MATEMATIKA I.
Základy diferenciálneho počtu

Návody k cvičeniam pre odbory VSVH a STOP

Andrea Stupňanová, Alexandra Šipošová

STU
SLOVENSKÁ TECHNICKÁ
UNIVERZITA V BRATISLAVE

MATEMATIKA I.
Základy diferenciálneho počtu

Návody k cvičeniam pre odbory VSVH a STOP

Andrea Stupňanová, Alexandra Šipošová

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
2014

Recenzenti: doc. RNDr. Robert Jajcay, PhD.
Mgr. Štefan Gyürki, PhD.

ISBN 978-80-227-4294-8

Mgr. Andrea Stupňanová, PhD. – Ing. Alexandra Šipošová, PhD.

MATEMATIKA I. ZÁKLADY DIFERENCIÁLNEHO POČTU
Návody k cvičeniam pre odbory VSVH a STOP

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave v Nakladateľstve STU, Bratislava, Vazovova 5, v roku 2014.

Edícia skrípt

Rozsah 189 strán, 102 obrázkov, 28,05AH, 28,313 VH, 1. vydanie,
edičné číslo 5819, vydané v elektronickej forme;
umiestnenie na http://www.svf.stuba.sk

Schválila Edičná rada Stavebnej fakulty STU v Bratislave.

85 – 267 – 2014

ISBN 978-80-227-4294-8

Úvod

Tieto skriptá sú učebnou pomôckou pri štúdiu predmetu Matematika 1 v bakalárskom štúdiu na Stavebnej fakulte Slovenskej technickej univerzity v Bratislave. Hoci sú svojou náplňou prispôsobené prednáškam na študijných odboroch STOP a VSVH (Stavby na tvorbu a ochranu prostredia a Vodné hospodárstvo a vodné stavby), aj študenti iných odborov môžu v nich nájsť užitočného pomocníka.

Náplň predmetu Matematika 1 pre odbory STOP a VSVH sa skladá z dvoch relatívne samostatných celkov, ktoré tvoria Lineárna algebra a analytická geometria a Základy diferenciálneho počtu funkcie jednej premennej. Skriptá, ktoré máte pred sebou, sú zamerané na druhý celok. Sú rozdelené na 7 kapitol. Každá kapitola obsahuje riešenia vzorových príkladov, po ktorých nasledujú cvičenia (s výsledkami) na samostatnú prácu študentov.

Skriptá v žiadnom prípade nemôžu a ani nechcú nahradiť prednášky. Hoci v jednotlivých kapitolách pripomíname základné pojmy, študent tu nenájde príslušnú matematickú teóriu. Naopak, skriptá sú určené na uľahčenie získania praktických zručností pri riešení príkladov a sú koncipované ako doplnok ku cvičeniam v predmete Matematika 1.

Veríme, že skriptá budú vhodnou pomôckou pre samostatnú prípravu študentov na semestrálne testy a na skúšku.

Na záver si dovoľujeme poďakovať prof. RNDr. Jozefovi Širáňovi, DrSc. za odborné rady a doc. RNDr. Róbertovi Jajcayovi, PhD. a Mgr. Štefanovi Gyürkimu, PhD. za starostlivé prečítanie materiálu a za pripomienky, ktoré prispeli k zlepšeniu tohoto textu.

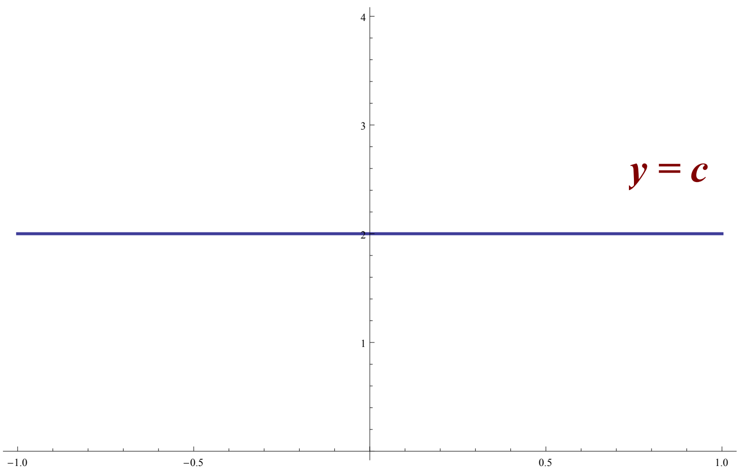
Obsah

Kapitola 1

Funkcie

1.1 Konštantná funkcia

Konštantná funkcia má tvar $y = c$, kde $c \in \mathcal{R}$. Grafom funkcie je **priamka**, ktorá je rovnobežná s osou Ox a prechádza bodom $(0, c)$.



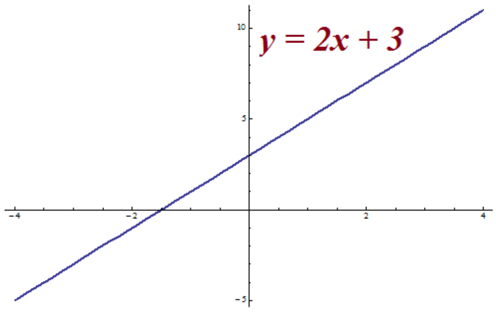
Obr. 1.1: Konštantná funkcia $y = c$ pre $c = 2$.

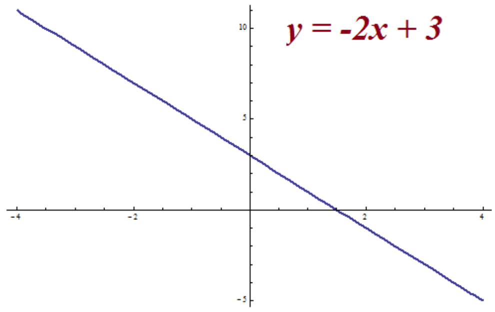
1.2 Lineárna funkcia

Lineárna funkcia má tvar $y = ax + b$, kde a je smernica priamky a $|b|$ udáva vzdialenosť priesečníka priamky s osou Oy od počiatku. Grafom funkcie je **priamka**.

(a) Ak $a > 0$, funkcia je **rastúca** na $(-\infty, \infty)$.

(b) Ak $a < 0$, funkcia je **klesajúca** na $(-\infty, \infty)$.



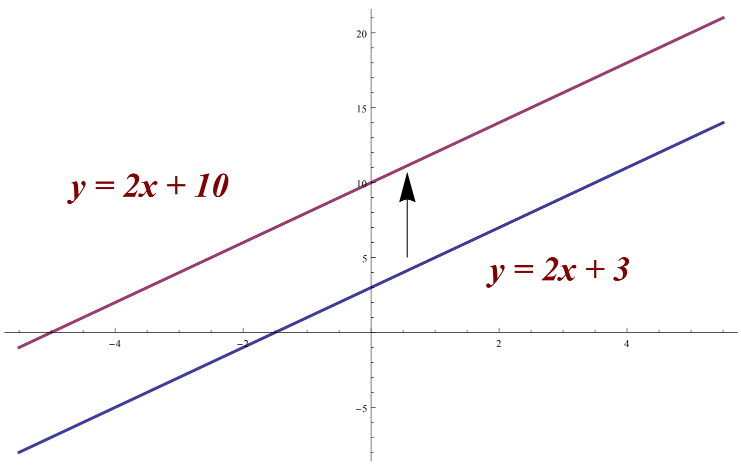


Obr. 1.2: $y = ax + b, \quad y = -ax + b$.

Na Obr.1.2 vľavo vidíme príklad **rastúcej** lineárnej funkcie $y = 2x + 3$, kde smernica priamky $a = 2$ a $b = 3$ je vzdialenosť priesečníka s osou Oy od počiatku.

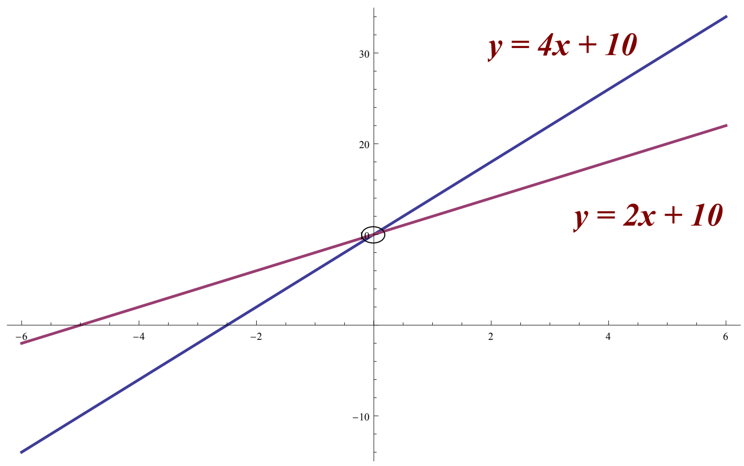
Na pravej strane Obr.1.2 máme príklad **klesajúcej** lineárnej funkcie $y = -2x + 3$, kde smernica priamky $a = -2$ a $b = 3$ je vzdialenosť priesečníka s osou Oy od počiatku.

Pri zmene konštanty b a zachovaní smernice a sa posúva graf lineárnej funkcie v smere osi Oy, pričom nová priamka je rovnobežná s pôvodnou. Tento posun je znázornený na Obr.1.3.



Obr. 1.3: Grafy funkcií $y = 2x + 10$ a $y = 2x + 3$.

Pri zmene smernice a, ale zároveň pri zachovaní konštanty b, sa graf lineárnej funkcie (priamka) $y = ax + b$ otáča okolo priesečníka s osou Oy. Táto situácia je znázornená na Obr.1.4.



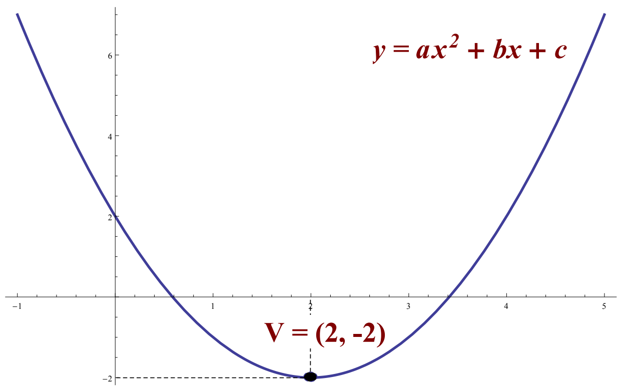
Obr. 1.4: Grafy funkcií $y = 4x + 10$ a $y = 2x + 10$.

1.3 Kvadratická funkcia

Kvadratická funkcia má tvar $y = ax^2 + bx + c$, kde a, b, c sú konštanty, $a \neq 0$ a $a, b, c, x \in \mathcal{R}$. Grafom kvadratickej funkcie je parabola, ktorej os je rovnobežná s osou Oy. Vrchol paraboly má súradnice

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) .$$

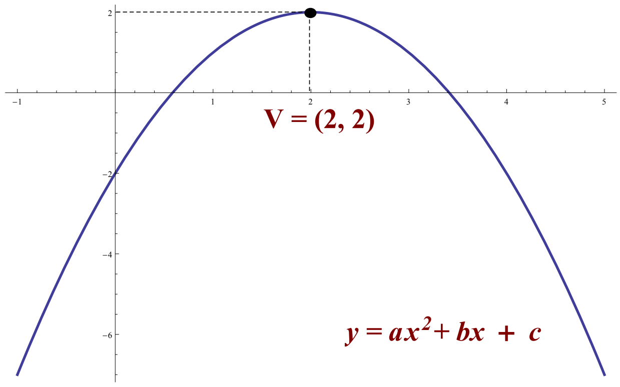
(a) Ak $a > 0$, funkcia je klesajúca na intervale $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ a rastúca na intervale $(-\frac{b}{2a}, \infty)$.



