_0^1 (-u'' - f)w \, dx &= 0, \quad \text{pre ľubovoľné } w \in V \text{ také, že } w(1) = 0, \end{aligned}$$

Vďaka ľubovoľnosti w a Dôsledku A.22 (+Poznámky A.23), v ktorom vezmeme $v = -u'' - f$, dostávame $-u'' - f = 0$, a teda $-u'' = f$, čiže slabé riešenie u spĺňa diferenciálnu rovnicu (6.14a).
 2. časť: Funkcia u spĺňa okrajové podmienky. Dirichletova okrajová podmienka $u(0) = 0$ platí, lebo slabé riešenie u je z priestoru V . Platnosť Neumannovej okrajovej podmienky musíme ukázať. Zo vzťahu (6.21) máme

$$u'(1)w(1) + \int_0^1 \underbrace{(-u'' - f)}_{=0} w \, dx = 0, \quad \text{pre ľubovoľné } w \in V,$$

kde využívame, že slabé riešenie spĺňa diferenciálnu rovnicu (1. časť). Zostalo nám teda

$$u'(1)w(1) = 0, \quad \text{pre ľubovoľné } w \in V,$$

čo je tvrdenie, že súčin dvoch čísel $u'(1)$ a $w(1)$ je nulový, pričom číslo $w(1)$ je ľubovoľné. Nutne teda musí platiť $u'(1) = 0$, a teda slabé riešenie spĺňa obe okrajové podmienky (6.14b).

Keďže slabé riešenie u spĺňa diferenciálnu rovnicu (6.14a) aj okrajové podmienky (6.14b), tak je zároveň aj klasickým riešením. $\square$

Úloha 6.16 (Slabé riešenie). Presvedčte sa, že presné riešenie Úlohy 4.31 získané v Úlohe 4.32 je naozaj slabým riešením.

¹⁵Touto voľbou vlastne redukovujeme výber w na podpriestor celého priestoru V .

Riešenie. Slabá formulácia na celej výpočtovej oblasti má pre diferenciálnu rovnicu (4.1) so všeobecnými okrajovými podmienkami (4.4) tvar (4.9), čiže

$$\int_0^L a \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dx = \int_0^L f w dx + \left(-a \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=0} w(0) + \left(a \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=L} w(L), \quad \text{pre ľubovoľné } w \in V,$$

pričom tu máme $L = d$. Vlastnosti priestoru V závisia od toho, aké máme konkrétne okrajové podmienky. Keďže v Úlohe 4.31 máme Dirichletove okrajové podmienky, tak priestor V je definovaný takto

$$V = \{w \in L_2(0, d) \mid (w, w)_A < \infty, w(0) = 0, w(d) = 0\}.$$

Váhové funkcie w teda spĺňajú homogénne Dirichletove okrajové podmienky. Navyše, keďže v Úlohe 4.31 máme $f(x) \equiv 0$ tak slabá formulácia sa zredukuje na tvar

$$\int_0^d a \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dx = 0, \quad \text{pre ľubovoľné } w \in V.$$

Zostáva teda overiť nulovosť tohto integrálu. Dosadíme funkciu $a(x)$ definovanú vzťahom (4.43) a presné riešenie $u(x)$ v tvare (4.44)

$$\begin{aligned} \int_0^d a \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dx &= \int_0^{d_1} \underbrace{\lambda_1 \frac{du_1}{dx}}_{\text{konšt.}} \frac{dw}{dx} dx + \int_{d_1}^d \underbrace{\lambda_2 \frac{du_2}{dx}}_{\text{konšt.}} \frac{dw}{dx} dx \stackrel{1.}{=} \lambda_1 \frac{du_1}{dx} \int_0^{d_1} \frac{dw}{dx} dx + \lambda_2 \frac{du_2}{dx} \int_{d_1}^d \frac{dw}{dx} dx \\ &\stackrel{2.}{=} \lambda_1 \frac{du_1}{dx} (w(d_1) - \underbrace{w(0)}_{=0}) + \lambda_2 \frac{du_2}{dx} (\underbrace{w(d)}_{=0} - w(d_1)) \stackrel{3.}{=} \underbrace{\left(\lambda_1 \frac{du_1}{dx} - \lambda_2 \frac{du_2}{dx} \right)}_{=0} w(d_1) \stackrel{4.}{=} 0 \end{aligned}$$

Pri úpravách sme postupne využili:

1. Vyňatie konštánt pred integrál. Derivácie funkcií u_1 a u_2 sú konštantné, lebo sú to lineárne funkcie (majú tvar (4.46)).
2. Newtonov-Leibnizov vzorec (A.1).
3. Okrajové podmienky pre váhovú funkciu w .
4. Spojitosť tepelného toku (4.45) (resp. môžeme dosadiť za u_1 a u_2 ich tvar (4.46), ale je to zbytočné, keďže pri odvodení tohto tvaru sme so spojitosti toku vychádzali).

Integrál je teda naozaj nulový pre ľubovoľnú váhovú funkciu $w \in V$, slabá formulácia je splnená a riešenie z Úlohy 4.32 je vskutku slabým riešením Úlohy 4.31. ■

6.3 Ritzova-Galerkinova metóda

Ritzova-Galerkinova (R-G) metóda¹⁶ hľadá aproximáciu U slabého riešenia u . Metóda konečných prvkov je špeciálnym prípadom R-G metódy. Čitateľov so záujmom o hlbšie pochopenie matematiky (funkcionálnej analýzy), ktorá je za MKP obraciame na knihu [2]. Vo zvyšku tejto kapitoly využívame postupy práve z tejto knihy.

Základnou myšlienkou R-G metódy je, že *približné riešenie* U hľadáme v *konečnorozmernom podpriestore* V_n priestoru V (čiže $U \in V_n \subset V$) tak, aby pre U platilo

$$(U, w)_A = (f, w), \quad \text{pre všetky } w \text{ z priestoru } V_n \subset V. \quad (6.22)$$

Poznámka 6.17. Rovnica (6.22) pripomína slabú formuláciu (6.19). Zásadný rozdiel ale je, že funkcie w neberieme z celého priestoru V , ale len z konečnorozmerného podpriestoru V_n .

¹⁶Často sa jej hovorí aj *Ritzova metóda* alebo *Rayleigho-Ritzova metóda*.

Otázka je, či sa dá vždy nájsť konečnorozmerný podpriestor V_n tak, aby platila rovnica (6.22). Dá sa ukázať, že áno. V sekcii 6.4.1 skonštruujeme jeden takýto priestor. Riešenie U je navyše jediné a konverguje k slabému riešeniu u , keď zvyšujeme dimenziu priestoru V_n .¹⁷ O existencii jedineho riešenia hovorí nasledujúca veta.

Veta 6.18. Nech $f \in L_2$. Potom R-G metóda dáva jediné riešenie $U \in V_n$. Navyše rovnica (6.22) je ekvivalentná riešeniu sústavy lineárnych algebraických rovníc s maticou $n \times n$, pričom n je dimenzia podpriestoru V_n ($n = \dim V_n$).

Dôkaz. 1. časť: Rovnica (6.22) je ekvivalentná riešeniu sústavy lineárnych algebraických rovníc.

Rovnica (6.22) vlastne predstavuje sústavu nekonečne veľa rovníc, pretože v priestore V_n je nekonečne veľa funkcií a pre každú funkciu máme jednu rovnicu. Keďže priestor V_n je *konečnorozmerný*, tak môžeme vybrať *konečnú bázu* $\{\phi_I\}_{I=1}^n$, teda množinu lineárne nezávislých funkcií $\phi_1, \dots, \phi_n$, pomocou ktorých sa dajú vyjadriť všetky funkcie z priestoru V_n , inak povedané, lineárnym obalom¹⁸ bázy je celý priestor, $\text{span}\{\phi_I\}_{I=1}^n = V_n$. Ľubovoľnú funkciu $w \in V_n$ vieme vyjadriť v tvare lineárnej kombinácie báзовých funkcií

$$w = \sum_{I=1}^n w_I \phi_I,$$

kde $w_1, \dots, w_n$ sú reálne čísla.

Poznámka 6.19. Ako uvidíme neskôr, napríklad v 1D pre MKP s lineárnymi elementami je priestor V_n tvorený po častiach lineárnymi funkciami a báзовými funkciami sú globálne aproximačné funkcie (4.22), Obr. 4.9, okrem funkcie ϕ_1 , lebo tá nespĺňa Dirichletovu okrajovú podmienku $w(0) = 0$, ktorú majú spĺňať všetky funkcie w z priestoru $V_n \subset V$.

Zvoľme v rovnici (6.22) za funkciu w postupne všetky báзовé funkcie $\phi_1, \dots, \phi_n$. Dostaneme sústavu n rovníc

$$(U, \phi_I)_A = (f, \phi_I), \quad I = 1, \dots, n. \quad (6.23)$$

Ak každú z rovníc postupne vynásobíme ľubovoľným číslom w_I a rovnice zosumujeme, dostaneme

$$\sum_{I=1}^n w_I (U, \phi_I)_A = \sum_{I=1}^n w_I (f, \phi_I),$$

z čoho vďaka linearite skalárnych súčinov $(\cdot, \cdot)$ a $(\cdot, \cdot)_A$ máme

$$\left(U, \underbrace{\sum_{I=1}^n w_I \phi_I}_w \right)_A = \left(f, \underbrace{\sum_{I=1}^n w_I \phi_I}_w \right),$$

kde $\sum_{I=1}^n w_I \phi_I = w$ je ľubovoľná funkcia z priestoru V_n . Vidíme, že ak rovnica (6.22) platí pre báзовé funkcie (čiže ak platí vzťah (6.23)), tak potom automaticky platí pre ľubovoľnú funkciu $w \in V_n$. To znamená, že rovnicu (6.22) netreba riešiť pre všetky funkcie $w \in V_n$, stačí zobrať báзовé funkcie. Týmto sme ukázali, že rovnica (6.22) je ekvivalentná riešeniu sústavy n rovníc (6.23).

Zapíšme sústavu (6.23) ešte maticovo. Približné riešenie U tiež patrí do priestoru V_n , takže ho tiež vieme rozložiť do bázy

$$U = \sum_{J=1}^n U_J \phi_J.$$

¹⁷Niekedy sa tomu hovorí aj rozširovanie priestoru V_n .

¹⁸Lineárny obal sú všetky možné lineárne kombinácie.

Dosaďme tento rozklad do rovnice (6.23), máme teda

$$\left(\sum_{J=1}^n U_J \phi_J, \phi_I \right)_A = (f, \phi_I), \quad I = 1, \dots, n$$

a vďaka linearite skalárneho súčinu dostávame tzv. *Ritzovu-Galerkinovu sústavu* lineárnych rovníc

$$\sum_{J=1}^n U_J (\phi_J, \phi_I)_A = (f, \phi_I), \quad I = 1, \dots, n.$$

Je to sústava n rovníc s n neznámymi $U_1, \dots, U_n$. Maticový tvar sústavy je

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (\phi_1, \phi_1)_A & (\phi_2, \phi_1)_A & \dots & (\phi_n, \phi_1)_A \\ (\phi_1, \phi_2)_A & (\phi_2, \phi_2)_A & \dots & (\phi_n, \phi_2)_A \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\phi_1, \phi_n)_A & (\phi_2, \phi_n)_A & \dots & (\phi_n, \phi_n)_A \end{bmatrix}}_K \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}}_U = \underbrace{\begin{bmatrix} (f, \phi_1) \\ (f, \phi_2) \\ \vdots \\ (f, \phi_n) \end{bmatrix}}_F. \quad (6.24)$$

Dostali sme sústavu rovníc s tzv. Ritzovou-Galerkinovou maticou K rozmeru $n \times n$.¹⁹ Rovnica (6.22) je teda ekvivalentná tejto sústave.²⁰

Poznámka 6.20. V MKP sa Ritzova-Galerkinova matica K nazýva globálna matica tuhosti a je riedka (obsahuje veľa núl), pozri rovnice (4.36), (4.38) alebo (5.12). Vo Fourierovej metóde je R-G matica diagonálna, lebo bázoové funkcie $\phi_1, \dots, \phi_n$ tam tvoria ortogonálny systém.

Na to, aby bola sústava dobre definovaná, musia v nej vystupovať konečné čísla. Treba teda ukázať, že výrazy $(\phi_J, \phi_I)_A$ aj (f, ϕ_I) sú konečné. Vidno to po využití Cauchyho-Schwarzovej nerovnosti (A.20)

$$\begin{aligned} |(\phi_J, \phi_I)_A| &\leq \|\phi_J\|_A \|\phi_I\|_A < \infty, \\ |(f, \phi_I)| &\leq \|f\|_{L_2} \|\phi_I\|_{L_2} < \infty, \end{aligned}$$

pričom v poslednom kroku sme využili, že ϕ_I je z priestoru $V_n \subset V \subset L_2(0, 1)$ a f je z priestoru $L_2(0, 1)$.

2. časť: R-G metóda dáva jediné riešenie úlohy (6.22).

Jednoznačnosť riešenia úlohy (6.22) sa redukuje na jednoznačnosť riešenia sústavy (6.24) a tú ukážeme sporom. Nech sústava nemá jediné riešenie. Potom matica K je singulárna, čiže existuje nenulový vektor $c = (c_1, \dots, c_n)^T$, pre ktorý platí, že $Kc = 0$. Vytvorme funkciu $v = \sum_{I=1}^n c_I \phi_I$. Pre funkciu v platí

$$(v, v)_A = \left(\sum_{J=1}^n c_J \phi_J, \sum_{I=1}^n c_I \phi_I \right)_A = \sum_{I, J=1}^n c_J \underbrace{(\phi_J, \phi_I)_A}_{K_{JI}} c_I = c^T \underbrace{Kc}_{=0} = 0,$$

teda skalárny súčin $(v, v)_A$ je nulový a to podľa vlastností skalárneho súčinu (pozri Definíciu A.18) platí práve vtedy, keď $v = 0$, čiže keď vektor c je nulový a to je spor. $\square$

Dokázali sme, že Ritzova-Galerkinova metóda je dobre definovaná, čiže vždy dáva jediné riešenie. V ďalšej časti budeme skúmať chybu $\varepsilon = U - u$ Ritzovej-Galerkinovej metódy.

¹⁹Hovorí sa jej aj *Gramova matica*, keďže jej prvkami sú skalárne súčiny vektorov (funkcií) $\phi_1, \dots, \phi_n$.

²⁰Študenti MPM sa s Ritzovou-Galerkinovou metódou stretnú aj na predmete Funkcionálna analýza (pozri mapu predmetov na Obr. 1). Tam sa jej hovorí Ritzova metóda a odvodenie sústavy (6.24) sa robí minimalizáciou kvadratického funkcionálu $F[u] = (u, u)_A - 2(f, u)$.

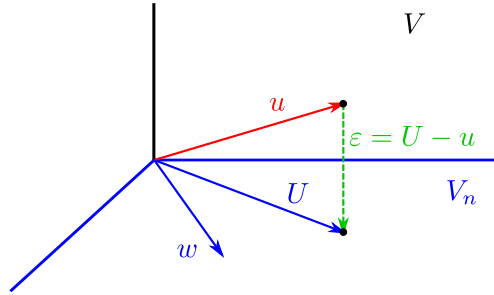
6.4 Odhad chyby Ritzovej-Galerkinovej metódy

Najprv budeme skúmať chybu v energetickej norme $\|\varepsilon\|_A = \|U - u\|_A$, potom v L_2 norme $\|\varepsilon\|_{L_2} = \|U - u\|_{L_2}$. Začneme dôležitou vlastnosťou chyby.

Veta 6.21 (Vlastnosť ortogonalnosti). Chyba $\varepsilon = U - u$ je v zmysle energetického skalárneho súčinu kolmá (ortogonálna) na všetky funkcie $w \in V_n \subset V$ (Obr. 6.2), teda

$$(\varepsilon, w)_A = (U - u, w)_A = 0. \quad (6.25)$$

Tejto vlastnosti sa hovorí aj *Galerkinova ortogonalita*.



Obr. 6.2. Schematický obrázok, ilustrácia vlastnosti ortogonalnosti. Chyba $\varepsilon = U - u$ je kolmá na všetky funkcie w z podpriestoru $V_n \subset V$ (čiže aj na približné riešenie $U \in V_n$).

Dôkaz. Pre približné riešenie U platí rovnica (6.22), teda

$$(U, w)_A = (f, w), \quad \text{pre všetky } w \in V_n \subset V. \quad (6.26)$$

Podobne pre slabé riešenie u podľa Definície 6.8 platí²¹

$$(u, w)_A = (f, w), \quad \text{pre všetky } w \in V, \text{ a teda aj pre všetky } w \in V_n \subset V. \quad (6.27)$$

Keď od rovnice (6.26) odčítame rovnicu (6.27), dostaneme vlastnosť ortogonalnosti (6.25). $\square$

Vlastnosť ortogonalnosti (6.25) môžeme interpretovať aj tak, že približné riešenie $U \in V_n$ je vlastne projekciou²² presného riešenia $u \in V$ do priestoru $V_n \subset V$, pozri Obr. 6.2.

Lemma 6.22 (Optimalita R-G metódy (Céaova lemma)). Riešenie získané R-G metódou je optimálne v energetickej norme, teda

$$\|U - u\|_A \leq \|v - u\|_A, \quad \text{pre všetky } v \in V_n. \quad (6.28)$$

Dôkaz. Skúmame chybu v energetickej norme (resp. jej druhú mocninu)

$$\begin{aligned} \|U - u\|_A^2 &\stackrel{1.}{=} (U - u, U - u)_A \stackrel{2.}{=} \underbrace{(U - u, U)_A}_{=0} + (U - u, -u)_A \stackrel{3.}{=} (U - u, -u)_A \\ &\stackrel{4.}{=} \underbrace{(U - u, v)_A}_{=0} + (U - u, -u)_A \stackrel{2.}{=} (U - u, v - u)_A \stackrel{5.}{\leq} \|U - u\|_A \|v - u\|_A, \quad \forall v \in V_n. \end{aligned}$$

²¹V Definícii 6.8 slabého riešenia vystupuje ľubovoľná funkcia v z priestoru V , ale keďže w je z podpriestoru $V_n \subset V$, tak pre ňu tiež rovnica platí.

²²V zmysle energetického skalárneho súčinu (6.18).

kde sme v jednotlivých krokoch využili tieto skutočnosti:

1. Definícia A.19 normy indukovanej skalárnym súčinom.
2. Linearita skalárneho súčinu.
3. Vlastnosť ortogonalít. Funkcia U je z priestoru V_n a podľa vlastnosti ortogonalít (6.25) je kolmá na chybu $U - u$, preto člen $(U - u, U)_A$ vypadne.
4. Pripočítanie nuly v tvare $0 = (U - u, v)_A$, kde v je ľubovoľná funkcia z priestoru V_n (čiže podľa (6.25) kolmá na chybu $U - u$).
5. Cauchyho-Schwarzova nerovnosť (A.10). Na jej ľavej strane nám síce chýba absolútna hodnota, ale tú si tam môžeme beztrešne doplniť, keďže sme začínali s nezáporným číslom.

Ak získanú nerovnicu $\|U - u\|_A^2 \leq \|U - u\|_A \|v - u\|_A$ predelíme normou $\|U - u\|_A$, získame nerovnicu (6.28).

Deliť však môžeme iba ak $\|U - u\|_A \neq 0$, čiže ak chyba nie je nulová, čiže ak U nie je presným slabým riešením, $U \neq u$. Nerovnica (6.28) ale triviálne platí aj pre tento prípad, keďže na ľavej strane by sme mali nulu a tá je určite menšia alebo rovná ako akékoľvek nezáporné číslo na pravej strane. $\square$

Poznámka 6.23 (Optimalita R-G metódy). Nerovnicu (6.28) môžeme interpretovať aj takto: Pre každú funkciu $v \in V_n$, ktorú dosadíme do výrazu $\|v - u\|_A$ dostaneme horný odhad na energetickú chybu $\|U - u\|_A$. Rovnosť nastane práve v prípade, keď dosadíme $v = U$.

Čiže najlepšia funkcia v , teda taká, ktorá je v energetickej metrike najbližšie^a k slabému riešeniu u , je práve Ritzovo-Galerkinovo riešenie $v = U$. Dá sa tomu intuitívne rozumieť aj pomocou schematického Obr. 6.2. V podpriestore V_n naozaj nič bližšie k presnému riešeniu u nenájde. Najbližšie je práve projekcia presného riešenia $u \in V$ do priestoru V_n , čiže približné riešenie $U \in V_n$.

^aPozri Definíciu A.17 metriky indukovanej normou.

Dôsledok 6.24 (Optimalita R-G metódy). Pre všetky možné funkcie v dostávame rôzne horné odhady na energetickú chybu. Dobrý nápad je nájsť najlepší (najmenší) horný odhad, čiže v nerovnici (6.28) môžeme minimalizovať cez všetky $v \in V_n$ a dostaneme

$$\|U - u\|_A = \min_{v \in V_n} \|v - u\|_A. \quad (6.29)$$

Keby sme chceli byť opatrní, tak vo vzťahu (6.29) ponecháme znamienko $\leq$. Ale keďže vieme, že funkcia U je tiež jednou z funkcií $v \in V_n$, tak minimalizácia nemôže dať nič väčšie než číslo $\|U - u\|_A$ (minimum cez $v \in V_n$ sa nadobúda pre $v = U$). Starostlivejšia argumentácia prechodu od rovnice (6.28) k rovnici (6.29) je v knihe [2] v časti 0.3.

Doteraz sme sa zaoberali energetickou chybou $\|\varepsilon\|_A = \|U - u\|_A$, teraz sa pozrieme aj na L_2 chybu $\|\varepsilon\|_{L_2} = \|U - u\|_{L_2}$. Uvidíme, že tieto dve chyby spolu súvisia. Uvažujme funkciu $w \in C^2([0, 1])$, ktorá je riešením tzv. *duálnej úlohy*

$$\begin{aligned} -w''(x) &= U(x) - u(x), & x &\in (0, 1), \\ w(0) &= 0, & w'(1) &= 0, \end{aligned} \quad (6.30)$$

čo je vlastne pôvodná okrajová úloha (6.14) s pravou stranou rovnou chybe $\varepsilon = U - u$. Funkciu w využijeme pri skúmaní L_2 chyby.

Lemma 6.25. Pre L_2 chybu platí nasledujúca nerovnica

$$\|U - u\|_{L_2} \leq \frac{\|w - v\|_A}{\|w''\|_{L_2}} \|U - u\|_A, \quad \text{pre všetky } v \in V_n, \quad (6.31)$$

kde funkcia $w \in C^2([0, 1])$ je riešením duálnej úlohy (6.30).

Dôkaz. Skúmame druhú mocninu L_2 chyby

$$\begin{aligned} \|U - u\|_{L_2}^2 &\stackrel{1.}{=} (U - u, U - u) \stackrel{2.}{=} (-w'', U - u) \stackrel{3.}{=} \int_0^1 -w''(U - u) dx \\ &\stackrel{4.}{=} [-w'(U - u)]_0^1 + \int_0^1 w'(U - u)' dx \\ &\stackrel{5.}{=} - \underbrace{\left[\underbrace{w'(1)}_{=0} (U(1) - u(1)) - \underbrace{w'(0)}_{=0} (\underbrace{U(0)}_{=0} - \underbrace{u(0)}_{=0}) \right]}_{=0} + (w, U - u)_A \stackrel{6.}{=} (w, U - u)_A \\ &\stackrel{7.}{=} (w, U - u)_A + \underbrace{(-v, U - u)_A}_{=0} \stackrel{8.}{=} (w - v, U - u)_A \stackrel{9.}{\leq} \|w - v\|_A \|U - u\|_A, \quad \forall v \in V_n. \end{aligned}$$

V jednotlivých krokoch sme využili tieto skutočnosti:

1. Definícia A.19 normy indukovanej skalárnym súčinom.
2. Definícia duálnej úlohy (6.30), teda $-w'' = U - u$.
3. Definícia (6.17) skalárneho súčinu v L_2 priestore.
4. Integrácia per partes $\int_a^b g' h dx = [gh]_a^b - \int_a^b gh' dx$, pričom vezmeme $g' = -w''$ a $h = U - u$.
5. Rozpísanie hraničného člena a definícia energetického skalárneho súčinu (6.18).
6. Okrajové podmienky pre slabé riešenie u , približné riešenie U a riešenie duálnej úlohy w .
7. Pripočítanie nuly v tvare $0 = (-v, U - u)_A$, kde v je ľubovoľná funkcia z priestoru V_n (pozri vlastnosť ortogonalít (6.25)).
8. Linearita skalárneho súčinu.
9. Cauchyho-Schwarzova nerovnosť (A.10), pozri aj krok 5. v dôkaze Lemmy 6.22.

Dospeli sme teda k nerovnici

$$\|U - u\|_{L_2}^2 \leq \|w - v\|_A \|U - u\|_A, \quad \text{pre všetky } v \in V_n.$$

Tu už sa začína črtiť, že L_2 chyba a energetická chyba budú nejako súvisieť. Na ľavej strane využijeme v jednej norme $\|U - u\|_{L_2} = \|-w''\|_{L_2} = \|w''\|_{L_2}$, čiže definíciu duálnej úlohy (6.30). Dostávame

$$\|U - u\|_{L_2} \|w''\|_{L_2} \leq \|w - v\|_A \|U - u\|_A, \quad \text{pre všetky } v \in V_n.$$

Predelíme faktorom $\|w''\|_{L_2}$ a dostávame nerovnicu (6.31). Deliť môžeme iba ak $\|w''\|_{L_2} = \|U - u\|_{L_2} \neq 0$, čiže ak chyba $\varepsilon = U - u$ nie je nulová, teda ak U nie je presným (slabým) riešením, $U \neq u$. Ak je chyba nulová, tak jej energetická norma aj L_2 norma sú nulové a nie je čo skúmať. $\square$

Dôsledok 6.26. V nerovnici (6.31) je podobná situácia ako v nerovnici (6.28). Požijeme rovnakú argumentáciu ako v Dôsledku 6.24.

Pravá strana (6.31) nám dáva (nekonečne) veľa horných odhadov L_2 chyby $\|U - u\|_{L_2}$ (pre každé v jeden odhad). Opäť môžeme nájsť najlepší (najmenší) horný odhad, čiže v nerovnici

(6.31) môžeme minimalizovať (spraviť infimum) cez všetky $v \in V_n$ a dostaneme

$$\|U - u\|_{L_2} \leq \left(\frac{\inf_{v \in V_n} \|w - v\|_A}{\|w''\|_{L_2}} \right) \|U - u\|_A. \quad (6.32)$$

Infimum, sme aplikovali na celú pravú stranu nerovnice (6.31), ale uplatnilo sa len v čitateli zlomku, keďže, nikde inde funkcia v nevystupuje.

Poznámka 6.27 (Minimum verzus infimum). Pár slov k tomu, prečo v nerovnici (6.32) píšeme infimum a nie minimum. Infimum je vlastne také opatrné minimum. Ak si nie sme istí, či sa najnižšia hodnota výrazu $\|w - v\|_A$ naozaj nadobudne pre niektorú funkciu $v \in V_n$, tak píšeme radšej infimum. V Dôsledku 6.24 sme si boli istí, že najnižšia hodnota výrazu $\|v - u\|_A$ sa nadobúda pre funkciu $v = U$, ktorá je z priestoru V_n , preto sme určite mohli písať minimum (aj infimum).

Poznámka 6.28. Keby v nerovnici (6.32) bol faktor

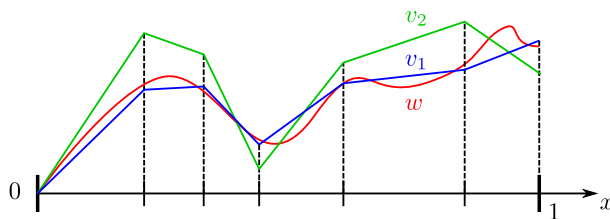
$$\frac{\inf_{v \in V_n} \|w - v\|_A}{\|w''\|_{L_2}}$$

malé číslo (menšie ako 1), tak chyba v L_2 norme by bola menšia ako v energetickej norme. Vo Vete 6.31, uvedenej nižšie, to aj budeme predpokladať.

Úloha 6.29. Pozrite sa na tabuľky v Úlohe 6.38 a presvedčte sa, že L_2 chyba naozaj vychádza vždy (pre všetky počty elementov N aj všetky stupne elementov s) menšia, než energetická chyba.

Poznámka 6.30 (Infimum $\inf_{v \in V_n} \|w - v\|_A$ súvisí s kvalitou aproximácie). Číslo $\inf_{v \in V_n} \|w - v\|_A$ je vlastne chyba najlepšej možnej aproximácie funkcie $w \in C^2([0, 1])$ funkciou v z priestoru V_n . Čím lepšie dokážeme funkciu w aproximovať v priestore V_n , tým menšie je číslo $\inf_{v \in V_n} \|w - v\|_A$.

Ako príklad si môžeme predstaviť priestor V_n ako priestor po častiach lineárnych funkcií (s fixovanými uzlovými bodmi). Na Obr. 6.3 vidíme dve aproximácie v_1 a v_2 funkcie w . Očividne, aproximácia v_1 je lepšia, my ale hľadáme najlepšiu možnú (v energetickej norme) aproximáciu, čiže funkciu v , ktorá dá najmenšiu normu $\|w - v\|_A$ (je ku w najbližšie v energetickej metrike).



Obr. 6.3. Aproximácia funkcie w po častiach lineárnymi funkciami v_1 a v_2 .

Predpoklad, že faktor $\inf_{v \in V_n} \|w - v\|_A / \|w''\|_{L_2}$ je malé číslo sformulujeme do nasledujúcej vety.

Veta 6.31 (Aproximačný predpoklad). Každá funkcia $w \in V$, ktorá má druhú deriváciu z priestoru $L_2(0, 1)$, sa dá v energetickej norme dobre aproximovať funkciami z konečnorozmerného priestoru $V_n \subset V$, pričom platí

$$\inf_{v \in V_n} \|w - v\|_A \leq \delta \|w''\|_{L_2}, \quad (6.33)$$

kde δ je malé číslo.

Upozornenie: Všimnime si, že Vetu 6.31 sme formulovali pre aproximáciu ľubovoľnej funkcie $w \in V$, pre ktorú $w'' \in L_2(0, 1)$. Jednou z nich je napríklad aj konkrétna funkcia w , ktorá je riešením duálnej úlohy (6.30).

Poznámka 6.32 (Interpretácia aproximačného predpokladu). Podľa Definície A.12 *krivosť grafu* $K(x)$ súvisí s druhou deriváciou $w''(x)$. Navyše, podľa Poznámky A.13, ak je prvá derivácia malá, $|w'(x)| \ll 1$, tak krivosť sa približne rovná druhej derivácii (v absolútnej hodnote), $K(x) \approx |w''(x)|$. Tento súvis nám spolu s Poznámkou 6.30 dáva interpretáciu nerovnice (6.33): *Chyba najlepšej aproximácie závisí od krivosti grafu aproximovanej funkcie.*

V sekcii 6.4.1 aproximačný predpoklad (6.33) dokážeme pre špeciálny prípad priestoru V_n tvoreného po častiach lineárnymi funkciami. Teraz budeme predpokladať, že aproximačný predpoklad je splnený a pozrieme sa na dôsledky.

Veta 6.33 (Odhady chýb). Majme priestor V_n , v ktorom je splnený aproximačný predpoklad (platí Veta 6.31). Pre riešenie $U \in V_n$, ktoré je aproximáciou slabého riešenia $u \in V$ platia nasledujúce odhady chyby

$$\|U - u\|_A \leq \delta \|f\|_{L_2} \quad \text{odhad chyby v energetickej norme} \quad (6.34)$$

$$\|U - u\|_{L_2} \leq \delta^2 \|f\|_{L_2} \quad \text{odhad chyby v } L_2 \text{ norme} \quad (6.35)$$

Dôkaz. Na dôkaz oboch odhadov len priamo využijeme niekoľko vyššie uvedených vzťahov.

1. časť: Odhad energetickej chyby.

$$\|U - u\|_A \stackrel{1.}{=} \min_{v \in V_n} \|v - u\|_A \stackrel{2.}{=} \inf_{v \in V_n} \|u - v\|_A \stackrel{3.}{\leq} \delta \|u''\|_{L_2} \stackrel{4.}{=} \delta \|f\|_{L_2}. \quad (6.36)$$

Využili sme tieto skutočnosti:

1. Optimalita R-G metódy (6.29).
2. V tomto prípade $\min = \inf$, pozri Poznámku 6.27.
3. Aproximačný predpoklad (6.33) použitý pre slabé riešenie $u \in V$.
4. Rovnicu (6.14a), čiže $-u'' = f$.

2. časť: Odhad L_2 chyby.

$$\|U - u\|_{L_2} \stackrel{1.}{\leq} \left(\frac{\inf_{v \in V_n} \|w - v\|_A}{\|w''\|_{L_2}} \right) \|U - u\|_A \stackrel{2.}{\leq} \delta \|U - u\|_A \stackrel{3.}{\leq} \delta^2 \|f\|_{L_2}.$$

V jednotlivých krokoch sme využili toto:

1. Nerovnica (6.32).
2. Aproximačný predpoklad (6.33).
3. Vzťah (6.36) z 1. časti dôkazu.

□

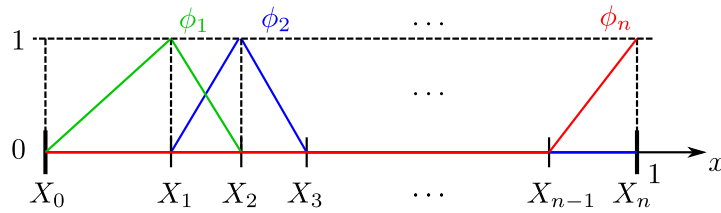
Poznámka 6.34. V odhadoch chýb (6.34), (6.35) nám vyšlo, že chyby závisia od (normy) pravej strany f . To je prirodzené, keďže samotné riešenia U aj u závisia od pravej strany.

6.4.1 Konštrukcia priestoru V_n , v ktorom platí aproximačný predpoklad

Doteraz sme postupovali všeobecne, nekonkretizovali sme konečnorozmerný podpriestor $V_n \subset V$. V tejto časti skonštruujeme jeden príklad priestoru V_n , ktorý sa používa v MKP a pre ktorý platí Veta 6.31 (aproximačný predpoklad). Priestor V_n tvoria funkcie v , pre ktoré platí:

1. Funkcie sú spojité, $v \in C([0, 1])$.
2. Ak máme delenie intervalu $[0, 1]$ na podintervaly $[X_{I-1}, X_I]$ pre $I = 1, \dots, n$, potom funkcia v je lineárna na každom podintervale.
3. Funkcie spĺňajú okrajovú podmienku $v(0) = 0$.

Bázu $\{\phi_I\}_{I=1}^n$ priestoru V_n tvoria funkcie na Obr. 6.4, čo sú vlastne *globálne aproximačné funkcie* (4.22). Všetky báзовé funkcie musia spĺňať okrajovú podmienku $\phi_I(0) = 0$. Kvôli tejto okrajovej podmienke tu nezahŕňame funkciu ϕ_1 z Obrázka 4.9 a používame posunuté číslovanie uzlových bodov a globálnych aproximačných funkcií.²³ Lubovoľnú funkciu $v \in V_n$ vieme pomocou bázy vyjadriť ako lineárnu kombináciu $v(x) = \sum_{I=1}^n v(X_I)\phi_I(x)$.



Obr. 6.4. Báza priestoru V_n tvoreného po častiach lineárnymi funkciami.

Poznámka 6.35. Podobne by sa konštruoval napríklad aj priestor po častiach kvadratických funkcií. Využili by sa globálne aproximačné funkcie z Obrázka 4.10.

Dôkaz Vety 6.31 (aproximačného predpokladu)

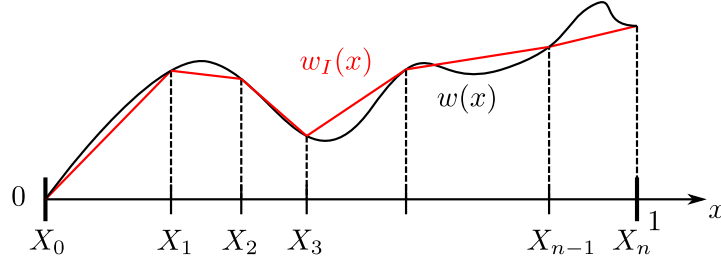
Potrebujeme ukázať, že v skonštruovanom priestore V_n je splnený aproximačný predpoklad (6.33). Základná myšlienka je, že výraz $\inf_{v \in V_n} \|w - v\|_A$, teda chybu najlepšej možnej aproximácie funkcie w (pozri Poznámku 6.30), odhadneme zhora pomocou *lineárnej interpolácie* funkcie w (Obr. 6.5)

$$w_{\text{int}}(x) = \sum_{I=1}^n w(X_I)\phi_I(x).$$

Interpolant w_{int} je po častiach lineárna funkcia, čiže patrí do priestoru V_n . Horný odhad chyby najlepšej aproximácie teda vyzerá takto

$$\inf_{v \in V_n} \|w - v\|_A \leq \|w - w_{\text{int}}\|_A$$

²³Tunajšia funkcia ϕ_1 je vlastne definovaná vzťahom (4.22) pre $I = 2$.

Obr. 6.5. Interpolant $w_{\text{int}}(x)$, ktorý vznikne lineárnou interpoláciou funkcie $w(x)$.

a platí preto, lebo infimum $\inf_{v \in V_n} \|w - v\|_A$ je určite menšie alebo rovné výrazu $\|w - v\|_A$ nech za v dosadíme akúkoľvek konkrétnu funkciu z priestoru V_n . Teraz sme dosadili $v = w_{\text{int}}$. Chybu najlepšej možnej po častiach lineárnej aproximácie $\inf_{v \in V_n} \|w - v\|_A$ sme teda zhora odhadli *interpolačnou chybou* $\|w - w_{\text{int}}\|_A$.