Obr. 1.5: $y = ax^2 + bx + c$, $a > 0$.

(b) Ak $a < 0$, funkcia je rastúca na intervale $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ a klesajúca na intervale $(-\frac{b}{2a}, \infty)$.

V prípade, ak konštanty b a c sú nulové, vrchol paraboly sa nachádza v počiatku súradnicovej sústavy, čiže $V = (0, 0)$.

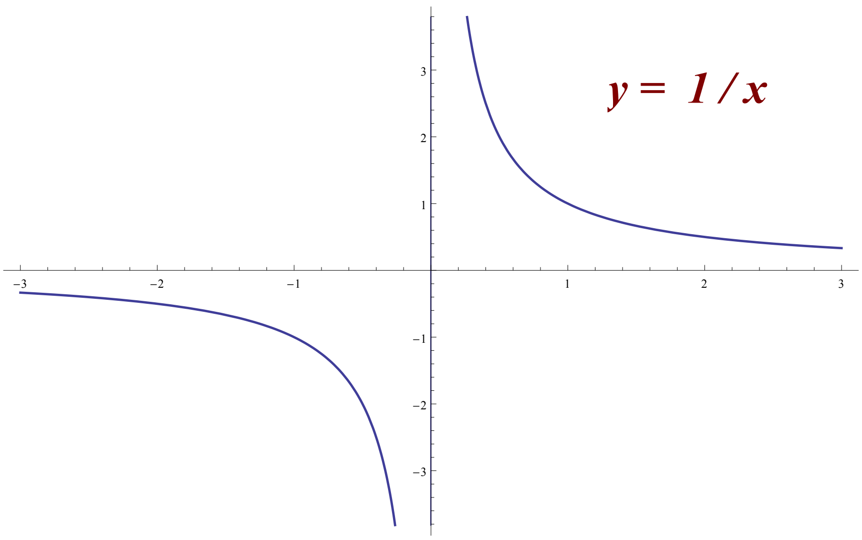


Obr. 1.6: $y = ax^2 + bx + c$, $a < 0$.

1.4 Nepriama úmernosť

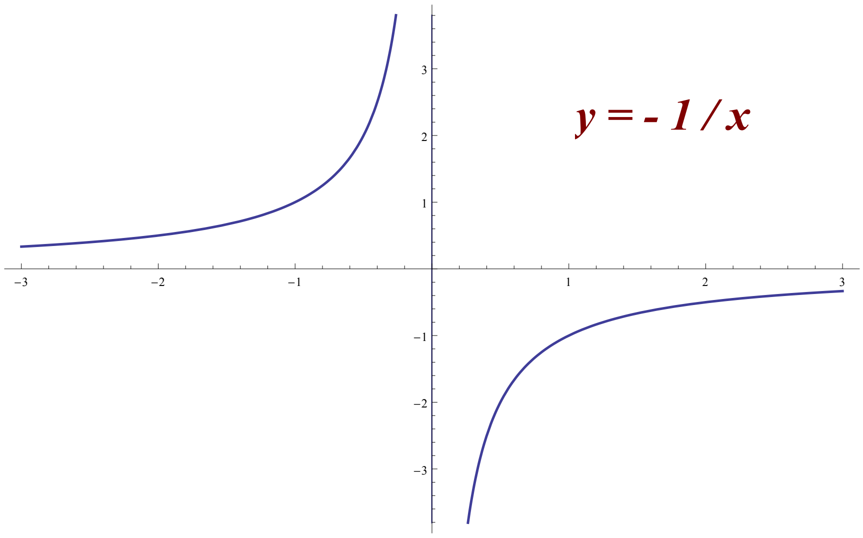
Nepriama úmernosť je daná rovnicou $y = \frac{k}{x}$, pričom $k \neq 0$. Definičný obor tejto funkcie je $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Grafom nepriamej úmernosti je **hyperbola**.

(a) Ak $k > 0$, funkcia je nepárna a klesajúca na intervale $(-\infty, 0)$ aj na intervale $(0, \infty)$.



Obr. 1.7: $y = \frac{k}{x}$, $k > 0$, graf pre $k = 1$.

(b) Ak $k < 0$, funkcia je párna a rastie na intervale $(-\infty, 0)$ a aj na intervale $(0, \infty)$.

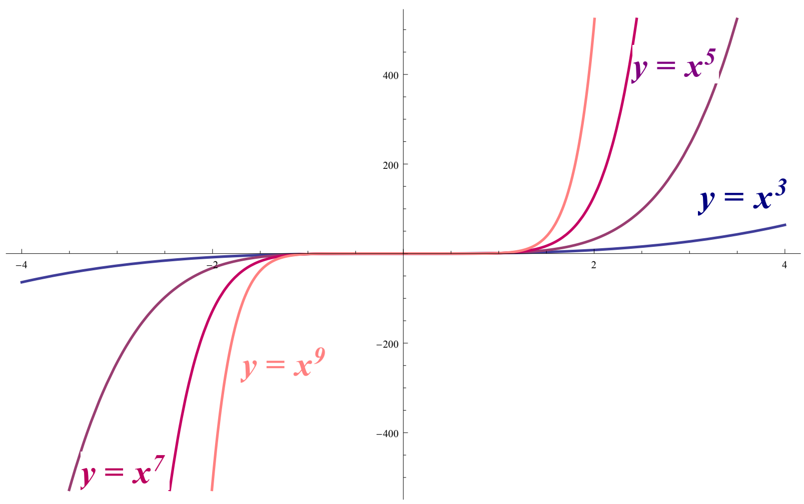


Obr. 1.8: $y = \frac{k}{x}$, $k < 0$, graf pre $k = -1$.

1.5 Mocninová funkcia

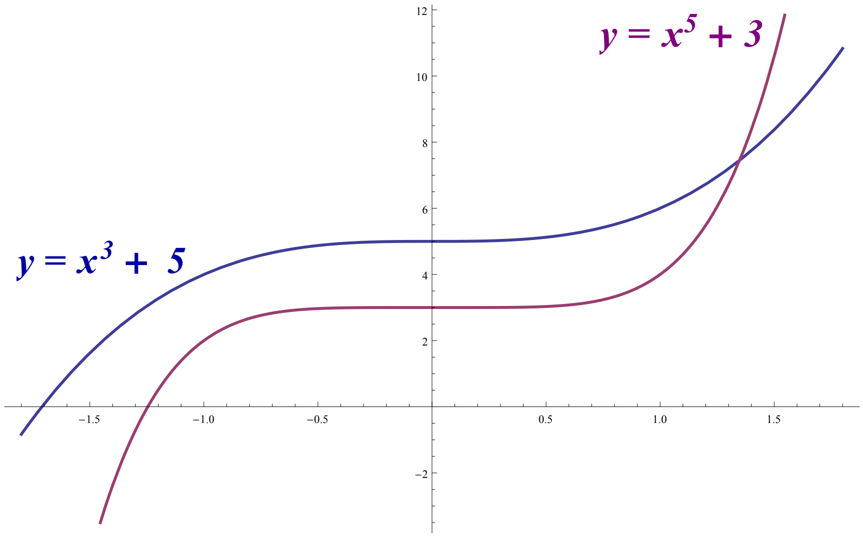
Mocninová funkcia je daná rovnicou $y = x^n$, kde n je ľubovoľné reálne číslo.

(a) Ak n **je prirodzené nepárne číslo**, napríklad v prípade funkcií $y = x^3$, $y = x^5$, $y = x^7$, vtedy $D(f) = H(f) = (-\infty, \infty)$. Takáto funkcia je nepárna, rastúca na celom definičnom obore. Nie je ohraničená a nemá ani extrémy. Príklady grafov takýchto funkcií sú zobrazené na Obr.1.9.



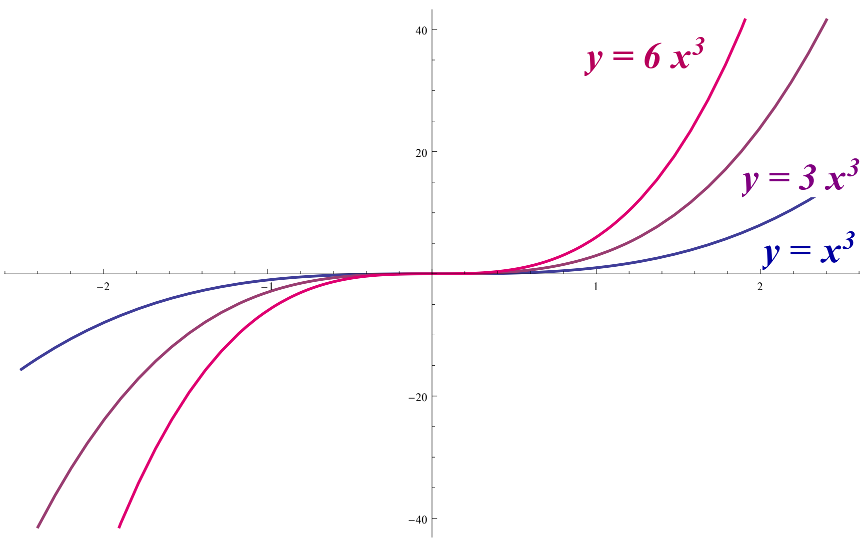
Obr. 1.9: $y = x^n$, n prirodzené a nepárne.

Graf mocninovej funkcie pre prirodzené nepárne n je symetrický podľa počiatku súradnicovej sústavy. Ak k takejto funkcii pripočítame akúkoľvek konštantu c $(y = x^n + c)$, jej graf sa posúva v smere osi Oy o hodnotu c. Takéto posuny sú znázornené na Obr.1.10.



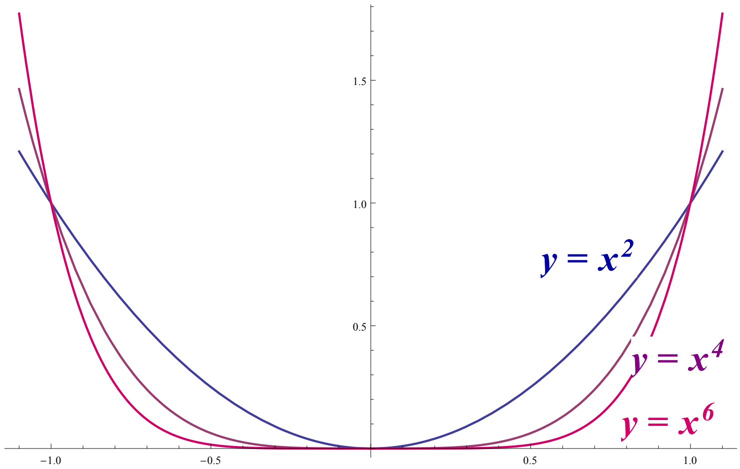
Obr. 1.10: Grafy funkcií $y = x^3 + 5$ a $y = x^5 + 3$.

V prípade, ak násobíme takúto mocninovú funkciu nejakou konštantou c, teda $y = cx^n$, so zväčšujúcim sa číslom c sa graf funkcie "zužuje", ako je to na Obr.1.11.



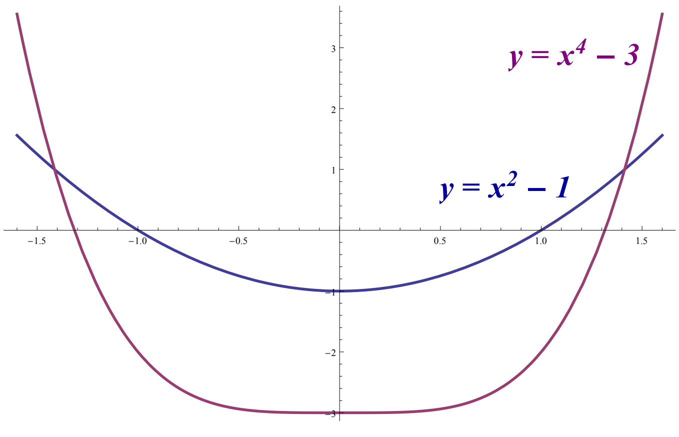
Obr. 1.11: Grafy funkcií $y = 6x^3$, $y = 3x^3$ a $y = x^3$.