Zostáva nám ukázať, že pre interpolačnú chybu platí $\|w - w_{\text{int}}\|_A \leq \delta \|w''\|_{L_2}$. To priamo tvrdí nasledujúca lemma.

Lemma 6.36 (Aproximačná veta pre interpolant). Nech $w \in V$ je funkcia taká, že $w'' \in L_2(0, 1)$ a nech $h = \max_{I=1, \dots, n} (X_I - X_{I-1})$ je tzv. diameter delenia. Potom platí

$$\|w - w_{\text{int}}\|_A \leq ch \|w''\|_{L_2}, \quad (6.37)$$

kde c je konštanta, ktorá nezávisí od w ani od h .

Dôkaz tejto lemy je pomerne technický a urobíme ho na konci tejto kapitoly. V dôkaze nám vyjde $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (pozri vzťah (6.51)). Vďaka Lemme 6.36 teda máme

$$\inf_{v \in V_n} \|w - v\|_A \leq \|w - w_{\text{int}}\|_A \leq ch \|w''\|_{L_2}. \quad (6.38)$$

Tým je dôkaz aproximačného predpokladu (Vety 6.31) ukončený. $\square$

6.4.2 Rád konvergenzie metódy konečných prvkov

Porovnaním nerovnice (6.38) s aproximačným predpokladom (6.33) vidíme, že v priestore V_n zo sekcie 6.4.1 tvorenom po častiach lineárnymi funkciami je predpoklad splnený pre $\delta = ch$. Odhady chýb z Vety 6.33 majú preto tvar

$$\begin{aligned} \|U - u\|_A &\leq ch \|f\|_{L_2} && \text{odhad chyby v energetickej norme,} \\ \|U - u\|_{L_2} &\leq c^2 h^2 \|f\|_{L_2} && \text{odhad chyby v } L_2 \text{ norme,} \end{aligned}$$

kde U je riešenie získané pomocou metódy konečných prvkov s lineárnymi elementami. Chyba je teda 1. rádu v energetickej norme a 2. rádu v L_2 norme. Nakoniec uvádzame ešte vetu, ktorá hovorí o presnosti metódy konečných prvkov všeobecne. Detaily možno nájsť v knihe [12], v časti 14.5.

Veta 6.37 (Rád konvergenzie MKP). Vo všeobecnosti pre ľubovoľnú dimenziu úlohy, rád rovnice k a stupeň elementu s má metóda konečných prvkov v L_2 norme presnosť rádu

$$r = s + 1$$

a v *energetickej norme*

$$r = s - \frac{1}{2}k + 1.$$

Pre rovnice 2. rádu máme teda v L_2 norme presnosť rádu $s+1$ a v energetickej norme presnosť rádu s .

Experimentálny rád konvergenzie numerickej metódy

Predstavme si, že máme nejakú numerickú metódu (nemusí to byť MKP) a zaujíma nás, aká je presná. Ak poznáme presné riešenie našej úlohy, tak môžeme rád presnosti numerickej metódy experimentálne odhadnúť – vypočítať *experimentálny rád konvergenzie* (EOC – Experimental Order of Convergence) metódy ako

$$\text{EOC}(h, h') = \log_{\frac{h}{h'}} \left(\frac{\text{chyba}(h)}{\text{chyba}(h')} \right), \quad \text{resp.} \quad \text{EOC}(h, h') = \frac{\ln \left(\frac{\text{chyba}(h)}{\text{chyba}(h')} \right)}{\ln \frac{h}{h'}} \quad (6.39)$$

kde $\text{chyba}(h)$ je L_2 resp. energetická chyba pri sieti s veľkosťou elementov h ,²⁴ $\text{chyba}(h')$ je ten istý druh chyby pri sieti s menšou veľkosťou elementov h' (jemnejšia sieť) a $\log_{\frac{h}{h'}}$ je logaritmus pri základe $\frac{h}{h'}$.

Obvykle sa pri zjemnení siete uvažuje polovičná veľkosť elementov, čiže $h' = h/2$, potom pre EOC máme ľahšie zapamätateľný vzorec

$$\text{EOC}(h, h/2) = \log_2 \left(\frac{\text{chyba}(h)}{\text{chyba}(h/2)} \right), \quad (6.40)$$

Prečo vzorec (6.39) dáva odhad rádu konvergenzie metódy? Ak metóda konverguje, tak chyba je vo všeobecnosti úmerná h^r , kde r je rád metódy, takže

$$\text{chyba}(h) \approx ch^r, \quad \text{chyba}(h') \approx c(h')^r. \quad (6.41)$$

Odhadnime, koľkonásobne klesne chyba pri zjemnení

$$\frac{\text{chyba}(h)}{\text{chyba}(h')} \approx \frac{ch^r}{c(h')^r} = \left(\frac{h}{h'} \right)^r. \quad (6.42)$$

Čiže napríklad pri zjemnení siete na polovicu ($h' = h/2$) chyba klesne približne 2^r -krát (lebo $\left(\frac{h}{h/2}\right)^r = 2^r$). Približný vzťah pre rád konvergenzie teda získame, keď na odhad (6.42) aplikujeme $\log_{\frac{h}{h'}}$. Dostávame odhad rádu konvergenzie metódy v tvare

$$r \approx \log_{\frac{h}{h'}} \left(\frac{\text{chyba}(h)}{\text{chyba}(h')} \right).$$

Ak numerická metóda konverguje s rádom r , tak tento odhad je tým presnejší, čím menšie je h . Inak povedané, pre veľmi malé h sa EOC blíži k hodnote r .

Úloha 6.38 (Výpočet chýb a EOC | cv06, MKP pre 1D vedenie tepla, chyby a EOC.nb). V programe z Úlohy 4.29 (resp. 6.5) urobte analýzu chýb a experimentálneho rádu konvergenzie.

1. Naprogramujte výpočet L_2 normy (6.1) a energetickej normy (6.2) chyby $\varepsilon = U - u$.
2. Zvoľte stupeň elementu $s = 1$. Postupne vypočítajte a uložte L_2 chybu aj energetickú chybu pre počet elementov $N = 1, 2, 4, 8, 16$. Počítajte pre jednotlivé zjemnenia siete EOC pomocou vzťahu (6.40). Sledujte, ako sa obe chyby zmenšujú. L_2 chyba by mala

²⁴Presnejšie povedané, h je vo všeobecnosti parameter, ktorý opisuje jemnosť siete. V 1D sa používa diameter delenia, v 2D to môže byť nejaká analogická miera, napríklad priemer najväčšej vpísanej kružnice.

klesať druhým rádom (EOC by sa malo blížiť k číslu 2), čiže pri každom zjemnení siete zhruba na štvrtinu. Energetická chyba by mala klesať prvým rádom ($\text{EOC} \rightarrow 1$), čiže pri každom zjemnení zhruba na polovicu. Výsledky prehľadne zobrazte v tabuľke. Pre okrajovú úlohu (4.33) s presným riešením (3.16) vidíme výsledky v Tabuľke 6.1.

Tabuľka 6.1. Chyby a EOC pre stupeň elementu $s = 1$.

N	L_2 chyba	EOC L_2	Energ. chyba	EOC Energ.
1	0.6784		2.028	
2	0.179	1.922	1.094	0.8909
4	0.04555	1.974	0.5578	0.9714
8	0.01144	1.993	0.2803	0.9926
16	0.002865	1.998	0.1403	0.9981
32	0.0007165	1.9995	0.0702	0.9995

3. Rovnakú analýzu ako v bode 2. urobte pre stupeň elementu $s = 2$ a $s = 3$. Výsledky vidíme v Tabuľkách 6.2 a 6.3. Presvedčte sa o tom, že v L_2 norme chyba naozaj klesá rádom $s + 1$ a v energetickej norme rádom s , ako tvrdí Veta 6.37.

Tabuľka 6.2. Chyby a EOC pre stupeň elementu $s = 2$.

N	L_2 chyba	EOC L_2	Energ. chyba	EOC Energ.
1	0.02661		0.206	
2	0.003848	2.79	0.06579	1.647
4	0.0005383	2.838	0.0179	1.878
8	0.00006977	2.948	0.004583	1.965
16	0.000008806	2.986	0.001153	1.991
32	0.000001103	2.996	0.0002887	1.998

Tabuľka 6.3. Chyby a EOC pre stupeň elementu $s = 3$.

N	L_2 chyba	EOC L_2	Energ. chyba	EOC Energ.
1	0.005328		0.06058	
2	0.0004654	3.517	0.00993	2.609
4	0.00003323	3.808	0.001376	2.851
8	0.000002165	3.94	0.0001774	2.955
16	0.0000001368	3.984	0.00002236	2.988
32	0.000000008575	3.996	0.000002801	2.997

Úloha 6.39 (*Výpočet chýb a EOC pre DR 4. rádu | MKP pre DR 4. rádu, chyby a EOC.nb). V programe MKP pre DR 4. rádu.nb z Úlohy 5.11 pre riešenie okrajovej úlohy (5.4) urobte analýzu chýb a experimentálneho rádu konvergenie.

1. Naprogramujte výpočet L_2 normy chyby (6.1) a energetickej normy chyby, ktorá má pre diferenciálnu rovnicu (5.1) tvar

$$\|\varepsilon\|_A = \|U - u\|_A = \sqrt{\int_0^L b(U'' - u'')^2 dx}.$$

2. Postupne vypočítajte a uložte L_2 chybu aj energetickú chybu pre počet elementov $N = 1, 2, 4, 8$. Pre jednotlivé zjemnenia siete počítajte EOC pomocou vzťahu (6.40). Podľa Vety 6.37 by (pre tunajšie $s = 3$ a $k = 4$) mala L_2 chyba klesať 4. rádom a energetická chyba 2. rádom. Výsledky zobrazte v tabuľke. Pre okrajovú úlohu (5.4) s presným riešením (5.5) vidíme výsledky v Tabuľke 6.4.

Tabuľka 6.4. Chyby a EOC pre MKP riešenie rovnice 4. rádu.

N	L_2 chyba	EOC L_2	Energ. chyba	EOC Energ.
1	0.00332		0.07454	
2	0.0002075	4.	0.01863	2.
4	0.00001297	4.	0.004658	2.
8	0.0000008106	4.	0.001165	2.

Poznámka 6.40 (EOC v iných metódach). Experimentálny odhad rádu konvergenzie sa používa pre rôzne numerické metódy, nie len MKP. Využiť ho môžeme aj pri analýze konvergenzie metódy konečných diferencií v Úlohe 3.4. Princíp je vždy rovnaký – nejakým vhodným spôsobom zadefinujeme chybu metódy, a potom postupne zjemňujeme sieť na polovicu a pomocou vzťahu (6.40) počítame EOC.

Poznámka 6.41 (EOC $\neq$ dôkaz konvergenzie). Výpočet EOC sa nepoužíva na dôkaz konvergenzie numerickej metódy. EOC totiž v samotnej konštrukcii (vo vzťahoch (6.41)) predpokladá, že metóda konverguje. Navyše, ak numerická metóda konverguje, tak vo všeobecnosti nevieme povedať, či vypočítaná hodnota EOC skutočný rád konvergenzie nadhodnocuje alebo podhodnocuje.

EOC sa počíta pre konkrétnu úlohu, čiže ani z tohto dôvodu nedokazuje konvergenziu numerickej metódy. Ak nám EOC nejako vyjde pre jednu úlohu, nie je a priori zaručené, že vyjde podobne pre inú oblasť a iné okrajové podmienky. Na druhej strane, EOC nám vie ľahko odhaliť, že metóda nekonverguje. Ak nevidíme konvergenziu na konkrétnej úlohe, tak naša metóda nekonverguje vo všeobecnosti.

6.4.3 Dôkaz Lemmy 6.36 (aproximačnej vety pre interpolant).

Na záver tejto kapitoly nám zostáva dokázať aproximačnú vetu pre interpolant (Lemma 6.36). Ako sme hovorili, tento dôkaz je pomerne technický a trochu zdĺhavý.²⁵ Na sprehľadnenie dôkazu používame vo vzorcoch rôzne farby textu.

Označme *chybu interpolácie* ako $E(x) = w_{\text{int}}(x) - w(x)$. Potrebujeme odhadnúť jej energetickú normu (resp. kvadrát energetickej normy)

$$\|w_{\text{int}} - w\|_A^2 = \|E\|_A^2 = \int_0^1 (E'(x))^2 dx = \sum_{I=1}^n \int_{X_{I-1}}^{X_I} (E'(x))^2 dx. \quad (6.43)$$

Využili sme definíciu energetickej normy (indukovanej skalárnym súčinom (6.18)) a integrál sme rozdelili na sumu integrálov na jednotlivých elementoch.

²⁵Komu zvykne byť pri takýchto dôkazoch nevoľno, odporúčame zapíť tabletku Kinedrylu.

Substitúcia

Na výpočet integrálu $\int_{X_{I-1}}^{X_I} (E'(x))^2 dx$ najskôr pomocou substitúcie prevedieme integračnú oblasť $[X_{I-1}, X_I]$ na interval $[0, 1]$

$$x = X_{I-1} + \underbrace{(X_I - X_{I-1})}_{h_I} t, \quad t \in [0, 1],$$

$$dx = h_I dt,$$
(6.44)

kde h_I je veľkosť I -teho elementu. Označme $G(t) = E(x(t))$ a vypočítajme ešte derivácie $G'(t)$ a $G''(t)$, ktoré budeme potrebovať pri substitúciách

$$G'(t) = \frac{dG}{dt} = \frac{dE}{dx} \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{h_I} = h_I E'(x(t)) \quad \Rightarrow \quad E'(x(t)) = \frac{G'(t)}{h_I},$$

$$G''(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dG}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(h_I \frac{dE}{dx} \right) = h_I \frac{d^2 E}{dx^2} \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{h_I} = h_I^2 E''(x(t)).$$
(6.45)

Vďaka substitúcii máme

$$\int_{X_{I-1}}^{X_I} (E'(x))^2 dx = \int_0^1 \frac{(G'(t))^2}{h_I^2} h_I dt = \frac{1}{h_I} \int_0^1 (G'(t))^2 dt.$$
(6.46)

Technika prevedenia veličín, ktoré závisia od siete na veličiny nezávislé od siete sa pri odhadoch chýb často používa. V angličtine sa jej hovorí *homogeneity argument* (alebo aj *scaling argument*).

Odhad integrandu $(G'(t))^2$

Chyba interpolácie je v koncových bodoch intervalu $[X_{I-1}, X_I]$ nulová (Obr. 6.5), čiže

$$G(0) = E(X_{I-1}) = 0, \quad G(1) = E(X_I) = 0.$$

Funkcia G má teda v koncových bodoch intervalu $[0, 1]$ rovnakú hodnotu, a preto kvôli Rolleho vete (Veta A.7) musí v intervale $(0, 1)$ existovať bod ξ , v ktorom je derivácia nulová, $G'(\xi) = 0$. To môžeme využiť na to, aby sme do hry dostali druhú deriváciu. Nech t je ľubovoľný bod z intervalu $[0, 1]$

$$G'(t) = G'(t) - \underbrace{G'(\xi)}_{=0} = \int_{\xi}^t G''(s) ds,$$
(6.47)

kde sme využili Newtonov-Leibnizov vzorec (A.1). Vzťah (6.47) umocníme a urobíme odhad

$$(G'(t))^2 = \left(\int_{\xi}^t 1 \cdot G''(s) ds \right)^2 \stackrel{1.}{\leq} \left| \int_{\xi}^t 1^2 ds \right| \cdot \left| \int_{\xi}^t (G''(s))^2 ds \right| \stackrel{2.}{\leq} |t - \xi| \int_0^1 (G''(s))^2 ds.$$
(6.48)

V jednotlivých krokoch sme využili tieto skutočnosti:

1. Cauchyho-Schwarzova nerovnosť (A.10) na intervale $[\xi, t]$ (resp. $[t, \xi]$ ak $t < \xi$), čiže $(1, G'')^2 \leq \|1\|_{L_2}^2 \|G''\|_{L_2}^2$. Absolútne hodnoty píšeme preto, lebo nemáme zaručené, že $t > \xi$. Ak $t < \xi$, tak hranice integrálov by mali byť vymenené. Práve to rieši absolútna hodnota.
2. Výpočet prvého integrálu $\int_{\xi}^t 1 ds = t - \xi$ a zväčšenie integračnej oblasti v druhom integráli (to môžeme urobiť, lebo integrand je nezáporný)

$$\left| \int_{\xi}^t (G''(s))^2 ds \right| \leq \int_0^1 (G''(s))^2 ds.$$

Výpočet integrálu $\frac{1}{h_I} \int_0^1 (G'(t))^2 dt$

Teraz môžeme odhad (6.48) dosadiť do integrálu (6.46) a vypočítať ho

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_I} \int_0^1 (G'(t))^2 dt &\leq \frac{1}{h_I} \int_0^1 |t - \xi| \underbrace{\left(\int_0^1 (G''(s))^2 ds \right)}_{\text{číslo (konštanta)}} dt \stackrel{1.}{=} \frac{1}{h_I} \left(\int_0^1 (G''(s))^2 ds \right) \int_0^1 |t - \xi| dt \\ &\stackrel{2.}{=} \frac{1}{2h_I} \int_0^1 (G''(s))^2 ds \stackrel{3.}{\leq} \frac{1}{2h_I} \int_{X_{I-1}}^{X_I} h_I^4 (E''(x))^2 \frac{dx}{h_I} = \frac{h_I^2}{2} \int_{X_{I-1}}^{X_I} (E''(x))^2 dx. \end{aligned} \quad (6.49)$$

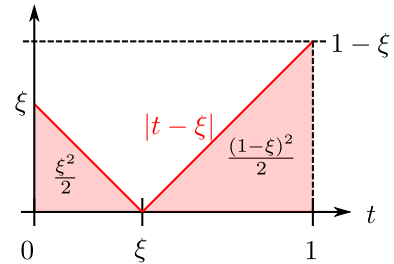
Pri výpočte sme použili tieto kroky:

1. Vyňatie konštanty pred integrál.
2. Graf funkcie $|t - \xi|$ vidíme na Obr. 6.6. Integrál môžeme vypočítať geometricky ako obsah plochy dvoch pravouhlých trojuholníkov

$$\int_0^1 |t - \xi| dt = \frac{\xi^2}{2} + \frac{(1 - \xi)^2}{2} = \xi^2 - \xi + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2},$$

pričom na odhad v poslednom kroku sme využili, že pre $\xi \in [0, 1]$ platí $\xi^2 \leq \xi$.

3. Spätná substitúcia (6.44), (6.45), čiže použijeme vzťah $(G''(s))^2 = h_I^4 (E''(x))^2$ a $ds = \frac{dx}{h_I}$.



Obr. 6.6. Geometrický výpočet integrálu $\int_0^1 |t - \xi| dt$.

Dokončenie dôkazu

Keď odhad (6.49) dosadíme do vzťahu (6.46), tak pre integrál na jednom elemente dostávame odhad

$$\int_{X_{I-1}}^{X_I} (E'(x))^2 dx \leq \frac{h_I^2}{2} \int_{X_{I-1}}^{X_I} (E''(x))^2 dx. \quad (6.50)$$

Zistili sme teda, že medzi integrálmi z kvadrátu prvej, resp. druhej derivácie je istý súvis. To je prirodzené, keďže ak druhá derivácia funkcie má nejaké vlastnosti, tak prvá derivácia je nimi ovplyvnená.

Teraz už konečne môžeme dosadiť odhad (6.50) do vzťahu (6.43) a dokončiť výpočet.

$$\begin{aligned} \|w_{\text{int}} - w\|_A^2 &= \sum_{I=1}^n \int_{X_{I-1}}^{X_I} (E'(x))^2 dx \leq \sum_{I=1}^n \frac{h_I^2}{2} \int_{X_{I-1}}^{X_I} (E''(x))^2 dx \stackrel{1.}{=} \sum_{I=1}^n \frac{h_I^2}{2} \int_{X_{I-1}}^{X_I} (w''(x))^2 dx \\ &\stackrel{2.}{\leq} \frac{h^2}{2} \sum_{I=1}^n \int_{X_{I-1}}^{X_I} (w''(x))^2 dx \stackrel{3.}{=} \frac{h^2}{2} \int_0^1 (w''(x))^2 dx \stackrel{4.}{=} \frac{h^2}{2} \|w''\|_{L_2}^2. \end{aligned}$$

Pri výpočte sme použili tieto skutočnosti:

1. Interpolant w_{int} je na každom elemente lineárna funkcia, čiže $w''_{\text{int}} = 0$, a preto pre chybu E platí $E'' = w'' + w''_{\text{int}} = w''$.
2. Horný odhad h_I pomocou diametra delenia $h_I \leq h = \max_{I=1, \dots, n} h_I$.
3. Spojenie integrálov na elementoch do integrálu na celej oblasti $[0, 1]$.
4. Definícia L_2 normy.

Po odmocnení dostávame odhad energetickej chyby interpolácie

$$\|w_{\text{int}} - w\|_A \leq \frac{h}{\sqrt{2}} \|w''\|_{L_2}. \quad (6.51)$$

Porovnaním so vzťahom (6.37) vidíme, že môžeme zobrať $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Tým je dôkaz aproximačnej vety pre interpolant (Lemma 6.36) dokončený. $\square$

Kapitola 7

Riešenie nestacionárnych úloh pomocou MKP

V tejto kapitole ukážeme, ako sa pomocou MKP riešia nestacionárne úlohy. Algoritmus MKP budeme ilustrovať na modelovej nestacionárnej parciálnej diferenciálnej rovnici v 1D, ktorá obsahuje druhú aj štvrtú priestorovú deriváciu a prvú aj druhú časovú deriváciu

$$c_2 \partial_t^2 u + c_1 \partial_t u + c_0 u - \partial_x(a \partial_x u) + \partial_x^2(b \partial_x^2 u) = f(x, t), \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, T]. \quad (7.1)$$

Používame skrátene označenie parciálnych derivácií $\partial_t u := \frac{\partial u}{\partial t}$, $\partial_x^2 u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ a podobne. Neznámou je funkcia dvoch premenných $u(x, t)$. Materiálové charakteristiky a, b, c_0, c_1, c_2 sú funkciami priestorovej premennej x , nezávisia od času t . Funkcia $f(x, t)$ predstavuje zdroj (napríklad intenzitu vonkajších síl). Rovnica (7.1) pre špeciálne voľby materiálových charakteristík zahŕňa aj stacionárne rovnice 2. rádu (4.1) (pre $c_2 = 0, c_1 = 0, c_0 = 0, b = 0$) a 4. rádu (5.1) (pre $c_2 = 0, c_1 = 0, c_0 = 0, a = 0$), ktoré sme pomocou MKP riešili v kapitolách 4 a 5. Vďaka tomu, čo sme sa tam naučili, využijeme aj v tejto kapitole.

V prípade, ak $b \neq 0$, tak rovnica (7.1) je 4. rádu v priestore a zadávame 4 *okrajové podmienky* (dve na každom okraji výpočtovej oblasti). V každom z bodov $x = 0$ resp. $x = L$ zadáme 2 okrajové podmienky takto:

1. Špecifikujeme buď $u(x, t)$ alebo $-a \partial_x u + \partial_x(b \partial_x^2 u)$ pre všetky $t \in (0, T]$.
2. Špecifikujeme buď $\partial_x u(x, t)$ alebo $b \partial_x^2 u$ pre všetky $t \in (0, T]$.

Ak máme $b = 0$, čiže rovnica (7.1) je iba 2. rádu v priestore, tak zadávame 2 okrajové podmienky (jednu na každom okraji výpočtovej oblasti). V každom z bodov $x = 0$ resp. $x = L$ špecifikujeme buď $u(x, t)$ alebo $-a \partial_x u$ pre všetky $t \in (0, T]$.

Poznámka 7.1 (Klasifikácia okrajových podmienok). Ako uvidíme zo slabej formulácie (7.8), (7.9) a na základe Poznámky 5.2, pre $b \neq 0$ predstavuje špecifikovanie $u(x, t)$ alebo $\partial_x u(x, t)$ na hranici *obmedzujúcu* (essential) okrajovú podmienku a špecifikovanie $-a \partial_x u + \partial_x(b \partial_x^2 u)$ či $b \partial_x^2 u$ je *prirodzenou* (natural) okrajovou podmienkou.

Keďže rovnica (7.1) je nestacionárna, musíme pridať aj *počiatočné podmienky*. Najvyššia časová derivácia (v prípade $c_2 \neq 0$) je druhá, preto zadávame dve počiatočné podmienky

1. Špecifikujeme $u(x, 0)$ pre všetky $x \in [0, L]$.
2. Špecifikujeme $c_2 \partial_t u(x, 0) + c_1 u(x, 0)$ pre všetky $x \in [0, L]$.

V prípade $c_2 = 0$ je rovnica (7.1) iba prvého rádu v čase a zadávame iba jednu počiatočnú podmienku, menovite $u(x, 0)$, pre $x \in [0, L]$.

Rovnica (7.1) je veľmi všeobecná a zahŕňa množstvo modelov. *Špeciálnymi prípadmi* sú napríklad:

- Nestacionárna rovnica vedenia tepla (2.6) ($c_2 = 0, c_1 = c\rho, c_0 = 0, a = \lambda, b = 0$)

$$c\rho\partial_t u - \partial_x(\lambda\partial_x u) = f(x, t). \quad (7.2)$$

- Vlnová rovnica pre pozdĺžne kmitanie prúta (2.39) ($c_2 = \rho A, c_1 = 0, c_0 = 0, a = EA, b = 0$)

$$\rho A \partial_t^2 u - \partial_x(EA \partial_x u) = f(x, t). \quad (7.3)$$

V prípade $c_1 \neq 0$ ide o tlmené kmitanie.

- Priečne kmitanie nosníka (2.53) ($c_2 = \rho A, c_1 = 0, c_0 = kd, a = 0, b = EI$)

$$\rho A \partial_t^2 u + kd u + \partial_x(EI \partial_x^2 u) = f(x, t).$$

Pri programovaní v softvéri Wolfram Mathematica budeme riešiť modelovú diferenciálnu rovnicu, kde $c_2 = 0, c_0 = 0, b = 0$, čiže

$$c_1 \partial_t u - \partial_x(a \partial_x u) = f(x, t), \quad (7.4)$$

čo zahŕňa rovnicu (7.2).

7.1 Základná myšlienka

Základnou myšlienkou metódy konečných prvkov pre nestacionárne úlohy je *separácia premenných* x a t . Približné riešenie U^e na elemente Ω^e budeme hľadať v tvare

$$U^e(x, t) = \sum_{j=1}^m v_j^e(t) \psi_j^e(x), \quad (7.5)$$

kde m je celkový počet primárnych neznámych na elemente, $\psi_j^e(x)$ sú také isté aproximačné funkcie, aké sme používali v stacionárnom prípade v kapitolách 4, 5 a funkcie $v_j^e(t)$ opisujú časovú závislosť primárnych neznámych v uzlových bodoch. V celej kapitole 7 budeme postupovať všeobecne – element Ω^e môže predstavovať element ľubovoľného stupňa a $\psi_j^e(x)$ sú jemu zodpovedajúce aproximačné funkcie.

Poznámka 7.2 (Označenie primárnych neznámych). Všimnime si, že v približnom riešení (7.5) označujeme primárne neznáme písmenom v . Je to preto, lebo môžu reprezentovať neznámu u , ale aj jej deriváciu $\partial_x u$ v uzlových bodoch, pozri vzťah (5.7).

Poznámka 7.3 (Post-processing v ANSYS). V softvéri ANSYS Mechanical APDL existujú v podstate dva druhy vizualizácie riešenia nestacionárnych úloh. Pomocou **Main Menu** **General Postproc** môžeme vykresliť približné riešenie $U(x, t)$ v konkrétnych časoch t na celej výpočtovej oblasti, prípadne vygenerovať video z celého časového priebehu. Pomocou **Main Menu** **TimeHist Postpro** môžeme vykresliť časový priebeh uzlovej hodnoty $v_j^e(t)$ vo vybranom uzlovom bode x_j^e .

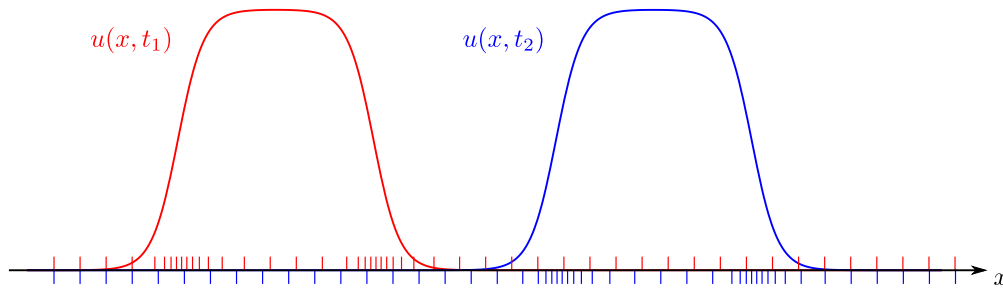
7.2 Priestorová diskretizácia

Keďže časová premenná t sa v rozklade (7.5) vyskytuje len v uzlových hodnotách neznámych, tak pri priestorovej diskretizácii budeme postupovať v podstate rovnako ako v stacionárnych úlohách, čiže podľa algoritmu zo sekcie 4.1. Hlavný rozdiel je v tom, že *neznámymi* nie sú čísla, ale *funkcie* *premennej* t . Časovú diskretizáciu budeme robiť až v ďalšom kroku (v sekcii 7.3).

7.2.1 Diskretizácia výpočtovej oblasti

Diskretizácia výpočtovej oblasti na elementy sa dá urobiť dvoma spôsobmi. Buď použijeme *statickú* (v každom čase rovnakú) *sieť* vytvorenú identickým spôsobom ako v stacionárnych úlohách (sekcia 4.2) alebo môžeme uvažovať *adaptívnu* (s časom sa meniacu) *sieť* (Obr. 7.1). V tejto učebnici budeme používať statickú sieť.

Poznámka 7.4 (Adaptívna sieť). V prípade siete, ktorá sa s časom mení, je vhodné v každom čase vytvoriť hustú sieť tam, kde očakávame veľké priestorové derivácie riešenia a riedku v miestach, kde očakávame malé derivácie, pozri Obr. 7.1.



Obr. 7.1. Adaptívna sieť. Vykresľujeme riešenie v čase t_1 , resp. t_2 so zodpovedajúcimi rôznymi sieťami.

7.2.2 Sústava rovníc na elemente

Slabá formulácia. Slabú formuláciu odvodíme štandardným postupom. Vyberieme element $\Omega^e = [x_A^e, x_B^e]$, diferenciálnu rovnicu (7.1) vynásobíme váhovou funkciou¹ $w(x)$ a zintegrujeme na elemente Ω^e . Dostaneme

$$\int_{x_A^e}^{x_B^e} c_2 \partial_t^2 u w \, dx + \int_{x_A^e}^{x_B^e} c_1 \partial_t u w \, dx + \int_{x_A^e}^{x_B^e} c_0 u w \, dx - \int_{x_A^e}^{x_B^e} \partial_x (a \partial_x u) w \, dx + \int_{x_A^e}^{x_B^e} \partial_x^2 (b \partial_x^2 u) w \, dx = \int_{x_A^e}^{x_B^e} f w \, dx. \quad (7.6)$$

V posledných dvoch integráloch na ľavej strane pomocou integrácie per partes prevedieme polovicu derivácií na váhovú funkciu (pozri sekcie 4.3.1 a 5.1.1), teda využijeme

$$\begin{aligned} \int_{x_A^e}^{x_B^e} \partial_x (a \partial_x u) w \, dx &= [a \partial_x u w]_{x_A^e}^{x_B^e} - \int_{x_A^e}^{x_B^e} a \partial_x u \partial_x w \, dx, \\ \int_{x_A^e}^{x_B^e} \partial_x^2 (b \partial_x^2 u) w \, dx &= [\partial_x (b \partial_x^2 u) w]_{x_A^e}^{x_B^e} - \int_{x_A^e}^{x_B^e} \partial_x (b \partial_x^2 u) \partial_x w \, dx \\ &= [\partial_x (b \partial_x^2 u) w]_{x_A^e}^{x_B^e} - [b \partial_x^2 u \partial_x w]_{x_A^e}^{x_B^e} + \int_{x_A^e}^{x_B^e} b \partial_x^2 u \partial_x^2 w \, dx. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Po dosadení vzťahov (7.7) do rovnice (7.6) prehodíme hraničné členy na pravú stranu a dostávame *slabú formuláciu*

$$\begin{aligned} \int_{x_A^e}^{x_B^e} c_2 \partial_t^2 u w \, dx + \int_{x_A^e}^{x_B^e} c_1 \partial_t u w \, dx + \int_{x_A^e}^{x_B^e} c_0 u w \, dx + \int_{x_A^e}^{x_B^e} a \partial_x u \partial_x w \, dx + \int_{x_A^e}^{x_B^e} b \partial_x^2 u \partial_x^2 w \, dx \\ = \int_{x_A^e}^{x_B^e} f w \, dx + Q_1^e w(x_A^e) + Q_2^e (\partial_x w)|_{x_A^e} + Q_3^e w(x_B^e) + Q_4^e (\partial_x w)|_{x_B^e}, \end{aligned} \quad (7.8)$$

¹Všimnime si, že váhová funkcia závisí len od priestorovej premennej x a nezávisí od času t .

kde $Q_1^e, \dots, Q_4^e$ označujú *sekundárne neznáme*

$$\begin{aligned} Q_1^e &:= \left[-a \partial_x u + \partial_x (b \partial_x^2 u) \right] \Big|_{x_A^e}, & Q_2^e &:= - \left(b \partial_x^2 u \right) \Big|_{x_A^e}, \\ Q_3^e &:= \left[a \partial_x u - \partial_x (b \partial_x^2 u) \right] \Big|_{x_B^e}, & Q_4^e &:= \left(b \partial_x^2 u \right) \Big|_{x_B^e}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Z pohľadu na hraničné členy v slabej formulácii (7.8) vieme, že *primárnymi neznámymi* sú uzlové hodnoty funkcie $u(x, t)$ a jej derivácie $\theta(x, t) = \partial_x u(x, t)$, pozri Poznámku 5.1.

Aproximačné funkcie. Približné riešenie $U^e(x, t)$ na elemente Ω^e hľadáme v tvare (7.5), pričom používame aproximačné funkcie $\psi_1^e(x), \dots, \psi_m^e(x)$, ktoré sme pre rovnicu 2. rádu (čiže $b = 0$) odvodili v kapitole 4 a pre rovnicu 4. rádu ($b \neq 0$) v kapitole 5.

Dosadenie približného riešenia a aproximačných funkcií do slabej formulácie. V slabej formulácii (7.8) za neznámu funkciu $u(x)$ dosadíme približné riešenie $U^e(x, t)$ v tvare (7.5) a za váhovú funkciu $w(x)$ postupne dosádzame aproximačné funkcie $\psi_i^e(x)$, pre všetky $i = 1, \dots, m$. Označme časové derivácie primárnych neznámych ako $\dot{v}_j^e := \frac{dv_j^e}{dt}$ a $\ddot{v}_j^e := \frac{d^2 v_j^e}{dt^2}$. Keďže funkcie v_j^e , $\dot{v}_j^e$ a $\ddot{v}_j^e$ nezávisia od x , môžeme ich vyňať pred integrály. V každom člene na ľavej strane máme sumu $\sum_{j=1}^m$, preto ju môžeme vyňať. Vychádza teda

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m & \left(\underbrace{\ddot{v}_j^e \int_{x_A^e}^{x_B^e} c_2 \psi_j^e \psi_i^e dx}_{M_{ij}^{2,e}} + \underbrace{\dot{v}_j^e \int_{x_A^e}^{x_B^e} c_1 \psi_j^e \psi_i^e dx}_{M_{ij}^{1,e}} + \underbrace{v_j^e \int_{x_A^e}^{x_B^e} c_0 \psi_j^e \psi_i^e dx}_{M_{ij}^{0,e}} + \underbrace{v_j^e \int_{x_A^e}^{x_B^e} a \partial_x \psi_j^e \partial_x \psi_i^e dx}_{K_{ij}^{1,e}} + \underbrace{v_j^e \int_{x_A^e}^{x_B^e} b \partial_x^2 \psi_j^e \partial_x^2 \psi_i^e dx}_{K_{ij}^{2,e}} \right) \\ &= \underbrace{\int_{x_A^e}^{x_B^e} f \psi_i^e dx}_{f_i^e} + \underbrace{Q_1^e \psi_i^e(x_A^e) + Q_2^e (\partial_x \psi_i^e)|_{x_A^e} + Q_3^e \psi_i^e(x_B^e) + Q_4^e (\partial_x \psi_i^e)|_{x_B^e}}_{\text{hraničné členy}}, \end{aligned} \quad (7.10)$$

pre $i = 1, \dots, m$. Matrice

$$M_{ij}^{2,e} := \int_{x_A^e}^{x_B^e} c_2 \psi_j^e \psi_i^e dx, \quad M_{ij}^{1,e} := \int_{x_A^e}^{x_B^e} c_1 \psi_j^e \psi_i^e dx, \quad M_{ij}^{0,e} := \int_{x_A^e}^{x_B^e} c_0 \psi_j^e \psi_i^e dx \quad (7.11)$$

sa nazývajú *matice hmotnosti* a matice

$$K_{ij}^{1,e} := \int_{x_A^e}^{x_B^e} a \partial_x \psi_j^e \partial_x \psi_i^e dx, \quad K_{ij}^{2,e} := \int_{x_A^e}^{x_B^e} b \partial_x^2 \psi_j^e \partial_x^2 \psi_i^e dx \quad (7.12)$$

sú tzv. *matice tuhosti*. Z hraničných členov po využití vlastností aproximačných funkcií (pozri Poznámku 4.5, resp. vzťah (5.9)) zostane v každej rovnici buď len jedno alebo žiadne Q (v prípade vnútorného uzla elementu). Po úprave má *elementová sústava rovníc* tvar

$$\sum_{j=1}^m \left[M_{ij}^{2,e} \ddot{v}_j^e + M_{ij}^{1,e} \dot{v}_j^e + \underbrace{(M_{ij}^{0,e} + K_{ij}^{1,e} + K_{ij}^{2,e})}_{K_{ij}^e} v_j^e \right] = f_i^e + \text{hraničné členy}, \quad \text{pre } i = 1, \dots, m, \quad (7.13)$$

čo je *sústava obyčajných diferenciálnych rovníc*, kde neznámou je vektor časovo závislých primárnych neznámych $v^e(t) = (v_1^e(t), \dots, v_m^e(t))^T$. Matica $K_{ij}^e := M_{ij}^{0,e} + K_{ij}^{1,e} + K_{ij}^{2,e}$ označuje celkovú elementovú maticu tuhosti. Sústavu (7.13) môžeme zapísať aj maticovo

$$M^{2,e} \ddot{v}^e + M^{1,e} \dot{v}^e + K^e v^e = f^e + \text{hraničné členy}.$$

Globálna sústava rovníc. Na spojenie elementových sústav rovníc (7.13) ($e = 1, \dots, N$) do globálnej sústavy opäť využijeme *spojitosť primárnych* neznámych a *bilanciu sekundárnych* neznámych na styku elementov. Dostaneme *systém obyčajných diferenciálnych rovníc*

$$M^2\ddot{V} + M^1\dot{V} + KV = F, \quad (7.14)$$

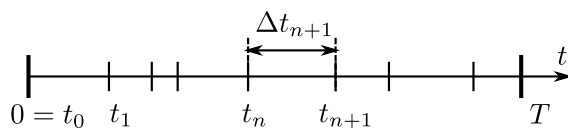
kde neznáma $V(t)$ je vektor časovo závislých primárnych neznámych v globálnom číslovaní. V pravej strane F sú ukryté ešte 4 sekundárne neznáme $Q_1^1, Q_1^2, Q_3^N, Q_4^N$ (pozri sústavu (5.12)), ktoré tiež vo všeobecnosti závisia od času. Matice M^2 a M^1 sú globálne matice hmotnosti, K je globálna matica tuhosti a F je globálna pravá strana. Okrajové podmienky využijeme až po vykonaní časovej diskretizácie systému (7.14).