(b) Ak n **je prirodzené párne číslo**, napríklad v prípade funkcií $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$, vtedy $D(f) = (-\infty, \infty)$ a $H(f) = \langle 0, \infty)$. Funkcia klesá na intervale $(-\infty, 0)$ a rastie na intervale $(0, \infty)$. Je párna (jej graf je symetrický podľa osi Oy), zdola ohraničená, v bode 0 má minimum, ale maximum neexistuje.



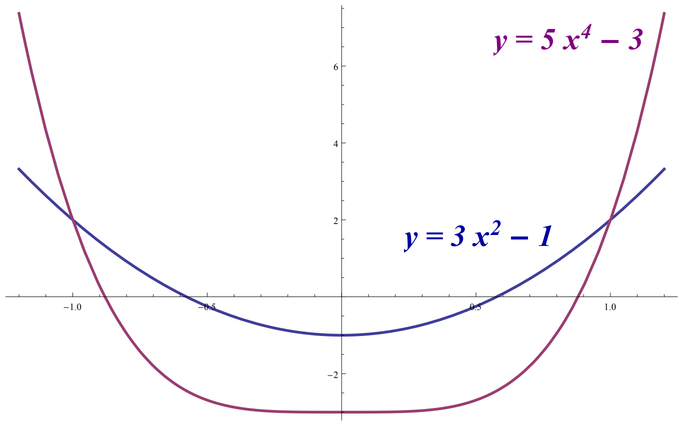
Obr. 1.12: $y = x^n$, n prirodzené a párne.

Čím väčsie je n, tým viac sa graf rozširuje v intervale $(-1, 1)$ a zužuje vo zvyšných intervaloch, čo zobrazuje Obr. 1.12. Na Obr.1.13 je znázornený posun pozdĺž osi Oy. To znamená, že ak pripočítame alebo odpočítame nejakú konštantu c, teda $y = x^n + c$, vrchol paraboly sa posunie po osi Oy o veľkosť c.



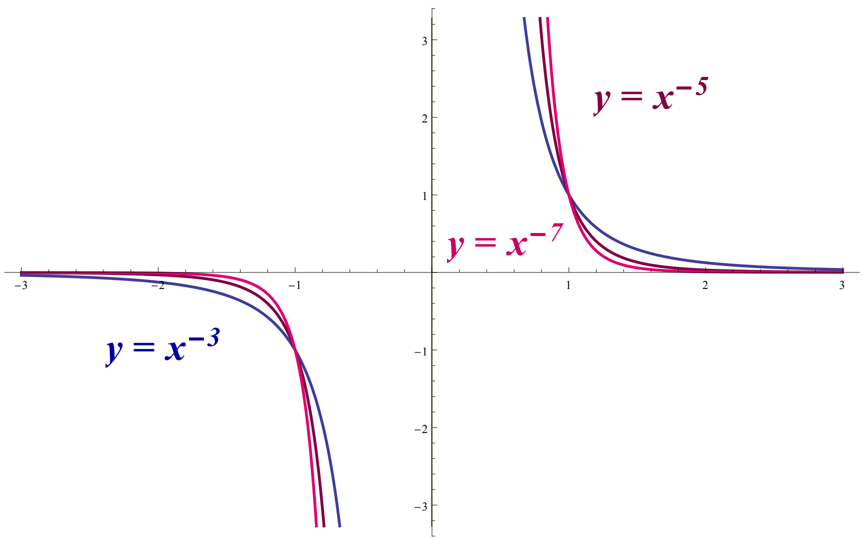
Obr. 1.13: Grafy funkcií $y = x^2 - 1$ a $y = x^4 - 3$.

V prípade c násobku našej funkcie, teda $y = cx^n$ sa graf "zúži", čo môžeme vidieť na Obr.1.14. Na Obr.1.13 máme funkciu bez násobku konštanty a vidíme, že jej graf pretína os Ox pri funkcii $y = x^2 - 1$ v bodoch $x_1 = 1$ a $x_2 = -1$. Ale pri funkcii $y = 3x^2 - 1$ sa jej graf zúži, čo vidíme na Obr.1.14, a pretína os Ox v bodoch $x_1 = 0,6$ a $x_2 = -0,6$.



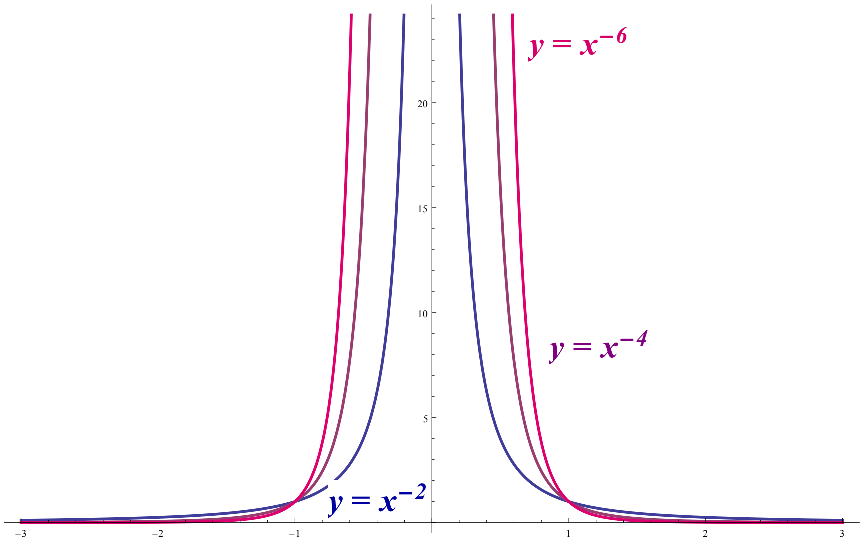
Obr. 1.14: Grafy funkcií $y = 3x^2 - 1$ a $y = 5x^4 - 3$.

(c) Ak n **je nepárne záporné celé číslo**, ako napríklad pri funkciách $y = x^{-3}$, $y = x^{-5}$, $y = x^{-7}$, vtedy $D(f) = H(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Funkcie sú klesajúce na intervale $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$, nie sú ohraničené a sú nepárne. Nemajú žiadne extrémy.



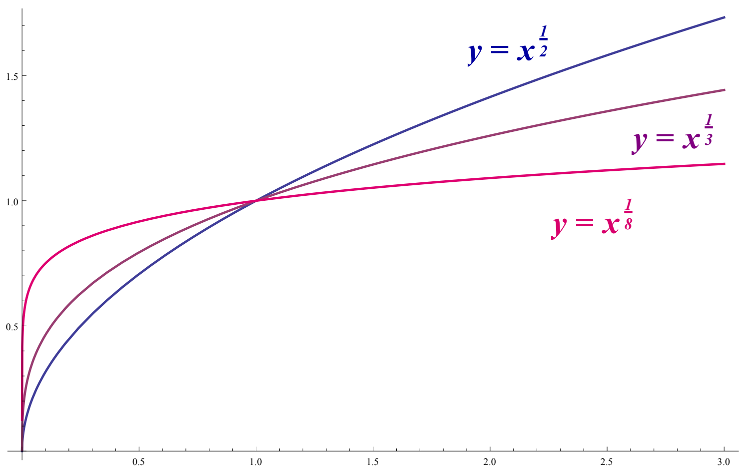
Obr. 1.15: $y = x^n$, n nepárne záporné celé číslo.

(d) Ak n **je párne záporné celé číslo**, napríklad pri funkciách $y = x^{-2}$, $y = x^{-4}$, $y = x^{-6}$, vtedy $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $H(f) = (0, \infty)$. Funkcie sú rastúce na intervale $(-\infty, 0)$ a klesajúce na intervale $(0, \infty)$, sú zdola ohraničené a sú párne. Nemajú žiadne extrémy.



Obr. 1.16: $y = x^n$, n párne záporné celé číslo.

(e) Ak $y = x^{1/n}$ pre nejaké prirodzené číslo n, napríklad pre funkcie $y = x^{1/2}$, $y = x^{1/3}$, $y = x^{1/5}$, vtedy $D(f) = H(f) = \langle 0, \infty)$. Funkcie sú rastúce na intervale $\langle 0, \infty)$, zdola ohraničené, minimum majú v bode $x = 0$, maximum nemajú.



Obr. 1.17: $y = x^{1/n}$, n prirodzené číslo.

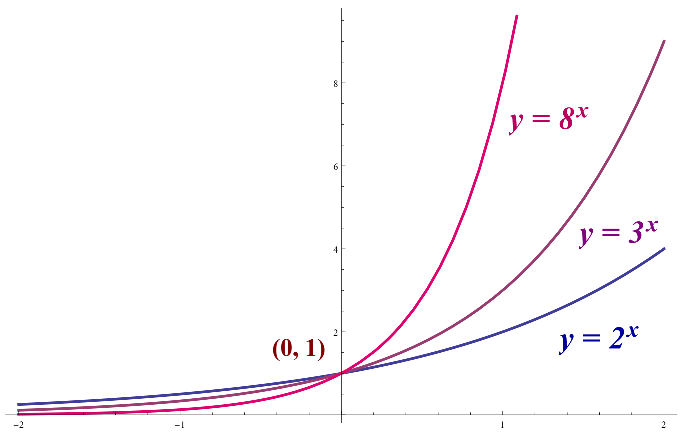
1.6 Exponenciálna funkcia

Exponenciálna funkcia je daná rovnicou $y = a^x$, kde a je konštanta, pričom $a > 0$ a taktiež $a \neq 1$. Grafom funkcie je **exponenciálna krivka**. Pre akékoľvek $a > 0$, $a \neq 1$, prechádza bodom so súradnicami $(0, 1)$. Definičným oborom funkcie je $(-\infty, \infty)$ a oborom hodnôt je interval $(0, \infty)$.

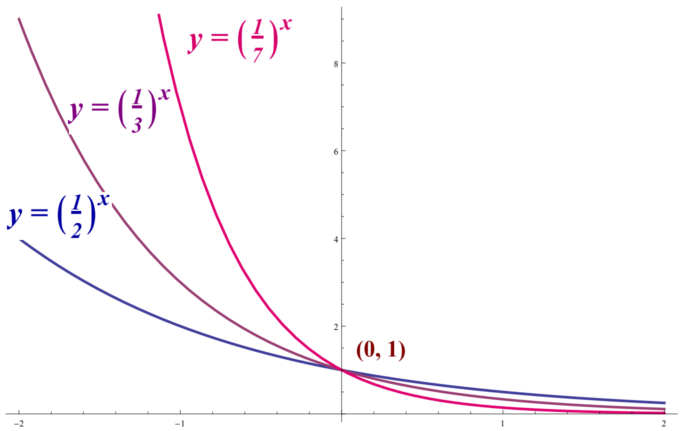
(a) Ak je základ $a > 1$, funkcia je rastúca na $(-\infty, \infty)$.

(b) Ak je základ $0 < a < 1$, funkcia je klesajúca na $(-\infty, \infty)$.

Exponenciálna funkcia je zdola ohraničená a nemá žiadne extrémy.

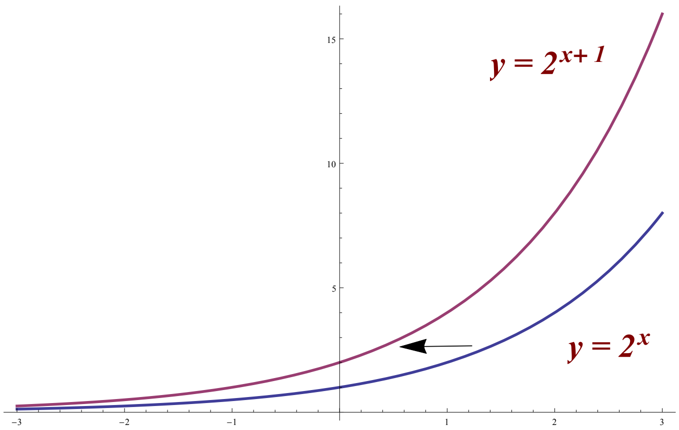


Obr. 1.18: $y = a^x$, $a > 1$.



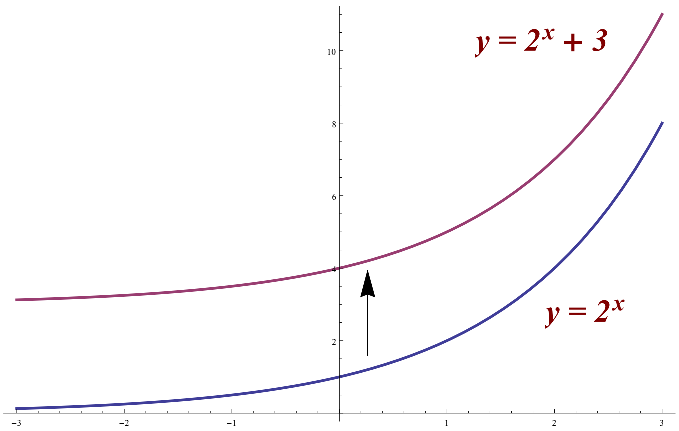
Obr. 1.19: $y = a^x$, $a \in (0, 1)$.

Na Obr.1.20 vidíme, že zmena funkcie $y = 2^x$ na $y = 2^{x+1}$ znamená posun v horizontálnom smere doľava. V prípade funkcie $y = 2^{x-1}$ sa graf funkcie posunie v horizontálnom smere doprava. Zároveň, keďže $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$, môžeme rovnako dobre povedať, že všetky hodnoty na grafe funkcie $y = 2^{x+1}$ sú dvojnásobné oproti hodnotám na grafe funkcie $y = 2^x$.



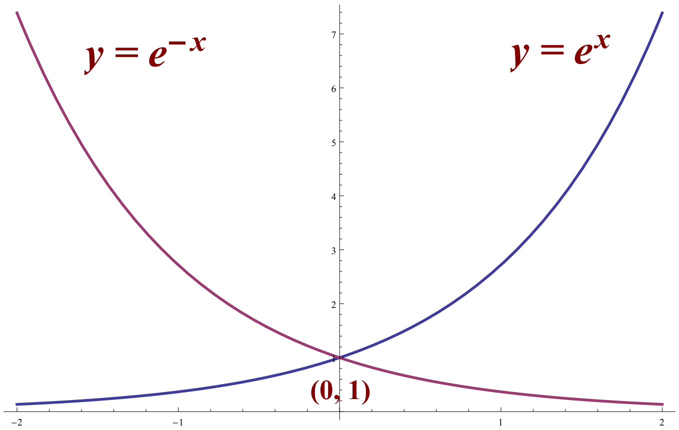
Obr. 1.20: Grafy funkcií $y = 2^x$ a $y = 2^{x+1}$.

Obr.1.21 znázorňuje zmenu funkcie $y = 2^x$ na $y = 2^x + 3$. V tomto prípade sa posunie graf funkcie vo vertikálnom smere do bodu 3 na osi Oy. Keby sme mali funkciu v tvare $y = 2^x - 3$, graf funkcie by sa posunul vo vertikálnom smere o 3 jednotky smerom nadol.

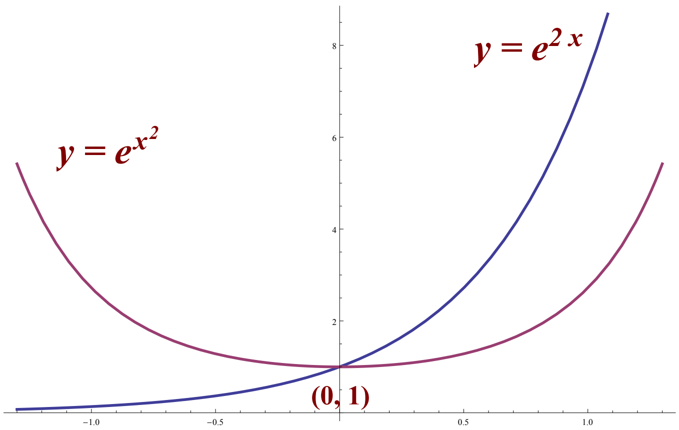


Obr. 1.21: Grafy funkcií $y = 2^x$ a $y = 2^x + 3$.

Prirodzená exponenciálna funkcia má tvar $y = e^x$, kde e je základ prirodzeného logaritmu.



Obr. 1.22: Grafy funkcií $y = e^x$ a $y = e^{-x}$.



Obr. 1.23: Grafy funkcií $y = e^{2x}$ a $y = e^{x^2}$.

1.7 Logaritmická funkcia

Logaritmická funkcia je funkcia daná vzťahom $y = \log_a(x)$, kde a je základ logaritmu a nadobúda hodnoty v intervale $(0, 1) \cup (1, \infty)$. Grafom funkcie je **logaritmická krivka** a prechádza bodom $(1, 0)$. Definičným oborom funkcie je interval $(0, \infty)$ a oborom hodnôt $(-\infty, \infty)$.

(a) Ak základ logaritmu $a > 1$, funkcia je na $(0, \infty)$ rastúca.

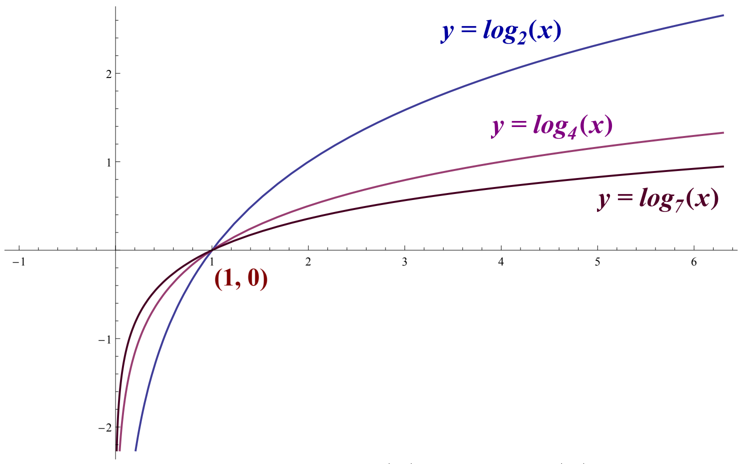
(b) Ak základ logaritmu $0 < a < 1$, funkcia je na $(0, \infty)$ klesajúca.

Funkcia $y = \log_a(x)$ nie je ohraničená, nemá maximum ani minimum.

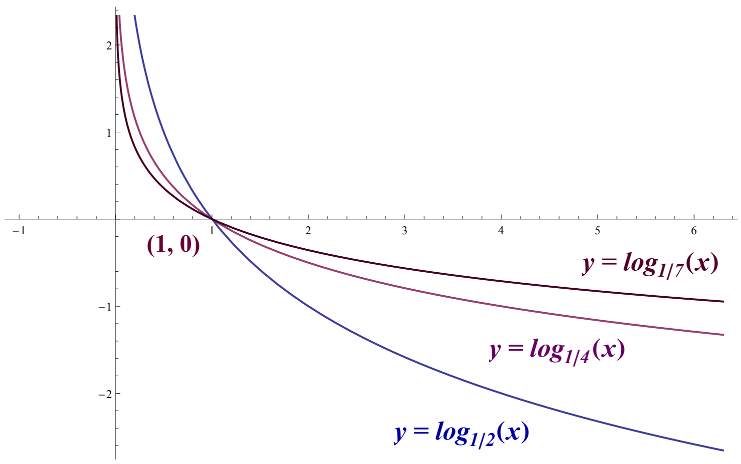
V prípade, ak základ logaritmickej funkcie tvorí Eulerovo číslo e, teda $a = e$, hovoríme o prirodzenej logaritmickej funkcii $\log_e(x) = \ln(x)$.

Logaritmická funkcia $y = \log_a(x)$ je inverznou funkciou k exponenciálnej funkcii $y = a^x$. Špeciálne, prirodzená logaritmická funckia $y = \ln(x)$ je inverzná k prirodzenej exponenciálnej funkcii $y = e^x$.

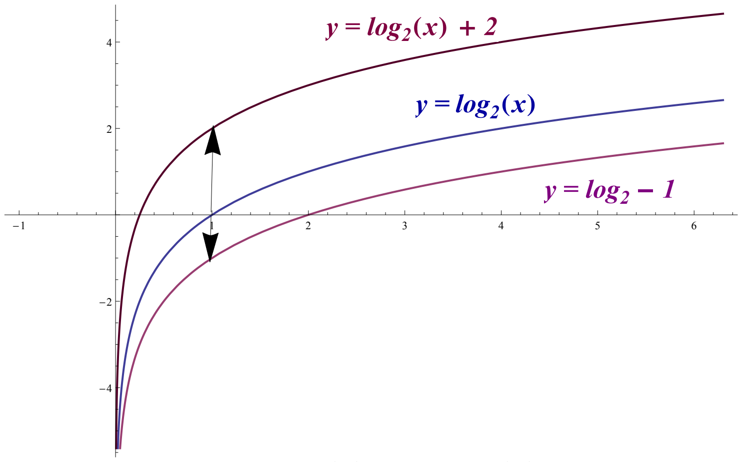
Príklady grafov niektorých logaritmických funkcii sú uvedené na Obr.1.24, 1.25, 1.26, 1.27, 1.28.



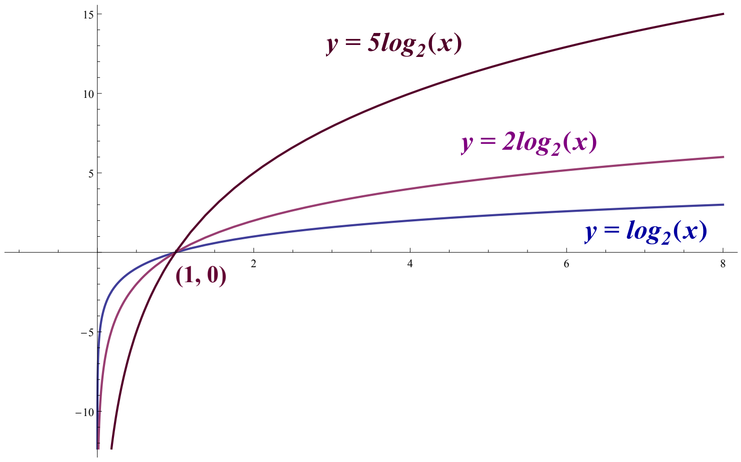
Obr. 1.24: Grafy funkcií $y = \log_2(x)$, $y = \log_4(x)$ a $y = \log_7(x)$.