7.3 Časová diskretizácia

Priestorovou diskretizáciou sme rovnicu (7.1) previedli na systém obyčajných diferenciálnych rovníc (7.14), ktorý treba ešte vyriešiť. Používajú sa napríklad variačné metódy alebo metóda konečných diferencií. My budeme sústavu (7.14) diskretizovať v čase pomocou *konečných diferencií*. Časový interval $[0, T]$ rozdelíme na N_T podintervalov $[t_n, t_{n+1}]$, $n = 0, \dots, N_T - 1$, pozri Obr. 7.2. Veľkosť časového kroku označme $\Delta t_{n+1} := t_{n+1} - t_n$. Približnú hodnotu vektora neznámych V v čase t_n budeme označovať $V_n \approx V(t_n)$. Cieľom časovej diskretizácie je získať sústavu lineárnych algebraických rovníc typu

$$H_{n+1}V_{n+1} = G_{n+1},$$

v ktorej bude matica H_{n+1} a pravá strana G_{n+1} závisieť iba od veličín, ktoré sú známe (napr. z predchádzajúceho časového kroku) a neznámou bude približná hodnota vektora neznámych V v čase t_{n+1} , čiže $V_{n+1} \approx V(t_{n+1})$.



Obr. 7.2. Nerovnomerná diskretizácia časovej osi.

Poznámka 7.5 (Nerovnomerná časová diskretizácia). Časová diskretizácia nemusí byť rovnomerná, v praxi sa často používa tzv. *adaptívna* veľkosť časového kroku (angl. *adaptive time-stepping*). Napríklad v prípade rovnice vedenia tepla (7.2) sa často najväčšie zmeny dejú na začiatku časového vývoja, a preto je výhodné použiť spočiatku malé časové kroky a na konci veľké časové kroky, lebo systém sa blíži k ustálenému stavu a časové zmeny sú malé.

Poznámka 7.6 (Spojitosť v priestore, diskretnosť v čase.). Z predchádzajúcich kapitol vieme, že približné riešenie získané pomocou MKP je *spojité v priestore*. Ďalej však uvidíme, že pri riešení nestacionárnych úloh získavame približné riešenie *spojité v premennej x* , ale *diskrétné v čase* – získavame ho len v jednotlivých časových rezoch $t_1, \dots, t_{N_T} = T$.

Poznámka 7.7 (Časopriestorové konečné prvky.). Existujú aj časopriestorové konečné prvky, pomocou ktorých sa naraz diskretizuje celá časopriestorová výpočtová oblasť $[0, L] \times [0, T]$, čiže priestorovú súradnicu x a časovú súradnicu t chápeme rovnocenne. Vtedy dostávame riešenie *spojité v priestore aj čase*. Takýmito konečnými prvkami sa v učebnici nezaobráame.

Ďalej sa budeme zaoberať nasledujúcimi špeciálnymi prípadmi rovnice (7.1):

1. *Parabolická rovnica*, čiže $c_2 = 0$, a teda $M^2 = 0$ (napríklad rovnica vedenia tepla (7.2)).
2. *Hyperbolická rovnica*, čiže $c_1 = 0$, a teda $M^1 = 0$ (napríklad rovnica pre pozdĺžne kmitanie prúta (7.3)).

Časová diskretizácia sa robí inak pre parabolické a inak pre hyperbolické rovnice, preto sa na každý prípad pozrieme zvlášť.

7.3.1 Parabolická rovnica

V prípade, že v rovnici (7.1) zvolíme $c_2 = 0$, riešime *parabolickú rovnicu*

$$c_1 \partial_t u + c_0 u - \partial_x(a \partial_x u) + \partial_x^2(b \partial_x^2 u) = f(x, t) \quad (7.15)$$

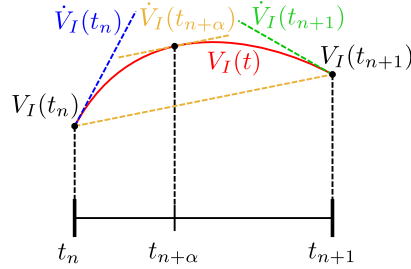
a sústava (7.14) sa redukuje na tvar

$$M^1 \dot{V} + KV = F. \quad (7.16)$$

Riešenie $V(t)$ navyše musí spĺňať počiatočnú podmienku $V_I(0) = v(X_I, 0) = v^0(X_I)$, kde $v^0(x)$ je zadaná funkcia a X_I je I -ty uzlový bod v globálnom číslovaní. Podľa Lagrangeovej vety o strednej hodnote aplikovanej na každú zložku $V_I(t)$ vektora $V(t)$ (pozri Obr. 7.3 a Vetu A.8) platí

$$\frac{V(t_{n+1}) - V(t_n)}{\Delta t_{n+1}} = \frac{dV(t_{n+\alpha})}{dt} =: \dot{V}(t_{n+\alpha}) \quad (7.17)$$

pre nejaké $t_{n+\alpha} \in [t_n, t_{n+1}]$, kde $t_{n+\alpha} := (1 - \alpha)t_n + \alpha t_{n+1}$, pričom $\alpha \in [0, 1]$. Časovú deriváciu



Obr. 7.3. Ilustrácia vzťahov (7.17) a (7.18).

v čase $t_{n+\alpha}$ môžeme aproximovať ako vážený priemer derivácií v časoch t_n a t_{n+1} (pozri Obr. 7.3),² čiže

$$\frac{V(t_{n+1}) - V(t_n)}{\Delta t_{n+1}} = \dot{V}(t_{n+\alpha}) \approx (1 - \alpha)\dot{V}(t_n) + \alpha\dot{V}(t_{n+1}) \quad (7.18)$$

Sústava (7.16) platí v ľubovoľnom čase $t \in (0, T]$. Napíšme si ju pre časy t_n a t_{n+1}

$$M^1 \dot{V}(t_n) + KV(t_n) = F(t_n), \quad (7.19)$$

$$M^1 \dot{V}(t_{n+1}) + KV(t_{n+1}) = F(t_{n+1}). \quad (7.20)$$

Úpravou týchto vzťahov chceme získať rovnicu, v ktorej bude vystupovať vážený priemer derivácií $(1 - \alpha)\dot{V}(t_n) + \alpha\dot{V}(t_{n+1})$, aby sme mohli použiť aproximáciu (7.18). Preto rovnicu (7.19) vynásobme faktorom $(1 - \alpha)$, rovnicu (7.20) faktorom α a rovnice sčítajme

$$M^1 \underbrace{\left[(1 - \alpha)\dot{V}(t_n) + \alpha\dot{V}(t_{n+1}) \right]}_{\approx \frac{V_{n+1} - V_n}{\Delta t_{n+1}}} + (1 - \alpha) \underbrace{KV(t_n)}_{\approx V_n} + \alpha \underbrace{KV(t_{n+1})}_{\approx V_{n+1}} = \underbrace{(1 - \alpha)F(t_n) + \alpha F(t_{n+1})}_{=: F_{n,n+1}}, \quad (7.21)$$

kde sme okrem aproximácie (7.18) použili priblíženia $V(t_n) \approx V_n$ resp. $V(t_{n+1}) \approx V_{n+1}$ a zaviedli sme označenie $F_{n,n+1} := (1 - \alpha)F(t_n) + \alpha F(t_{n+1})$. Máme teda sústavu

$$M^1 \frac{V_{n+1} - V_n}{\Delta t_{n+1}} + (1 - \alpha)KV_n + \alpha KV_{n+1} = F_{n,n+1},$$

²Takejto aproximácii pomocou váženého priemeru sa niekedy hovorí *vážená konečná diferencia* alebo aj θ -schéma (obvykle sa pre váhový parameter α používa označenie θ).

pričom neznámou je vektor uzlových hodnôt primárnych neznámych v čase t_{n+1} , čiže V_{n+1} (a ešte Q -čka ukryté v $F_{n,n+1}$). Sústavu upravíme na tvar

$$\underbrace{(M^1 + \alpha \Delta t_{n+1} K)}_{H_{n+1}} V_{n+1} = \underbrace{[M^1 - (1 - \alpha) \Delta t_{n+1} K] V_n + \Delta t_{n+1} F_{n,n+1}}_{G_{n+1}}, \quad (7.22)$$

čiže napokon riešime postupne pre každé $n = 0, \dots, N_T - 1$ sústavu rovníc

$$H_{n+1} V_{n+1} = G_{n+1}, \quad (7.23)$$

kde matica a pravá strana sústavy sú

$$H_{n+1} := M^1 + \alpha \Delta t_{n+1} K, \quad G_{n+1} := [M^1 - (1 - \alpha) \Delta t_{n+1} K] V_n + \Delta t_{n+1} F_{n,n+1}. \quad (7.24)$$

Pri riešení sústavy (7.23) pre $n = 0$ potrebujeme na výpočet vektora G_1 vektor V_0 , ktorý získame z počiatočnej podmienky. Jeho I -ta zložka je $V_{0,I} = v(X_I, 0) = v_0(X_I)$, kde $v_0(x)$ je zadaná funkcia.

Poznámka 7.8 (Voľba parametra α). V závislosti od toho, ako zvolíme parameter α , dostávame rôzne numerické schémy s odlišnými vlastnosťami (ako napr. stabilita a presnosť). Niektoré z nich uvádzame.

- $\alpha = 0$, *Eulerova schéma s doprednou diferenciou v čase*.
 - Matica sústavy sa zjednoduší na $H_{n+1} = M^1$.
 - Presnosť 1. rádu v čase.
 - Stabilná len pre malé časové kroky.
 - Ak vzniknú numerické oscilácie, majú tendenciu rásť nad všetky medze (nestabilita).
- $\alpha = 1$, *Implicitná schéma – Eulerova schéma so spätnou diferenciou v čase*.
 - Presnosť 1. rádu v čase.
 - Bezpodmienečne stabilná (pre ľubovoľné časové kroky).
 - Nevznikajú numerické oscilácie.
- $\alpha = \frac{1}{2}$, *Crank-Nicolson schéma*.^a
 - Presnosť 2. rádu v čase.
 - Bezpodmienečne stabilná (pre ľubovoľné časové kroky).
 - Pre veľké časové kroky môžu vznikať oscilácie, ktoré však nerastú nad všetky medze (stabilita).

^aSprávne po slovensky by malo byť Crankova-Nicolsonovej schéma, keďže John Crank bol muž a Phyllis Nicolson bola žena.

Využitie okrajových podmienok

V sústave (7.23) je ešte potrebné využiť okrajové podmienky. Budeme to pre jednoduchosť ilustrovať na špeciálnom prípade rovnice (7.15) v tvare

$$c_1 \partial_t u + c_0 u - \partial_x (a \partial_x u) = f(x, t)$$

a zahŕňa napríklad aj nestacionárnu rovnicu vedenia tepla (7.2). Uvažujme okrajové podmienky

$$\alpha_1 u(0, t) + \beta_1 (-a(x) \partial_x u)|_{x=0} = g_1(t), \quad (7.25)$$

$$\alpha_2 u(L, t) + \beta_2 (a(x) \partial_x u)|_{x=L} = g_2(t), \quad (7.26)$$

pre všetky $t \in (0, T]$.³ Ukážeme, ako sa využije okrajová podmienka (7.25), pri podmienke (7.26) by sa postupovalo analogicky. Prepíšme podmienku (7.25) v čase t_n do reči našich neznámych $V_{n,1} \approx u(0, t_n)$ a $Q_{n,1}^1 \approx (-a(x)\partial_x u)|_{x=0, t=t_n}$. Máme

$$\alpha_1 V_{n,1} + \beta_1 Q_{n,1}^1 = g_{1,n}, \quad (7.27)$$

kde sme zaviedli označenie $g_{1,n} := g_1(t_n)$. Dirichletovu okrajovú podmienku, ktorá nastáva v prípade $\beta_1 = 0$, v systéme (7.23) využijeme tak, že namiesto prvej rovnice napíšeme v každom časovom kroku rovnicu $\alpha_1 V_{n+1,1} = g_{1,n+1}$. V maticovom zápise sa to v prvom riadku prejaví takto (zvyšné riadky sú bez zmeny)

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n+1,1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{1,n+1} \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (7.28)$$

Tieto úpravy prvého riadku globálnej sústavy treba robiť v každom časovom kroku po skonštruovaní matice H_{n+1} a vektora G_{n+1} . V prípade Neumannovej a Newtonovej okrajovej podmienky, čiže keď $\beta_1 \neq 0$, si vyjadríme z rovnice (7.27) neznámu $Q_{n,1}^1$, čiže

$$Q_{n,1}^1 = \frac{g_{1,n} - \alpha_1 V_{n,1}}{\beta_1}, \quad \text{a podobne pre čas } t_{n+1} \text{ máme } Q_{n+1,1}^1 = \frac{g_{1,n+1} - \alpha_1 V_{n+1,1}}{\beta_1}.$$

Dosadíme v sústave (7.23) (resp. (7.22)) za $Q_{n,1}^1$ a $Q_{n+1,1}^1$, ktoré sú ukryté v pravej strane prvej rovnice sústavy vo výraze $F_{n,n+1}$.⁴ Člen obsahujúci $V_{n+1,1}$ preniesieme na ľavú stranu. Člen s $V_{n,1}$ sa prejaví vo výslednom tvare matice na pravej strane. V prvej rovnici sústavy (7.23) po využití Newtonovej (resp. Neumannovej) okrajovej podmienky nastanú nasledujúce zmeny (porovnaj so sekciou 4.5)

$$\begin{bmatrix} M_{11}^1 + \alpha \Delta t_{n+1} (K_{11}^1 + \frac{\alpha_1}{\beta_1}) & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n+1,1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}^1 - (1 - \alpha) \Delta t_{n+1} (K_{11}^1 + \frac{\alpha_1}{\beta_1}) & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n,1} \\ \vdots \end{bmatrix} + \Delta t_{n+1} \begin{bmatrix} (1 - \alpha) (f_{n,1}^1 + \frac{g_{1,n}}{\beta_1}) + \alpha (f_{n+1,1}^1 + \frac{g_{1,n+1}}{\beta_1}) \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

V prípade, že funkcie f a g_1 nezávisia od času, tak sa posledný člen zjednoduší

$$\begin{bmatrix} M_{11}^1 + \alpha \Delta t_{n+1} (K_{11}^1 + \frac{\alpha_1}{\beta_1}) & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n+1,1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}^1 - (1 - \alpha) \Delta t_{n+1} (K_{11}^1 + \frac{\alpha_1}{\beta_1}) & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n,1} \\ \vdots \end{bmatrix} + \Delta t_{n+1} \begin{bmatrix} f_1^1 + \frac{g_1}{\beta_1} \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (7.29)$$

Úloha 7.9 (Nestacionárne 1D vedenie tepla | cv09, MKP pre nestacionarne 1D vedenie tepla.nb). Majme zadanú nestacionárnu úlohu

$$\begin{aligned} \partial_t u - \partial_x((1+x)\partial_x u) &= -18x^2, & x \in (0, 1), t \in (0, 3] \\ u(0, t) &= 1, \quad \partial_x u(1, t) = 0, & \text{okrajové podmienky,} \\ u(x, 0) &= u_0(x) = 1 + 2x - x^2, & \text{počiatočná podmienka,} \end{aligned} \quad (7.30)$$

čiže v tomto prípade $c_1(x) \equiv 1$, $a(x) = 1 + x$ a $f(x, t) = -18x^2$.

Na vyriešenie úlohy (7.30) pomocou MKP postupne modifikujte program cv05, MKP pre 1D vedenie tepla.nb (Úloha 4.29) na riešenie okrajovej úlohy (4.33), ktorá je stacionárnym variantom ($\partial_t u = 0$) úlohy (7.30).

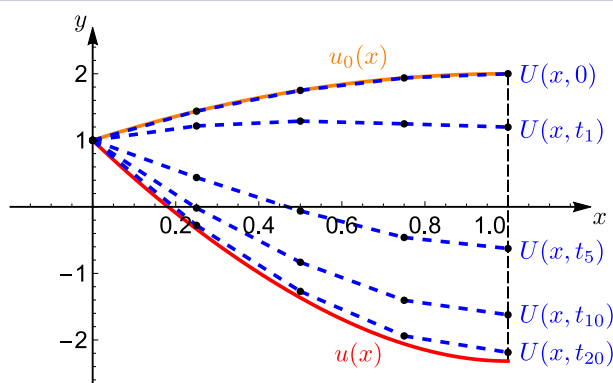
³V porovnaní s okrajovými podmienkami v stacionárnom prípade (4.4) je tu rozdiel v tom, že pravé strany g_1, g_2 môžu závisieť od času t . Týmto spôsobom sa napríklad pri rovnici vedenia tepla (7.2) dá modelovať časovo premenná teplota na okraji výpočtovej oblasti.

⁴Treba trochu pátrať, kde tie Q -čka vlastne sú. Pozri postupne rovnice (7.21), (7.19), (7.20) a (7.10) až (7.14), kde sú obsiahnuté v hraničných členoch. Na pripomenutie pozri aj sústavu (4.36).

1. Definujte funkciu $c_1(x) = 1$ a počiatočnú podmienku $u_0(x) = 1 + 2x - x^2$.
2. Definujte parametre pre časovú diskretizáciu.
 - (a) Parameter α . Najprv zvolte implicitnú schému ($\alpha = 1$), keďže tá je bezpodmienečne stabilná (pozri Poznámku 7.8).
 - (b) Budeme používať rovnomernú sieť v čase s časovým krokom $\Delta t = k h^2$, kde k je číslo, ktoré môžeme meniť, na začiatok zvolte $k = 1$.^a
 - (c) Koncový čas $T = 3$.
 - (d) Počet časových krokov $N_T = \left\lceil \frac{T}{\Delta t} \right\rceil$ (zátvorky $\lceil \cdot \rceil$ označujú funkciu „ceiling“, čiže zaokrúhlenie nahor).
3. Diskretizujte počiatočnú podmienku, čiže vypočítajte hodnoty $U_{0,I} = u_0(X_I)$ vo všetkých globálnych uzlových bodoch X_I .^b
4. Skonstruujte elementové matice hmotnosti $M^{1,e}$, pre $e = 1, \dots, N$ podľa (7.11), a potom globálnu maticu hmotnosti M^1 .
5. Vytvorte cyklus cez všetky časové kroky $n = 0, \dots, N_T - 1$.
6. Vytvorte maticu H_{n+1} a vektor pravej strany G_{n+1} podľa (7.24). Keďže používame konštantný časový krok, tak matica H_{n+1} bude rovnaká v každom kroku a môžeme ju vytvoriť ešte pred časovým cyklom. Pravá strana G_{n+1} závisí od riešenia U_n , takže sa musí vytvárať vnútri časového cyklu.
7. Využite okrajové podmienky podľa vzťahov (7.28) a (7.29). Keďže pravá strana G_{n+1} sa konštruuje v časovom cykle, tak aj využitie okrajových podmienok treba presunúť tiež do časového cyklu.
8. V každom kroku riešte rovnicu $H_{n+1}U_{n+1} = G_{n+1}$.
9. Vytvorte animáciu, v ktorej v každom kroku $n = 0, \dots, N_T$ vykreslite
 - (a) Počiatočnú podmienku $u_0(x)$.
 - (b) Stacionárne riešenie (ustálený stav), čiže presné riešenie $u(x)$ (pozri vzťah (3.16)) stacionárnej úlohy (4.33).
 - (c) Približné MKP riešenie $U(x, t_n)$.

Niektoré časové kroky vidíme vykreslené na Obr. 7.4.

10. Ak je všetko naprogramované správne, tak pre $\alpha = 1$ a $\Delta t = h^2$ by sa malo MKP riešenie $U(x, t_n)$ postupne približovať k ustálenému stavu, ako vidíme na Obr. 7.4.^c



Obr. 7.4. Počiatočná podmienka $u_0(x)$, ustálený stav $u(x)$ a približné MKP riešenie $U(x, t_n)$ nestacionárnej úlohy (7.30) vykreslené v časových krokoch $n = 0, 1, 5, 10, 20$. Zvolili sme sieť tvorenú štyrmi lineárnymi elementami a parametre $\alpha = 1$, $k = 1$

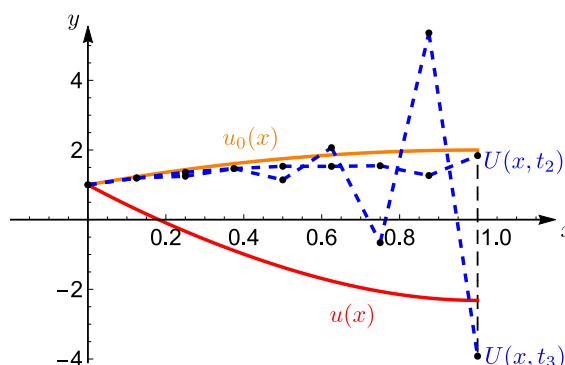
^aVztahu medzi časovým krokom a priestorovým krokom sa hovorí *coupling*. V parabolických úlohách sa štandardne používa coupling $\Delta t \sim h^2$.

^bPribližné globálne uzlové neznáme budeme označovať písmenom U , keďže primárnou neznámou je v prípade úlohy (7.30) len u a nie aj $\partial_x u$, pozri Poznámku 7.2.

^cKonvergenciu MKP riešenia $U(x, t)$ k presnému riešeniu $u(x, t)$ v nestacionárnej úlohe skúmať nebudeme.

Úloha 7.10 (Preskúmanie schém pre rôzne α | cv09, MKP pre nestacionarne 1D vedenie tepla.nb). Preskúmajte, ako funguje váš MKP program z Úlohy 7.9 pre rôzne hodnoty parametra α a presvedčte sa o platnosti tvrdení v Poznámke 7.8. Zvoľte počet elementov $N = 8$ a urobte nasledujúce experimenty:

1. $\alpha = 1$, Implicitná schéma – Eulerova schéma so spätnou diferenciou v čase. V časovom kroku $\Delta t = k h^2$ voľte postupne väčšie k . Schéma by mala byť stále stabilná, ako na Obr. 7.4.
2. $\alpha = 0$, Eulerova schéma s doprednou diferenciou v čase. Pre $k = 1$ schéma nie je stabilná. Pre malé časové kroky by ale mala schéma fungovať dobre. Skúste postupne znižovať k a zistiť, aký malý časový krok treba zvoliť, aby sme dosiahli stabilitu. Všimnite si, že keď už vzniknú oscilácie, tak majú tendenciu rásť nad všetky medze (nestabilita), pozri Obr. 7.5.



Obr. 7.5. Nestabilné približné riešenie $U(x, t_n)$ nestacionárnej úlohy (7.30) so sieťou tvorenou 8 lineárnymi elementami a voľbou $\alpha = 0$, $k = 1$ vykreslené v časových krokoch $n = 2, 3$.

3. $\alpha = \frac{1}{2}$, Crank-Nicolson schéma. Schéma by mala byť stabilná. Pri malom k (napr. $k = 1$), čiže malom časovom kroku, by nemala vykazovať oscilácie. Pre veľké časové kroky môžu vznikať oscilácie, ktoré však nerastú nad všetky medze. Skúste zväčšovať k a zistiť, kedy nastanú viditeľné oscilácie.

Úloha 7.11 (*Kvalitatívne experimenty^a). Keď už vám program cv09, MKP pre nestacionarne 1D vedenie tepla.nb funguje, je užitočné sa s ním pohrať, napríklad skúšať meniť materiálové charakteristiky, okrajové podmienky, počiatočnú podmienku a podobne. Týmto spôsobom sa dajú kvalitatívne modelovať rôzne zaujímavé reálne situácie. Tu je niekoľko tipov:

- Drôt, ktorý má na počiatku konštantnú teplotu, budeme ohrievať. Dá sa to napríklad týmito spôsobmi:
 1. Pomocou vhodne zvolenej hustoty tepelných zdrojov $f(x, t)$ môžeme ohrievať drôt niekde v strednej časti.
 2. Pomocou okrajových podmienok môžeme drôt ohrievať na konci (koncoch). Môžete zadať Newtonove OP, teda konvekciu na hranici.^b Jeden koniec môže byť pomocou nulového Neumanna aj izolovaný. Potom skúste experimentovať s parametrami okrajových podmienok a snažiť sa porozumieť, ako na to reaguje riešenie. Keď je napríklad koeficient prestupu tepla κ obrovský, tak sa Newtonova OP veľmi podobá na Dirichletovu OP. Ak je malý, tak sa to podobá na nulového Neumanna.

- Drôt má najprv konštantnú teplotu, na jednom konci ho budeme chladiť, na druhom ohrievať.
- Drôt má nerovnomernú počiatočnú teplotu, oba konce izolujeme, neuvažujeme tepelné zdroje. Riešenie by malo postupne spieť k rovnovážnemu stavu, ktorým je konštantná teplota rovná priemernej počiatočnej teplote.
- Drôt je pripojený k tepelnému zásobníku, ktorý má veľkú tepelnú kapacitu. Výpočtovú oblasť rozdelíme na dve časti – zásobník a drôt. V časti zodpovedajúcej zásobníku nastavíme vysokú počiatočnú teplotu aj veľkú tepelnú kapacitu, čiže veľkú hodnotu funkcie c_1 (pozri rovnicu (7.2) a sekciu 2.1). Naopak, v časti zodpovedajúcej drôtu nízku počiatočnú teplotu a malú tepelnú kapacitu. Skúste experimentovať s parametrami a sledovať, ako sa drôt zohrieva a tepelný zásobník chladne.

^aZa inšpiráciu k tejto úlohe ďakujeme študentke Slávke Martinčekovej.

^bO tom, ako ju do programu zadať pomocou všeobecných okrajových podmienok (7.25), (7.26) sme písali v poznámke pod čiarou číslo 2 na strane 41.

7.3.2 Hyperbolická rovnica

V prípade, že v rovnici (7.1) zvolíme $c_1 = 0$, tak riešime *hyperbolickú rovnicu*

$$c_2 \partial_t^2 u + c_0 u - \partial_x(a \partial_x u) + \partial_x^2(b \partial_x^2 u) = f(x, t) \quad (7.31)$$

a sústava (7.14) sa redukuje na

$$M^2 \ddot{V} + KV = F. \quad (7.32)$$

Riešenie $V(t)$ navyše musí spĺňať dve počiatočné podmienky $V_I(0) = v(X_I, 0) = v_0(X_I)$ a $\dot{V}_I(0) = \partial_t v(X_I, 0) = w_0(X_I)$, kde $v_0(x)$ a $w_0(x)$ sú zadané funkcie.⁵ Napíšme rovnicu (7.32) v čase t_{n+1}

$$M^2 \ddot{V}(t_{n+1}) + KV(t_{n+1}) = F(t_{n+1}). \quad (7.33)$$

Tak ako pri diskretizácii parabolickej rovnice aj tu chceme získať systém rovníc pre $V_{n+1} \approx V(t_{n+1})$. Potrebujeme teda vyjadriť druhú deriváciu $\ddot{V}(t_{n+1})$ tak, aby v rovnici (7.33) vystupovali kvantily známe z n -tého časového kroku t_n (čiže $V_n, \dot{V}_n, \ddot{V}_n$, ale nie $\dot{V}_{n+1}, \ddot{V}_{n+1}$) a neznáma $V_{n+1} \approx V(t_{n+1})$. Použijeme Taylorov rozvoj funkcie $V(t)$ v bode $t = t_n$ (rovnica (A.4) pre tamojšie $n = 1$, pričom $f(x) \rightarrow V(t_{n+1})$, $a = t_n$ a $c = t_{n+\gamma}$)

$$V(t_{n+1}) = V(t_n) + \dot{V}(t_n) \Delta t_{n+1} + \frac{1}{2} \ddot{V}(t_{n+\gamma}) (\Delta t_{n+1})^2, \quad (7.34)$$

kde $t_{n+\gamma} = (1 - \gamma)t_n + \gamma t_{n+1}$. Druhú časovú deriváciu v čase $t_{n+\gamma}$ môžeme podobne ako v (7.18) aproximovať váženým priemerom v časoch t_n a t_{n+1} , teda

$$\ddot{V}(t_{n+\gamma}) \approx (1 - \gamma) \ddot{V}(t_n) + \gamma \ddot{V}(t_{n+1}). \quad (7.35)$$

Po dosadení do Taylorovho rozvoja (7.34) dostaneme

$$V(t_{n+1}) = V(t_n) + \dot{V}(t_n) \Delta t_{n+1} + \frac{1}{2} \left[(1 - \gamma) \ddot{V}(t_n) + \gamma \ddot{V}(t_{n+1}) \right] (\Delta t_{n+1})^2,$$

z čoho pre druhú deriváciu $\ddot{V}(t_{n+1})$ potrebnú v (7.33) vychádza

$$\ddot{V}(t_{n+1}) = \frac{2}{\gamma (\Delta t_{n+1})^2} \left(V(t_{n+1}) - V(t_n) - \Delta t_{n+1} \dot{V}(t_n) - \frac{1}{2} (1 - \gamma) (\Delta t_{n+1})^2 \ddot{V}(t_n) \right). \quad (7.36)$$

⁵Napríklad v prípade vlnovej rovnice pre pozdĺžne kmitanie nosníka (7.3) to znamená zadanie počiatočných posunutí $u(x, 0)$ a počiatočných rýchlostí $\partial_t u(x, 0)$.

Dosadením (7.36) do (7.33) získame

$$M^2 \left[\frac{2}{\gamma(\Delta t_{n+1})^2} \left(V(t_{n+1}) - V(t_n) - \Delta t_{n+1} \dot{V}(t_n) - \frac{1}{2}(1-\gamma)(\Delta t_{n+1})^2 \ddot{V}(t_n) \right) \right] + KV(t_{n+1}) = F(t_{n+1}).$$

Túto rovnicu vynásobíme faktorom $\frac{1}{2}\gamma(\Delta t_{n+1})^2$, použijeme aproximácie $V(t_n) \approx V_n$, $\dot{V}(t_n) \approx \dot{V}_n$ a $\ddot{V}(t_n) \approx \ddot{V}_n$ (rovnako aj pre čas t_{n+1}) a po úprave dostaneme sústavu rovníc pre vektor neznámych V_{n+1}

$$\underbrace{\left[M^2 + \frac{1}{2}\gamma(\Delta t_{n+1})^2 K \right]}_{H_{n+1}} V_{n+1} = \underbrace{M^2 \left[V_n + \Delta t_{n+1} \dot{V}_n + \frac{1}{2}(1-\gamma)(\Delta t_{n+1})^2 \ddot{V}_n \right] + \frac{1}{2}\gamma(\Delta t_{n+1})^2 F_{n+1}}_{G_{n+1}},$$

kde sme zaviedli označenie $F_{n+1} := F(t_{n+1})$. Riešime teda sústavu rovníc

$$H_{n+1} V_{n+1} = G_{n+1}, \quad (7.37)$$

kde matica a pravá strana sústavy majú tvar

$$H_{n+1} := M^2 + \frac{1}{2}\gamma(\Delta t_{n+1})^2 K, \quad G_{n+1} := M^2 \left[V_n + \Delta t_{n+1} \dot{V}_n + \frac{1}{2}(1-\gamma)(\Delta t_{n+1})^2 \ddot{V}_n \right] + \frac{1}{2}\gamma(\Delta t_{n+1})^2 F_{n+1}.$$

Budeme potrebovať ešte prvú deriváciu v čase t_{n+1} , ktorú opäť vypočítame pomocou Taylorovho rozvoja $\dot{V}_{n+1} = \dot{V}_n + \Delta t_{n+1} \ddot{V}_{n+\alpha}$ (rovnica (A.4) pre tamojšie $n = 0$, $f(x) \rightarrow \dot{V}(t_{n+1})$, $a = t_n$ a $c = t_{n+\alpha}$), pričom $\ddot{V}_{n+\alpha}$ aproximujeme váženým priemerom (7.35), čiže

$$\dot{V}_{n+1} = \dot{V}_n + \Delta t_{n+1} \left[(1-\alpha) \ddot{V}_n + \alpha \ddot{V}_{n+1} \right]. \quad (7.38)$$

Vo všeobecnosti parameter α môžeme voliť inak ako γ .

Pre $n = 0$ potrebujeme na výpočet G_1 a $\dot{V}_1$ vektor $\ddot{V}_0$, ktorý nie je zadaný počiatočnou podmienkou. Využijeme diferenciálnu rovnicu (7.33) v čase $t = 0$, čiže $M^2 \ddot{V}(0) + KV(0) = F(0)$. Potrebné $\ddot{V}_0$ teda vypočítame ako

$$\ddot{V}_0 = (M^2)^{-1} (F_0 - KV_0). \quad (7.39)$$

Poznámka 7.12 (Matematický „podfuk“). Využitie diferenciálnej rovnice (7.33) v čase $t = 0$ je z matematického hľadiska podfuk. Prísne vzaté, v čase $t = 0$ máme zadané len počiatočné podmienky a rovnica platí pre čas $t \in (0, T]$. Z fyzikálneho hľadiska je to ale v poriadku, pretože diferenciálna rovnica (7.31) opisujúca fyzikálne deje platí vždy, a teda aj v čase, ktorý si my zvolíme ako čas $t = 0$.

Algoritmus Newmarkovej metódy. Pri riešení nestacionárnej rovnice (7.31) budeme postupovať podľa nasledujúceho algoritmu.

1. Vypočítame vektory V_0 a $\dot{V}_0$ pomocou počiatočných podmienok.
2. Vypočítame $\ddot{V}_0$ pomocou (7.39).
3. Postupne pre každé $n = 0, \dots, N_T - 1$:
 - (a) Získame V_{n+1} riešením systému (7.37).
 - (b) Vypočítame $\ddot{V}_{n+1}$ z rovnice (7.36).
 - (c) Vypočítame $\dot{V}_{n+1}$ z rovnice (7.38).

Poznámka 7.13 (Voľba parametrov α a γ). V závislosti od toho, ako zvolíme parametre α a γ , dostávame rôzne numerické schémy s odlišnými vlastnosťami (stabilita, presnosť). Popis niektorých možno nájsť napríklad v knihe [12].

Kapitola 8

*Numerické integrovanie – Gaussove kvadratury

Na výpočet prvkov elementových matic a pravých strán je potrebné vypočítať určité integrály (pozri (4.27), (4.30), (5.10), (7.11) a (7.12)). Analytické integrovanie je z hľadiska počítačovej implementácie veľmi „drahá“ operácia a niekedy ani nedokážeme primitívnu funkciu nájsť analyticky. Na zrýchlenie výpočtov sa oplatí analytické integrovanie nahradiť numerickým integrovaním, ktorému sa hovorí aj numerická kvadratura alebo len *kvadratura*.¹ Existuje viacero metód na numerické integrovanie, napríklad metódy založené na interpolácii ako obdĺžniková, lichobežníková, či Simpsonova metóda. Známa je aj Monte Carlo integrácia založená na náhodných číslach. Dobrý prehľad je napríklad v knihe [11]. My sa budeme venovať tzv. *Gaussovým kvadratúram*,² ktoré pre polynomický integrand dokonca umožňujú integrál vypočítať presne. To je dobrá správa, lebo v metóde konečných prvkov sa pri integrovaní na elemente často stáva, že integrujeme polynóm.

Gaussove kvadratury v tejto kapitole detailne odvodíme. Čitateľ, ktorý nepotrebuje Gaussovým kvadratúram rozumieť, ale potrebuje ich len naprogramovať a použiť, môže preskočiť rovno k Úlohám 8.5 – 8.8.