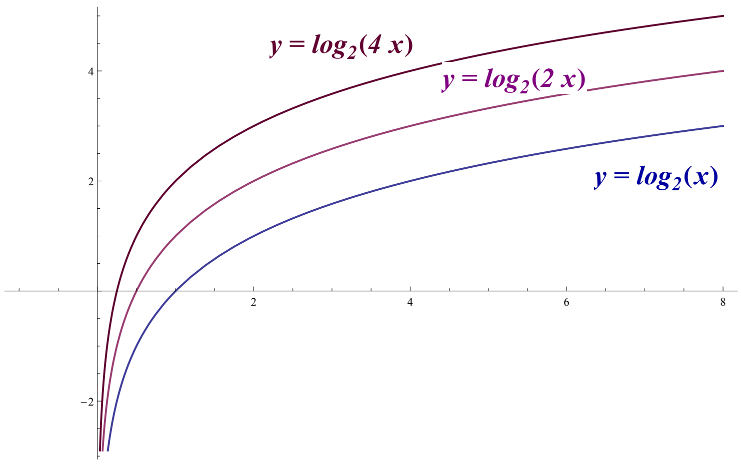
Obr. 1.25: Grafy funkcií $y = \log_{1/2}(x)$, $y = \log_{1/4}(x)$ a $y = \log_{1/7}(x)$.



Obr. 1.26: Grafy funkcií $y = \log_2(x)$, $y = \log_2(x) + 2$ a $y = \log_2(x) - 1$.



Obr. 1.27: Grafy funkcií $y = 5\log_2(x)$, $y = 2\log_2(x)$ a $y = \log_2(x)$.



Obr. 1.28: Grafy funkcií $y = \log_2(x)$, $y = \log_2(2x)$ a $y = \log_2(4x)$.

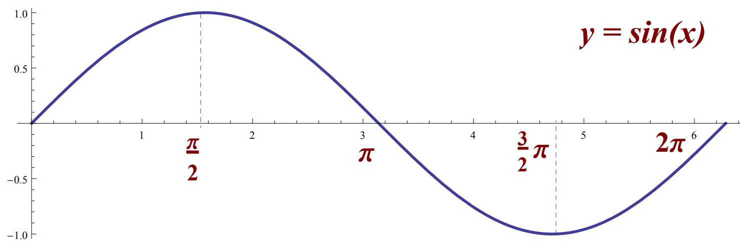
1.8 Goniometrické funkcie

1.8.1 $y = \sin(x)$

Jedna perióda grafu funkcie $y = \sin(x)$ je znázornená na Obr.1.29. Jej definičný obor je $(-\infty, \infty)$ a obor hodnôt je uzavretý interval $\langle -1, 1\rangle$. Funkcia je **periodická** s periódou 2π. Z grafu funkcie vidíme, že funkcia je **rastúca** na každom intervale tvaru $\langle -\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\rangle$ a **klesajúca** na každom intervale tvaru $\langle \frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3}{2}\pi+2k\pi\rangle$, kde k je ľubovoľné celé číslo.

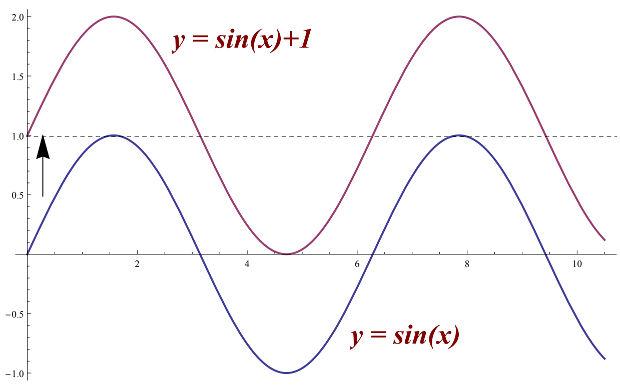
Funkcia $y = \sin(x)$ je **nepárna**, čiže $\sin(-x) = -\sin(x)$, pre každé x. Je **zhora ohraničená** hodnotou 1 a **zdola ohraničená** hodnotou -1. **Maximum** nadobúda v bodoch $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ a **minimum** v bodoch $\frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, kde k je ľubovoľné celé číslo.

Inverznou funkciou ku goniometrickej funkcii $y = \sin(x)$ na intervale $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$ je cyklometrická funkcia $y = \arcsin(x)$.



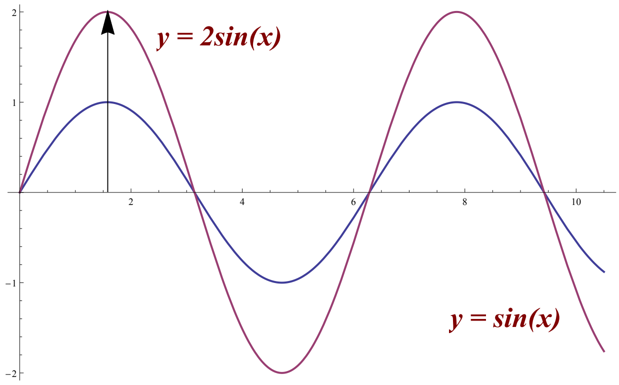
Obr. 1.29: Graf funkcie $y = \sin(x)$.

Na Obr.1.30 vidíme, že ak k funkcii pripočítame alebo od nej odčítame akúkoľvek konštantu, teda $y = \sin(x)+c$, graf funkcie sa nám posunie z počiatku súradnicovej sústavy v kladnom alebo zápornom smere osi Oy. Zmení sa obor hodnôt našej funkcie, ale perióda zostáva rovnaká.



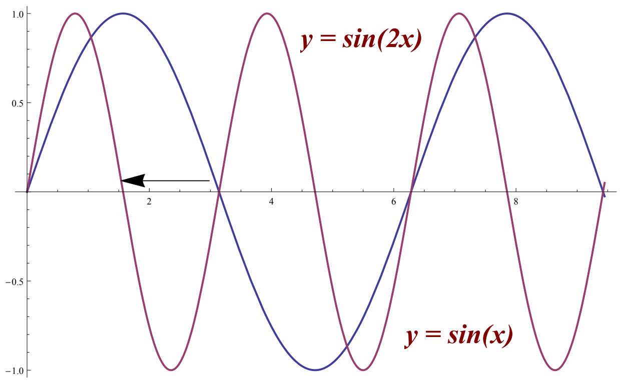
Obr. 1.30: Grafy funkcií $y = \sin(x)$ a $y = \sin(x) + 1$.

Ak zväčšíme funkciu o c-násobok, teda $y = c{\cdot}\sin(x)$, kde $c > 0$, graf funkcie sa "natiahne" v smere osi Oy o c-násobok. Zmení sa obor hodnôt funkcie, ale perióda ostáva rovnaká. Tento posun je znázornený na Obr.1.31.

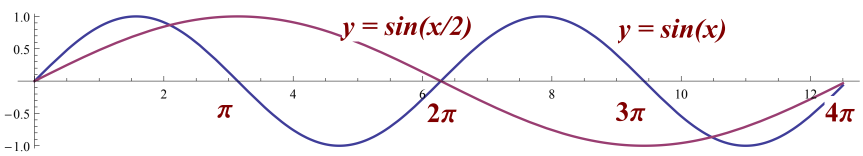


Obr. 1.31: Grafy funkcií $y = \sin(x)$ a $y = 2\sin(x)$.

Pre funkciu v tvare $y = \sin(cx)$, kde $c > 0$, sa zmení perióda funkcie o $(1/c)$ - násobok. Obor hodnôt funkcie zostáva nezmenený. Príklady pre $c = 2$ a $c = 1/2$ sú znázornené na Obr.1.32, 1.33.

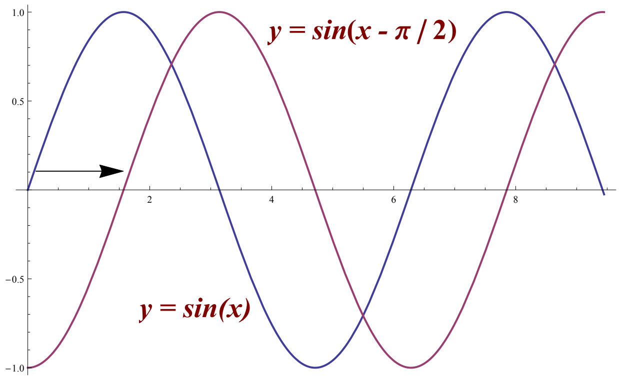


Obr. 1.32: Grafy funkcií $y = \sin(x)$ a $y = \sin(2x)$.



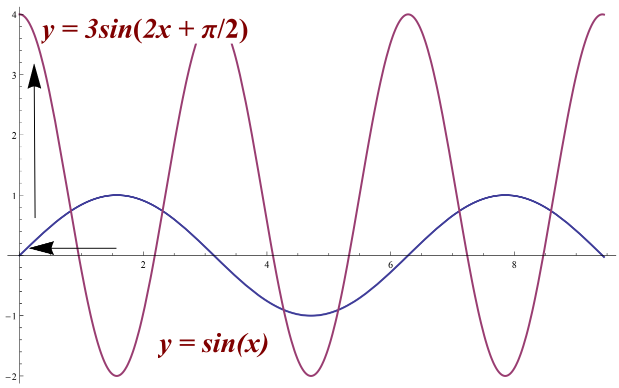
Obr. 1.33: Grafy funkcií $y = \sin(x)$ a $y = \sin(x/2)$.

Na Obr.1.34 máme znázornený graf funkcie v tvare $y = \sin(x + c)$. Vidíme, že graf našej funkcie sa posúva v smere osi Ox o hodnotu c doľava, pričom perióda ani obor hodnôt funkcie sa nemení.



Obr. 1.34: Grafy funkcií $y = \sin(x)$ a $y = \sin(x - \pi/2)$.

Na Obr.1.35 máme znázornený graf funkcie v tvare $y = 3\sin(2x + \pi/2)$ a sú na ňom zachytené všetky doteraz popísané posuny základnej funkcie $y = \sin(x)$.



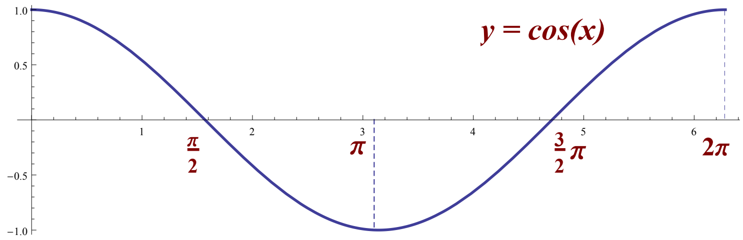
Obr. 1.35: Grafy funkcií $y = \sin(x)$ a $y = 3\sin(2x + \pi/2)$.

1.8.2 $y = \cos(x)$

Funkcia $y = \cos(x)$ má graf rovnaký ako $y = \sin(x)$, len je posunutý o $\pi/2$ doľava, čo znázorňuje Obr.1.36. Definičný obor funkcie je $(-\infty, \infty)$ a obor hodnôt je uzavretý interval $\langle -1, 1\rangle$. Funkcia je periodická s periódou 2π, je rastúca na každom intervale tvaru $\langle \pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\rangle$ a klesajúca na každom intervale tvaru $\langle 2k\pi, \pi + 2k\pi\rangle$, kde k je ľubovoľné celé číslo.

Funkcia $y = \cos(x)$ je párna funkcia, to znamená, že $\cos(-x) = \cos(x)$. Taktiež je zhora ohraničená hodnotou 1 a zdola ohraničená hodnotou -1. Maximum nadobúda v bodoch $x = 2k\pi$ a minimum dosahuje v bodoch $x = \pi + 2k\pi$, kde k je ľubovoľné celé číslo.

Inverznou funkciou ku goniometrickej funkcii $y = \cos(x)$ pre $x \in \langle 0, \pi\rangle$ je cyklometrická funkcia $y = \arccos(x)$.



Obr. 1.36: Graf funkcie $y = \cos(x)$.

Pri posune grafu funkcie $y = \cos(x)$ postupujeme rovnako, ako pri posúvaní grafu funkcie $y = \sin(x)$, preto nebudeme tieto skutočnosti opäť popisovať.