Potrebovali by sme vzorec, pomocou ktorého môžeme približne počítať určitý integrál $\int_a^b f(x) dx$. Aby sme si veci zjednodušili, urobíme najprv substitúciu $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$, kde $t \in [-1, 1]$, pomocou ktorej prevedieme integračný interval $[a, b]$ na interval $[-1, 1]$. Po substitúcii máme

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right) dt. \quad (8.1)$$

Stačí nám teda nájsť kvadraturny vzorec na výpočet integrálu typu

$$\int_{-1}^1 f(x) dx, \quad (8.2)$$

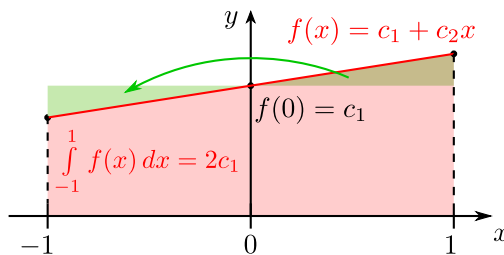
a potom získaný vzorec pomocou substitúcie (8.1) ľahko upravíme na výpočet integrálu na intervale $[a, b]$. Najprv odvodíme vzorce pre 1-bodovú a 2-bodovú kvadraturu, potom všeobecne pre n -bodovú Gaussovu kvadraturu.

8.1 1-bodová Gaussova kvadratura

Integrujme teraz lineárnu funkciu $f(x) = c_1 + c_2x$. Z Obr. 8.1 vidíme, že integrál ako plochu pod grafom funkcie f ľahko vyjadríme – rovná sa ploche obdĺžnika so šírkou 2 a výškou $f(0) = c_1$,

¹Slovo kvadratura je starý antický výraz, ktorý znamená určenie plochy nejakého 2D útvaru. Geometri v antickom Grécku chápali určenie plošného obsahu ako proces konštrukcie štvorca s rovnakým plošným obsahom, ako mal pôvodný útvar, navyše len pomocou pravítka a kružidla. Pre mnohé útvary sa im to aj podarilo, ale napríklad pre kruh nie. Až koncom 19. storočia sa dokázalo, že kvadratura kruhu sa konečným počtom krokov ani nedá urobiť.

²Presnejšie povedané Gaussovým–Legendreovým kvadratúram.

Obr. 8.1. Geometrický výpočet integrálu lineárnej funkcie $f(x) = c_1 + c_2x$.

čiže

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 2f(0) = 2c_1.$$

Integrál (8.2) môžeme pre ľubovoľnú funkciu f približne počítať pomocou 1-bodovej Gaussovej kvadratúry ako

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx w_1 f(x_1), \quad (8.3)$$

kde $w_1 = 2$ sa nazýva *váha* a $x_1 = 0$ je príslušný *Gaussov bod*. Pre lineárnu funkciu f dostávame pomocou vzorca (8.3) presný výsledok, pre kvadratickú a iné funkcie dostávame vo všeobecnosti len približný výsledok.

Príklad 8.1 (Príklad 1-bodovej Gaussovej kvadratúry). Majme integrál $\int_{-1}^1 (x+3)e^{-x} dx$. Jeho približný výpočet pomocou 1-bodovej Gaussovej kvadratúry vyzerá takto

$$\int_{-1}^1 (x+3)e^{-x} dx \approx \underbrace{2}_{w_1} \underbrace{(0+3)e^0}_{f(x_1)} = 2 \cdot 3 = 6.$$

Presný výsledok je

$$\int_{-1}^1 (x+3)e^{-x} dx = 3e - \frac{5}{e} \approx 6.32.$$

Kvadrátúrny vzorec (8.3) môžeme odvodiť aj inak. Hľadáme dva neznáme parametre w_1, x_1 tak, aby vzorec (8.3) dával pre lineárnu funkciu $f(x) = c_1 + c_2x$ *presný výsledok*. Priamou integráciou polynómu dostávame

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 (c_1 + c_2x) dx = \left[c_1x + c_2 \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 = c_1 2. \quad (8.4)$$

Kvadrátúrny vzorec nám dáva

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = w_1(c_1 + c_2x_1) = c_1w_1 + c_2w_1x_1. \quad (8.5)$$

Ak má byť kvadratúra presná, výrazy (8.4) a (8.5) sa musia rovnať, čiže

$$c_1 2 + c_2 0 \stackrel{!}{=} c_1 w_1 + c_2 w_1 x_1,$$

pričom c_1, c_2 sú ľubovoľné čísla. To znamená že koeficienty pri c_1 a c_2 na ľavej strane sa musia rovnať koeficientom na pravej strane. Takto dostávame dve rovnice

$$w_1 = 2, \quad w_1 x_1 = 0$$

s dvoma neznámymi w_1, x_1 . Riešením sústavy³ je $w_1 = 2$ a $x_1 = 0$.

³Tu takmer ani nie je čo riešiť. Podstatné je pochopiť postup, akým sme sústavu dostali, aby sme postup vedeli zovšeobecniť.

Úloha 8.2. V duchu predchádzajúceho postupu (cez sústavu dvoch rovníc) nájdite váhu w_1 a bod x_1 pre 1-bodovú Gaussovú kvadratúru na výpočet integrálu $\int_a^b f(x) dx$ (čiže priamo, bez substitúcie).

Riešenie. Pre 1-bodovú Gaussovú kvadratúru

$$\int_a^b f(x) dx \approx w_1 f(x_1)$$

vyjde

$$w_1 = b - a, \quad x_1 = \frac{a + b}{2},$$

čiže váha w_1 je rovná dĺžke intervalu $[a, b]$ a za bod x_1 treba brať stred intervalu $[a, b]$. Pre $a = -1$, $b = 1$ váha w_1 a Gaussov bod x_1 korešpondujú s tým, čo sme mali doteraz. ■

8.2 2-bodová Gaussova kvadratúra

Postup z predchádzajúcej časti sa dá zovšeobecniť, aby Gaussova kvadratúra dávala presný výsledok pre polynómy vyššieho stupňa. Pozrime sa teraz na 2-bodovú Gaussovú kvadratúru

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2), \quad (8.6)$$

kde sú váhy w_1, w_2 a Gaussove body $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ zatiaľ *štyri* neznáme parametre. Ak ich správne zvolíme, tak Gaussova kvadratúra (8.6) bude dávať *presný výsledok* pre polynómy so *štyrmi* parametrami, čiže polynómy 3. stupňa⁴ $f(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3$. Priama integrácia dáva

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 (c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3) dx = \left[c_1x + c_2\frac{x^2}{2} + c_3\frac{x^3}{3} + c_4\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 = c_12 + c_20 + c_3\frac{2}{3} + c_40. \quad (8.7)$$

Pomocou kvadrátúrneho vzorca (8.6) integrál vychádza

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= w_1 [c_1 + c_2x_1 + c_3(x_1)^2 + c_4(x_1)^3] + w_2 [c_1 + c_2x_2 + c_3(x_2)^2 + c_4(x_2)^3] \\ &= c_1(w_1 + w_2) + c_2(w_1x_1 + w_2x_2) + c_3[w_1(x_1)^2 + w_2(x_2)^2] + c_4[w_1(x_1)^3 + w_2(x_2)^3]. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Výrazy (8.7) a (8.8) sa majú rovnáť pre ľubovoľné $c_1, \dots, c_4$ (čiže ľubovoľný polynóm 3. stupňa). Porovnaním koeficientov pri $c_1, \dots, c_4$ získavame sústavu 4 nelineárnych rovníc

$$w_1 + w_2 = 2, \quad (1)$$

$$w_1x_1 + w_2x_2 = 0, \quad (2)$$

$$w_1(x_1)^2 + w_2(x_2)^2 = \frac{2}{3}, \quad (3)$$

$$w_1(x_1)^3 + w_2(x_2)^3 = 0 \quad (4)$$

so 4 neznámymi parametrami w_1, w_2, x_1, x_2 . Sústavu teraz vyriešime. Z rovnice (1) máme

$$w_2 = 2 - w_1. \quad (8.9)$$

⁴Samozrejme, kvadratura bude presná aj pre polynómy nižších stupňov.

Po dosadení (8.9) do rovnice (2) dostaneme

$$w_1 x_1 + 2x_2 - w_1 x_2 = 0, \quad \Rightarrow \quad w_1 = \frac{2x_2}{x_2 - x_1}. \quad (8.10)$$

Spätným dosadením vzťahu (8.10) do (8.9) vyjde

$$w_2 = -\frac{2x_1}{x_2 - x_1}. \quad (8.11)$$

Dosadením vzťahov (8.10) a (8.11) do rovnice (3) máme

$$\begin{aligned} \frac{2x_2(x_1)^2}{x_2 - x_1} - \frac{2x_1(x_2)^2}{x_2 - x_1} &= \frac{2}{3}, \\ \frac{x_1 x_2 (x_1 - x_2)}{x_2 - x_1} &= \frac{1}{3}, \\ x_1 x_2 &= -\frac{1}{3}. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Dosadením vzťahov (8.10) a (8.11) do rovnice (4) zase získame

$$\begin{aligned} \frac{2x_2(x_1)^3}{x_2 - x_1} - \frac{2x_1(x_2)^3}{x_2 - x_1} &= 0, \\ x_1 x_2 [(x_1)^2 - (x_2)^2] &= 0. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Keď dosadíme rovnicu (8.12) do (8.13), tak zistíme, že $(x_1)^2 = (x_2)^2$, inak povedané $|x_1| = |x_2|$. Podľa (8.12) ale majú x_1 a x_2 opačné znamienka, takže $x_1 = -x_2$. To už stačí dosadiť do (8.12) a máme $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, a potom $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Teraz už môžeme z rovníc (8.10), (8.11) dopočítať váhy, vychádza $w_1 = 1$, $w_2 = 1$.

Zistili sme, že v kvadrátúrnem vzorci (8.6) treba zvoliť váhy $w_1 = 1$, $w_2 = 1$ a Gaussove body $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ a $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, a potom bude presný pre polynómy (nanajvýš) 3. stupňa. Dvojbodová Gaussova kvadratura sa teda robí takto

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx 1f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 1f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

8.3 n -bodová Gaussova kvadratura

V tejto časti sa pozrieme na všeobecný prípad. Vzorec pre n -bodovú Gaussovu kvadratúru má podobu

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx w_1 f(x_1) + \cdots + w_n f(x_n) = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (8.14)$$

a obsahuje n váh $w_1, \dots, w_n$ a n bodov $x_1, \dots, x_n$, spolu $2n$ zatiaľ neznámych parametrov.⁵ Pri správnej voľbe parametrov bude kvadrátúrný vzorec (8.14) dávať *presný výsledok pre polynóm stupňa $2n - 1$* , teda polynóm

$$f(x) = c_1 + c_2 x + \cdots + c_{2n} x^{2n-1}, \quad (8.15)$$

ktorý má $2n$ parametrov $c_1, \dots, c_{2n}$. Váhy w_i a Gaussove body x_i by sme mohli získať opäť rovnakým postupom. Vypočítali by sme integrál z (8.15) priamym výpočtom aj kvadrátúrnym vzorcom,

⁵Gaussove body x_i aj váhy w_i by mali mať ešte index n (napríklad horný), keďže pre každé n vychádzajú inak. Pre zjednodušenie značenia ale index n vynechávame.

výsledky dali do rovnosti, porovnaním koeficientov pri parametroch c_i získali sústavu $2n$ nelineárnych rovníc a skúsili ju vyriešiť. Gaussovým kvadrátúram sa ale dá hlbšie porozumieť. Začneme trochu umelým krokom. Ľubovoľný polynóm (8.15) stupňa $2n - 1$ zapíšeme v tvare

$$f(x) = P_n(x)q(x) + r(x), \quad (8.16)$$

kde $P_n(x)$ je polynóm stupňa n , kvocient $q(x)$ je polynóm stupňa $n - 1$ a zvyšok $r(x)$ je polynóm stupňa najvyššie $n - 1$. Takto vieme zapísať akýkoľvek polynóm.

Príklad 8.3. Zapíšme polynóm 3. stupňa $f(x) = 3x^3 + 2x - 1$ v tvare (8.16). V tomto prípade máme $2n - 1 = 3$, čiže $n = 2$. Zvoľme si napríklad $P_2(x) = x^2 + 1$. Potrebujeme vypočítať ešte polynómy $q(x)$ a $r(x)$. Delením polynómov $f(x)$ a $P_2(x)$ získame

$$f(x)/P_2(x) = (3x^3 + 2x - 1)/(x^2 + 1) = 3x + \frac{-x - 1}{x^2 + 1},$$

takže kvocient je $q(x) = 3x$, čo je polynóm stupňa $n - 1 = 1$ a zvyšok má tvar $r(x) = -x - 1$, čo je tiež polynóm 1. stupňa. Náš polynóm $f(x)$ môžeme teda prepísať na tvar (8.16) takto

$$f(x) = (x^2 + 1)3x + (-x - 1).$$

Počítajme teraz integrál z polynómu (8.16) priamym výpočtom,

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 [P_n(x)q(x) + r(x)] dx = \int_{-1}^1 P_n(x)q(x) dx + \int_{-1}^1 r(x) dx \stackrel{(8.21)}{=} \quad (8.17)$$

Teraz prichádza *prvá kľúčová myšlienka*: Uvažujme *špeciálny polynóm* $P_n(x)$, ktorý bude v zmysle skalárneho súčinu $(u, v) = \int_{-1}^1 u(x)v(x) dx$ kolmý na ľubovoľný polynóm stupňa najvyššie $n - 1$, potom

$$(P_n, q) = \int_{-1}^1 P_n(x)q(x) dx = 0, \quad (8.18)$$

vďaka čomu prvý integrál vo vzťahu (8.17) vypadne. Takéto špeciálne polynómy $P_n(x)$ sú v matematike veľmi známe a volajú sa *Legendreove polynómy*. Polynómy $P_0(x), \dots, P_n(x)$ vzniknú Gramovou-Schmidtovou ortogonalizáciou⁶ polynómov $1, x, x^2, \dots, x^n$. Platí teda, že

$$(P_n, P_m) = \int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x) dx = 0, \quad n \neq m. \quad (8.19)$$

Pri konštrukcii sa uvažuje dodatočná podmienka $P_n(1) = 1$. Prvé 4 Legendreove polynómy majú tvar $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$, $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ a vykresľujeme ich na Obr. 8.2. Ľubovoľný polynóm $q(x)$ stupňa $n - 1$ môžeme napísať ako lineárnu kombináciu bázy $P_0(x), \dots, P_{n-1}(x)$ ako $q(x) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i P_i(x)$, takže vďaka ortogonalite (8.19) naozaj platí (8.18).

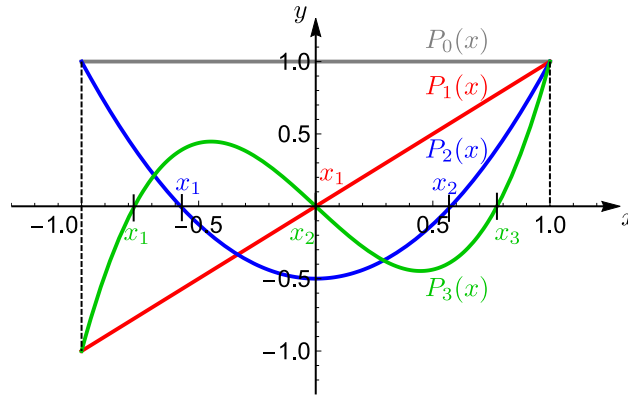
Pokračujme vo výpočte integrálu (8.17). *Interpolujme zvyšok* $r(x)$ pomocou *Lagrangeových interpolačných funkcií*

$$\psi_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 1, \dots, n,$$

kde x_i , $i = 1, \dots, n$ sú interpolačné body, ktorými budú (zatiaľ neurčené) Gaussove body. Keďže zvyšok $r(x)$ je polynóm stupňa najvyššie $n - 1$, tak interpolácia je *presná* a má tvar

$$r(x) = \sum_{i=1}^n r(x_i)\psi_i(x). \quad (8.20)$$

⁶V zmysle skalárneho súčinu $(u, v) = \int_{-1}^1 u(x)v(x) dx$.

Obr. 8.2. Legendreove polynómy $P_0, \dots, P_3$ a ich korene x_i .

Poznámka 8.4 (Upozornenie). Lagrangeove interpolačné funkcie sme v MKP používali na aproximáciu (interpoláciu) približného riešenia na elemente. Interpoláčnými bodmi tam boli uzly x_i^e na elemente, pozri vzťah (4.20) a Poznámku 4.6. Gaussove body x_i budeme voliť inak.

Interpoláciu (8.20) teraz dosadíme do výpočtu (8.17)

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 \underbrace{\sum_{i=1}^n r(x_i) \psi_i(x)}_{r(x)} dx \stackrel{1.}{=} \sum_{i=1}^n r(x_i) \underbrace{\int_{-1}^1 \psi_i(x) dx}_{=:w_i} \stackrel{2.}{=} \sum_{i=1}^n w_i r(x_i) \stackrel{(8.23)}{=} \quad (8.21)$$

Vo výpočte sme urobili tieto kroky:

1. Prepis integrálu sumy na sumu integrálov a vyňatie konštanty $r(x_i)$ pred integrál.
2. Zaviedli sme označenie pre integrály (čísla)

$$w_i = \int_{-1}^1 \psi_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, n, \quad (8.22)$$

ktoré predstavujú váhy pre Gaussovu kvadratúru.

Prichádza *druhá kľúčová myšlienka*: Za *Gaussove body* $x_i, i = 1, \dots, n$ zvolíme *korene Legendreovho polynómu* $P_n(x)$, čiže pre každý bod x_i platí $P_n(x_i) = 0$, pozri Obr. 8.2. Vďaka tomu budú hodnoty polynómu $f(x)$ v uzlových bodoch x_i totožné s hodnotami zvyšku $r(x)$. Po dosadení bodu x_i do rozkladu (8.16) to ľahko vidno

$$f(x_i) = \underbrace{P_n(x_i)}_0 q(x_i) + r(x_i) = r(x_i).$$

Zisťujeme, že na konci výpočtu (8.21) nám vyšla Gaussova kvadratúra polynómu $f(x)$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i). \quad (8.23)$$

Pri celom odvodení sme neurobili *žiadne približenia*. Preto je n -bodová Gaussova kvadratúra *presná* pre polynómy stupňa $2n - 1$. Dá sa ukázať, že váhy (8.22) sa dajú zapísať v tvare [11]

$$w_i = \frac{2}{(1 - x_i^2)[P_n'(x_i)]^2}. \quad (8.24)$$

V Tabuľke 8.1 vidíme prehľad váh a Gaussových bodov pre $n = 1, \dots, 5$. Uvádzame explicitné tvary, aj približné numerické hodnoty.

Tabuľka 8.1. Gaussove body a prislúchajúce váhy pre $n = 1, \dots, 5$.

n	x_i	w_i
1	0	2
2	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	± 0.57735
3	0	$\frac{8}{9}$
	$\pm \sqrt{\frac{3}{5}}$	± 0.774597
		$\frac{5}{9}$
4	$\pm \sqrt{\frac{3}{7} - \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	± 0.339981
	$\pm \sqrt{\frac{3}{7} + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	± 0.861136
		$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$
		$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$
5	0	$\frac{128}{225}$
	$\pm \frac{1}{3}\sqrt{5 - 2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	± 0.538469
	$\pm \frac{1}{3}\sqrt{5 + 2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	± 0.90618
		$\frac{322+13\sqrt{70}}{900}$
		$\frac{322-13\sqrt{70}}{900}$

Na približný výpočet pôvodného integrálu $\int_a^b f(x) dx$ ľubovoľnej funkcie $f(x)$ pomocou Gaussových kvadrátúr máme teda na základe rovníc (8.1) a (8.14) vzťah

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n w_i f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} x_i\right), \quad (8.25)$$

kde x_i sú Gaussove body (korene Legendreovho polynómu $P_n(x)$) a w_i sú im prislúchajúce váhy, ktoré počítame podľa vzťahu (8.24).

Úloha 8.5 (Gaussove kvadratury | cv07, `Gaussove kvadratury.nb`). Vytvorte si nový notebook a naprogramujte funkciu `GaussQuad[n_, f_, x_, a_, b_]`, ktorá bude počítat integrál $\int_a^b f(x) dx$ pomocou n -bodovej Gaussovej kvadratury.

1. Najprv mimo samotnej funkcie `GaussQuad` vypočítajte v cykle pre každé $n = 1, \dots, 10$ Gaussove body x_i riešením rovnice $P_n(x_i) = 0$ a prislúchajúce váhy w_i pomocou vzťahu (8.24). Treba si v podstate skonštruovať Tabuľku 8.1 po $n = 10$.^a Legendreove polynómy $P_n(x)$ sú v softvéri Wolfram Mathematica definované ako `LegendreP[n, x]`.
2. Naprogramujte funkciu `GaussQuad[n_, f_, x_, a_, b_]` podľa vzorca (8.25).
3. Na niekoľkých polynómoch overte, že pre polynómy stupňa $2n - 1$ dáva vaša funkcia `GaussQuad` rovnaký výsledok, ako funkcia `Integrate`, čiže kvadratura je presná.

^aExistuje aj funkcia `GaussianQuadratureWeights` z balíka `NumericalDifferentialEquationAnalysis`, ktorá priamo dáva usporiadané dvojice $\{x_i, w_i\}$. Ak by ste ju využili, nič by ste sa nenaučili, skúste teda použiť opísaný spôsob.

Úloha 8.6 (Použitie Gaussových kvadrátúr | cv07, MKP pre 1D vedenie tepla, `GaussQuad.nb`). Gaussove kvadratury teraz použijeme v programe cv06, MKP pre 1D vedenie tepla, chyby a EOC.nb z Úlohy 6.38.

1. Prekopírujte sem konštrukciu Gaussových bodov x_i , váh w_i a funkciu `GaussQuad` z Úlohy 8.5.
2. Použite Gaussove kvadratury na výpočet prvkov elementovej matice tuhosti K^e a pravej strany f^e zo vzťahov (4.27) resp. (4.30).
3. Otázka je, ako zvoliť počet Gaussových bodov. Ak je $a(x)$ resp. $f(x)$ polynóm, tak kvadratury budú pre dostatočný počet bodov presné, pozri komentár pod rovnicou

(8.23). Určte minimálne počty bodov kvadratury n_K (n_f) na výpočet prvkov elementovej matice tuhosti (pravej strany). Stačí sa zamyslieť, akého stupňa sú polynómy, ktoré sa integrujú. Na zistenie toho, aký je stupeň polynómu $a(x)$ môžete použiť funkciu `Exponent[f[x],x]`.

4. Využitím funkcie `AbsoluteTiming` porovnajte rýchlosť výpočtu elementových matíc a pravých strán pomocou funkcie `Integrate` a vašej funkcie `GaussQuad`.

Dajte si pozor, aby ste si nepoplietli uzlové body x_i^e na elemente a Gaussove body x_i , pozri Poznámku 8.4.

Úloha 8.7 (Gaussove kvadratury v MKP pre diferenciálnu rovnicu 4. rádu | MKP pre DR 4. radu.nb). Gaussove kvadratury môžeme využiť aj pri riešení diferenciálnej rovnice 4. rádu, napríklad okrajovej úlohy (5.4), na výpočet elementových matíc a pravých strán (5.10). Využite to v programe MKP pre DR 4. radu.nb z Úlohy 5.14.

Úloha 8.8 (Gaussove kvadratury v nestacionárnej úlohe | cv09, MKP pre nestacionarne 1D vedenie tepla.nb). Gaussove kvadratury môžeme využiť aj pri riešení nelineárnych úloh na výpočet všetkých elementových matíc (7.11), (7.12), aj pravých strán. Využite to programe cv09, MKP pre nestacionarne 1D vedenie tepla.nb z Úlohy 7.9.

Časť III

Metóda konečných prvkov pre 2D úlohy

Kapitola 9

MKP pre diferenciálnu rovnicu 2. rádu v 2D

Algoritmus metódy konečných prvkov pre 2D úlohy má v podstate rovnaké kroky ako algoritmus pre 1D úlohy, ktorý sme uviedli v sekcii 4.1. Hlavný rozdiel je v tom, že tu sa (v stacionárnom prípade) riešia namiesto obyčajných diferenciálnych rovníc *parciálne diferenciálne rovnice* a výpočtová oblasť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ môže byť geometricky pomerne komplikovaná (v 1D sme uvažovali veľmi jednoduchú výpočtovú oblasť tvorenú úsečkou). Hranicu výpočtovej oblasti budeme označovať $\partial\Omega$ a $\vec{n}$ bude označovať vonkajšiu normálu k hranici. Jednotlivé kroky algoritmu MKP detailne opíšeme v ďalších častiach tejto kapitoly.

Modelová diferenciálna rovnica

Algoritmus budeme ilustrovať na modelovej diferenciálnej rovnici

$$-\partial_x (a_{11}\partial_x u + a_{12}\partial_y u) - \partial_y (a_{21}\partial_x u + a_{22}\partial_y u) = f, \quad (9.1)$$

pre $\vec{r} = (x, y) \in \Omega$, kde koeficienty a_{ij} a pravá strana f sú funkciami polohy (x, y) . Pre *izotropný* materiál ($a_{11} = a_{22} = a$, $a_{12} = a_{21} \equiv 0$) sa rovnica (9.1) redukuje na tvar

$$-\partial_x (a\partial_x u) - \partial_y (a\partial_y u) = f, \quad (9.2)$$

resp. v kompaktnejšom zápise

$$-\nabla \cdot (a\nabla u) = f. \quad (9.3)$$

Diferenciálnu rovnicu (9.1) budeme zapisovať aj v tvare

$$\nabla \cdot \vec{q} = f, \quad (9.4)$$

kde hustota toku $\vec{q}$ má podobu

$$\vec{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_{11}\partial_x u + a_{12}\partial_y u \\ a_{21}\partial_x u + a_{22}\partial_y u \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_x u \\ \partial_y u \end{bmatrix} \quad (9.5)$$

a špeciálne pre izotropný prípad (9.3) máme

$$\vec{q} = -a\nabla u.$$

Ak v rovnici (9.1) zvolíme $a_{ij} = \Lambda_{ij}$ (matica tepelnej vodivosti), dostaneme anizotropnú 2D stacionárnu rovnicu vedenia tepla (Príklad 2.7). Špeciálnymi prípadmi rovnice (9.1) sú napríklad aj:

- Izotropná 2D stacionárna rovnica vedenia tepla (2.16), ($a_{11} = a_{22} = \lambda$, $a_{12} = a_{21} \equiv 0$)

$$-\nabla \cdot (\lambda\nabla u) = f. \quad (9.6)$$

- Rovnica pre priehyb membrány (2.34), $(a_{11} = a_{22} = p, a_{12} = a_{21} \equiv 0)$

$$-\nabla \cdot (p \nabla u) = f. \quad (9.7)$$

Matematický model (9.1) sa používa v mnohých ďalších aplikáciách, napríklad v elektromagnetizme či prúde tekutín. Pre jednoduchosť vyjadrovania budeme v ďalších častiach tejto kapitoly o vektore $\vec{q}$ a súvisiacich veličinách hovoriť ako o (hustote tepelného) toku. V iných aplikáciách vektoru $\vec{q}$ samozrejme zodpovedajú iné fyzikálne veličiny.

Okrajové podmienky

Okrajové podmienky majú vo všeobecnosti tvar

$$\alpha u + \beta q_n = g, \quad \text{pre } \vec{r} \in \partial\Omega, \quad (9.8)$$

kde $\alpha(\vec{r}), \beta(\vec{r}), g(\vec{r})$, pre $\vec{r} \in \partial\Omega$ sú zadané funkcie, $q_n(\vec{r})$ označuje hustotu toku do vnútra oblasti definovanú ako

$$q_n := \vec{q} \cdot (-\vec{n}) = (a_{11}\partial_x u + a_{12}\partial_y u)n_1 + (a_{21}\partial_x u + a_{22}\partial_y u)n_2. \quad (9.9)$$

Špeciálne v izotropnom prípade s hustotou toku $\vec{q} = -a \nabla u$ máme

$$q_n = \vec{q} \cdot (-\vec{n}) = a \vec{n} \cdot \nabla u = a \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}, \quad (9.10)$$

V izotropnom prípade majú teda okrajové podmienky (9.8) tvar

$$\alpha u + \beta a \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = g. \quad (9.11)$$

Ak v nejakom bode $\vec{r}$ je $\beta(\vec{r}) = 0$, hovoríme v tomto bode o *Dirichletovej* okrajovej podmienke, kde zadávame hodnotu neznámej u v bode $\vec{r}$ na hranici $\partial\Omega$. Prípád $\alpha(\vec{r}) = 0$ zodpovedá *Neumannovej* okrajovej podmienke. V izotropnom prípade (9.11) je vlastne Neumannovou okrajovou podmienkou v bode $\vec{r} \in \partial\Omega$ zadaná normálová derivácia $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$. Ak sú hodnoty $\alpha(\vec{r})$ aj $\beta(\vec{r})$ nenulové, ide v bode $\vec{r}$ o *Newtonovu (Robinovu)* okrajovú podmienku.

Poznámka 9.1 (Zmiešané okrajové podmienky). Funkcie α, β môžu byť navrhnuté tak, že typ okrajovej podmienky sa mení v závislosti od bodu $\vec{r}$. Vtedy hovoríme o *zmiešaných okrajových podmienkach*. Napríklad na niektorých častiach hranice môže byť zadaná Dirichletova a na niektorých Neumannova okrajová podmienka.

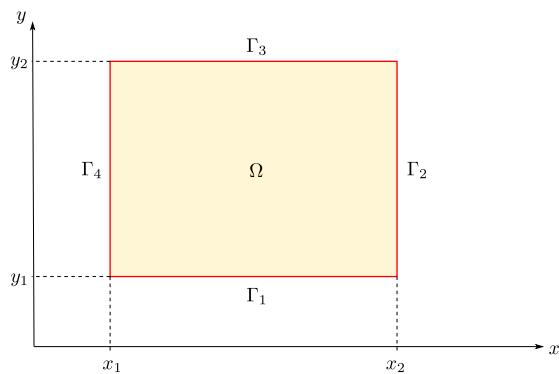
Príklad 9.2 (Úloha, ktorú budeme riešiť). V úlohách v tejto kapitole budeme pomocou MKP riešiť diferenciálnu rovnicu (9.3), čiže

$$-\nabla \cdot (a \nabla u) = f, \quad \vec{r} \in \Omega,$$

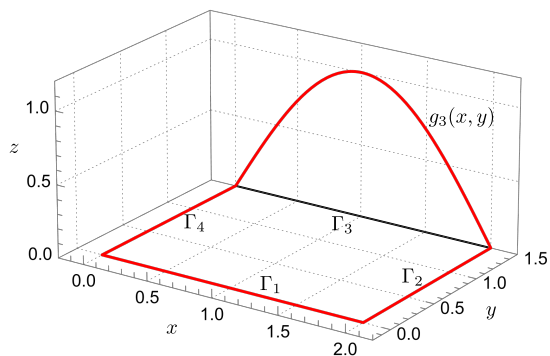
ktorá zahŕňa prípad (9.6) aj (9.7). Výpočtovou oblasťou bude obdĺžnik $\Omega = (x_1, x_2) \times (y_1, y_2)$, ktorého hranicou sú 4 úsečky, $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ (pozri Obr. 9.1). Budeme uvažovať Dirichletovu okrajovú podmienku

$$u(x, y) = \begin{cases} g_3(x, y) = \sin\left(\pi \frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right), & (x, y) \in \Gamma_3, \\ 0, & \text{inak,} \end{cases} \quad (9.12)$$

čiže na úsečke Γ_3 máme pol periódy sínusu (kopček), na ostatných úsečkách nulu (Obr. 9.2).



Obr. 9.1. Výpočtová oblasť $\Omega = (x_1, x_2) \times (y_1, y_2)$ s hranicou $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$.



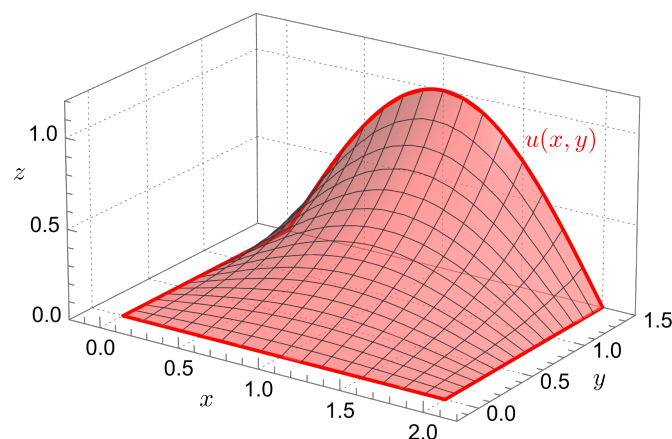
Obr. 9.2. Dirichletova okrajová podmienka (9.12).

V zápise okrajovej podmienky v tvare (9.11) vlastne máme funkcie α, β v tvare $\alpha(\vec{r}) \equiv 1$ a $\beta(\vec{r}) \equiv 0$. Pri riešení úlohy v softvéri Wolfram Mathematica budeme používať oblasť $\Omega = (0, 2) \times (0, 1.5)$ a funkcie $a(\vec{r}) \equiv 1$ a $f(\vec{r}) \equiv 0$. Pod touto úlohou si môžeme predstaviť hľadanie tvaru membrány s konštantnou tuhosťou $p \equiv 1 \text{ N/m}$, ktorá je upnutá na okraj v tvare z Obr. 9.2 a nepôsobí na ňu žiadna vonkajšia (napr. gravitačná) sila.^a

^aKedže pri odvodzovaní diferenciálnej rovnice (9.7) v sekcii 2.4 sme robili isté priblíženia (linearizáciu (2.25)), tak ide len o približný tvar membrány.

Úloha 9.3 (Presné riešenie pre $a \equiv 1$ a $f \equiv 0$). Overte, že pre homogénnu materiálovú charakteristiku $a(x, y) \equiv 1$ a nulovú pravú stranu $f(x, y) \equiv 0$ je presným riešením úlohy z Príkladu 9.2 funkcia

$$u(x, y) = \sin\left(\pi \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right) \frac{\sinh\left(\pi \frac{y - y_1}{x_2 - x_1}\right)}{\sinh\left(\pi \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)}, \quad (9.13)$$



Obr. 9.3. Presné riešenie (9.13) okrajovej úlohy z Príkladu 9.2.

čiže spĺňa rovnicu (9.2) a okrajovú podmienku (9.12).^a Presné riešenie (9.13), čiže tvar membrány napnutej na okraj z Obr. 9.2, vidíme vykreslené na Obr. 9.3. Membrána sa postupne z nulovej hodnoty na úsečkách Γ_1, Γ_2 a Γ_4 zdvíha ku kopčeku na úsečke Γ_3 .

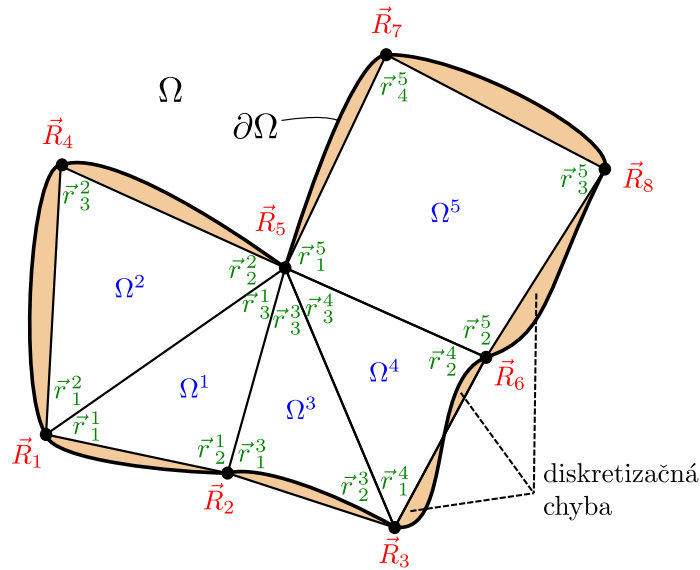
^aToto riešenie sa získa Fourierovou metódou separácie premenných (riešenie sa hľadá v tvare $u(x, y) = X(x)Y(y)$).

Úloha 9.4 (Ďalšie presné riešenia pre $a \equiv 1$ a $f \equiv 0$). Premyslite si, ako treba zmeniť okrajovú podmienku (9.12), ak chceme na úsečke Γ_3 mať 2, 3 alebo 4 polperiódy sínusu. Ako sa situácia zmení, ak chceme nenulovú okrajovú podmienku na iných častiach hranice? Napíšte, ako bude vyzeráť presné riešenie pre tieto ďalšie prípady.

Poznámka 9.5 (Superpozícia riešení pre $a \equiv 1$ a $f \equiv 0$). Ak je okrajová podmienka nenulová na viacerých častiach hranice, riešenie dostaneme jednoduchým sčítaním (*superpozíciou*) zodpovedajúcich riešení pre okrajové podmienky nenulové vždy len na jednej časti hranice.