1.8.3 $y = \mathrm{tg}(x)$

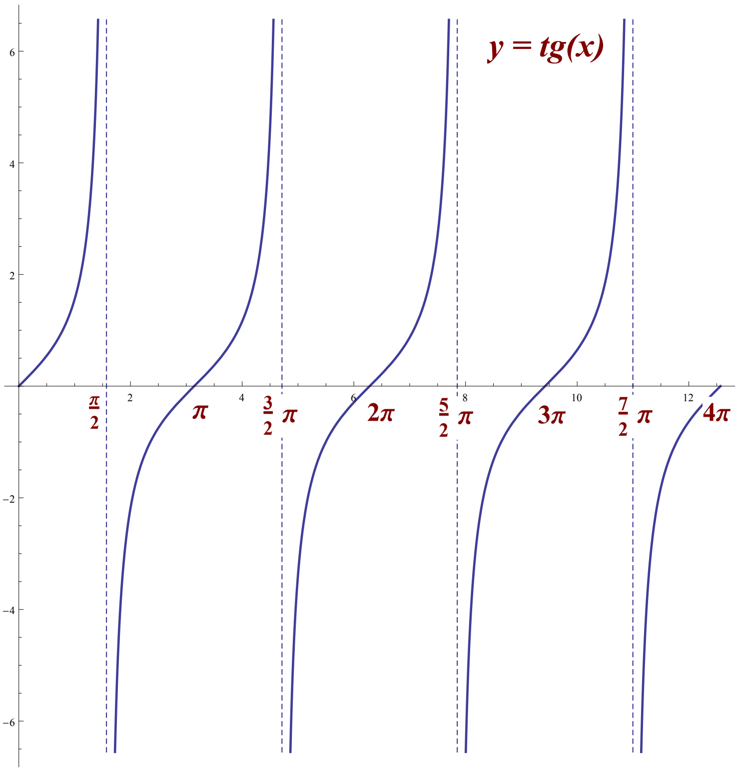
Tvar funkcie $y = \mathrm{tg}(x)$ je znázornený na Obr.1.37. Definičný obor tejto funkcie je zjednotenie intervalov tvaru $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, kde k je ľubovoľné celé číslo. Obor hodnôt funkcie je interval $(-\infty, \infty)$. Funkcia je **periodická** s periódou π a je **rastúca** na každom z intervalov $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$.

Funkcia $y = \mathrm{tg}(x)$ je nepárna funkcia, čiže $\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}(x)$, nie je ohraničená, nemá maximum ani minimum. Inverznou funkciou ku goniometrickej funkcii $y = \mathrm{tg}(x)$ pre $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ je cyklometrická funkcia $y = \mathrm{arctg}(x)$.

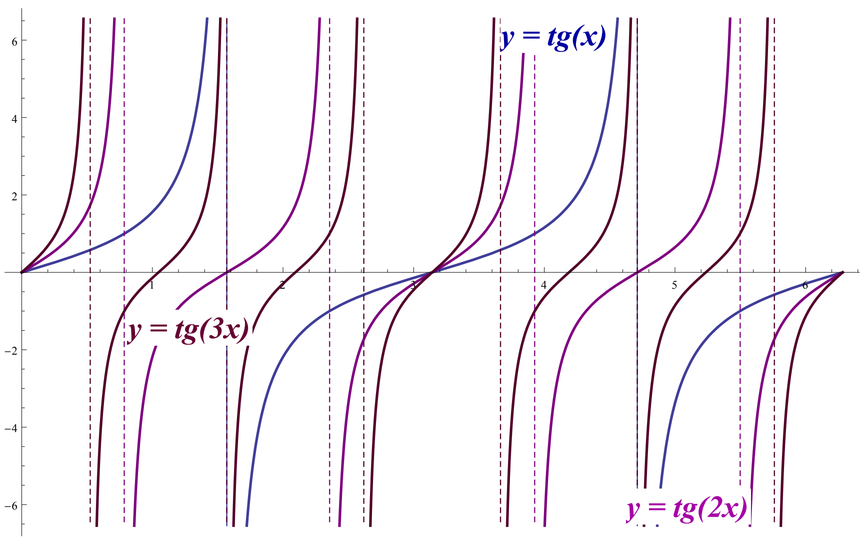
Na Obr1.38 vidíme, ako sa postupne mení graf funkcie $y = \mathrm{tg}(x)$ pri násobkoch $y = \mathrm{tg}(n \cdot x)$, kde n je prirodzené číslo. Čím väčšie je n, tým je graf funkcie užší, čiže aj perióda funkcie sa zmenšuje a bude $\frac{\pi}{n}$.

Na Obr.1.39 je znázornená funkcia $y = \mathrm{tg}(x/n)$. So zväčšujúcim sa n sa graf našej funkcie stále viac "rozširuje" a tým sa zväčšuje aj jej perióda a bude $n\pi$.

Na Obr.1.40 je znázornená funkcia $y = \mathrm{tg}(x)$ v tvare $y = n \cdot \mathrm{tg}(x)$. Vidíme, že so zväčšujúcim sa n sa graf funkcie stále viac "rozširuje", ale jej perióda sa nemení.

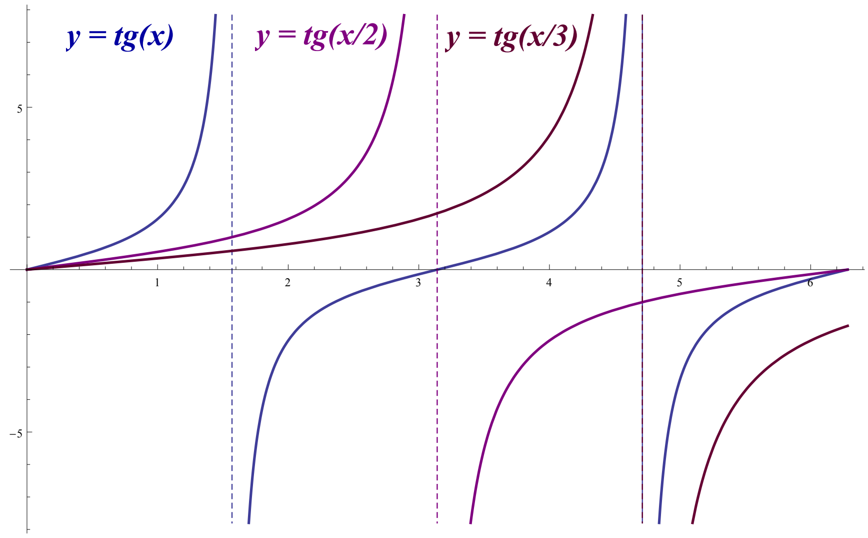


Obr. 1.37: Graf funkcie $y = \mathrm{tg}(x)$.

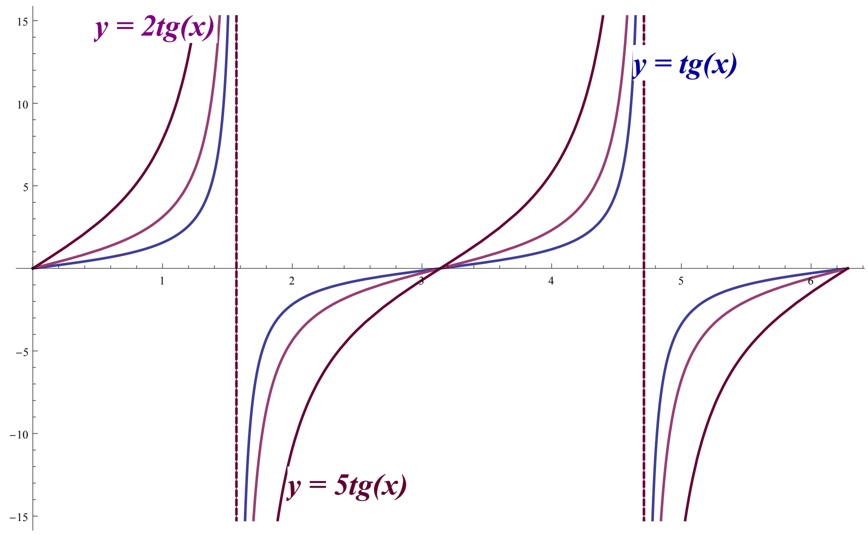


Obr. 1.38: Grafy funkcií $y = \mathrm{tg}(x)$, $y = \mathrm{tg}(2x)$ a $y = \mathrm{tg}(3x)$.

Obr.1.41 nám znázorňuje funkciu $y = \mathrm{tg}(x) + c$, kde sa graf funkcie $y = \mathrm{tg}(x)$ posúva po kladnej alebo zápornej časti osi Oy, pričom perióda a tvar funkcie ostávajú nezmenené.

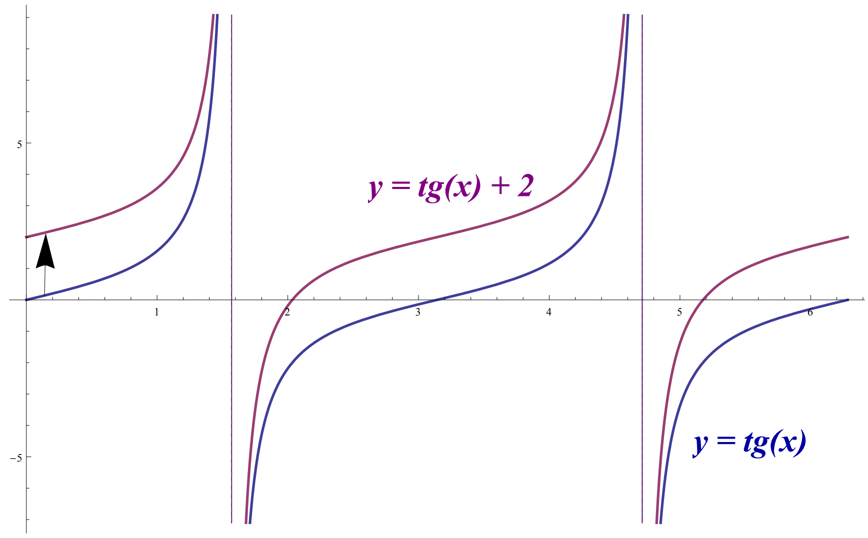


Obr. 1.39: Grafy funkcií $y = \mathrm{tg}(x)$, $y = \mathrm{tg}(x/2)$ a $y = \mathrm{tg}(x/3)$.

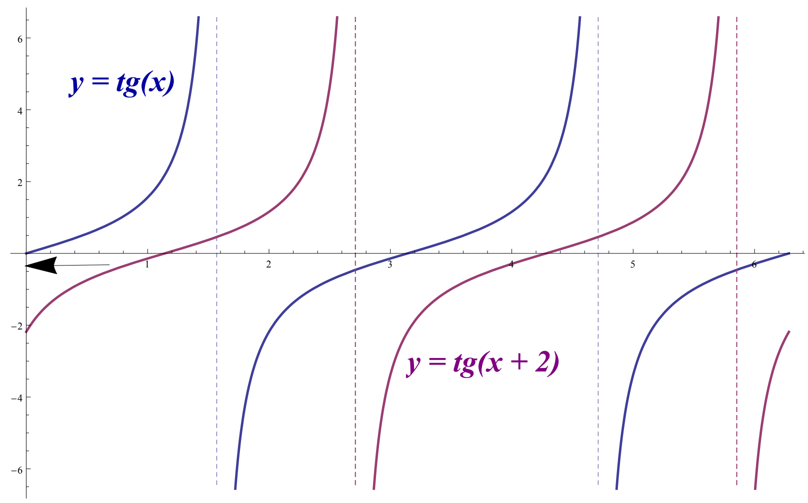


Obr. 1.40: Grafy funkcií $y = \mathrm{tg}(x)$, $y = 2\mathrm{tg}(x)$ a $y = 5\mathrm{tg}(x)$.