9.1 Diskretizácia výpočtovej oblasti

Výpočtovú oblasť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aproximujeme množinou konečných prvkov (elementov), matematicky $\Omega \approx \tilde{\Omega} = \bigcup_{e=1}^N \Omega^e$ kde $\tilde{\Omega}$ označuje našu aproximáciu výpočtovej oblasti. Konečné prvky Ω^e môžu byť trojuholníkové alebo štvoruholníkové, Obr. 9.4. Pri aproximácii výpočtovej oblasti dochádza



Obr. 9.4. Príklad diskretizácie výpočtovej oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

ku diskretizačnej chybe (Obr. 9.4), pozri aj sekciu 6.1, kde sme o tejto chybe hovorili. Keďže pomocou diskretizácie vieme aproximovať aj geometricky zložité výpočtové oblasti, tak MKP je veľmi praktická aj z inžinierskeho hľadiska. Diskretizácia výpočtovej oblasti zahŕňa tieto kroky:

1. Aproximácia oblasti Ω množinou elementov $\{\Omega^e\}_{e=1}^N$.
2. Očíslovanie elementov Ω^e , $e = 1, \dots, N$.
3. Očíslovanie uzlových bodov. Je potrebné urobiť globálne číslovanie $\vec{R}_I = (X_I, Y_I)$, pričom $I = 1, \dots, n$, aj lokálne číslovanie $\vec{r}_i^e = (x_i^e, y_i^e)$, kde $i = 1, \dots, m^e$, $e = 1, \dots, N$ (pozri Obr. 9.4), pričom n označuje celkový počet uzlových bodov (a teda aj primárnych neznámych) na celej výpočtovej oblasti Ω a m^e je počet uzlových bodov na elemente Ω^e . Lokálne číslovanie je dobré robiť konzistentne – na všetkých elementoch zachovať rovnakú orientáciu, napr. proti smeru hodinových ručičiek.
4. Výpočet súradníc uzlových bodov.

5. Zostrojenie matice spojitosti B (angl. connectivity matrix). Prvok B_{ei} je globálne číslo i -teho uzlového bodu na e -tom elemente. V prípade siete na Obr. 9.4 má matica spojitosti tvar¹

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 5 \\ 5 & 6 & 8 & 7 \end{bmatrix}.$$

Poznámka 9.6 (Matica spojitosti v 1D). Pozorný čitateľ si iste všimol, že v 1D sme o matici spojitosti nehovorili. Dôvod je ten, že by to zbytočne komplikovalo zápisy. Globálne uzlové body a neznáme sme v sekcii 4.4 číslovali jednoducho zľava doprava. Preto napríklad pre lineárne a kvadratické elementy by mali matice spojitosti tvar

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ \vdots & \vdots \\ N & N+1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2N-1 & 2N & 2N+1 \end{bmatrix}.$$

Kvôli presnosti celkového MKP riešenia je veľmi dôležité vytvoriť kvalitnú sieť. Správny typ elementu (počet uzlov), počet elementov a hustota siete závisia od geometrie výpočtovej oblasti, požadovanej presnosti, ale aj od konkrétneho fyzikálneho problému, ktorý riešime. Napríklad pre prúdenie sa používajú kvalitatívne úplne iné siete, ako pre vedenie tepla, či mechaniku.² Pri tvorbe siete je často potrebné riadiť sa skúsenosťami a rozumieť MKP aj fyzikálnemu problému, ktorý riešime. Dôležité je vedieť kvalitatívne odhadnúť, ako by malo vyzeráť riešenie. Uvádzame niekoľko základných zásad, ktoré je potrebné pri tvorbe siete dodržiavať:

- Počet a tvar elementov treba zvoliť tak, aby geometria oblasti Ω bola aproximovaná dostatočne presne.
- V miestach, kde očakávame veľké derivácie riešenia, je dobré použiť viac elementov (hustejšia sieť), prípadne elementy vyššieho stupňa.
- Hustota siete by sa mala od hustých oblastí po riedke meniť postupne.
- Vyhybame sa elementom s príliš ostrými uhlami, lebo takéto elementy vedú k veľkej chybe. V sekcii 9.2.2 načrtneme, prečo je to tak.
- Ak sa v materiálových charakteristikách vyskytujú nespojitosti, čiže používame viacero materiálov, tak rozhranie materiálov by malo byť na hraniciach elementov.
- Ak v úlohe vystupujú bodové zdroje (resp. sily), tak v zodpovedajúcich bodoch by mali byť uzly siete.

Úloha 9.7 (Diskretizácia | cv11-13, MKP 2D.nb). Diskretizujte obdĺžnikovú výpočtovú oblasť $\Omega = (x_1, x_2) \times (y_1, y_2)$ z Príkladu 9.2 rovnomernou trojuholníkovou sieťou. Najjednoduchšie je rozdeliť obdĺžnikovú oblasť najprv na menšie obdĺžniky (N_x dielikov horizontálne, N_y dielikov vertikálne) a tie diagonálne rozdeliť na trojuholníky. Sieť teda môže vyzeráť napríklad tak, ako na Obr. 9.5 (pre $N_x = 6$, $N_y = 4$). Môžete si zo [stránky](#) stiahnuť predpripravený súbor cv11-13, MKP 2D (web).nb a doprogramovať doňho chýbajúce časti.^a Postupne

¹Prísne vzaté, vo všeobecnosti B nie je matica, pretože ak používame trojuholníkové aj štvoruholníkové elementy, tak nemáme v každom riadku rovnaký počet prvkov.

²V prúdení je veľmi dôležité zachytiť priebeh veličín v tzv. hraničnej vrstve v blízkosti stien, v ktorej sa na malej škále prudko mení rýchlosť prúdenia (na stene je rýchlosť nulová).

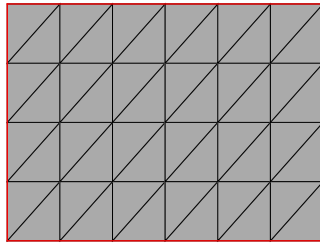
je potrebné urobiť nasledujúce:

1. Definovať súradnice globálnych uzlových bodov $\vec{R}_I = (X_I, Y_I)$, $I = 1, \dots, n$ do poľa R v tvare

$$R = \{\{X_1, Y_1\}, \{X_2, Y_2\}, \dots, \{X_n, Y_n\}\},$$

kde $\{X_I, Y_I\}$ sú súradnice I -teho bodu. Uzlové body si treba nejak rozumne očíslovať.

2. Vypočítať počet elementov N na základe zadaných počtov dielikov N_x, N_y .
3. Premyslieť si, ako budú číslované elementy a lokálne uzlové body.
4. Naplniť maticu spojitosti B . Je výhodné zvlášť premýšľať o trojuholníkoch pod diagonálami obdĺžnikov a zvlášť nad diagonálami (Obr. 9.5).



Obr. 9.5. Rovnomerná trojuholníková sieť pre obdĺžnikovú výpočtovú oblasť Ω . Zvolili sme $N_x = 6$ a $N_y = 4$, čiže $N = 48$.

^aPripravená je najmä definícia výpočtovej oblasti, okrajové podmienky, presné riešenie a niekoľko vizualizácií.

Úloha 9.8 (Diskretizácia okrajovej podmienky | cv11-13, MKP 2D.nb). Diskretizujte Dirichletovu okrajovú podmienku $u(\vec{r}) = g(\vec{r})$, $\vec{r} \in \partial\Omega$, čiže vyjadrite jej hodnoty g_I v tých globálnych uzlových bodoch $\vec{R}_I = (X_I, Y_I)$, v ktorých sa má zadávať Dirichletova okrajová podmienka. Hodnotu g_I vyjadríme ako $g_I = g(\vec{R}_I)$ pre $\vec{R}_I \in \partial\Omega$. Môžete použiť okrajovú podmienku z Príkladu 9.2, ale naprogramujte to pre ľubovoľnú Dirichletovu okrajovú podmienku.

9.2 Sústava rovníc na elemente

9.2.1 Slabá formulácia

Pri odvodení slabej formulácie postupujeme v podstate rovnako ako v prípade 1D (pozri sekciu 4.3.1). Vyberieme jeden *ľubovoľný* (trojuholníkový či štvoruholníkový) *element* Ω^e , diferenciálnu rovnicu (9.4) *vy násobíme váhovou funkciou* $w = w(x, y)$ a výsledok *zintegrujeme na elemente* Ω^e . Dostaneme

$$\int_{\Omega^e} (\nabla \cdot \vec{q}) w \, dx \, dy = \int_{\Omega^e} f w \, dx \, dy. \quad (9.14)$$

Ďalším krokom je „preniesť“ polovicu derivácií z neznámej u (tá je obsiahnutá vo vektore $\vec{q}$, pozri vzťah (9.5)) na váhovou funkciu w . Najprv upravíme podintegrálny výraz na ľavej strane³

$$(\nabla \cdot \vec{q}) w = \nabla \cdot (\vec{q} w) - \vec{q} \cdot \nabla w.$$

³Toto sa dá ľahko odvodiť rozpísaním skalárnych súčinov cez sumy a využitím Leibnizovho pravidla

$$\nabla \cdot (\vec{q} w) = \sum_i \partial_{x_i} (q_i w) = \sum_i ((\partial_{x_i} q_i) w + q_i \partial_{x_i} w) = (\nabla \cdot \vec{q}) w + \vec{q} \cdot \nabla w.$$

Po tejto úprave rovnica (9.14) prejde na

$$\int_{\Omega^e} \nabla \cdot (\vec{q}w) dx dy - \int_{\Omega^e} \vec{q} \cdot \nabla w dx dy = \int_{\Omega^e} fw dx dy. \quad (9.15)$$

V druhom integráli na ľavej strane máme, tak ako sme chceli, deriváciu (vo forme gradientu) prenesenú na váhovú funkciu w . V prvom integráli na ľavej strane využijeme *Gaussovú vetu* (Veta A.2, pričom zvolíme $\vec{F} = \vec{q}w$), pomocou ktorej prepíšeme integrál cez element Ω^e na integrál po jeho hranici $\Gamma^e := \partial\Omega^e$

$$\int_{\Omega^e} \nabla \cdot (\vec{q}w) dx dy = \int_{\Gamma^e} (\vec{q}w) \cdot \vec{n} ds = \int_{\Gamma^e} (\vec{q} \cdot \vec{n}) w ds.$$

Tento integrál predstavuje isté vážené množstvo tepla, ktoré vytečie⁴ cez hranicu Γ^e . Vďaka Gaussovej vete teda rovnica (9.15) prejde na tvar

$$- \int_{\Omega^e} \vec{q} \cdot \nabla w dx dy = \int_{\Omega^e} fw dx dy - \int_{\Gamma^e} (\vec{q} \cdot \vec{n}) w ds.$$

Keď dosadíme za hustotu toku $\vec{q}$ vyjadrenie (9.5), dostávame *slabú formuláciu* diferenciálnej rovnice (9.1) na elemente Ω^e

$$\int_{\Omega^e} \left[(a_{11}\partial_x u + a_{12}\partial_y u)\partial_x w + (a_{21}\partial_x u + a_{22}\partial_y u)\partial_y w \right] dx dy = \int_{\Omega^e} fw dx dy + \int_{\Gamma^e} q_n w ds, \quad (9.16)$$

kde q_n označuje hustotu toku do vnútra⁵ elementu definovanú pomocou (9.9). Špeciálne, pre izotropný prípad (9.3) má slabá formulácia na elemente Ω^e jednoduchší tvar

$$\int_{\Omega^e} a(\partial_x u \partial_x w + \partial_y u \partial_y w) dx dy = \int_{\Omega^e} fw dx dy + \int_{\Gamma^e} q_n w ds, \quad (9.17)$$

kde hustota toku q_n sa počíta pomocou vzťahu (9.10).

Poznámka 9.9 (Identifikácia neznámych a klasifikácia okrajových podmienok). Zo slabej formulácie (9.16) môžeme identifikovať primárnu resp. sekundárnu neznámu a môžeme aj klasifikovať okrajové podmienky:^a

- Podľa Poznámky 5.1 je *primárnou neznámou* u , lebo váhová funkcia sa v hraničnom integráli vyskytuje len v nederivovanom tvare. *Sekundárnou neznámou* je hustota toku do vnútra elementu q_n . O diskrétnych neznámych budeme detailne hovoriť v sekciiach 9.2.3 a 9.2.4.
- *Obmedzujúce* (essential) okrajové podmienky sa predpisujú pre *primárnu* neznámu u na hranici, čiže pre rovnicu (9.1) zadávame $u(\vec{r})$ pre body $\vec{r} \in \partial\Omega$, čo zodpovedá Dirichletovej okrajovej podmienke.
- *Prirodzené* (natural) okrajové podmienky špecifikujú *sekundárnu* neznámu, čiže pre rovnicu (9.1) je to hustota toku $q_n(\vec{r})$ pre $\vec{r} \in \partial\Omega$, čo zodpovedá Neumannovej alebo Newtonovej okrajovej podmienke.

^aPozri Poznámku 5.2.

9.2.2 Aproximačné funkcie

Aj v 2D prípade hľadáme *približné riešenie* $U^e(x, y)$ na elemente Ω^e v tvare *lineárnej kombinácie aproximačných funkcií*, teda

$$U^e(x, y) = \sum_{j=1}^{m^e} u_j^e \psi_j^e(x, y), \quad (9.18)$$

⁴Ide o teplo, ktoré *vytečie*, lebo $\vec{n}$ je *vonkajšia* normála ku hranici Γ^e .

⁵Tu ide o hustotu toku do *vnútra*, lebo $(-\vec{n})$ je *vnútorná* normála ku hranici elementu.

kde u_j^e označuje primárnu uzlovú neznámu v bode $\vec{r}_j^e$ na elemente Ω^e , funkcie $\psi_j^e(x, y)$ sú aproximačné funkcie a m^e je celkový počet primárnych uzlových neznámych na elemente. Približné riešenie $U^e(x, y)$ musí spĺňať rovnaké požiadavky, ako v 1D (pozri sekciu 4.3.2), čiže $U^e(x, y)$ je úplný polynóm s nenulovou prvou deriváciou spĺňajúci isté interpolačné podmienky. To, že prvá derivácia má byť nenulová, vieme z pohľadu na slabú formuláciu (9.16), v ktorej sa vyskytuje prvá derivácia.

Lineárny trojuholníkový element

Najjednoduchší polynóm, ktorý spĺňa uvedené požiadavky, je lineárny polynóm

$$U^e(x, y) = c_1 + c_2x + c_3y, \quad (9.19)$$

ktorý obsahuje tri lineárne nezávislé členy 1, x a y . Neznáme koeficienty c_1, c_2, c_3 vyjadríme pomocou uzlových hodnôt funkcie $U^e(x, y)$. Aby to bolo možné, tak počet uzlových bodov musí byť rovnaký ako počet lineárne nezávislých členov (a teda aj koeficientov c_i) v polynóme $U^e(x, y)$. Preto má najjednoduchší element 3 uzlové body a nazýva sa *lineárny trojuholníkový element* (Obr. 9.6). Interpolačné podmienky majú tvar

$$U^e(x_i^e, y_i^e) = u_i^e, \quad \text{pre } i = 1, 2, 3,$$

kde (x_i^e, y_i^e) pre $i = 1, 2, 3$ sú súradnice troch uzlových bodov. Detailne môžeme interpolačné podmienky rozpísať ako

$$U^e(x_1^e, y_1^e) = c_1 + c_2x_1^e + c_3y_1^e = u_1^e,$$

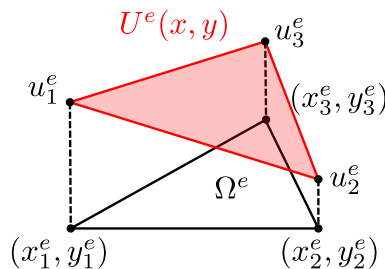
$$U^e(x_2^e, y_2^e) = c_1 + c_2x_2^e + c_3y_2^e = u_2^e,$$

$$U^e(x_3^e, y_3^e) = c_1 + c_2x_3^e + c_3y_3^e = u_3^e,$$

resp. v maticovom tvare (index e pre zjednodušenie označení vynechávame)

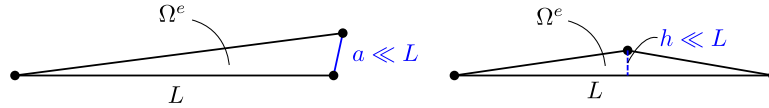
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \end{bmatrix}. \quad (9.20)$$

Získali sme sústavu troch rovníc pre neznáme c_1, c_2, c_3 . Maticu sústavy sme označili ako A .



Obr. 9.6. Lineárny trojuholníkový element Ω^e a lineárna funkcia $U^e(x, y)$ interpolujúca uzlové hodnoty u_1^e, u_2^e, u_3^e .

Poznámka 9.10 (Správny tvar elementov). Na výpočet koeficientov c_1, c_2, c_3 potrebujeme invertovať maticu A . Inverzná matica A^{-1} existuje práve vtedy, keď sú riadky matice A lineárne nezávislé, čo pri pohľade na maticu A znamená, že uzlové body nemôžu ležať na jednej priamke.^a V praxi nastáva problém už v prípade, keď sú uzlové body takmer na jednej priamke, čiže trojuholník je „splasnutý“, Obr. 9.7.



Obr. 9.7. Problematický tvar elementov.

^aOdporúčame čitateľovi, aby si premyslel, že ak sú riadky lineárne závislé, tak uzlové body naozaj ležia na jednej priamke. Čomu napríklad geometricky zodpovedá situácia $(3. \text{ riadok}) = \frac{1}{2}(1. \text{ riadok}) + \frac{1}{2}(2. \text{ riadok})$?

Riešenie sústavy (9.20) ľahko získame použitím Cramerovho pravidla. Koeficienty c_1, c_2, c_3 vychádzajú

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \frac{\begin{vmatrix} u_1 & x_1 & y_1 \\ u_2 & x_2 & y_2 \\ u_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} = \frac{u_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}}{\underbrace{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}}_{\alpha_1} - \underbrace{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}}_{\alpha_2} + \underbrace{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}}_{\alpha_3}} = \frac{u_1 \alpha_1 + u_2 \alpha_2 + u_3 \alpha_3}{D}, \\
 c_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & u_1 & y_1 \\ 1 & u_2 & y_2 \\ 1 & u_3 & y_3 \end{vmatrix}}{D} = \frac{1}{D} \left(\begin{vmatrix} u_2 & y_2 \\ u_3 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_1 & y_1 \\ u_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & y_1 \\ u_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) \\
 &= \frac{1}{D} (u_1 \underbrace{(y_2 - y_3)}_{\beta_1} + u_2 \underbrace{(y_3 - y_1)}_{\beta_2} + u_3 \underbrace{(y_1 - y_2)}_{\beta_3}) = \frac{u_1 \beta_1 + u_2 \beta_2 + u_3 \beta_3}{D}, \\
 c_3 &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & u_1 \\ 1 & x_2 & u_2 \\ 1 & x_3 & u_3 \end{vmatrix}}{D} = \frac{1}{D} \left(\begin{vmatrix} x_2 & u_2 \\ x_3 & u_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & u_1 \\ x_3 & u_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & u_1 \\ x_2 & u_2 \end{vmatrix} \right) \\
 &= \frac{1}{D} (u_1(x_3 - x_2) + u_2(x_1 - x_3) + u_3(x_2 - x_1)) = \frac{u_1 \gamma_1 + u_2 \gamma_2 + u_3 \gamma_3}{D},
 \end{aligned}$$

kde sme zaviedli označenia

$$\begin{aligned}
 \alpha_1^e &:= x_2 y_3 - x_3 y_2, & \beta_1^e &:= y_2 - y_3, & \gamma_1^e &:= -(x_2 - x_3), \\
 \alpha_2^e &:= x_3 y_1 - x_1 y_3, & \beta_2^e &:= y_3 - y_1, & \gamma_2^e &:= -(x_3 - x_1), \\
 \alpha_3^e &:= x_1 y_2 - x_2 y_1, & \beta_3^e &:= y_1 - y_2, & \gamma_3^e &:= -(x_1 - x_2), \\
 D^e &:= \alpha_1^e + \alpha_2^e + \alpha_3^e = 2A^e,
 \end{aligned} \tag{9.21}$$

pričom A^e je plocha trojuholníka Ω^e .

Úloha 9.11. Overte, že číslo D^e je naozaj rovné dvojnásobku plochy trojuholníka Ω^e .

Návod. Skonstruujte trojrozmerný vektor $\vec{a}$ od bodu $(x_1, y_1, 0)$ po bod $(x_2, y_2, 0)$ a podobne vektor $\vec{b}$ od bodu $(x_1, y_1, 0)$ po bod $(x_3, y_3, 0)$. Plocha trojuholníka Ω^e sa dá vypočítať pomocou vektorového súčinu ako $A^e = \frac{1}{2} \|\vec{a} \times \vec{b}\|$. ■

Vypočítané koeficienty c_1, c_2, c_3 teraz dosadíme do približného riešenia (9.19) a upravíme na tvar lineárnej kombinácie aproximačných funkcií (9.18)

$$U^e(x, y) = u_1^e \psi_1^e(x, y) + u_2^e \psi_2^e(x, y) + u_3^e \psi_3^e(x, y). \tag{9.22}$$

Po dosadení koeficientov a vyňatí uzlových neznámych vychádza

$$U^e(x, y) = u_1^e \underbrace{\frac{1}{D^e}(\alpha_1^e + \beta_1^e x + \gamma_1^e y)}_{\psi_1^e(x, y)} + u_2^e \underbrace{\frac{1}{D^e}(\alpha_2^e + \beta_2^e x + \gamma_2^e y)}_{\psi_2^e(x, y)} + u_3^e \underbrace{\frac{1}{D^e}(\alpha_3^e + \beta_3^e x + \gamma_3^e y)}_{\psi_3^e(x, y)}.$$

Aproximačné funkcie pre lineárny trojuholníkový element Ω^e teda majú tvar

$$\psi_i^e(x, y) = \frac{1}{D^e}(\alpha_i^e + \beta_i^e x + \gamma_i^e y), \quad i = 1, 2, 3, \quad (9.23)$$

pričom používame označenia (9.21).

Poznámka 9.12 (Správny tvar elementov). V aproximačných funkciách (9.23) máme výraz D^e v menovateli. V prípade, že D^e (a teda aj plocha elementu A^e) sa blíži k nule (rýchlejšie, než čitateľ), tak pri numerických výpočtoch môže nastať problém (veľká nepresnosť). Pozri aj Poznámku 9.10.

Pozrime sa na hodnoty aproximačnej funkcie $\psi_1^e(x, y)$ v uzlových bodoch. V bode (x_1^e, y_1^e) máme

$$\psi_1^e(x_1, y_1) = \frac{1}{D}(\alpha_1 + \beta_1 x_1 + \gamma_1 y_1) = \frac{1}{D}(\alpha_1 + (y_2 - y_3)x_1 + (-x_2 + x_3)y_1) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = 1.$$

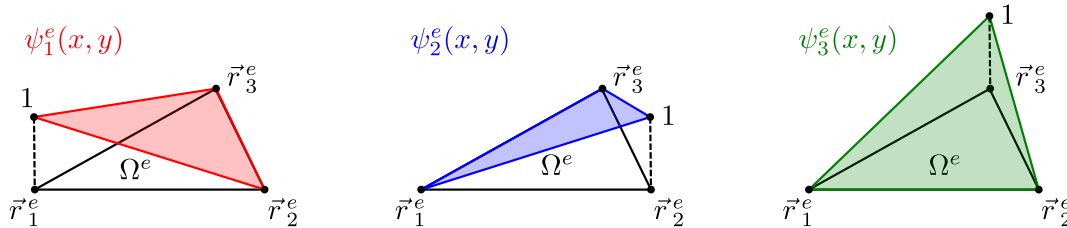
V bode (x_2^e, y_2^e) vychádza

$$\psi_1^e(x_2, y_2) = \frac{1}{D}((x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x_2 + (-x_2 + x_3)y_2) = 0.$$

Podobne sa dá ukázať, že $\psi_1^e(x_3, y_3) = 0$. Uzlové hodnoty aproximačných funkcií (9.23) môžeme podobne ako v 1D úlohách (pozri sekciu 4.3.2 a Poznámku 4.5) zapísať všeobecne s použitím Kroneckerovho delta symbolu v tvare

$$\psi_i^e(x_j^e, y_j^e) = \delta_{ij}.$$

Aproximačné funkcie vykresľujeme na Obr. 9.8.



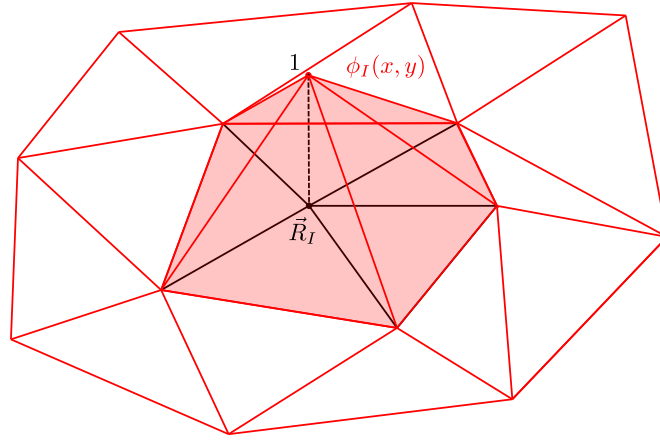
Obr. 9.8. Aproximačné funkcie pre lineárny trojuholníkový element.

Úloha 9.13 (Aproximačné funkcie | cv11-13, MKP 2D.nb). Do programu cv11-13, MKP 2D.nb na riešenie úlohy z Príkladu 9.2 doplňte konštrukciu lineárnych aproximačných funkcií pre trojuholníkové elementy z Úlohy 9.7. V cykle pre elementy Ω^e , $e = 1, \dots, N$ je potrebné:

1. Definovať súradnice uzlových bodov x_i^e, y_i^e , $i = 1, 2, 3$ (netreba si ich pamätať mimo cyklu). Dá sa to urobiť veľmi stručne pomocou súradníc globálnych uzlových bodov použitím matice spojitosti B .
2. Definovať čísla $\alpha_i^e, \beta_i^e, \gamma_i^e, D_i^e$ podľa vzťahov (9.21) (netreba si ich pamätať mimo cyklu).
3. Definovať aproximačné funkcie $\psi_i^e(x, y)$ podľa vzťahu (9.23).

Poznámka 9.14 (*Globálne aproximačné funkcie). Podobne ako v 1D aj tu v 2D sa pomocou elementových (lokálnych) aproximačných funkcií dajú skonštruovať *globálne aproximačné funkcie* (pozri časť o globálnych aproximačných funkciách v 1D začínajúcu na strane 49).

Postup v 2D je úplne rovnaký ako v 1D. Globálnu aproximačnú funkciu ϕ_I prislúchajúcu globálnemu uzlovému bodu $\vec{R}_I$ konštruujeme tak, že zafixujeme uzlové hodnoty $\phi_I(\vec{R}_I) = 1$ a $\phi_I(\vec{R}_J) = 0$ pre $J \neq I$, a potom tieto hodnoty na každom elemente interpolujeme pomocou elementových aproximačných funkcií (Obr. 9.8). Funkcia ϕ_I je teda nulová takmer na všetkých elementoch s výnimkou tých z okolia bodu $\vec{R}_I$, v ktorom má graf tvar ihlanu s výškou 1 a vrcholom v bode $\vec{R}_I$ (Obr. 9.9).



Obr. 9.9. Globálna aproximačná funkcia $\phi_I(x, y)$ prislúchajúca globálnemu uzlovému bodu $\vec{R}_I$.

Detailné využitie globálnych aproximačných funkcií nebudeme uvádzať. Je ale užitočné si ho aspoň čiastočne premyslieť v analógii s 1D, tak sa na to pozrime.

Globálne aproximačné funkcie sú opäť dôležité v kontexte *globálneho pohľadu na MKP* (pozri sekciu 4.7). Ak zoberieme *slabú formuláciu* na *celej* výpočtovej *oblasti* (pozri vzťah (4.9) pre porovnanie s 1D)^a

$$\int_{\Omega} \left[(a_{11}\partial_x u + a_{12}\partial_y u)\partial_x w + (a_{21}\partial_x u + a_{22}\partial_y u)\partial_y w \right] dx dy = \int_{\Omega} f w dx dy + \int_{\partial\Omega} q_n w ds,$$

za u dosadíme približné riešenie v tvare rozkladu

$$U(x, y) = \sum_{J=1}^n U_J \phi_J(x, y), \quad \text{kde} \quad U_J = U(\vec{R}_J),$$

a za váhovú funkciu w postupne dosadíme všetky globálne aproximačné funkcie ϕ_I , dostaneme globálnu sústavu rovníc.

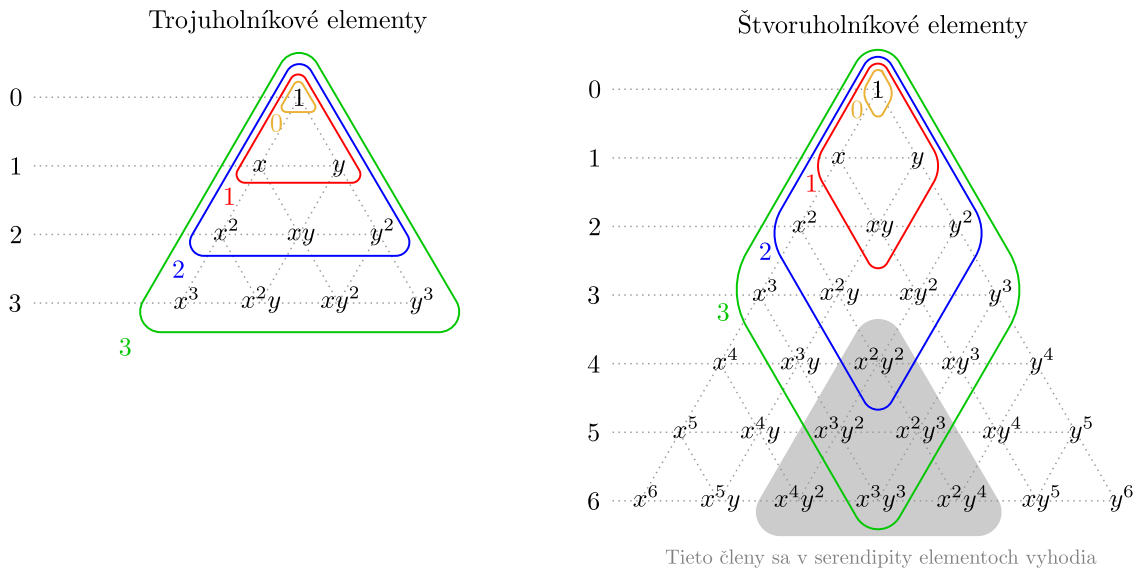
V zmysle matematickej analýzy MKP (kapitola 6) tvoria globálne aproximačné funkcie bázu konečnorozmerného priestoru V_n , v ktorom hľadáme približné riešenie U , pozri sekciu 6.3 o Ritzovej-Galerkinovej metóde.

^aPripomíname, že už sme sa so slabou formuláciou na celej 2D výpočtovej oblasti stretli pri odvodzovaní matematického modelu pre priehyb membrány (čiže rovnice (9.7)) v sekcii 2.4. Vtedy na pravej strane slabej formulácie (2.33) nebol žiaden hraničný člen, lebo sme použili nulovú Dirichletovu okrajovú podmienku pre w .

Ďalšie typy elementov

Približné riešenie na elemente má vždy tvar lineárnej kombinácie aproximačných funkcií (9.18). Aproximačné funkcie sa vždy dajú odvodiť štandardným postupom, ktorý sme použili v 1D v sekcii 4.3.2, aj teraz pre lineárne trojuholníkové elementy: Zoberie sa približné riešenie v tvare polynómu U^e , napíše sa preňho sústava interpolačných podmienok s neznámymi koeficientami c_i , sústava sa vyrieši, získané koeficienty c_i sa dosadia do polynómu U^e a polynóm upravíme na tvar (9.18), v ktorom identifikujeme aproximačné funkcie ψ_i^e .

Zostáva otázka, ako má vyzeráť polynóm $U^e(x, y)$. Pri lineárnych trojuholníkových elementoch sme použili tvar (9.19). Ďalšie možné tvary sa dajú systematicky skonštruovať pomocou tzv. „Pascalovho trojuholníka“, Obr. 9.10. V trojuholníku sú postupne usporiadané všetky monómy premenných x, y . Vedľa obrázkov je číslo poschodia. Na k -tom poschodí sú všetky monómy stupňa k . V obrázkoch farebne ohraničujeme monómy, ktoré sa použijú na konštrukciu elementu stupňa **jeden**, **dva** a **tri**. Pre úplnosť uvádzame aj elementy stupňa **nula**, čiže $U^e(x, y) = c_1$, ktoré sa ale v MKP nepoužívajú, lebo celkové približné riešenie $U(x, y)$ by bolo po častiach konštantné, a teda vo všeobecnosti nespojité na styku elementov (v MKP práve chceme spojité riešenie $U(x, y)$).⁶



Obr. 9.10. „Pascalov trojuholník“ na konštrukciu polynómu $U^e(x, y)$. Vľavo schematicky naznačujeme konštrukciu pre trojuholníkové, vpravo pre štvoruholníkové elementy.

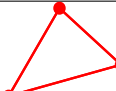
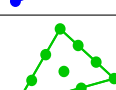
Podobu elementov rôzneho stupňa s a príslušných polynómov $U^e(x, y)$ vidíme v Tabuľke 9.1 (trojuholníkové elementy) a v Tabuľke 9.2 (štvoruholníkové elementy). Uvádzame dva typy elementov: *Lagrangeove* elementy, ktoré pre stupeň $s \geq 2$ obsahujú aj vnútorné uzly, a tzv. *serendipity* elementy, ktoré neobsahujú vnútorné uzly.⁷ Kvadratický štvoruholníkový serendipity element je najpoužívanejším elementom v 2D.

Poznámka 9.15 (Stupeň elementu v praxi). V praxi sa elementy stupňa $s \geq 3$ používajú zriedka. V konečnoprvkových softvéroch bývajú štandardne implementované elementy stupňov $s = 1$ a $s = 2$, čo bohato stačí.

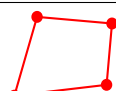
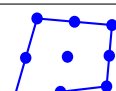
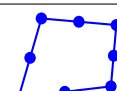
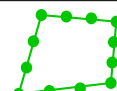
⁶Po častiach konštantné riešenie sa ale používa napríklad v *metóde konečných objemov*.

⁷Slovo *serendipity* znamená „šťastný náhodný objav“. Slovo má pôvabnú a fascinujúcu etymológiu. Prvé známe použitie je z roku 1754, keď istý anglický spisovateľ, historik a politik Horace Walpole v liste svojmu známemu opisoval nečakaný objav strateného obrazu, pričom sa odvolal na perzskú rozprávku Traja princovia zo Serendipu. Princovia v rozprávke objavujú veci, po ktorých ani nepátrali. S pomocou šťastnej náhody, ale aj múdrosti zistili, ako vyzerá akási stratená tava (je chromá, slepá na jedno oko, chýba jej zub, na jednej strane nesie med, na druhej maslo a sedí na nej tehotná žena). Serendip je starý perzský názov pre Srí Lanku, ktorý pochádza zo sanskritu: Simhaladvīpaḥ (Simhalav = Srí Lanka + dvīpaḥ = ostrov).

Tabuľka 9.1. Trojuholníkové elementy. Tvar polynómu $U^e(x, y)$ s počtom členov m^e (rovným počtu uzlov elementu) pre stupeň s .

s	m^e	$U^e(x, y)$	Element
0	1	c_1	
1	3	$c_1 + c_2x + c_3y$	
2	6	$c_1 + c_2x + c_3y + c_4x^2 + c_5xy + c_6y^2$	
3	10	$c_1 + c_2x + c_3y + c_4x^2 + c_5xy + c_6y^2 + c_7x^3 + c_8x^2y + c_9xy^2 + c_{10}y^3$	
s	$\frac{1}{2}(s+1)(s+2)$		

Tabuľka 9.2. Lagrangeove aj Serendipity (od $s \geq 2$) štvoruholníkové elementy. Uvádzame tvar polynómu $U^e(x, y)$ s počtom členov m^e (rovným počtu uzlov elementu) pre stupeň s .

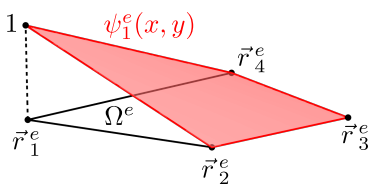
s	m^e		$U^e(x, y)$	Element	
	Lagange	Serendip.	Prečiarknuté členy v Ser. el. neuvažujeme	Lagrange	Serendipity
0	1	–	c_1		–
1	4	–	$c_1 + c_2x + c_3y + c_4xy$		–
2	9	8	$c_1 + c_2x + c_3y + c_4x^2 + c_5xy + c_6y^2 + c_7x^2y + c_8xy^2 + \cancel{c_9x^2y^2}$		
3	16	12	$c_1 + c_2x + c_3y + c_4x^2 + c_5xy + c_6y^2 + c_7x^3 + c_8x^2y + c_9xy^2 + c_{10}y^3 + c_{11}x^3y + \cancel{c_{12}x^2y^2} + c_{13}xy^3 + \cancel{c_{14}x^3y^2} + \cancel{c_{15}x^2y^3} + \cancel{c_{16}x^3y^3}$		
s	$(s+1)^2$	$4s$			

Poznámka 9.16 (Zodpovedajúce elementy v ANSYS). V softvéri ANSYS sa napríklad na riešenie rovnice vedenia tepla (2.15) (aj izotropných, resp. stacionárnych verzií) používajú elementy uvedené v nasledujúcej tabuľke.

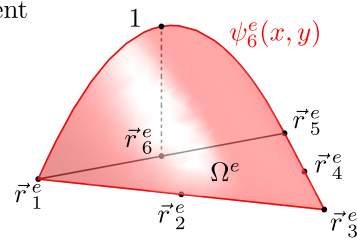
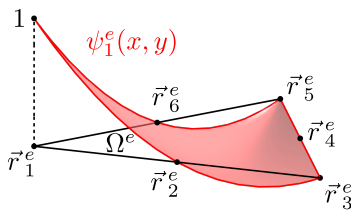
s	Trojuholník	Štvoruholník
1	PLANE55 (Triangular option)	PLANE55
2	PLANE35 PLANE77 (Triangular option)	PLANE77 (Serendipity)

Hodnoty aproximačných funkcií ψ_i^e v uzlových bodoch úplne vo všeobecnosti spĺňajú vlastnosť $\psi_i^e(x_j^e, y_j^e) = \delta_{ij}$. Na ukážku vykresľujeme aproximačnú funkciu ψ_1^e pre bilineárny ($s = 1$) štvoruholníkový element a aproximačné funkcie ψ_1^e, ψ_6^e pre kvadratický ($s = 2$) štvoruholníkový element na Obr. 9.11. Na zápis aproximačných funkcií je výhodné použiť tzv. *jednotkový element* so súradni-

Bilineárny 4-uholníkový element

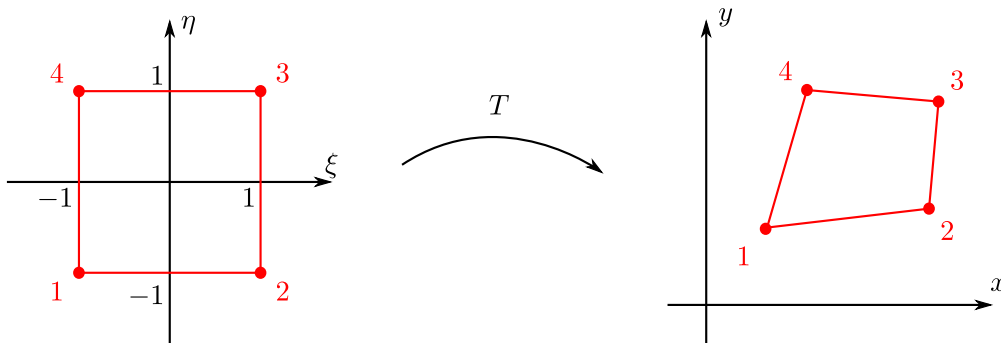


Kvadratický 3-uholníkový element



Obr. 9.11. Niektoré aproximačné funkcie pre bilineárny štvoruholníkový a kvadratický trojuholníkový element.

camí $\xi \in [-1, 1]$, $\eta \in [-1, 1]$ (hovorí sa im *prírodné súradnice*), Obr. 9.12.⁸ Transformácia súradníc



Obr. 9.12. Transformácia jednotkového bilineárneho elementu na všeobecný element. Uzly kvôli prehľadnosti označujeme len číslami.

$T : (\xi, \eta) \mapsto (x, y)$, ktorá transformuje jednotkový element na všeobecný element má napríklad pre bilineárny štvoruholníkový element súradnicový zápis

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 x_i^e N_i(\xi, \eta), \quad y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 y_i^e N_i(\xi, \eta), \quad (9.24)$$

pričom $N_i(\xi, \eta)$ sú aproximačné funkcie pre jednotkový element, ktoré majú jednoduchý tvar

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), & N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta), \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), & N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta). \end{aligned} \quad (9.25)$$

Úloha 9.17 (Overenie aproximačných funkcií N_i). Presvedčte sa, že aproximačné funkcie (9.25) sú naozaj správne. Sú bilinéarne? Nadobúdajú v uzlových bodoch $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$ a $(-1, 1)$ správne hodnoty?

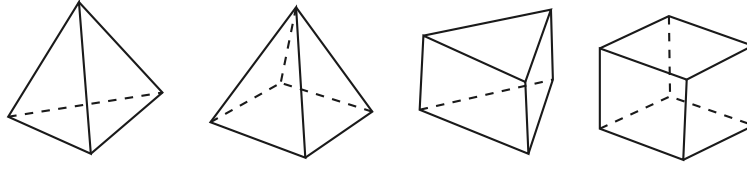
Pomocou transformácie (9.24) sa potom vzťah medzi aproximačnými funkciami ψ_i^e a N_i vyjadrí ako $\psi_i^e(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = N_i(\xi, \eta)$.

*Výlet do 3D

V tejto učebnici sa venujeme MKP pre 1D a 2D úlohy. V 3D sa väčšina krokov MKP robí podobne ako v 2D. Na tomto mieste aspoň načrtne, ako vyzerajú niektoré elementy v 3D. Využívajú

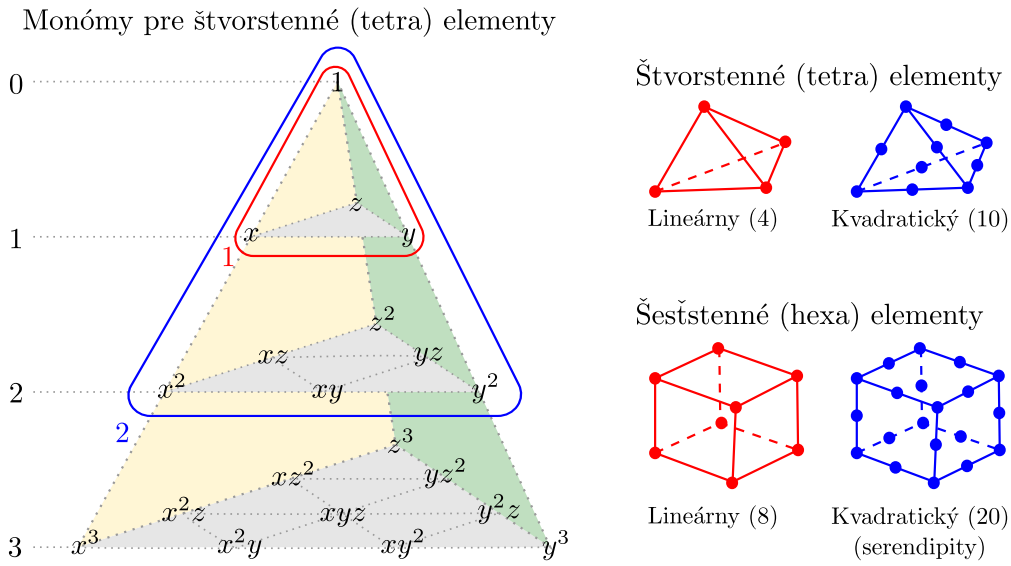
⁸Takto sa postupuje v tzv. *izoparametrickej formulácii* MKP. V tejto učebnici sa tomuto prístupu nevenujeme. Čitateľ o tom nájde viac napríklad v knihách [8, 6, 17, 14].

štyri základné útvary: štvorsten, pyramída, trojboký hranol a šesťsten, Obr. 9.13. Všetky majú trojuholníkové a štvoruholníkové steny. Detailnejšie sa pozrieme na štvorsteny a šesťsteny, ktoré sa najviac používajú.



Obr. 9.13. Základné geometrické tvary elementov v 3D.

V 3D sa na konštrukciu približného riešenia na elemente dá použiť „Pascalov štvorsten“, Obr. 9.14, vľavo. Sú v ňom postupne usporiadané všetky monómy premenných x, y, z . Vedľa obrázka

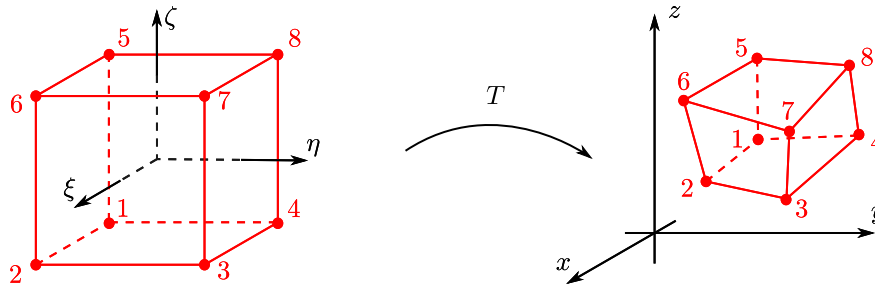


Obr. 9.14. Vľavo schematicky pomocou „Pascalovho štvorstenu“ naznačujeme konštrukciu funkcie $U^e(x, y, z)$ pre štvorstenné elementy. Vpravo vidíme najpoužívanejšie lineárne/kvadratické štvorstenné a šesťstenné elementy. V zátvorke uvádzame počet uzlov.

je číslo poschodia. Na k -tom poschodí sú všetky monómy stupňa k . V obrázku farebne ohraničujeme monómy, ktoré sa použijú na konštrukciu štvorstenného elementu stupňa **red** a **blue**. Najjednoduchší je štvorstenný lineárny element, ktorý má 4 uzly (Obr. 9.14, vpravo) a približné riešenie na elemente je lineárna funkcia 3 premenných $U^e(x, y, z) = c_1 + c_2x + c_3y + c_4z$. Kvadratický štvorstenný element má 10 uzlov a približné riešenie má tvar $U^e(x, y, z) = c_1 + c_2x + c_3y + c_4z + c_5x^2 + c_6xy + c_7y^2 + c_8xz + c_9yz + c_{10}z^2$. Lineárny (resp. trilineárny) šesťstenný element má 8 uzlov a približné riešenie na elemente má tvar $U^e(x, y, z) = c_1 + c_2x + c_3y + c_4z + c_5xy + c_6yz + c_7xz + c_8xyz$. Lagrangeov kubický šesťstenný element má až 27 uzlov a približné riešenie až 27 členov. Podobne ako v 2D aj tu sa dajú konštruovať serendipity elementy. Kubický serendipity element má len 20 uzlov, Obr. 9.14 („chýba mu“ 6 uzlov na stenách a 1 vnútri elementu).

Na zápis aproximačných funkcií je v 3D tiež výhodné použiť jednotkový element (Obr. 9.15). Napríklad pre lineárny šesťstenný element sa použijú (prirodzené) súradnice $\xi \in [-1, 1]$, $\eta \in [-1, 1]$, $\zeta \in [-1, 1]$, pričom transformácia súradníc $T : (\xi, \eta, \zeta) \mapsto (x, y, z)$, ktorá transformuje jednotkový šesťstenný element na všeobecný, má súradnicový zápis

$$x(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^8 x_i^e N_i(\xi, \eta, \zeta), \quad y(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^8 y_i^e N_i(\xi, \eta, \zeta), \quad z(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^8 z_i^e N_i(\xi, \eta, \zeta),$$



Obr. 9.15. Transformácia jednotkového lineárneho šesťstenného elementu na všeobecný element. Uzly kvôli prehľadnosti označujeme len číslami.

kde $N_i(\xi, \eta, \zeta)$ sú aproximačné funkcie pre jednotkový element, ktoré majú jednoduchý tvar

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta), & N_2(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta), \\
 N_3(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta), & N_4(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta), \\
 N_5(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta), & N_6(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta), \\
 N_7(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta), & N_8(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta).
 \end{aligned} \tag{9.26}$$

Úloha 9.18 (Overenie aproximačných funkcií N_i). Obdobne ako v Úlohe 9.17 aj tu sa presvedčte, že aproximačné funkcie (9.26) sú naozaj správne.

Poznámka 9.19 (Zodpovedajúce elementy v ANSYS-e). V softvéri ANSYS sa napríklad na riešenie rovnice vedenia tepla (2.15) (aj izotropných resp. stacionárnych verzií) používajú elementy uvedené v nasledujúcej tabuľke.

s	Štvorsten	Šesťsten
1	SOLID70 (Tetrahedral option)	SOLID70
2	SOLID87 SOLID90 (Tetrahedral option)	SOLID90 (Serendipity)

Poznámka 9.20 (Ďalšie elementy v ANSYS-e). Na viacerých miestach učebnice text preväzujeme so softvérom ANSYS, v ktorom sa študenti MPM učia pracovať. ANSYS ponúka množstvo ďalších elementov pre rôzne druhy úloh. Okrem už spomínaných sa študenti MPM môžu počas štúdia stretnúť napríklad ešte s týmito elementami:

- PLANE182/183 – modelovanie 2D pevných štruktúr.
- SOLID185/SOLID186 – modelovanie 3D pevných štruktúr.
- SHELL181 – modelovanie deformácie tenkých škrupinových štruktúr.
- FLUID29/30 – akustika, riešenie vlnovej rovnice v tekutine (2D resp. 3D).

9.2.3 Dosadenie približného riešenia a aproximačných funkcií do slabej formulácie

Zostrojenie sústavy rovníc na elemente urobíme všeobecne pre ľubovoľný typ elementu (trojuholník, štvoruholník, lineárny, kvadratický,...). Majme element Ω^e s m^e uzlovými bodmi. Približné

riešenie $U^e(x, y)$ na elemente má pre ľubovoľný typ elementu tvar (9.18). Sústavu rovníc zostrojíme v princípe rovnakým postupom, ako v 1D. Do *slabej formulácie* (9.16) dosadíme za funkciu u približné riešenie na elemente (9.18) a za váhovú funkciu w postupne všetky aproximačné funkcie ψ_i^e pre $i = 1, \dots, m^e$. Dostaneme

$$\int_{\Omega^e} \left[\left(a_{11} \partial_x \sum_{j=1}^{m^e} u_j^e \psi_j^e + a_{12} \partial_y \sum_{j=1}^{m^e} u_j^e \psi_j^e \right) \partial_x \psi_i^e + \left(a_{21} \partial_x \sum_{j=1}^{m^e} u_j^e \psi_j^e + a_{22} \partial_y \sum_{j=1}^{m^e} u_j^e \psi_j^e \right) \partial_y \psi_i^e \right] dx dy = \int_{\Omega^e} f \psi_i^e dx dy + \int_{\Gamma^e} q_n \psi_i^e ds.$$

Sumy a konštantu u_j^e môžeme vyňať pred integrál

$$\sum_{j=1}^{m^e} u_j^e \underbrace{\int_{\Omega^e} \left(a_{11} \partial_x \psi_j^e \partial_x \psi_i^e + a_{12} \partial_y \psi_j^e \partial_x \psi_i^e + a_{21} \partial_x \psi_j^e \partial_y \psi_i^e + a_{22} \partial_y \psi_j^e \partial_y \psi_i^e \right) dx dy}_{K_{ij}^e} = \underbrace{\int_{\Omega^e} f \psi_i^e dx dy}_{f_i^e} + \underbrace{\int_{\Gamma^e} q_n \psi_i^e ds}_{Q_i^e}.$$

Výsledná i -ta elementová rovnica má po úprave podobu

$$\sum_{j=1}^{m^e} K_{ij}^e u_j^e = f_i^e + Q_i^e$$

kde používame označenia

$$K_{ij}^e := \int_{\Omega^e} \left(a_{11} \partial_x \psi_j^e \partial_x \psi_i^e + a_{12} \partial_y \psi_j^e \partial_x \psi_i^e + a_{21} \partial_x \psi_j^e \partial_y \psi_i^e + a_{22} \partial_y \psi_j^e \partial_y \psi_i^e \right) dx dy,$$

$$f_i^e := \int_{\Omega^e} f \psi_i^e dx dy, \tag{9.27}$$

$$Q_i^e := \int_{\Gamma^e} q_n \psi_i^e ds. \tag{9.28}$$

Čísla K_{ij}^e sú prvky elementovej matice tuhosti, f_i^e sú prvky elementovej pravej strany a Q_i^e sú hraničné členy. V izotropnom prípade (9.3) so slabou formuláciou (9.17) majú prvky elementovej matice jednoduchší tvar

$$K_{ij}^e := \int_{\Omega^e} a (\partial_x \psi_j^e \partial_x \psi_i^e + \partial_y \psi_j^e \partial_y \psi_i^e) dx dy. \tag{9.29}$$

Sústavu rovníc na elemente Ω^e môžeme zapísať aj v maticovom tvare

$$K^e u^e = f^e + Q^e.$$

Neznámymi sú uzlové hodnoty $u_1^e, \dots, u_{m^e}^e$ a toky $Q_1^e, \dots, Q_{m^e}^e$. Všimnime si, že sústava má v našom značení úplne rovnaký tvar, ako v 1D (porovnaj s rovnicami (4.28) a (4.31)).⁹

Pre lepšiu predstavu, napríklad pre lineárny trojuholníkový element máme elementovú sústavu rovníc

$$\begin{aligned} K_{11}^e u_1^e + K_{12}^e u_2^e + K_{13}^e u_3^e &= f_1^e + Q_1^e, \\ K_{21}^e u_1^e + K_{22}^e u_2^e + K_{23}^e u_3^e &= f_2^e + Q_2^e, \\ K_{31}^e u_1^e + K_{32}^e u_2^e + K_{33}^e u_3^e &= f_3^e + Q_3^e, \end{aligned} \quad \text{resp. maticovo} \quad \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & K_{13}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e & K_{23}^e \\ K_{31}^e & K_{32}^e & K_{33}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^e \\ f_2^e \\ f_3^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1^e \\ Q_2^e \\ Q_3^e \end{bmatrix}.$$

⁹Čitateľovi v tejto chvíli odporúčame na chvíľu zastaviť a pookriať nad krásou MKP.

Poznámka 9.21 (Symetria elementovej matice tuhosti). Elementová matica tuhosti K^e je symetrická ($K_{ij}^e = K_{ji}^e$) len v prípade, ak $a_{21} = a_{12}$. Čiže v prípade izotropnej rovnice vedenia tepla (9.6) aj rovnice pre priehyb membrány (9.7) dostaneme symetrickú maticu. V prípade anizotropnej rovnice vedenia tepla z Príkladu 2.7 máme vo všeobecnosti nesymetrickú maticu.

Úloha 9.22 (Elementová matica a pravá strana | c11-13, MKP v 2D.nb). Do vášho programu c11-13, MKP v 2D.nb na riešenie úlohy z Príkladu 9.2 doplňte konštrukciu elementovej matice tuhosti K^e a pravej strany f^e , ktorých prvky sú definované vzťahmi (9.29) a (9.27). Zvoľte funkcie $a(\vec{r}) \equiv 1$ a $f(\vec{r}) \equiv 0$, ale integrály naprogramujte pre všeobecné $a(\vec{r})$, $f(\vec{r})$. Pri integrovaní využite, že elementy Ω^e sú definované ako geometrické regióny a je možné cez ne jednoducho integrovať ako `Integrate[... , Element[ {x,y}, Ω[[e]] ]]`.

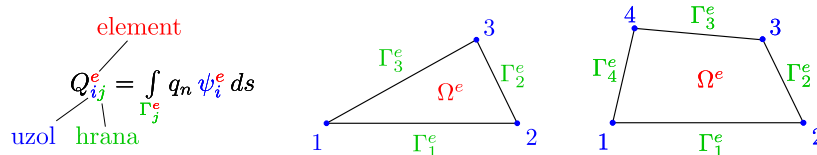
9.2.4 Výpočet hraničných členov

V jednej dimenzii boli hraničné členy v slabej formulácii v podstate derivácie vyčíslené na hranici (pozri vzťahy (4.7)), tu sú hraničné členy Q_i^e nejaké integrály z derivácií (rovnica (9.28)). Pozrime sa bližšie na to, ako ich počítať. Načrtne to na lineárnom trojuholníkovom a bilineárnom štvoruholníkovom elemente.

Pre lineárny trojuholníkový element môžeme integrál (9.28) rozpísať na súčet troch integrálov po jednotlivých hranách trojuholníka (Obr. 9.16)

$$Q_i^e = \int_{\Gamma^e} q_n \psi_i^e ds = \underbrace{\int_{\Gamma_1^e} q_n \psi_i^e ds}_{Q_{i1}^e} + \underbrace{\int_{\Gamma_2^e} q_n \psi_i^e ds}_{Q_{i2}^e} + \underbrace{\int_{\Gamma_3^e} q_n \psi_i^e ds}_{Q_{i3}^e}.$$

Označenie hraničných členov je ilustrované aj na Obr. 9.16. Pod integrálmi vystupujú aproximačné



Obr. 9.16. Označenie hrán elementu a hraničných členov.

funkcie ψ_i^e . Tie sú však na niektorých hranách nulové, takže niektoré Q_{ij}^e budú nulové. Napríklad aproximačná funkcia ψ_1^e je nulová na hrane Γ_2^e , pozri Obr. 9.8, čiže preto $Q_{12}^e = 0$.

V prípade bilineárneho štvoruholníkového elementu sa integrál rozdelí na súčet štyroch integrálov po hranách štvoruholníka (Obr. 9.16)

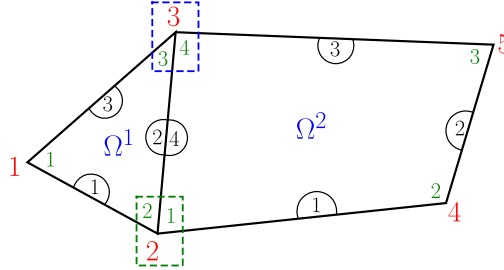
$$Q_i^e = Q_{i1}^e + Q_{i2}^e + Q_{i3}^e + Q_{i4}^e,$$

pričom vždy budú dve Q_{ij}^e nulové kvôli nulovosti aproximačnej funkcie na dvoch hranách. Napríklad pre $i = 1$ máme $Q_{12}^e, Q_{13}^e = 0$.

Poznámka 9.23 (Prečo to takto komplikujeme?). Na prvý pohľad sa môže zdať, že sme si skomplikovali život. Namiesto jedného Q -čka pre každý uzol na elemente ich máme viac. Nakoniec nám však tento postup umožní využiť bilanciáciu tokov na styku elementov, vďaka ktorej množstvo Q -čok vypadne. Ak teda hrana Γ_j^e neleží na hranici (aproximovanej) výpočtovej oblasti, tak príslušné Q_{ij}^e reálne nepotrebujeme počítať.

9.3 Globálna sústava rovníc

Pri spájaní elementových sústav rovníc do globálnej sústavy využijeme rovnaké princípy ako v 1D (pozri sekciu 4.4), čiže *spojitosť približného riešenia* $U(x, y)$ (primárnej neznámej) a *bilanciu tokov* (sekundárnej neznámej) q_n na styku elementov. Postup budeme najprv ilustrovať na sieti tvorenej dvoma elementami – lineárnym trojuholníkovým elementom Ω^1 a bilineárnym štvoruholníkovým elementom Ω^2 (Obr. 9.17). Neskôr v sekcii 9.4 ukážeme ešte jeden príklad.



Obr. 9.17. Sieť tvorená dvoma elementami Ω^1, Ω^2 . Hrany a uzly kvôli prehľadnosti označujeme len číslami.

9.3.1 Spojitosť riešenia

Spojitosť riešenia zabezpečíme (rovnako ako v 1D) zavedením *globálneho číslovania* uzlových bodov a neznámych. O globálnom číslovaní uzlových bodov sme už hovorili v sekcii 9.1. V prípade siete na Obr. 9.17 globálne a lokálne číslovanie uzlových bodov súvisí takto

$$\vec{R}_1 = \vec{r}_1^1, \vec{R}_2 = \vec{r}_2^1 = \vec{r}_1^2, \vec{R}_3 = \vec{r}_3^1 = \vec{r}_4^2, \vec{R}_4 = \vec{r}_2^2, \vec{R}_5 = \vec{r}_3^2. \quad (9.30)$$

Matica spojitosti má teda tvar

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}. \quad (9.31)$$

Spojitosť približného riešenia $U(x, y)$ v uzlových bodoch teda zabezpečíme zavedením nasledujúceho globálneho číslovania primárnych neznámych

$$U_1 = u_1^1, U_2 = u_2^1 = u_1^2, U_3 = u_3^1 = u_4^2, U_4 = u_2^2, U_5 = u_3^2. \quad (9.32)$$

Tvrdenie 9.24 (Spojitosť na styku elementov). Spojitosť v uzlových bodoch $\vec{R}_2$ a $\vec{R}_3$ automaticky garantuje spojitosť na styku elementov Ω^1 a Ω^2 .

Dôkaz. Pointa je, že priebeh riešenia je z oboch strán lineárny a v uzloch sa hodnoty zhodujú podľa (9.32). Pre oba elementy je teda priebeh riešenia na styku rovnaká lineárna funkcia.

Podme to explicitne overiť. Pozrime sa na priebeh riešenia na úsečke, ktorá začína v bode $\vec{R}_2$ a končí v bode $\vec{R}_3$. Môžeme ju parametrizovať ako

$$\vec{r}(t) = \vec{R}_2 + (\vec{R}_3 - \vec{R}_2)t, \quad t \in [0, 1]. \quad (9.33)$$

Z pohľadu trojuholníkového elementu Ω^1 má približné riešenie $U^1(x, y)$ na úsečke (9.33) tvar

$$U^1(\vec{r}(t)) \stackrel{1.}{=} u_2^1 \psi_2^1(\vec{r}(t)) + u_3^1 \psi_3^1(\vec{r}(t)) \stackrel{2.}{=} U_2 \underbrace{\psi_2^1(\vec{r}(t))}_{1-t} + U_3 \underbrace{\psi_3^1(\vec{r}(t))}_t \stackrel{3.}{=} U_2(1-t) + U_3 t. \quad (9.34)$$

kde sme postupne využili:

1. Vzťah (9.22) a nulovosť aproximačnej funkcie ψ_1^1 na úsečke (9.33) (hrane Γ_2^1).
2. Globálne číslovanie primárnych neznámych (9.32).
3. Tvar aproximačných funkcií (9.23) na úsečke (9.33). Vidno to z Obr. 9.8, ale dá sa to overiť aj výpočtom.¹⁰

Podobne zistíme, že z pohľadu štvoruholníkového elementu Ω^2 má približné riešenie $U^2(x, y)$ na úsečke (9.33) tvar

$$U^2(\vec{r}(t)) = u_1^2 \psi_1^2(\vec{r}(t)) + u_4^2 \psi_4^2(\vec{r}(t)) = U_2 \underbrace{\psi_1^2(\vec{r}(t))}_{1-t} + U_3 \underbrace{\psi_4^2(\vec{r}(t))}_t = U_2(1-t) + U_3 t. \quad (9.35)$$

Vidíme, že tvary (9.34) a (9.35) sú zhodné. Približné riešenie $U(x, y)$ je teda na styku elementov spojité. $\square$

9.3.2 Bilancia tokov

Pri spájaní elementových rovníc do globálnej sústavy využijeme bilanciu tokov. Najprv bilanciu vyjadríme v spojitých formulácii pomocou hustoty toku do vnútra elementu $q_n = \vec{q} \cdot (-\vec{n})$ (definovali sme ju vzťahom (9.9)). Označme¹¹

$$(q_n)_j^e = \text{hustota toku do vnútra elementu } \Omega^e \text{ cez hranu } \Gamma_j^e.$$

V našom prípade má *bilancia tokov v spojitých formulácii* tvar

$$(q_n)_2^1 = -(q_n)_4^2.$$

Čiže hustota toku $(q_n)_2^1$, ktorá *príteká* do elementu Ω^1 cez druhú hranu Γ_2^1 musí byť rovnaká, ako hustota toku $-(q_n)_4^2$, ktorá *vyteká* z elementu Ω^2 cez štvrtú hranu Γ_4^2 . Ďalej budeme využívať anulovaný tvar

$$(q_n)_2^1 + (q_n)_4^2 = 0. \quad (9.36)$$

Teraz bilanciu (9.36) potrebujeme „preložiť“ do *diskrétnej formulácie*, čiže do reči Q -čok. Pre 2. globálny uzlový bod bilanciu (9.36) vynásobíme aproximačnou funkciou ψ_2^1 resp. ψ_1^2 (na styku elementov sa zhodujú) a zintegrujeme cez hranu Γ_2^1 resp. Γ_4^2 (zhodujú sa), pozri Obr. 9.17. Získavame teda

$$\int_{\Gamma_2^1} (q_n)_2^1 \psi_2^1 ds + \int_{\Gamma_4^2} (q_n)_4^2 \psi_1^2 ds = 0.$$

Po využití definície Q_{ij}^e (pozri Obr. 9.16) dostávame *prvú bilanciu tokov*

$$Q_{22}^1 + Q_{14}^2 = 0. \quad (9.37)$$

Analogicky pre 3. globálny uzlový bod získame (odporúčame čitateľovi, aby si to premyslel)

$$\int_{\Gamma_2^1} (q_n)_2^1 \psi_3^1 ds + \int_{\Gamma_4^2} (q_n)_4^2 \psi_4^2 ds = 0$$

a po využití definície Q_{ij}^e dostávame *druhú bilanciu tokov*

$$Q_{32}^1 + Q_{44}^2 = 0. \quad (9.38)$$

¹⁰Je to jednoduché cvičenie. Stačí zobrať tvar (9.33), rozpísať ho cez lokálne číslovanie uzlových bodov (9.30), dosadiť do aproximačnej funkcie ψ_2^e resp. ψ_3^e vyjadrenej v tvare (9.23) a upraviť podobným spôsobom, ako keď sme skúmali hodnoty aproximačných funkcií v uzlových bodoch na strane 134.

¹¹Ak ste sa doteraz z toho množstva indexov nezbláznili, tak v tejto časti to pravdepodobne príde. Pri nevoľnostiach odporúčame dokorán otvoriť okno a zhlboka predýchať.

9.3.3 Spojenie rovníc do globálnej sústavy

Napišme si najprv sústavy rovníc na jednotlivých elementoch. Sústava rovníc na trojuholníkovom elemente Ω^1 má tvar

$$\begin{aligned} K_{11}^1 u_1^1 + K_{12}^1 u_2^1 + K_{13}^1 u_3^1 &= f_1^1 + Q_1^1 = f_1^1 + Q_{11}^1 + Q_{13}^1, \\ K_{21}^1 u_1^1 + K_{22}^1 u_2^1 + K_{23}^1 u_3^1 &= f_2^1 + Q_2^1 = f_2^1 + Q_{21}^1 + Q_{22}^1, \\ K_{31}^1 u_1^1 + K_{32}^1 u_2^1 + K_{33}^1 u_3^1 &= f_3^1 + Q_3^1 = f_3^1 + Q_{32}^1 + Q_{33}^1. \end{aligned} \quad (9.39)$$

Sústava rovníc na štvoruholníkovom elemente Ω^2 má tvar

$$\begin{aligned} K_{11}^2 u_1^2 + K_{12}^2 u_2^2 + K_{13}^2 u_3^2 + K_{14}^2 u_4^2 &= f_1^2 + Q_1^2 = f_1^2 + Q_{11}^2 + Q_{14}^2, \\ K_{21}^2 u_1^2 + K_{22}^2 u_2^2 + K_{23}^2 u_3^2 + K_{24}^2 u_4^2 &= f_2^2 + Q_2^2 = f_2^2 + Q_{21}^2 + Q_{22}^2, \\ K_{31}^2 u_1^2 + K_{32}^2 u_2^2 + K_{33}^2 u_3^2 + K_{34}^2 u_4^2 &= f_3^2 + Q_3^2 = f_3^2 + Q_{32}^2 + Q_{33}^2, \\ K_{41}^2 u_1^2 + K_{42}^2 u_2^2 + K_{43}^2 u_3^2 + K_{44}^2 u_4^2 &= f_4^2 + Q_4^2 = f_4^2 + Q_{43}^2 + Q_{44}^2, \end{aligned} \quad (9.40)$$

Všimnime si, že v hraničných členoch v sústavách (9.39) a (9.40) sme v duchu sekcie 9.2.4 využili nulovosť niektorých Q_{ij}^e (nepíšeme ich).

Teraz prepíšeme sústavy do globálneho číslovania neznámych. Sústava rovníc na elemente Ω^1 prejde na

$$\begin{aligned} K_{11}^1 U_1 + K_{12}^1 U_2 + K_{13}^1 U_3 &= f_1^1 + Q_{11}^1 + Q_{13}^1, \\ K_{21}^1 U_1 + K_{22}^1 U_2 + K_{23}^1 U_3 &= f_2^1 + Q_{21}^1 + \underline{Q_{22}^1}, \\ K_{31}^1 U_1 + K_{32}^1 U_2 + K_{33}^1 U_3 &= f_3^1 + \underline{Q_{32}^1} + Q_{33}^1 \end{aligned}$$

a sústava rovníc na elemente Ω^2 bude mať tvar

$$\begin{aligned} K_{11}^2 U_2 + K_{12}^2 U_4 + K_{13}^2 U_5 + K_{14}^2 U_3 &= f_1^2 + Q_{11}^2 + \underline{Q_{14}^2}, \\ K_{21}^2 U_2 + K_{22}^2 U_4 + K_{23}^2 U_5 + K_{24}^2 U_3 &= f_2^2 + Q_{21}^2 + Q_{22}^2, \\ K_{31}^2 U_2 + K_{32}^2 U_4 + K_{33}^2 U_5 + K_{34}^2 U_3 &= f_3^2 + Q_{32}^2 + Q_{33}^2, \\ K_{41}^2 U_2 + K_{42}^2 U_4 + K_{43}^2 U_5 + K_{44}^2 U_3 &= f_4^2 + Q_{43}^2 + \underline{Q_{44}^2}. \end{aligned}$$

Sčítame rovnice prislúchajúce rovnakým globálnym uzlovým bodom, čiže sčítame

- 2. rovnicu na elemente Ω^1 s 1. rovnicou na elemente Ω^2 (prislúchajú globálnemu uzlu číslo 2).
- 3. rovnicu na elemente Ω^1 so 4. rovnicou na elemente Ω^2 (prislúchajú globálnemu uzlu číslo 3).

Na pravej strane využijeme bilancie tokov (9.37) ($\underline{Q_{22}^1 + Q_{14}^2} = 0$) a (9.38) ($\underline{Q_{32}^1 + Q_{44}^2} = 0$). Rovnice zapíšeme v poradí, ktoré zodpovedá globálnemu číslovaniu

$$\begin{aligned} K_{11}^1 U_1 + K_{12}^1 U_2 + K_{13}^1 U_3 &= f_1^1 + Q_{11}^1 + Q_{13}^1, \\ K_{21}^1 U_1 + (K_{22}^1 + K_{11}^2) U_2 + (K_{23}^1 + K_{14}^2) U_3 + K_{12}^2 U_4 + K_{13}^2 U_5 &= f_2^1 + f_1^2 + Q_{21}^1 + Q_{11}^2, \\ K_{31}^1 U_1 + (K_{32}^1 + K_{41}^2) U_2 + (K_{33}^1 + K_{44}^2) U_3 + K_{42}^2 U_4 + K_{43}^2 U_5 &= f_3^1 + f_4^2 + Q_{33}^1 + Q_{43}^2, \\ K_{21}^2 U_2 + K_{24}^2 U_3 + K_{22}^2 U_4 + K_{23}^2 U_5 &= f_2^2 + Q_{21}^2 + Q_{22}^2, \\ K_{31}^2 U_2 + K_{34}^2 U_3 + K_{32}^2 U_4 + K_{33}^2 U_5 &= f_3^2 + Q_{32}^2 + Q_{33}^2. \end{aligned}$$

Maticovo môžeme globálny systém rovníc zapísať v tvare

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{23}^1 + K_{14}^2 & K_{12}^2 & K_{13}^2 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 + K_{41}^2 & K_{33}^1 + K_{44}^2 & K_{42}^2 & K_{43}^2 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{24}^2 & K_{22}^2 & K_{23}^2 \\ 0 & K_{31}^2 & K_{34}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 \end{bmatrix}}_K \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix}}_U = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1^1 + Q_{11}^1 + Q_{13}^1 \\ f_2^1 + f_1^2 + Q_{21}^1 + Q_{11}^2 \\ f_3^1 + f_4^2 + Q_{33}^1 + Q_{43}^2 \\ f_2^2 + Q_{21}^2 + Q_{22}^2 \\ f_3^2 + Q_{32}^2 + Q_{33}^2 \end{bmatrix}}_F, \quad (9.41)$$

kde K je globálna matica tuhosti, U je vektor globálnych uzlových neznámych a F je globálna pravá strana. Globálna sústava obsahuje 5 rovníc a máme v nej 5 primárnych neznámych $U_1, \dots, U_5$ a 10 sekundárnych neznámych Q -čok. To sa možno zdá byť akosi veľa. Po využití okrajových podmienok, o ktorom hovoríme v sekcii 9.3.4, ale dostaneme sústavu 5 rovníc s 5 neznámymi $U_1, \dots, U_5$.

Úloha 9.25 (Globálna matica a pravá strana | c11-13, MKP v 2D.nb). Do vášho programu c11-13, MKP v 2D.nb na riešenie úlohy z Príkladu 9.2 doprogramujte konštrukciu globálnej matice tuhosti K a pravej strany F (bez Q -čok^a). Najprv vytvorte nulovú maticu a vektor správnej veľkosti. Potom na správne miesta pripočítavajte prvky elementových matíc K_{ij}^e (resp. pravých strán f_i^e). Využite pri tom maticu spojitosti B .^b

^aAko uvidíme v sekcii 9.3.4, Q -čka v bodoch na hranici oblasti nepotrebujeme, lebo v týchto bodoch budeme zadávať Dirichletovu okrajovú podmienku. V sekcii 9.4 zas uvidíme, že Q -čka vo vnútorných bodoch oblasti vypadnú vďaka bilancii tokov.

^bToto je programátorsky veľmi jednoduché, len si treba dobre rozmyslieť, čo treba urobiť. Napríklad prvok f_i^e elementovej pravej strany sa pripočíta na to miesto globálnej pravej strany F , ktorému v globálnom číslovaní zodpovedá i -ty uzol na e -tom elemente. Informácia o tom, ako súvisí lokálne a globálne číslovanie je obsiahnutá v matici spojitosti B .

9.3.4 Využitie okrajových podmienok

V tejto časti detailne vysvetlíme, ako sa využívajú jednotlivé typy okrajových podmienok v globálnej sústave rovníc. Keďže pri aproximácii výpočtovej oblasti Ω dochádza k diskretizačnej chybe (Obr. 9.4), tak okrajové podmienky v skutočnosti zadávame na *hranici aproximovanej výpočtovej oblasti* (v uzloch $\vec{R}_I \in \partial\tilde{\Omega}$, resp. na hranách $\Gamma_i^e \subset \partial\tilde{\Omega}$).