Na Obr.1.42 vidíme posun funkcie $y = \mathrm{tg}(x)$ v tvare $y = \mathrm{tg}(x + c)$. Funkcia sa posúva po osi Ox bez zmeny tvaru a periódy.



Obr. 1.41: Grafy funkcií $y = \mathrm{tg}(x)$ a $y = \mathrm{tg}(x) + 2$.

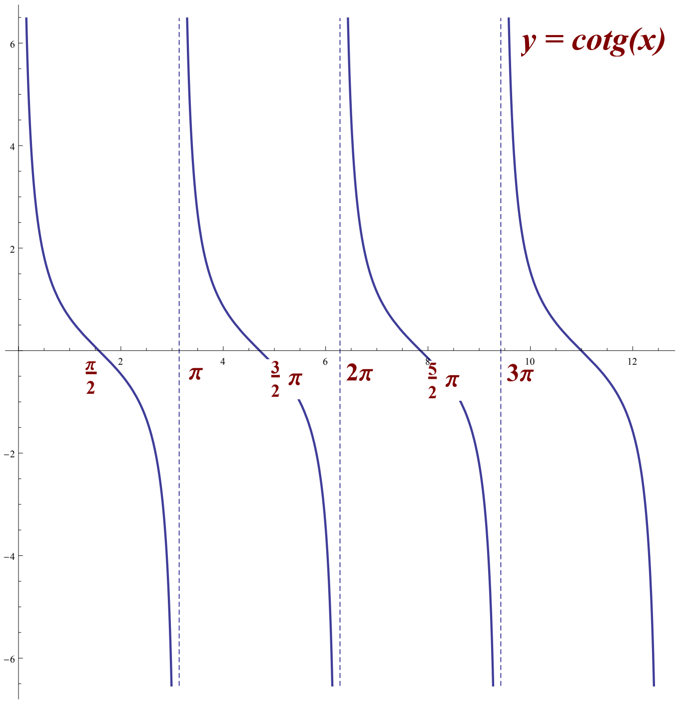


Obr. 1.42: Grafy funkcií $y = \mathrm{tg}(x)$ a $y = \mathrm{tg}(x + 2)$.

1.8.4 $y = \mathrm{cotg}(x)$

Funkcia $y = \mathrm{cotg}(x)$ je znázornená na Obr.1.43. Definičným oborom je množina všetkých $x \neq k\pi$ a obor hodnôt je množina $(-\infty, \infty)$. Funkcia je **klesajúca** na každom intervale tvaru $(k\pi, \pi + k\pi)$. Funkcia $y = \mathrm{cotg}(x)$ je **nepárna** funkcia, teda $\mathrm{cotg}(-x) = -\mathrm{cotg}(x)$, pre každé $x \in D(f)$. Nie je ohraničená zdola ani zhora a taktiež nemá žiadne extrémy.

Inverznou funkciou ku goniometrickej funkcii $y = \mathrm{cotg}(x)$ pre $x \in (0, \pi)$ je cyklometrická funkcia $y = \mathrm{arccotg}(x)$. Posun grafu funkcie $y = \mathrm{cotg}(x)$ tu nebudeme študovať, keďže sa správa podobne ako funkcia $y = \mathrm{tg}(x)$.

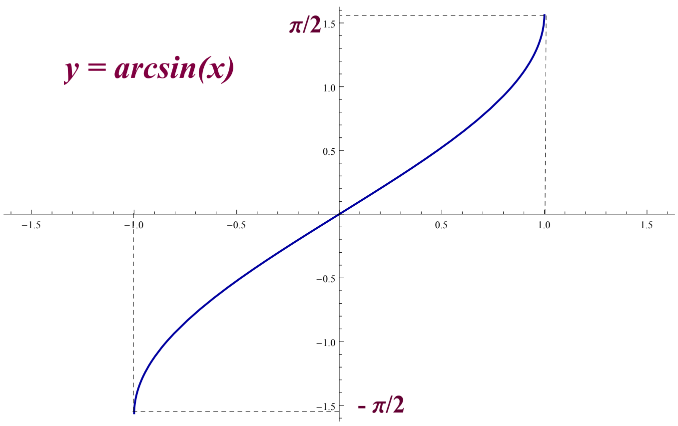


Obr. 1.43: Graf funkcie $y = \mathrm{cotg}(x)$.

1.9 Cyklometrické funkcie

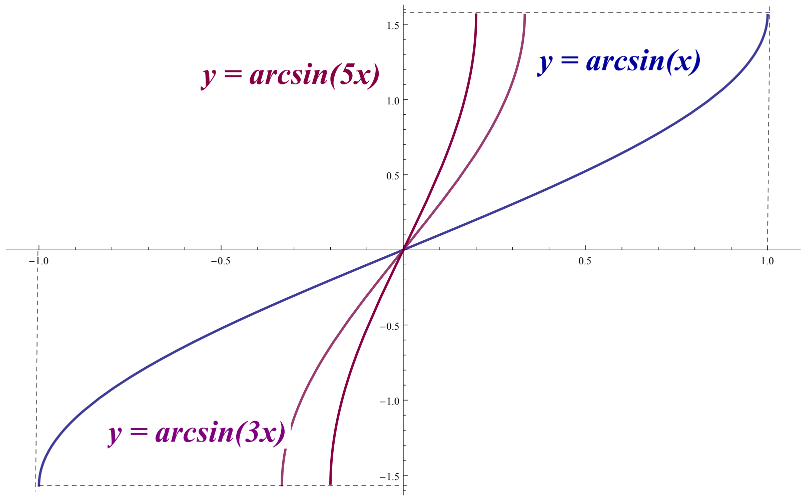
1.9.1 $y = \arcsin(x)$

Funkcia $y = \arcsin(x)$ je inverzná k funkcii $y = \sin(x)$ na intervale $x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. To znamená, že definičný obor funkcie $y = \arcsin(x)$ bude obor hodnôt funkcie $y = \sin(x)$. Definičný obor funkcie $y = \arcsin(x)$ je teda $\langle -1, 1 \rangle$ a obor hodnôt je interval $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$. Graf funkcie $y = \arcsin(x)$ je znázornený na Obr.1.44.



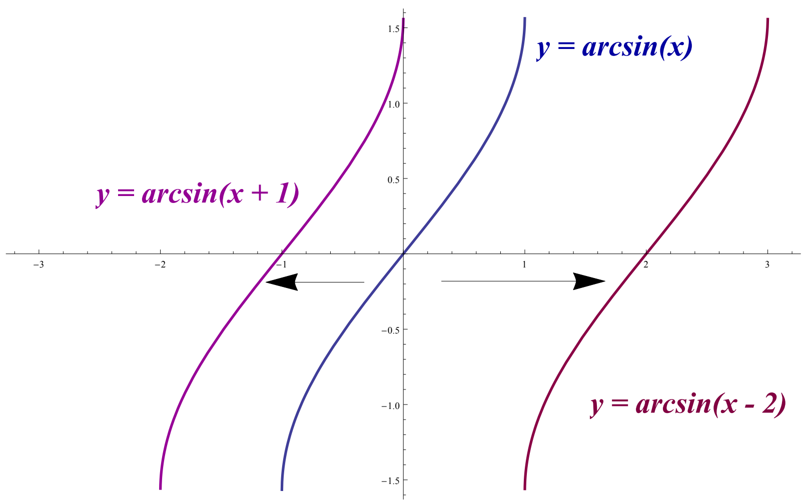
Obr. 1.44: Graf funkcie $y = \arcsin(x)$.

Na Obr.1.45 je znázornený graf funkcie $y = \arcsin(cx)$, kde $c > 0$ je konštanta. Keďže argument cx musí byť v intervale $\langle -1, 1\rangle$, máme $|cx| \leq 1$, a teda pre $c > 0$ je $|x| \leq \frac{1}{c}$. To znamená, že definičný obor funkcie $\arcsin(cx)$ je interval $\langle -\frac{1}{c}, \frac{1}{c}\rangle$. Vidíme, že so zväčšujúcim sa c, sa graf funkcie $y = \arcsin(cx)$ "zúži" $(1/c)$-krát, ak $c > 1$, a "rozšíri" $(1/c)$-krát, ak $0 < c < 1$. Teda zväčšujúce sa c mení aj tvar našej funkcie.



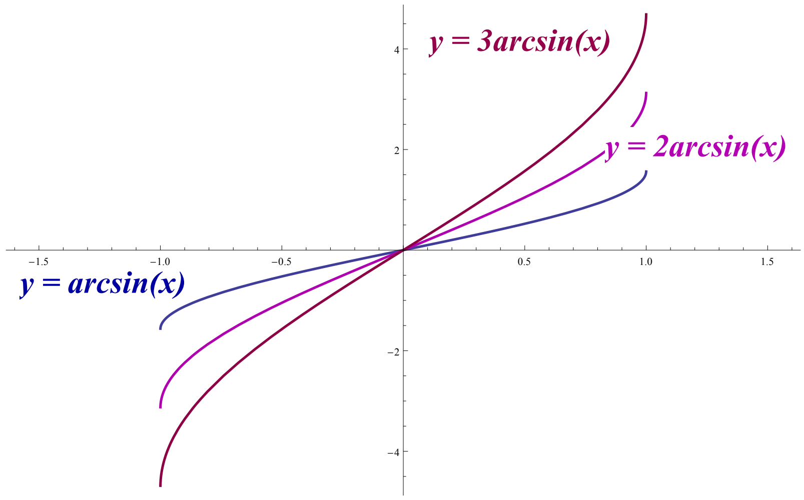
Obr. 1.45: Grafy funkcií $y = \arcsin(x)$, $y = \arcsin(3x)$ a $y = \arcsin(5x)$.

Na Obr.1.46 vidíme posun funkcie v tvare $y = \arcsin(x + c)$ po osi Ox. Tvar našej funkcie sa pritom nemení. Pre definičný obor dostávame podmienku $|x + c| \leq 1$, čiže $x \in \langle -1 - c, 1 - c\rangle$.



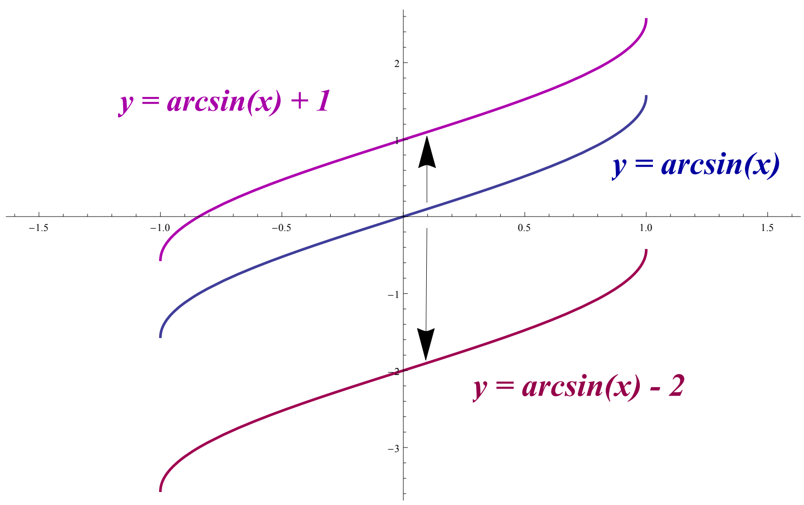
Obr. 1.46: Grafy funkcií $y = \arcsin(x)$, $y = \arcsin(x + 1)$ a $y = \arcsin(x - 2)$.

Obr.1.47 znázorňuje graf funkcie v tvare $y = c \cdot \arcsin(x)$. So zväčšujúcim sa c sa mení aj obor hodnôt funkcie, t. j. interval $\langle -c, c \rangle$.