Dirichlet

Nech je v I -tom globálnom uzlovom bode $\vec{R}_I = (X_I, Y_I)$ zadaná *Dirichletova* okrajová podmienka $u(\vec{R}_I) = g(\vec{R}_I)$ (čiže v rovnici (9.8) máme $\alpha(\vec{R}_I) = 1$, $\beta(\vec{R}_I) = 0$). V reči našich neznámych túto rovnicu vieme zapísať ako $U_I = g_I$, kde $g_I := g(\vec{R}_I)$. Príslušnú I -tu rovnicu v globálnej sústave nahradíme Dirichletovou okrajovou podmienkou podobne, ako v 1D (pozri sekcii 4.5). V maticovom zápise globálnej sústavy sa to prejaví takto

$$I\text{-ty riadok} \rightarrow \begin{bmatrix} & & & \vdots & & & \\ & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ U_I \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ g_I \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (9.42)$$

čiže vynulujeme celý I -ty riadok globálnej matice K , na diagonálu dáme jednotku, $K_{II} = 1$ a na pravej strane použijeme $F_I = g_I$.¹² Príslušné Q -čka, ktoré boli na pravej strane I -tej rovnice, teda netreba počítať.

Úloha 9.26 (Využitie okrajových podmienok | c11-13, MKP v 2D.nb). V programe c11-13, MKP v 2D.nb na riešenie úlohy z Príkladu 9.2 doplňte využitie Dirichletových okrajových podmienok.

Neumann

Uvažujme teraz *Neumannovu* okrajovú podmienku $q_n = g$ zadanú na istej hrane Γ_j^e (čiže v rovnici (9.8) máme $\alpha(\vec{r}) = 0$, $\beta(\vec{r}) = 1$ pre $\vec{r} \in \Gamma_j^e$). Okrajovú podmienku v globálnej sústave využijeme

¹²Pre $\alpha(\vec{R}_I) \neq 1$ by sme na diagonále mali $K_{II} = \alpha(\vec{R}_I)$.

tak, že podľa definície z Obr. 9.16 vypočítame Q -čka prislúchajúce hrane Γ_j^e (to budú konkrétne čísla) a dosadíme ich do pravej strany. Pre lineárne elementy to budú dve Q -čka, lebo hrane prislúchajú dva uzly.

Ak by napríklad pre sieť z Obr. 9.17 bolo zadané q_n na hrane Γ_1^2 , tak vypočítame Q_{11}^2 , Q_{21}^2 a dosadíme do pravej strany 2. resp. 4. rovnice v sústave (9.41).

V prípade nulovej Neumannovej podmienky $q_n = 0$ vyjdú príslušné Q -čka nulové, čiže z pravej strany jednoducho vypadnú (pozri aj Poznámku 4.24).

*Newton

Pozrime sa nakoniec na to, ako využiť *Newtonovu* okrajovú podmienku $\alpha u + \beta q_n = g$ zadanú na nejakej hrane Γ_j^e . Opäť potrebujeme toky Q_{ij}^e prislúchajúce hrane Γ_j^e počítať, ale je to zložitejšie. Vyjadrime si najprv hustotu toku a za u dosadíme približné riešenie (9.18)

$$q_n = \frac{g - \alpha u}{\beta} = \frac{g - \alpha \sum_{k=1}^{m^e} u_k^e \psi_k^e}{\beta} = \frac{g}{\beta} - \sum_{k=1}^{m^e} u_k^e \frac{\alpha}{\beta} \psi_k^e. \quad (9.43)$$

Teraz využijeme definíciu Q_{ij}^e z Obr. 9.16. Vynásobíme vzťah (9.43) príslušnou aproximačnou funkciou ψ_i^e a zintegrujme cez hranu Γ_j^e , čím dostaneme

$$Q_{ij}^e = \int_{\Gamma_j^e} \frac{g}{\beta} \psi_i^e ds - \sum_{k=1}^{m^e} u_k^e \int_{\Gamma_j^e} \frac{\alpha}{\beta} \psi_k^e \psi_i^e ds. \quad (9.44)$$

Situácia je teraz už podobná ako v 1D, pozri vzťahy (4.40). Vo výraze pre Q -čka aj tu vystupujú nejaké známe čísla a u -čka, ktoré sú primárnymi neznámymi a patria na ľavú stranu. V globálnej sústave teda treba v B_{ei} -tej rovnici¹³ urobiť nasledujúce úpravy:

1. Na pravej strane namiesto Q_{ij}^e bude číslo $\int_{\Gamma_j^e} \frac{g}{\beta} \psi_i^e ds$.
2. V matici systému musíme do B_{ei} -teho riadku na B_{ek} -te miesto pripočítať číslo $\int_{\Gamma_j^e} \frac{\alpha}{\beta} \psi_k^e \psi_i^e ds$.

Ak by napríklad pre sieť z Obr. 9.17 bola zadaná Newtonova okrajová podmienka na hrane Γ_1^2 , tak potrebujeme vypočítať Q_{11}^2 a Q_{21}^2 . Na ukážku urobme výpočet pre Q_{21}^2 (odporúčame čitateľovi napísať si to a premyslieť)¹⁴

$$Q_{21}^2 = \underbrace{\int_{\Gamma_1^2} \frac{g}{\beta} \psi_2^2 ds}_{A} - \underbrace{u_1^2 \int_{\Gamma_1^2} \frac{\alpha}{\beta} \psi_1^2 \psi_2^2 ds}_{B} - \underbrace{u_2^2 \int_{\Gamma_1^2} \frac{\alpha}{\beta} \psi_2^2 \psi_2^2 ds}_{C}.$$

Toto využijeme v 4. riadku¹⁵ globálnej sústavy (9.41) takto

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{23}^1 + K_{14}^2 & K_{12}^2 & K_{13}^2 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 + K_{41}^2 & K_{33}^1 + K_{44}^2 & K_{42}^2 & K_{43}^2 \\ 0 & K_{21}^2 + B & K_{24}^2 & K_{22}^2 + C & K_{23}^2 \\ 0 & K_{31}^2 & K_{34}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 \end{bmatrix}}_K \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix}}_U = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1^1 + Q_{11}^1 + Q_{13}^1 \\ f_2^1 + f_1^2 + Q_{21}^1 + Q_{11}^2 \\ f_3^1 + f_4^2 + Q_{33}^1 + Q_{43}^2 \\ f_2^2 + A + Q_{22}^2 \\ f_3^2 + Q_{32}^2 + Q_{33}^2 \end{bmatrix}}_F \quad (9.45)$$

Analogicky by sme vypočítali Q_{11}^2 a využili v globálnej sústave, čím by bola Newtonova okrajová podmienka na hrane Γ_1^2 využitá.

¹³Prečo? Treba si spomenúť, aká informácia je ukrytá v matici spojitosti B . Prvok B_{ei} hovorí o tom, akému globálnemu uzlovému bodu zodpovedá i -ty uzol e -teho elementu.

¹⁴Indexov je tu neúrekom, takže na sprehľadnenie situácie používame farby.

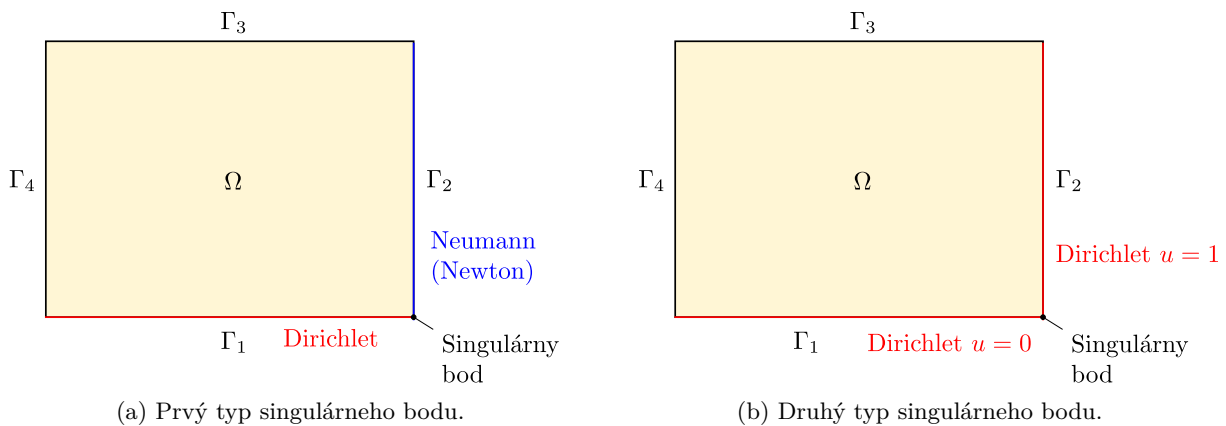
¹⁵Lebo podľa (9.31) máme $B_{22} = 4$.

Úloha 9.27 (Výpočet Q_{11}^2). Urobte výpočet Q_{11}^2 a využite ho v globálnej sústave.

*Singulárne body na hranici

Keď máme na rôznych častiach hranice $\partial\Omega$ rôzne okrajové podmienky, môže sa stať, že v jednom uzlovom bode by sme akoby mali zadávať okrajové podmienky, ktoré si navzájom odporujú. To, samozrejme, nie je možné. Takéto body sa nazývajú *singulárne body*.

Prvý typ singulárneho bodu nastáva, keď sa stretne Dirichlet s Neumannom (alebo Newtonom). Príklad vidíme na Obr. 9.18a, kde je na úsečke Γ_1 predpísaný Dirichlet a na úsečke Γ_2 Neumann (alebo Newton). Toto je bežná situácia napríklad pri rovnici vedenia tepla: Na úsečke Γ_1 zafixujeme teplotu u (Dirichlet) a úsečka Γ_2 bude napríklad izolovaná – nulový tepelný tok $q_n = 0$ (Neumann) alebo na nej bude prebiehať konvekcia $q_n = \kappa(u_{\text{ext}} - u)$ (Newton), pozri záver sekcie 2.2. *Pravidlom je*: V singulárnom bode *zadáme Dirichleta* (resp. vo všeobecnosti primárnu neznámu).



Obr. 9.18. Singulárne body.

Druhý typ singulárneho bodu nastáva v situácii, keď sa stretne Dirichlet s iným Dirichletom. Príklad je na Obr. 9.18b, kde je na úsečke Γ_1 predpísaný Dirichlet $u = 0$ a na úsečke Γ_2 Dirichlet $u = 1$. V singulárnom bode máme dve rôzne hodnoty pre u . Čo v takej situácii robiť? Sú v podstate 3 rozumné možnosti ako predpísať hodnotu u v singulárnom bode:

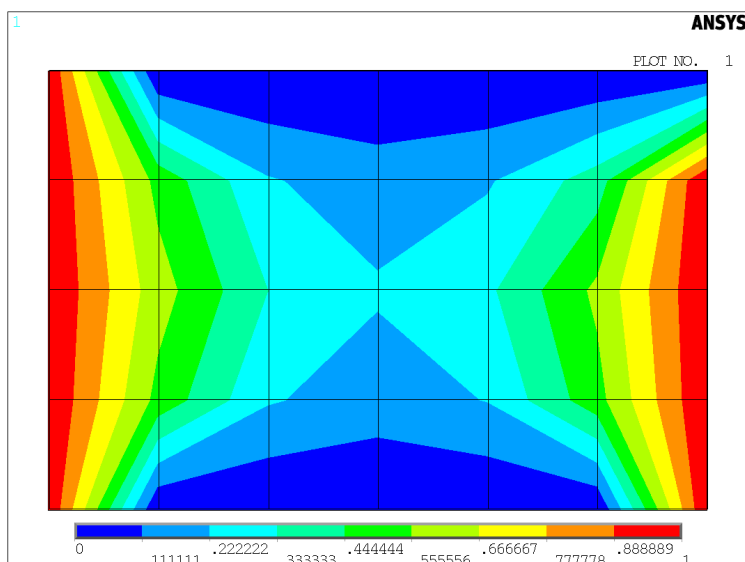
1. $u_{\text{SB}} = 0$
2. $u_{\text{SB}} = 1$
3. $u_{\text{SB}} = \frac{1}{2}$ (čiže priemerná hodnota)

Je na nás, ktorú z možností zvolíme. Na Obr. 9.19 vidíme, ako sa softvér ANSYS vysporiadal pri rovnici vedenia tepla¹⁶ s okrajovou podmienkou $u = 0$ na úsečkách Γ_1, Γ_3 a okrajovou podmienkou $u = 1$ na úsečkách Γ_2, Γ_4 . Na prvý pohľad možno nedáva zmysel, aké pravidlo ANSYS používa v singulárnych bodoch. Funguje to tak, že v singulárnom bode „vyhráva“ Dirichlet z úsečky s vyšším poradovým číslom (ANSYS úsečky očísloval tak, ako to vidíme na Obr. 9.18).

Druhému typu singulárneho bodu by sme sa mali snažiť pri modelovaní vyhýbať. Ak to ale nie je možné, treba aspoň v jeho okolí zvoliť hustejšiu sieť.

Poznámka 9.28 (Čo nie je singulárny bod). Bod na styku rôznych Neumannových resp. Newtonových okrajových podmienok alebo na rozhraní Newton-Neumann nie je singulárnym bodom. Vyplyva to z toho, ako sa v globálnej sústave rovníc využívajú Neumannove a Newtonove okrajové podmienky (pozri predchádzajúce sekcie). Odporúčame čitateľovi, aby si detailne premyslel, prečo k žiadnemu konfliktu nedochádza.

¹⁶Použitie boli bilinéarne štvoruholníkové elementy PLANE55.

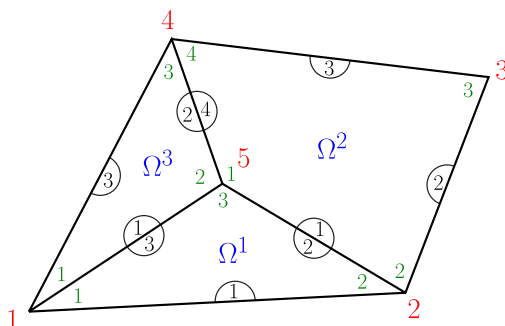


Obr. 9.19. Singulárny bod druhého typu v softvéri ANSYS.

Pri využití okrajových podmienok v globálnej sústave teda postupujeme tak, že *najprv* aplikujeme *Dirichleta* vo všetkých uzlových bodoch, kde má byť (tak, ako v rovnici (9.42)). Až *potom* sa aplikujeme *Neumanna* resp. *Newtona*. Pre príslušné hrany Γ_j^e vypočítame Q -čka (tie, ktoré ešte v sústave zostali), pre Neumanna pomocou definície Q_{ij}^e z Obr. 9.16 a pre Newtona pomocou rovnice (9.44). Napokon Q -čka dosadíme do sústavy, pre Neumanna to vedie na dosadenie konkrétnych čísel za Q_{ij}^e a pre Newtona navyše aj na úpravy v matici sústavy (ako to vidíme v rovnici (9.45)). Takto dostaneme sústavu, v ktorej budú vystupovať už iba primárne neznáme $U_1, \dots, U_n$.

9.4 *Globálna sústava rovníc pre sieť s troma elementami

Na príklade siete s dvoma elementami (Obr. 9.17), na ktorom sme v sekcii 9.3 ilustrovali vytvorenie globálnej sústavy rovníc, sme sa veľa naučili. Bol jednoduchý,¹⁷ ale zároveň príliš špecifický v tom, že sieť na Obr. 9.17 neobsahovala žiadny bod, ktorý by bol vnútri výpočtovej oblasti, a ani žiadny bod, v ktorom by sa sčítavali viac než dve rovnice. V tejto časti to napravíme a ukážeme, ako sa vytvorí globálna sústava rovníc pre sieť na Obr. 9.20 tvorenú troma elementami, pričom Ω^1 , Ω^3 sú lineárne trojuholníkové elementy a Ω^2 je bilineárny štvoruholníkový element. Budeme ale postupovať svižnejšie.¹⁸



Obr. 9.20. Sieť tvorená troma elementami.

¹⁷Čitateľ si možno hovorí „Prepáčte, tak tomuto hovoríte *jednoduchý*?“. Príklad bol jednoduchý v tom zmysle, že menej ako dva elementy sme zobrať nemohli. Videli sme, že aj v takom prípade sa to indexmi len tak hemžilo a nebolo jednoduché všetko poriadne matematicky zapísať.

¹⁸Nie je potrebné dôsledne kontrolovať všetky indexy. Dôležité je pochopiť, kedy a prečo sa sčítavajú viac než dve rovnice a prečo vo finálnej rovnici pre vnútorný 5. globálny uzlový bod vypadnú všetky Q -čka.

Matica spojitosti pre sieť na Obr. 9.20 má tvar

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Vo všeobecnosti pre každý styk elementov máme v spojitkej formulácii (v reči $(q_n)_j^e$, pozri úvod sekcie 9.3.2) jednu bilanciu tokov a v diskretnom jazyku Q -čok jednu bilanciu pre každý globálny uzlový bod na styku. Jeden globálny uzlový bod môžu zdieľať viaceré elementy, v tom prípade sa ho týka viac bilancií. Pre sieť na Obr. 9.20 budeme mať v spojitkej formulácii za 3 styčné hrany 3 bilancie tokov, ktorým v diskretnom jazyku zodpovedá 6 *bilancií tokov* (v zátvorke uvádzame **globálne číslo** uzlového bodu, ktorému bilancia prislúcha)

$$\begin{aligned} (q_n)_2^1 + (q_n)_1^2 = 0 & \rightarrow \begin{aligned} Q_{22}^1 + Q_{21}^2 &= 0, & (I = \mathbf{2}) \\ Q_{32}^1 + Q_{11}^2 &= 0, & (I = \mathbf{5}) \end{aligned} \\ (q_n)_4^2 + (q_n)_2^3 = 0 & \rightarrow \begin{aligned} Q_{44}^2 + Q_{32}^3 &= 0, & (I = \mathbf{4}) \\ Q_{14}^2 + Q_{22}^3 &= 0, & (I = \mathbf{5}) \end{aligned} \\ (q_n)_3^1 + (q_n)_1^3 = 0 & \rightarrow \begin{aligned} Q_{33}^1 + Q_{21}^3 &= 0, & (I = \mathbf{5}) \\ Q_{13}^1 + Q_{11}^3 &= 0. & (I = \mathbf{1}) \end{aligned} \end{aligned}$$

Všimnime si, že globálnemu uzlovému bodu číslo 5 prislúchajú až 3 bilancie. *Elementové sústavy* rovníc napíšeme priamo v globálnom číslovaní neznámych. Za každou rovnicou v zátvorke uvedieme, akému globálnemu uzlovému bodu prislúcha. Pre trojuholníkový element Ω^1 máme sústavu

$$\begin{aligned} K_{11}^1 U_1 + K_{12}^1 U_2 + K_{13}^1 U_5 &= f_1^1 + Q_{11}^1 + Q_{13}^1, & (I = \mathbf{1}) \\ K_{21}^1 U_1 + K_{22}^1 U_2 + K_{23}^1 U_5 &= f_2^1 + Q_{21}^1 + Q_{22}^1, & (I = \mathbf{2}) \\ K_{31}^1 U_1 + K_{32}^1 U_2 + K_{33}^1 U_5 &= f_3^1 + Q_{32}^1 + Q_{33}^1. & (I = \mathbf{5}) \end{aligned}$$

Sústava rovníc pre štvoruholníkový element Ω^2 bude mať tvar

$$\begin{aligned} K_{11}^2 U_5 + K_{12}^2 U_2 + K_{13}^2 U_3 + K_{14}^2 U_4 &= f_1^2 + Q_{11}^2 + Q_{14}^2, & (I = \mathbf{5}) \\ K_{21}^2 U_5 + K_{22}^2 U_2 + K_{23}^2 U_3 + K_{24}^2 U_4 &= f_2^2 + Q_{21}^2 + Q_{22}^2, & (I = \mathbf{2}) \\ K_{31}^2 U_5 + K_{32}^2 U_2 + K_{33}^2 U_3 + K_{34}^2 U_4 &= f_3^2 + Q_{32}^2 + Q_{33}^2, & (I = \mathbf{3}) \\ K_{41}^2 U_5 + K_{42}^2 U_2 + K_{43}^2 U_3 + K_{44}^2 U_4 &= f_4^2 + Q_{43}^2 + Q_{44}^2. & (I = \mathbf{4}) \end{aligned}$$

Napokon sústava pre trojuholníkový element Ω^3 vyzerá takto

$$\begin{aligned} K_{11}^3 U_1 + K_{12}^3 U_5 + K_{13}^3 U_4 &= f_1^3 + Q_{11}^3 + Q_{13}^3, & (I = \mathbf{1}) \\ K_{21}^3 U_1 + K_{22}^3 U_5 + K_{23}^3 U_4 &= f_2^3 + Q_{21}^3 + Q_{22}^3, & (I = \mathbf{5}) \\ K_{31}^3 U_1 + K_{32}^3 U_5 + K_{33}^3 U_4 &= f_3^3 + Q_{32}^3 + Q_{33}^3. & (I = \mathbf{4}) \end{aligned}$$

Rovnako ako v sekcii 9.3.3 aj tu *sčítame* elementové rovnice prislúchajúce *rovnakým globálnym uzlovým bodom*, čiže urobíme tieto sčítania rovníc:

- $I = \mathbf{1}$: (1. na Ω^1) + (1. na Ω^3).
- $I = \mathbf{2}$: (2. na Ω^1) + (2. na Ω^2).
- $I = \mathbf{4}$: (4. na Ω^2) + (3. na Ω^3).
- $I = \mathbf{5}$: (3. na Ω^1) + (1. na Ω^2) + (2. na Ω^3).

Takto získame *globálnu sústavu* rovníc. Rovnice zapíšeme v poradí, ktoré zodpovedá globálnemu číslovaniu uzlových bodov. Na pravej strane naznačujeme využitie bilancie tokov podčiarknutím

výrazov, ktoré sú nulové.

$$(K_{11}^1 + K_{11}^3)U_1 + K_{12}^1U_2 + K_{13}^3U_4 + (K_{13}^1 + K_{12}^3)U_5 = f_1^1 + f_1^3 + Q_{11}^1 + Q_{13}^3 + \underline{Q_{13}^1 + Q_{11}^3}, \quad (I = 1)$$

$$K_{21}^1U_1 + (K_{22}^1 + K_{22}^2)U_2 + K_{23}^2U_3 + K_{24}^2U_4 + (K_{23}^1 + K_{21}^2)U_5 = f_2^1 + f_2^2 + Q_{21}^1 + Q_{22}^2 + \underline{Q_{22}^1 + Q_{21}^2}, \quad (I = 2)$$

$$K_{32}^2U_2 + K_{33}^2U_3 + K_{34}^2U_4 + K_{31}^2U_5 = f_3^2 + Q_{32}^2 + Q_{33}^2, \quad (I = 3)$$

$$K_{31}^3U_1 + K_{42}^2U_2 + K_{43}^2U_3 + (K_{44}^2 + K_{33}^3)U_4 + (K_{41}^2 + K_{32}^3)U_5 = f_4^2 + f_3^3 + Q_{43}^2 + Q_{33}^3 + \underline{Q_{44}^2 + Q_{32}^3}. \quad (I = 4)$$

Komplikovanejšia rovnica pre vnútorný 5. globálny uzlový bod má tvar

$$(K_{31}^1 + K_{21}^3)U_1 + (K_{32}^1 + K_{12}^2)U_2 + K_{13}^2U_3 + (K_{14}^2 + K_{23}^3)U_4 + (K_{33}^1 + K_{11}^2 + K_{22}^3)U_5 = f_3^1 + f_1^2 + f_2^3 + \underline{Q_{32}^1 + Q_{11}^2} + \underline{Q_{14}^2 + Q_{23}^3} + \underline{Q_{33}^1 + Q_{21}^3}. \quad (I = 5)$$

Všimnime si, že z nej *vypadnú všetky Q-čka*. Toto sa stane vo všeobecnosti v každom vnútornom uzlovom bode na akejkoľvek sieti, takže Q-čka prislúchajúce vnútorným bodom netreba reálne počítať, pozri Poznámku 9.23. Toto objasňuje, prečo sme pri konštrukcii globálnej matice tuhosti K v Úlohe 9.25 vôbec neriešili Q-čka vnútri oblasti. Maticovo môžeme globálnu sústavu rovníc zapísať v tvare

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K_{11}^1 + K_{11}^3 & K_{12}^1 & 0 & K_{13}^3 & K_{13}^1 + K_{12}^3 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{22}^2 & K_{23}^2 & K_{24}^2 & K_{23}^1 + K_{21}^2 \\ 0 & K_{32}^2 & K_{33}^2 & K_{34}^2 & K_{31}^2 \\ K_{31}^3 & K_{42}^2 & K_{43}^2 & K_{44}^2 + K_{33}^3 & K_{41}^2 + K_{32}^3 \\ K_{31}^1 + K_{21}^3 & K_{32}^1 + K_{12}^2 & K_{13}^2 & K_{14}^2 + K_{23}^3 & K_{33}^1 + K_{11}^2 + K_{22}^3 \end{bmatrix}}_K \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix}}_U = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1^1 + f_1^3 + Q_{11}^1 + Q_{13}^3 \\ f_2^1 + f_2^2 + Q_{21}^1 + Q_{22}^2 \\ f_3^2 + Q_{32}^2 + Q_{33}^2 \\ f_4^2 + f_3^3 + Q_{43}^2 + Q_{33}^3 \\ f_3^1 + f_1^2 + f_2^3 \end{bmatrix}}_F.$$

Ako sme videli, už pri jednoduchých úlohách s dvoma či troma elementami je náročné všetko poriadne matematicky zapísať. Dobrá správa ale je, že naprogramovať spájanie elementových sústav do globálnej sústavy je s využitím matice spojitosti B veľmi jednoduché, len tomu treba rozumieť, pozri Úlohu 9.25.

9.5 Riešenie globálneho systému rovníc a konštrukcia približného riešenia

Po využití okrajových podmienok dostaneme sústavu n rovníc s neznámymi $U_1, \dots, U_n$, ktorú vhodnou metódou vyriešime (pozri úvod sekcie 4.6). Konštrukciu približného riešenia $U(x, y)$ urobíme úplne analogicky ako v 1D. Na každom elemente Ω^e má riešenie tvar (9.18), v ktorom ale vystupujú neznáme u_i^e (lokálne číslovanie). Aby sme im priradili hodnoty, opäť využijeme maticu spojitosti B . Správne priradenie vyzerá takto

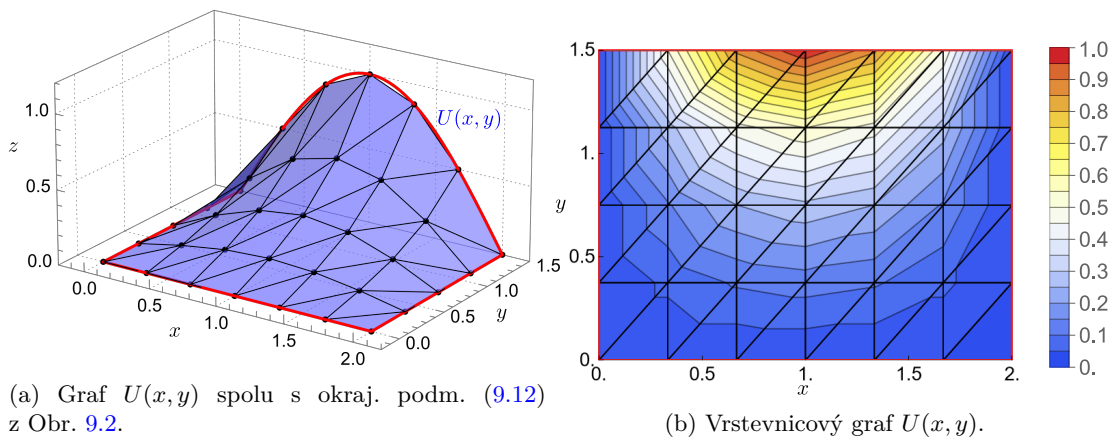
$$u_i^e = U_{B_i^e}. \quad (9.46)$$

Na ilustráciu uvádzame, ako zapíšeme *celkové približné* (numerické) *riešenie* $U(x, y)$, $(x, y) \in \tilde{\Omega}$ rovnice (9.1) s okrajovými podmienkami (9.8) získané metódou konečných prvkov s lineárnymi trojuholníkovými elementami

$$U(x, y) = \begin{cases} U^1(x, y) = U_{B_1^1}\psi_1^1(x, y) + U_{B_2^1}\psi_2^1(x, y) + U_{B_3^1}\psi_3^1(x, y), & (x, y) \in \Omega^1, \\ \vdots \\ U^e(x, y) = \sum_{i=1}^3 U_{B_i^e}\psi_i^e(x, y), & (x, y) \in \Omega^e, \\ \vdots \\ U^N(x, y) = U_{B_1^N}\psi_1^N(x, y) + U_{B_2^N}\psi_2^N(x, y) + U_{B_3^N}\psi_3^N(x, y), & (x, y) \in \Omega^N. \end{cases} \quad (9.47)$$

Úloha 9.29 (Riešenie a vizualizácia | c11-13, MKP v 2D.nb). V programe c11-13, MKP v 2D.nb na riešenie úlohy z Príkladu 9.2 doplňte nasledujúce:

1. Vyriešte globálnu sústavu rovníc (stačí pomocou funkcie `LinearSolve`).
2. Priradte hodnoty elementovým uzlovým neznámym u_i^e pre všetky $i = 1, \dots, 3$ a pre $e = 1, \dots, N$ pomocou (9.46).
3. Skonstruujte približné riešenia $U^e(x, y) = \sum_{i=1}^3 u_i^e \psi_i^e(x, y)$ na elementoch.
4. Pomocou funkcie `Piecewise` spojte funkcie $U^e(x, y)$ do celkového približného riešenia $U(x, y)$ tak, ako sme to uviedli vo vzťahu (9.47).
5. Vykreslite približné riešenie $U(x, y)$ spolu s presným riešením $u(x, y)$ pomocou `Plot3D` a vizuálne ich porovnajte. Približné riešenie, čiže tvar membrány napnutej na okraj z Obr. 9.2, pre sieť z Obr. 9.5 vidíme na Obr. 9.21a.
6. Vykreslite vrstevnicový graf približného riešenia $U(x, y)$ pomocou funkcie `ContourPlot`. Vrstevnicový graf pre sieť z Obr. 9.5 vidíme na Obr. 9.21b.
7. Pohrajte sa s okrajovými podmienkami (nastavte ich nenulové na viacerých hranách výpočtovej oblasti), zjemnite sieť a potešte sa z riešenia.
8. Skúste nastaviť nenulovú pravú stranu, čiže záťaž vonkajšou silou, napr. $f(x, y) \equiv -3$. Sledujte, ako sa zmení riešenie. Zodpovedá to vašej intuícii?
9. Zadaťte nulovú Dirichletovu okrajovú podmienku na celú hranicu a vonkajšiu silu zadajte iba na niektoré elementy vnútri oblasti, čiže akoby ste sa postavili na trampolínu a sledovali, ako sa trampolína prehne pod účinkom vašej tiaže.
10. Skúste v nejakom bode vnútri výpočtovej oblasti nastaviť Dirichletovu „okrajovú“ podmienku. Zodpovedá to podopretiu membrány stĺpom v tomto bode. Program by mal fungovať aj pre takýto „za vlasy pritiahnutý“ prípad. V kombinácii s vhodnými okrajovými podmienkami takto môžete modelovať rôzne zaujímavé stany.



Obr. 9.21. Približné riešenie $U(x, y)$ úlohy z Príkladu 9.2 pre sieť z Obr. 9.5 so 48 lineárnymi trojuholníkovými elementami.

Poznámka 9.30 (*Využitie symetrie). Všimnime si, že úloha z Príkladu 9.2 má *zrkadlovú symetriu* vzhľadom na os rovnobežnú s osou y , ktorý pretína os x v bode $x = \frac{x_1+x_2}{2}$ (výpočtová oblasť, funkcie $a(\vec{r})$, $f(\vec{r})$ aj okrajová podmienka (9.12) majú túto symetriu). Preto aj *presné riešenie* (9.13), ktorého graf je na Obr. 9.3, *má túto symetriu*.^a Takéto symetrie je výhodné pri riešení úlohy pomocou MKP využiť. Stačí nám úlohu riešiť na polovičnej výpočtovej oblasti $\Omega = [x_1, \frac{x_1+x_2}{2}] \times [y_1, y_2]$. Pri rovnakej hustote siete budeme teda mať polovičný počet

elementov a približne polovičný počet uzlov (trochu viac, než polovicu), čím dosiahneme približne dvakrát kratší výpočtový čas a to sa oplatí!

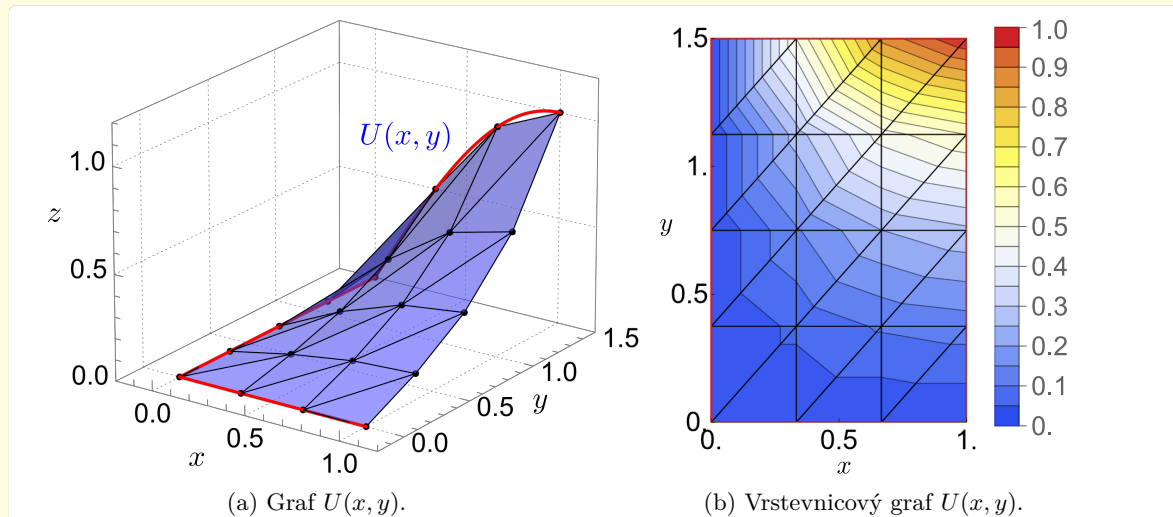
Akú okrajovú podmienku treba zadať na (novej) hrane Γ_2 ? Zadáme *nulového Neumanna*, ktorý má v tomto prípade tvar (vektor vonkajšej normály ku Γ_2 je $\vec{n} = (1, 0)$)

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \vec{n} \cdot \nabla u = (1, 0) \cdot (\partial_x u, \partial_y u) = \partial_x u = 0, \quad \text{pre } \vec{r} \in \Gamma_2.$$

Prečo? Jednoducho povedané, presné riešenie (9.13) má nulovú parciálnu deriváciu $\partial_x u$ pre všetky $\vec{r} \in \Gamma_2$, čiže pre $x = \frac{x_1+x_2}{2}$.^b Pointa je ale v jednoduchom fakte: párna funkcia $f(x)$, má nulovú deriváciu v bode $x = 0$ (ak táto derivácia existuje a je spojitá).^c Zovšeobecnením tejto vlastnosti párných funkcií do 2D a pre ľubovoľnú os symetrie je práve nulový Neumann na osi symetrie (odporúčame premyslieť si).

Nulová Neumannova okrajová podmienka sa realizuje jednoducho. Ako sme videli v sekcii 9.3.4, príslušné Q -čka v uzlových bodoch $\vec{R}_I \in \Gamma_2$ jednoducho vypadnú,^d čiže v globálnom systéme v zodpovedajúcich rovniciach netreba vlastne robiť nič.

Vizualizáciu (polovice) približného riešenia $U(x, y)$ získaného využitím zrkadlovej symetrie vidíme na Obr. 9.22. Riešenie sa vizuálne (a samozrejme aj numericky) zhoduje s ľavou polovicou riešenia z Obr. 9.21.



Obr. 9.22. Polovica približného riešenia $U(x, y)$ úlohy z Príkladu 9.2 získaná využitím symetrie na polovičnej sieti s 24 elementami.

^aTakto to funguje vo všeobecnosti – ak úloha vykazuje nejakú symetriu, tak aj riešenie má rovnakú symetriu. Okrem zrkadlových symetrií to môže byť napríklad aj rotačná či translačná symetria alebo periodicita.

^bVidno to z Obr. 9.3, graf je symetrický vzhľadom na rovinu $x = 1$. Čitateľ si to ale pokojne môže overiť derivovaním presného riešenia (9.13) a dosadením $x = \frac{x_1+x_2}{2}$.

^cTo sa dá ľahko ukázať z definície derivácie pomocou limity v takomto tvare (robíme vlastne centrálnu diferenciu (3.8))

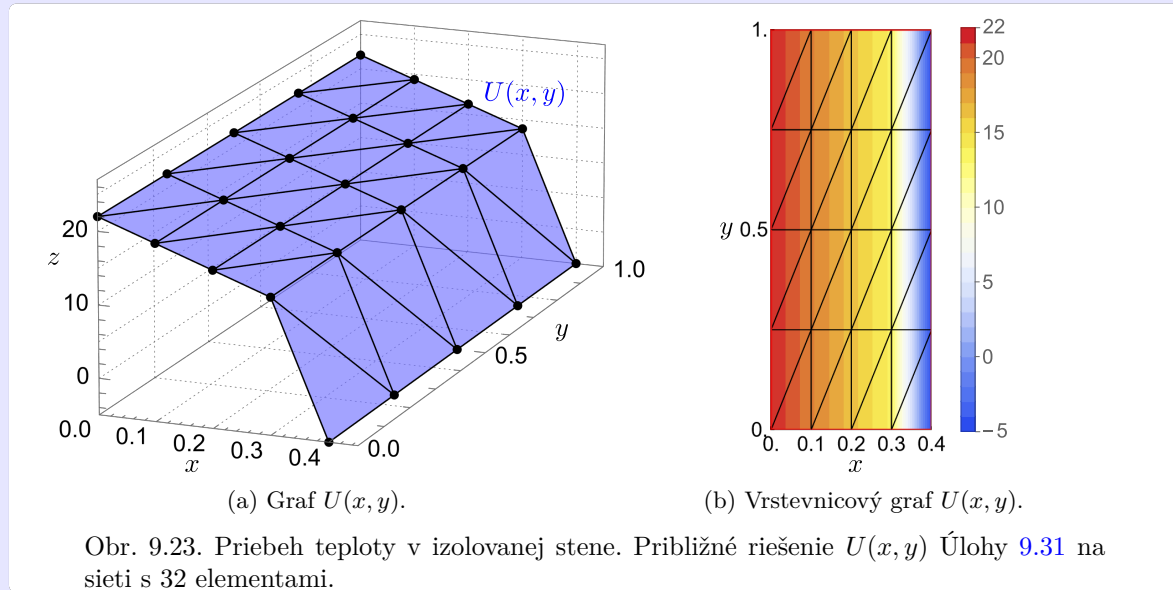
$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(-\Delta x)}{2\Delta x} = 0,$$

kde sme v čitateli využili definíciu párnej funkcie, čiže $f(-x) = f(x)$.

^dV rôznych uzlových bodoch $[\frac{x_1+x_2}{2}, y_1]$ a $[\frac{x_1+x_2}{2}, y_2]$ si treba dať pozor, sú to singulárne body prvého typu (Obr. 9.18a), čiže v nich zadávame Dirichleta.

Úloha 9.31 (*Izolovaná stena | cv13, MKP2D, izolovana.stena.nb). Vyriešte Úlohu 4.31 ako 2D úlohu pomocou vášho programu c11-13, MKP v 2D.nb z Úlohy 9.29. Výšku výrezu na Obr. 4.14 uvažujte napríklad 1 m.^a Na hornej a dolnej hrane (Γ_1 a Γ_3) je potrebné za-

dať nulového Neumanna, pozri Poznámku 9.30. Približné riešenie $U(x, y)$ vykresľujeme na Obr. 9.23.



Všimnime si, že sieť sme (rovnako ako v Úlohe 4.31) vytvorili tak, aby nespojitost tepelnej vodivosti ležala na styku elementov. Pribeh teploty zodpovedá 1D riešeniu z Obr. 4.15b, murivo je pomerne teplé a veľký teplotný gradient pozorujeme v izolácii. Rovnako ako v Úlohe 4.31 aj tu sme pomocou MKP dostali presné riešenie úlohy.

^aTáto úloha (aj jej riešenie na Obr. 9.23) má translačnú symetriu v smere osi y , čiže preto ju stačilo riešiť v 1D. V 2D ju riešime len na precvičenie práce s programom c11-13, MKP v 2D.nb.

Poznámka 9.32 (Riešenie nestacionárnych úloh v 2D). Nestacionárne úlohy v 2D, ako napríklad nestacionárna rovnica vedenia tepla (2.14), sa pomocou MKP riešia úplne analogicky ako v 1D, pozri kapitolu 7. Priestorová diskretizácia v 2D sa urobí tak, ako sme videli v tejto kapitole, výsledkom v prípade nestacionárnej rovnice vedenia tepla bude sústava obyčajných diferenciálnych rovníc (7.16), v ktorej časovú diskretizáciu urobíme úplne rovnako, ako sme ju robili v sekcii 7.3.

9.6 Výpočet chýb a experimentálneho rádu konvergenzie

Pri aproximácii presného riešenia $u(x, y)$ približným riešením $U(x, y)$ sa dopúšťame aproximačnej chyby, ktorá je definovaná ako funkcia $\varepsilon(x, y) = U(x, y) - u(x, y)$, čiže rovnako ako v 1D, pozri sekciu 6.1. Pri analyzovaní aproximačnej chyby a rádu konvergenzie sa skúma L_2 norma chyby definovaná ako (porovnaj s (6.1))

$$\|\varepsilon\|_{L_2} = \|U - u\|_{L_2} = \sqrt{\int_{\Omega} (U - u)^2 dx dy} \quad (9.48)$$

a energetická norma chyby, ktorá je pre rovnicu (9.3) definovaná ako (porovnaj s (6.2))

$$\|\varepsilon\|_A = \|U - u\|_A = \sqrt{\int_{\Omega} a \|\nabla U - \nabla u\|^2 dx dy}. \quad (9.49)$$

Podľa Vety 6.37, ktorá platí všeobecne, vieme, že MKP má pre rovnicu (9.3) v L_2 norme presnosť

rádu $s + 1$ a v energetickej norme presnosť rádu s . V nasledujúcej úlohe to ilustrujeme pre lineárne elementy výpočtom EOC.

Úloha 9.33 (Výpočet chýb a EOC | c11-13, MKP v 2D.nb). V programe c11-13, MKP v 2D.nb na riešenie úlohy z Príkladu 9.2 urobte podobnú analýzu chýb a EOC, ako v Úlohe 6.38.

1. Naprogramujte výpočet L_2 normy (9.48) a energetickej normy (9.49) chyby $\varepsilon = U - u$. Pri výpočte chýb je rozumné kvôli rýchlejšiemu výpočtu integrály (9.48) a (9.49) prepísať na súčty integrálov cez jednotlivé elementy Ω^e (lebo integrovanie Piecewise funkcie je pomalé)

$$\|\varepsilon\|_{L_2} = \sqrt{\sum_{e=1}^N \int_{\Omega^e} (U^e - u)^2 dx dy}, \quad \|\varepsilon\|_A = \sqrt{\sum_{e=1}^N \int_{\Omega^e} a \|\nabla U^e - \nabla u\|^2 dx dy}.$$

2. Postupne zjemňujte sieť tak, že veľkosť elementov sa pri každom zjemnení v oboch smeroch (x aj y) zmenší na polovicu (čiže plocha trojuholníkov klesne na štvrtinu). Vypočítajte a uložte L_2 chybu aj energetickú chybu. Pre jednotlivé zjemnenia siete vypočítajte EOC pomocou vzťahu (6.40). Sledujte, ako sa obe chyby znižujú. Keďže používame lineárne elementy ($s = 1$), tak L_2 chyba by mala klesať druhým rádom (EOC ≈ 2), čiže pri každom zjemnení siete približne na štvrtinu. Energetická chyba by mala klesať prvým rádom (EOC ≈ 1), čiže pri každom zjemnení približne na polovicu. Výsledky prehľadne zobrazte v tabuľke. Pre okrajovú úlohu z Príkladu 9.2 s presným riešením (9.13) vidíme výsledky v Tabuľke 9.3.

Tabuľka 9.3. Chyby a experimentálny rád konvergenzie.

N_x	N_y	N	n	L_2 chyba	EOC L_2	Energ. chyba	EOC Energ.
3	2	12	12	0.08276		0.6718	
6	4	48	35	0.02250	1.879	0.3515	0.9346
12	8	192	117	0.005775	1.962	0.1779	0.9823
24	16	768	425	0.001454	1.990	0.08924	0.9955
48	32	3072	1617	0.0003641	1.997	0.04465	0.9989

Dodatok A

Matematické nástroje

V tomto dodatku uvádzame niektoré matematické vety a definície, na ktoré sa odvolávame v učebnici. Pre čitateľa so znalosťami, o ktorých sme hovorili v [Predhovore](#), by malo ísť o známe veci, uvádzame ich tu len na pripomenutie a referencovanie. Vety uvádzame väčšinou bez dôkazov.

Na viacerých miestach v tomto dodatku (ale aj inde v učebnici) hovoríme, že niečo platí alebo je definované „skoro všade“ alebo pre „skoro všetky“ body. Myslí sa tým všade až na množinu bodov s nulovou mierou.

V učebnici viackrát využívame *Newtonov-Leibnizov vzorec* (zvaný tiež základná veta integrálneho počtu), ktorý hovorí, ako počítať určitý integrál funkcie f pomocou jej (ľubovoľnej) primitívnej funkcie F .

Veta A.1. [Newtonov-Leibnizov vzorec] Ak funkcia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $[a, b]$ a primitívna funkcia $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je definovaná ako

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt + C, \quad \text{kde } C \text{ je konštanta,}$$

potom $F'(x) = f(x)$ skoro všade na intervale $[a, b]$ a platí Newtonov-Leibnizov vzorec

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Užitočný je aj nasledujúci tvar Newtonovho-Leibnizovho vzorca

$$\int_a^b \frac{dF}{dx} dx = F(b) - F(a), \quad (\text{A.1})$$

čiže určitý integrál z derivácie F sa počíta ako hodnota na hornej hranici mínus hodnota na dolnej hranici.

Viacrozmerným zovšeobecnením Newtonovho-Leibnizovho vzorca je *Gaussova veta*, ktorú možno nájsť aj pod inými názvami, napríklad Gaussova-Ostrogradského, Greenova alebo divergenčná veta. Veta hovorí o tom, ako môžeme prerobiť integrál cez nejakú oblasť na integrál po jej hranici (a naopak). Napríklad ako prerobiť objemový integrál na plošný.

Veta A.2 (Gaussova veta). Majme spojito diferencovateľné vektorové pole $\vec{F}$ a ohraničenú otvorenú množinu (oblasť) $V \subset \mathbb{R}^n$ s Lipschitzovskou hranicou ∂V . Potom platí

$$\int_V \nabla \cdot \vec{F} dV = \int_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} dS, \quad (\text{A.2})$$

kde $\vec{n}$ je vektor jednotkovej vonkajšej normály ku hranici ∂V .

Poznámka A.3 (Gaussova veta v 1D). Je užitočné rozumieť, prečo sa Gaussova veta (A.2) v 1D redukuje na Newtonov-Leibnizov vzorec (A.1). V 1D máme oblasť $V = [a, b]$ s hranicou tvorenou dvoma bodmi $\partial V = \{a, b\}$, normály ku hranici sú jednozložkové vektory (čísla) $\vec{n}(a) = -1$, $\vec{n}(b) = 1$, vektorové pole je jednozložkové, $\vec{F} = F$ a integrál na pravej strane Gaussovej vety (A.2) sa zredukuje na súčet dvoch členov

$$\int_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \vec{F}(a) \cdot \vec{n}(a) + \vec{F}(b) \cdot \vec{n}(b) = F(b) - F(a),$$

čo sa zhoduje s pravou stranou vo vzorci (A.1). Divergencia má v 1D tvar $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{dF}{dx}$, čiže ľavá strana Gaussovej vety (A.2) prejde na tvar

$$\int_V \nabla \cdot \vec{F} dV = \int_a^b \frac{dF}{dx} dx,$$

čo sa zhoduje s ľavou stranou vo vzorci (A.1).

Poznámka A.4. Gaussova veta platí aj za slabších predpokladov, napríklad oblasť V nemusí byť ohraničená, ak vektorové pole $\vec{F}$ v nekonečne dostatočne rýchlo slabne. Nám ale Gaussova veta bude stačiť v uvedenom tvare.

Nasledujúce dve vety hovoria o vzťahu nulovosti integrálu nejakej funkcie a nulovosti funkcie samotnej.

Veta A.5. Integrovaťelná funkcia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je nulová pre skoro všetky x z intervalu $I \subset \mathbb{R}$ práve vtedy, keď

$$\int_a^b f(x) dx = 0, \quad \text{pre ľubovoľný podinterval } [a, b] \subseteq I.$$

Čiže ak integrál z funkcie po ľubovoľnom intervale vychádza nula, tak funkcia je nulová (skoro všade) a naopak. Viacrozmerné zovšeobecnenie tohto tvrdenia uvádzame v nasledujúcej vete.

Veta A.6. Integrovaťelná funkcia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je nulová pre skoro všetky $\vec{r}$ z oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ práve vtedy, keď

$$\int_V f(\vec{r}) dV = 0, \quad \text{pre ľubovoľnú podoblasť } V \subseteq \Omega.$$

Ďalej uvádzame dve vety, ktoré hovoria o derivácii funkcie spojitaj na uzavretom intervale.

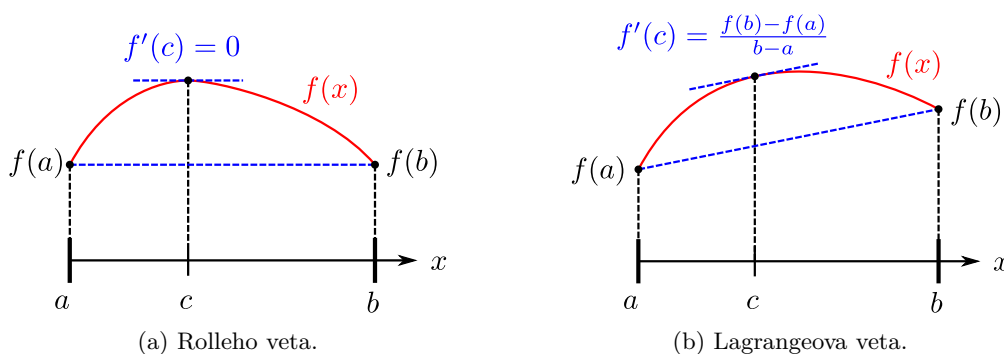
Veta A.7 (Rolleho veta). Ak je funkcia f spojitá na uzavretom intervale $[a, b]$, diferencovateľná na otvorenom intervale (a, b) a v koncových bodoch platí $f(a) = f(b)$, tak potom existuje aspoň jeden bod c v intervale (a, b) taký, v ktorom je nulová derivácia, $f'(c) = 0$, čiže bod c , v ktorom je dotyčnica ku grafu vodorovná (Obr. A.1a).

Lagrangeova veta o strednej hodnote zovšeobecňuje Rolleho vetu aj pre prípad $f(a) \neq f(b)$.

Veta A.8 (Lagrangeova veta o strednej hodnote). Ak je funkcia f spojitá na uzavretom intervale $[a, b]$ a diferencovateľná na otvorenom intervale (a, b) , tak potom existuje aspoň jeden bod c v intervale (a, b) taký, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad (\text{A.3})$$

čiže existuje bod c , v ktorom je dotyčnica ku grafu rovnobežná so sečnicou spájajúcou body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$ (Obr. A.1b).



Obr. A.1. Ilustrácia Rolleho vety a Lagrangeovej vety o strednej hodnote.

Taylorov rozvoj funkcie je nesmierne užitočný nástroj, ktorý sa požíva na *aproximáciu funkcie*. Na tomto mieste uvádzame jednu z podôb Taylorovej vety.

Veta A.9 (Taylorova veta). Nech funkcia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je $(n + 1)$ -krát spojitou diferencovateľná v okolí bodu $a \in \mathbb{R}$, potom funkciu môžeme napísať v tvare *Taylorovho rozvoja*

$$f(x) = f(a) + f'(x)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n(x), \quad (\text{A.4})$$

pričom funkcia

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k = f(a) + f'(x)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

sa nazýva *Taylorov polynóm* n -tého stupňa a $R_n(x)$ je zvyšok po aproximácii funkcie f Taylorovým polynómom stupňa n . Zvyšok $R_n(x)$ sa dá vyjadriť viacerými spôsobmi. My budeme využívať Lagrangeov tvar zvyšku

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1},$$

kde c je nejaký bod medzi a a x .

Taylorov rozvoj je fascinujúca vec. Ak je nejaká funkcia hladká a poznáme hodnoty všetkých jej derivácií v jedinom bode a , Taylorov rozvoj (A.4) má tvar $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k$ a vďaka nemu vlastne poznáme celú funkciu (vo všetkých bodoch x), to je takmer zázrak. Hladké (presnejšie analytické) funkcie si nemôžu robiť, čo sa im zachce.

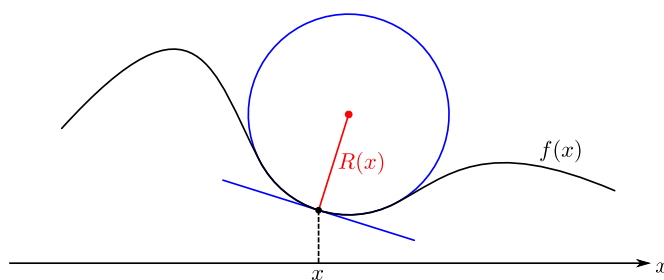
Všimnime si, že pre $n = 0$ a $x = b$ má Taylorov rozvoj (A.4) podobu

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b - a),$$

čo po úprave dáva Lagrangeovu vetu o strednej hodnote (A.3). Taylorova veta je teda zovšeobecnením Lagrangeovej vety o strednej hodnote.

Na viacerých miestach v učebnici využívame vzorec pre *krivosť grafu funkcie*, resp. pre polomer tzv. *oskulačnej kružnice*.

Definícia A.10 (Oskulačná kružnica). Majme funkciu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ktorá je dvakrát spojitodiferencovateľná v bode x . Oskulačná kružnica ku grafu funkcie f (čiže ku krivke $y = f(x)$) v bode x je taká kružnica prechádzajúca bodom $(x, f(x))$, ktorá najlepšie aproximuje graf funkcie f v okolí bodu x , Obr. A.2.^a.



Obr. A.2. Oskulačná kružnica krivky.

^aNázov „oskulačná kružnica“ pochádza z latinského „circulus osculans“, čiže „bozkávajúca kružnica“ a vymyslel ho Leibniz.

Veta A.11 (Polomer oskulačnej kružnice). Majme funkciu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ktorá je dvakrát spojitodiferencovateľná v bode x . Oskulačná kružnica ku grafu funkcie f v bode x má polomer

$$R(x) = \frac{[1 + (f'(x))^2]^{\frac{3}{2}}}{|f''(x)|}.$$

Dôkaz. Dôkaz sa štandardne robí prostriedkami diferenciálnej geometrie kriviek a je celkom elegantný. My urobíme trochu kostrbatejší dôkaz, ale bez potreby zachádzania do diferenciálnej geometrie.

Oskulačná kružnica má predpis $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, kde a, b, R sú tri zatiaľ neznáme parametre. Na ich určenie potrebujeme tri rovnice. Predpis kružnice si môžeme napísať ako funkciu $y(x) = b \pm \sqrt{R^2 - (x - a)^2}$ (znamienko sa určí podľa toho, či funkcia f je v bode x konvexná (plus) alebo konkávna (mínus)). Keďže oskulačná kružnica má čo najlepšie aproximovať graf funkcie $f(x)$, tak Taylorov rozvoj funkcie $y(x)$ v bode x musí byť do druhého stupňa rovnaký, ako Taylorov rozvoj funkcie $f(x)$ v bode x . Musí teda platiť

$$\begin{aligned} y(x) &= f(x), \\ y'(x) &= f'(x), \\ y''(x) &= f''(x). \end{aligned}$$

Z týchto troch podmienok dostaneme rovnice pre tri parametre a, b, R , čiže po zderivovaní funkcie

$y(x)$ a úpravách máme

$$\begin{aligned} b \pm \sqrt{R^2 - (x - a)^2} &= f(x), \\ \mp \frac{x - a}{\sqrt{R^2 - (x - a)^2}} &= f'(x), \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\mp \frac{R^2}{(\sqrt{R^2 - (x - a)^2})^3} = f''(x). \quad (\text{A.6})$$

Nás v tejto chvíli zaujíma iba polomer R , tak ho skúsme vyjadriť. Argument x v $f'(x)$ a $f''(x)$ ďalej kvôli prehľadnosti vynecháme. Z rovnice (A.5) máme

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{R^2 - (x - a)^2}} &= \mp \frac{f'}{x - a}, \\ R^2 &= \frac{(x - a)^2}{f'^2} (1 + f'^2). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Po dosadení do rovnice (A.6) dostávame

$$\frac{f'(1 + f'^2)}{(x - a)} = f'', \quad \text{z čoho získame} \quad (x - a) = \frac{f'(1 + f'^2)}{f''}.$$

Po spätnom dosadení do vzťahu (A.7) máme

$$R^2 = \frac{(1 + f'^2)^3}{f''^2}$$

a po odmocnení konečne získavame vzťah pre polomer oskulačnej kružnice

$$R = \frac{(1 + f'^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''|}.$$

□

Definícia A.12 (Krivosť grafu funkcie). *Krivosť* grafu funkcie, čiže krivky $y = f(x)$ v bode x môžeme definovať ako prevrátenú hodnotu polomeru oskulačnej kružnice

$$K(x) = \frac{1}{R(x)} = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad (\text{A.8})$$

čiže čím je polomer menší, tým je graf krivší. Preto sa polomeru $R(x)$ oskulačnej kružnice hovorí aj *polomer krivosti*. *Znamienková krivosť* sa definuje ako

$$K^{\pm}(x) = \frac{f''(x)}{[1 + (f'(x))^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (\text{A.9})$$

Tá je teda z definície kladná, ak je f v bode x konvexná, a záporná, ak je funkcia f v bode x konkávna.

Poznámka A.13 (Krivosť je pre malé sklony druhá derivácia). Ak je prvá derivácia malá, $|f'(x)| \ll 1$, tak menovateľ vo výrazoch (A.8) a (A.9) je približne rovný jednej a krivosť približne rovná absolútnej hodnote druhej derivácie $K(x) \approx |f''(x)|$, resp. znamienková krivosť približne rovná druhej derivácii, $K^{\pm}(x) \approx f''(x)$.

Ďalej uvádzame niekoľko ďalších definícií, ktoré v učebnici používame.

Definícia A.14. *Kroneckerov delta* symbol δ_{ij} je funkcia dvoch premenných i, j (väčšinou celých čísel) definovaná takto

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ak } i = j, \\ 0, & \text{ak } i \neq j. \end{cases}$$

Nasledujúce Definície A.15 – A.19 sa týkajú *vektorových priestorov* (tiež nazývaných lineárne priestory), čiže množín uzavretých vzhľadom na sčítanie prvkov (vektorov) a násobenie prvkov skalárom. Pod priestorom V v týchto definíciách si môžeme predstaviť ľubovoľný vektorový priestor nad poľom reálnych čísel, napríklad $\mathbb{R}^n$ alebo aj nejaký priestor funkcií (pre viac detailov pozri napríklad [13, 5]). Na *meranie vzdialenosti* medzi prvkami vektorového priestoru V sa používa metrika, ktorú teraz definujeme.

Definícia A.15 (Metrika, vzdialenosť). Nech V je vektorový priestor. *Metrika* (vzdialenosť) je zobrazenie

$$\rho : V \times V \rightarrow \mathbb{R},$$

ktoré má nasledujúce vlastnosti ($u, v, w \in V$):

1. Nezápornosť: $\rho(u, v) \geq 0$, pričom $\rho(u, v) = 0$ práve vtedy, keď $u = v$.
2. Symetria: $\rho(u, v) = \rho(v, u)$.
3. Subaditivita (trojuholníková nerovnosť): $\rho(u, v) \leq \rho(u, w) + \rho(w, v)$.

Vektorový priestor vybavený metrikou sa nazýva metrický priestor.

Definícia A.16 (Norma). Nech V je vektorový priestor. *Norma* je zobrazenie

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R},$$

ktoré má nasledujúce vlastnosti ($u, v \in V, c \in \mathbb{R}$):

1. Nezápornosť: $\|u\| \geq 0$, pričom $\|u\| = 0$ práve vtedy, keď $u = 0$.
2. Absolútna homogenita: $\|cu\| = |c|\|u\|$.
3. Subaditivita (trojuholníková nerovnosť): $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Vektorový priestor vybavený normou sa nazýva normovaný priestor.

Ak máme definovanú normu, môžeme pomocou nej zadefinovať (indukovať) metriku.

Definícia A.17 (Metrika (vzdialenosť) indukovaná normou). Majme vektorový priestor V s normou $\|\cdot\|$. Norma prirodzene indukuje metriku

$$\rho(u, v) = \|u - v\|, \text{ kde } u, v \in V,$$

ktorá spĺňa všetky vlastnosti, ktoré má mať metrika (pozri Definíciu A.15).

Definícia A.18 (Skalárny súčin). Nech V je vektorový priestor. *Skalárny súčin* je zobrazenie

$$(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R},$$

ktoré má nasledujúce vlastnosti ($u, v, w \in V, c \in \mathbb{R}$):

1. Nezápornosť: $(u, u) \geq 0$, pričom $(u, u) = 0$ práve vtedy, keď $u = 0$.
2. Symetria: $(u, v) = (v, u)$.
3. Linearita: $(u + cv, w) = (u, w) + c(v, w)$.

Ak máme priestor so skalárnym súčinom, môžeme pomocou neho definovať (indukovať) normu.

Definícia A.19 (Norma indukovaná skalárnym súčinom). Majme vektorový priestor V so skalárnym súčinom $(\cdot, \cdot)$. Skalárny súčin prirodzene indukuje normu

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)}, \text{ kde } u \in V,$$

ktorá spĺňa všetky vlastnosti, ktoré má mať norma (pozri Definíciu A.16).

V matematike sa veľmi často využíva Cauchyho-Schwarzova nerovnosť. V učebnici ju využívame v kapitole 6, tu uvádzame jej znenie.

Veta A.20 (Cauchyho-Schwarzova nerovnosť). Majme vektorový priestor V so skalárnym súčinom $(\cdot, \cdot)$ a normou $\|\cdot\|$ indukovanou týmto skalárnym súčinom. Potom platí tzv. *Cauchyho-Schwarzova nerovnosť*

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|, \quad (\text{A.10})$$

kde $u, v \in V$.

Veta A.21 (Nedegenerovanosť skalárneho súčinu). Majme vektorový priestor V . Ak je vektor $v \in V$ kolmý na všetky vektory $w \in V$, čiže platí

$$(v, w) = 0 \quad \text{pre všetky } w \in V,$$

potom v je nutne nulový vektor, $v = 0$.

Dôkaz. Nedegenerovanosť skalárneho súčinu jednoducho vyplýva z jeho nezápornosti. Zoberme predpoklad vety, čiže taký vektor $v \in V$, pre ktorý platí $(v, w) = 0$ pre všetky $w \in V$. Teraz zvolme $w = v$, čiže máme $(v, v) = 0$. Prvá vlastnosť v Definícii A.18 skalárneho súčinu hovorí, že $(v, v) = 0$ práve vtedy, keď $v = 0$, čiže už vieme, že v je nulový vektor. $\square$

Ako dôsledok vety uvádzame špeciálny prípad, v ktorom V je priestor funkcií.

Dôsledok A.22. Ak pre funkciu $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ z priestoru funkcií $V = L_2(a, b)$ platí

$$\int_a^b v w \, dx = 0 \quad \text{pre všetky funkcie } w \in V,$$

potom funkcia v je (skoro všade) nulová, $v = 0$.

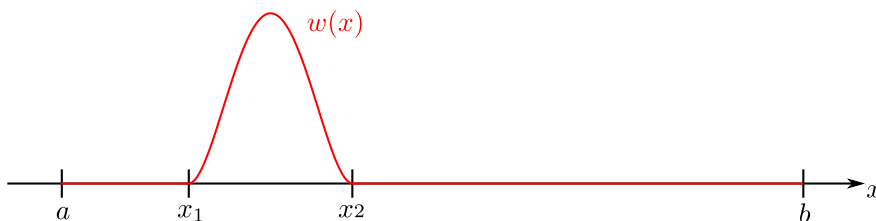
Poznámka A.23. V predchádzajúcom tvrdení dokonca stačí, ak zoberieme nejaký podpriestor $V \subset L_2(a, b)$, ktorý je *hustý* v priestore $L_2(a, b)$, čiže $\overline{V} = L_2(a, b)$ (uzáverom je

celý priestor). Dá sa ukázať, že veľmi špeciálny priestor $C_0^\infty([a, b])$ hladkých funkcií, ktoré sú nulové v určitom okolí hranice (na hranici majú teda nulovú hodnotu aj všetky derivácie), je hustý v $L_2(a, b)$. Viac sa o tom hovorí v literatúre z funkcionálnej analýzy (pozri napríklad [13, 5]).

Dôkaz. Platnosť Dôsledku A.22 je zrejmá z Vety A.21. Dá sa tomu ale porozumieť aj intuitívne. Naznačíme, ako sa to dá ukázať sporom. Nech $v \neq 0$ na nejakom intervale $[x_1, x_2] \subset [a, b]$. Vždy vieme vybrať interval $[x_1, x_2]$ tak, že v je na ňom buď kladná alebo záporná. Zvoľme funkciu w takto (pozri Obr. A.3)

$$w(x) = \begin{cases} (x - x_1)^2(x - x_2)^2, & x \in [x_1, x_2], \\ 0, & \text{inak.} \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

Potom ale integrál $\int_a^b v w dx$ je buď kladný, alebo záporný, a teda určite nie nulový. Tým sme došli



Obr. A.3. Graf funkcie (A.11). Funkcia je nulová všade až na interval (x_1, x_2) .

k sporu, a teda určite $v(x) = 0$ pre $x \in [x_1, x_2]$. Týmto spôsobom „vynulujeme“ funkciu v na celom intervale $[a, b]$. $\square$

Dôsledok A.24. Majme oblasť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ak pre funkciu $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ z priestoru funkcií $V = L_2(\Omega)$ platí

$$\int_{\Omega} v w d\Omega = 0 \quad \text{pre všetky funkcie } w \in V,$$

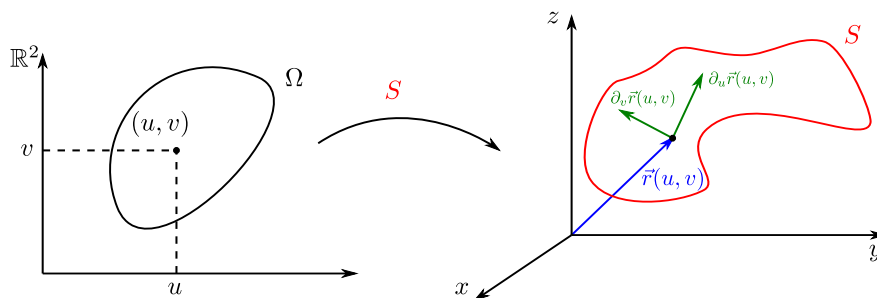
potom funkcia v je (skoro všade) nulová, $v = 0$. Podobne, ako v Dôsledku A.22, aj tu stačí za V zobrať nejaký podpriestor, ktorý je hustý v priestore $L_2(\Omega)$, pozri Poznámku A.23.

Zvyšok Dodatku A venujeme vzorcu na výpočet plošného obsahu zakrivenej plochy, ktorý používame v sekcii 2.4. Začneme definíciou parametrizovanej plochy.

Definícia A.25 (Parametrizovaná plocha). Majme oblasť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. *Parametrizovaná plocha* je zobrazenie $S : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, čiže každej dvojici parametrov $(u, v) \in \Omega$ zobrazenie S priradí bod (polohový vektor)

$$S(u, v) = \vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Schematický náčrt definície je na Obr. A.4.



Obr. A.4. Parametrizovaná plocha S a jej dotykové vektory v bode $\vec{r}(u, v)$.

Definícia A.26 (Výpočet plošného obsahu parametrizovanej plochy). Majme plochu S , ktorá je spojitاً diferencovateľná, čiže parciálne derivácie funkcie $\vec{r}(u, v)$ sú spojitاً. *Plošný obsah* parametrizovanej plochy definujeme ako plošný integrál (1. druhu)

$$A = \int_S 1 \, dS = \int_{\Omega} \|\partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}\| \, d\Omega,$$

kde vektory

$$\begin{aligned} \partial_u \vec{r} &= (\partial_u x, \partial_u y, \partial_u z), \\ \partial_v \vec{r} &= (\partial_v x, \partial_v y, \partial_v z) \end{aligned} \tag{A.12}$$

sú dotykové vektory k ploche S (Obr. A.4). Plošný obsah infinitezimálneho (nekonečne malého) kúska plochy dS počítame ako

$$dS = \|\partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}\| \, d\Omega,$$

kde $d\Omega = du \, dv$.

Dôležitým špeciálnym prípadom parametrizovanej plochy je graf funkcie dvoch premenných $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (Obr. A.5). V zmysle Definície A.25 môžeme graf funkcie chápať ako parametrizovanú plochu, pričom máme polohový vektor $((x, y)$ teraz hrajú úlohu parametrov (u, v))

$$\vec{r}(x, y) = (x, y, f(x, y)), \quad (x, y) \in \Omega.$$

Dotykové vektory (A.12) majú v tomto prípade tvar

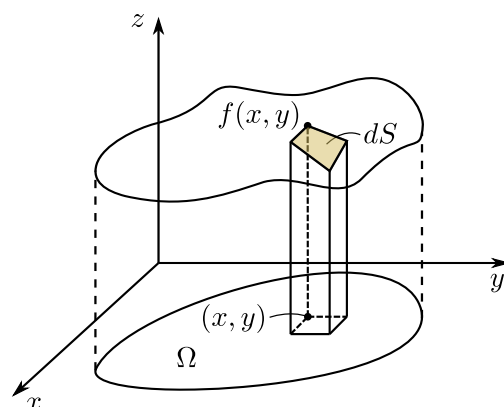
$$\begin{aligned} \partial_x \vec{r} &= (1, 0, \partial_x f), \\ \partial_y \vec{r} &= (0, 1, \partial_y f), \end{aligned}$$

ich vektorový súčin (normálový vektor) vychádza $\partial_x \vec{r} \times \partial_y \vec{r} = (-\partial_x f, -\partial_y f, 1)$, a preto obsah infinitezimálnej plôšky dS (Obr. A.5) počítame ako

$$dS = \|\partial_x \vec{r} \times \partial_y \vec{r}\| \, d\Omega = \sqrt{1 + (\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2} = \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2} \, d\Omega. \tag{A.13}$$

Plošný obsah grafu funkcie dvoch premenných teda počítame ako dvojný integrál

$$A = \int_{\Omega} \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2} \, d\Omega.$$



Obr. A.5. Graf funkcie $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ a jeho infinitezimálna časť dS

Bibliografia

1. ARGYRIS, J. H. *Energy Theorems and Structural Analysis: a Generalised Discourse with Applications on Energy Principles of Structural Analysis Including the Effects of Temperature and Non-Linear Stress-Strain Relations*. Boston, MA: Springer US Imprint Springer, 1960. ISBN 978-1-4899-5852-5.
2. BRENNER, S. C.; SCOTT, L. R. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Zv. 15. Springer, 2008. Texts in Applied Mathematics. ISBN 978-0387759333. Dostupné z DOI: [10.1007/978-0-387-75934-0](https://doi.org/10.1007/978-0-387-75934-0).
3. CLOUGH, R. *The Finite Element Method in Plane Stress Analysis*. American Society of Civil Engineers, 1960.
4. HAN, S. M.; BENAROYA, H.; WEI, T. Dynamics of Transversely Vibrating Beams Using Four Engineering Theories. *Journal of Sound and Vibration*. 1999, roč. 225, č. 5, s. 935–988. ISSN 0022-460X. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2257>.
5. HANDLOVIČOVÁ, A.; TIBENSKÝ, M. *Základy funkcionálnej analýzy a variačného počtu*. Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2016. ISBN 978-80-227-4559-8. Dostupné tiež z: https://www.svf.stuba.sk/buxus/docs/dokumenty/skripta/Zaklady_funkcionalnej_analyzy_a_variacneho_poctu.pdf.
6. HUTTON, D. *Fundamentals of Finite Element Analysis*. McGraw-Hill, 2004. McGraw-Hill series in mechanical engineering. ISBN 978-0071122313.
7. KUPPAST, V. V.; KURBET, S. N.; UMESHKUMAR, H. D.; ADARSH, B. Thermal Analysis of Piston for the Influence on Secondary motion. *International Journal of Engineering Research and Applications (IJERA)*. 2013, roč. 3, č. 3, s. 1402–1407. ISSN 2248-9622.
8. KUTIŠ, V. *Modelovanie multifyzikálnych procesov a dejov*. Vydavateľstvo STU, 2014. ISBN 978-80-227-4232-0.
9. *Millau Viaduct*. Wikimedia Foundation, 2005. Dostupné tiež z: https://en.wikipedia.org/wiki/Millau_Viaduct.
10. MÍKA, S.; KUFNER, A. *Parciální diferenciální rovnice I*. SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1983.
11. PRESS, W.; TEUKOLSKY, S.; VETTERLING, W.; FLANNERY, B. *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*. USA: Cambridge University Press, 2007. ISBN 978-0521880688.
12. REDDY, J. N. *An introduction to the finite element method (3rd Edition)*. New York, NY: McGraw-Hill Higher Education, 2005. ISBN 978-0071244735.
13. REKTORYS, K. *Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky*. Academia, 1999. Česká matice technická. ISBN 978-80-200-0714-8.
14. SESHU, P. *Textbook of Finite Element Analysis*. PHI Learning, 2003. ISBN 978-8120323155.
15. *Southern Pacific Railroad bridge*. Wikimedia Foundation, 2006. Dostupné tiež z: <https://en.wikipedia.org/wiki/Truss#/media/File:RRTrussBridgeSideView.jpg>.
16. TURNER, M.; CLOUGH, R.; MARTIN, H.; TOPP, L. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *Journal of Aeronautical Sciences*. 1956, roč. 23, č. 9, s. 805–823. Dostupné tiež z: <https://doi.org/10.2514/8.3664>.
17. ZIENKIEWICZ, O.; TAYLOR, R.; ZHU, J. Z. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals (7th Edition)*. Elsevier Science, 2013. ISBN 978-0080951355.

Ing. Mgr. Lukáš Tomek, PhD., prof. RNDr. Karol Mikula, DrSc.

NUMERICKÉ MODELOVANIE POMOCOU METÓDY KONEČNÝCH PRVKOV

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave vo Vydavateľstve SPEKTRUM STU, Bratislava, Vazovova 5, v roku 2024.

Edícia vysokoškolských učebníc

Rozsah 177 strán, 77 obrázkov, 17 tabuliek, 11,466 AH, 11,685 VH, 1. vydanie, edičné číslo 6188, vydané v elektronickej forme.

85 – 206 – 2024

ISBN 978-80-227-5399-9