Obr. 1.47: Grafy funkcií $y = \arcsin(x)$, $y = 2\arcsin(x)$ a $y = 3\arcsin(x)$.

Na Obr.1.48 je vidieť posun grafu funkcie v tvare $y = \arcsin(x) + c$, kde so zmenou konštanty c sa graf našej funkcie posúva pozdĺž osi Oy. Tvar funkcie sa pritom nemení.

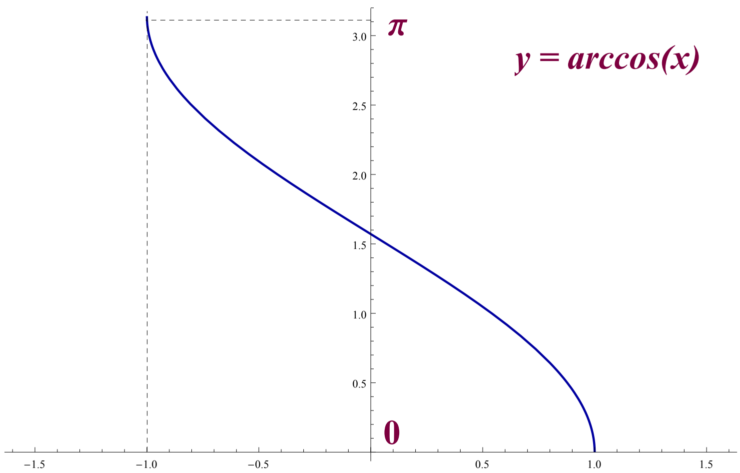


Obr. 1.48: Grafy funkcií $y = \arcsin(x)$, $y = \arcsin(x) + 1$ a $y = \arcsin(x) - 2$.

1.9.2 $y = \arccos(x)$

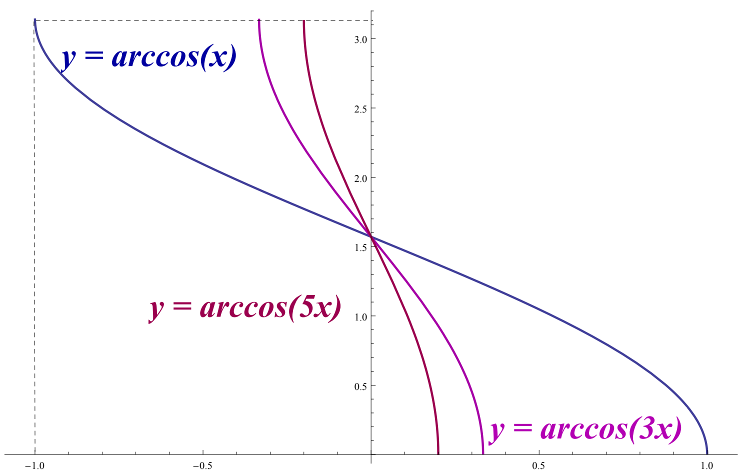
Funkcia $y = \arccos(x)$ je inverzná ku goniometrickej funkcii $y = \cos(x)$ na intervale $\langle 0, \pi \rangle$, teda obor hodnôt funkcie $y = \cos(x)$ bude definičným oborom funkcie $y = \arccos(x)$. Definičným oborom našej funkcie je $\langle -1, 1 \rangle$ a obor hodnôt je $\langle 0, \pi \rangle$.

Graf funkcie $y = \arccos(x)$ je znázornený na Obr.1.49.



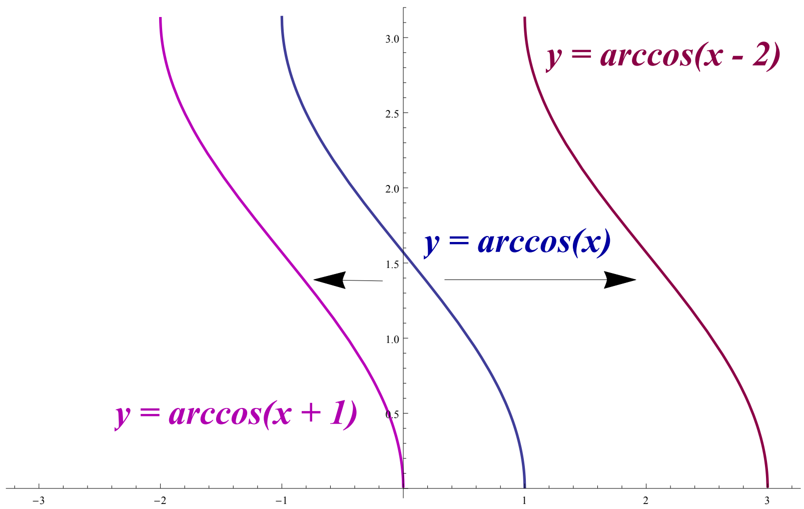
Obr. 1.49: Graf funkcie $y = \arccos(x)$.

Na Obr.1.50 je znázornený graf funkcie $y = \arccos(cx)$, kde $c \in \mathcal{R}$. Zmenou konštanty c sa mení aj naša funkcia rovnako ako to bolo v prípade $y = \arcsin(cx)$, čiže funkcia sa zníži o $1/c$.



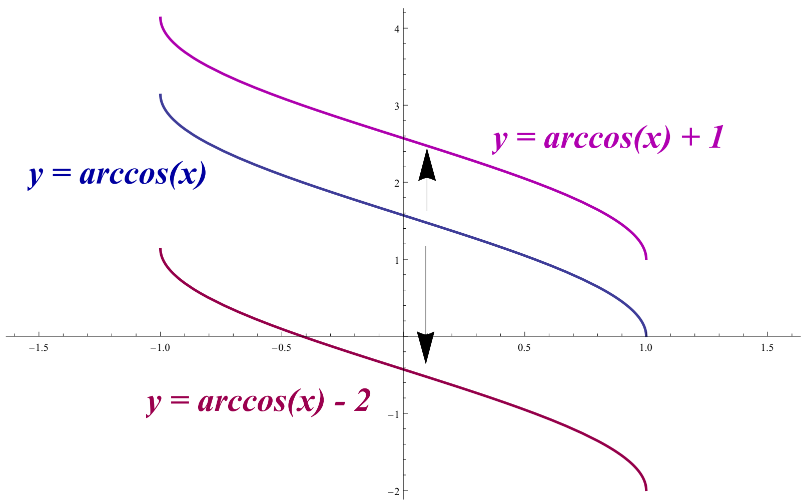
Obr. 1.50: Grafy funkcií $y = \arccos(x)$, $y = \arccos(3x)$ a $y = \arccos(5x)$.

Obr.1.51 znázorňuje graf funkcie v tvare $y = \arccos(x + c)$. Vidíme, že graf sa posúva pozdĺž osi Ox v kladom aj zápornom smere, pričom jeho tvar ostáva zachovaný.



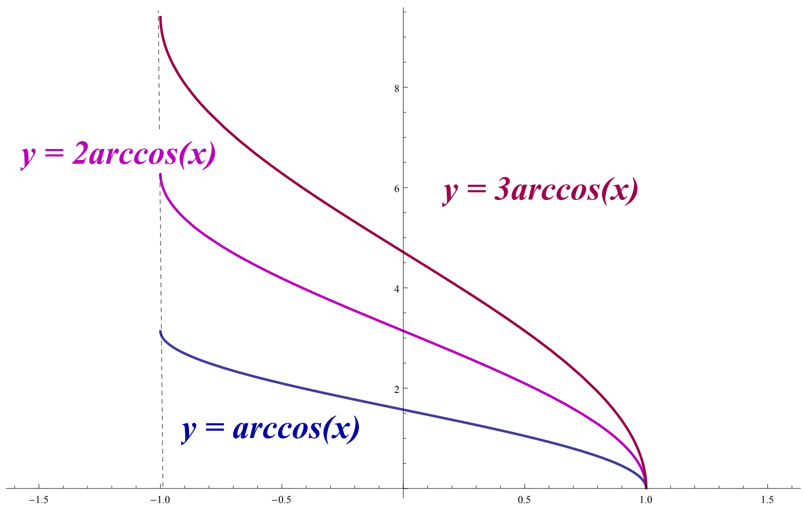
Obr. 1.51: Grafy funkcií $y = \arccos(x)$, $y = \arccos(x + 1)$ a $y = \arccos(x - 2)$.

Na Obr.1.52 vidíme posun grafu funkcie v tvare $y = \arccos(x) + c$. Graf funkcie sa posúva po osi Oy v kladnom aj zápornom smere bezo zmeny tvaru.



Obr. 1.52: Grafy funkcií $y = \arccos(x)$, $y = \arccos(x) + 1$ a $y = \arccos(x) - 2$.

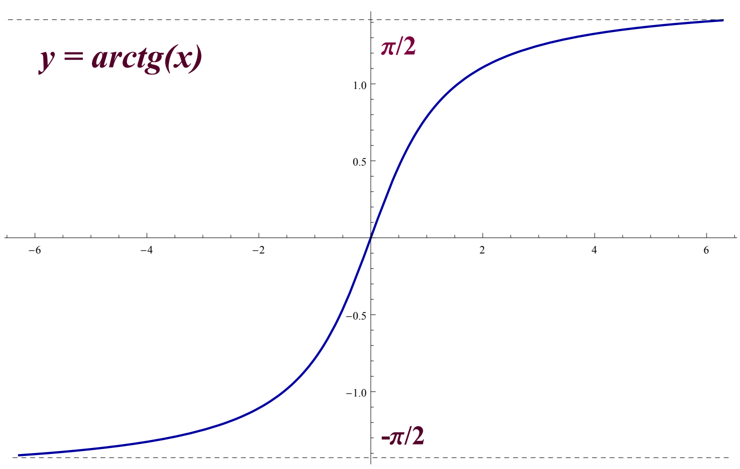
Obr.1.53 znázorňuje funkciu v tvare $y = c \cdot \arccos(x)$. S narastajúcim c sa rozširuje aj obor hodnôt funkcie podobne ako v prípade funkcie $\arcsin(x)$.



Obr. 1.53: Grafy funkcií $y = \arccos(x)$, $y = 2\arccos(x)$ a $y = 3\arccos(x)$.

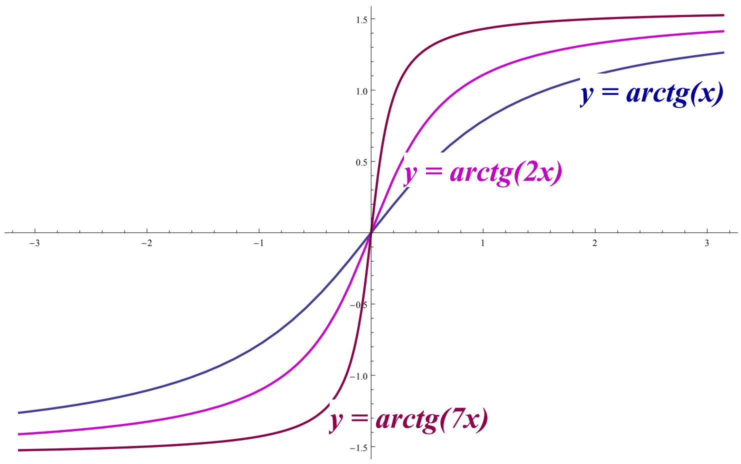
1.9.3 $y = \mathrm{arctg}(x)$

Funkcia $y = \mathrm{arctg}(x)$ je inverzná ku goniometrickej funkcii $y = \mathrm{tg}(x)$ na intervale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Definičným oborom našej funkcie $y = \mathrm{arctg}(x)$ je interval $(-\infty, \infty)$ a obor hodnôt je $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Graf funkcie $y = \mathrm{arctg}(x)$ je zobrazený na Obr.1.54.



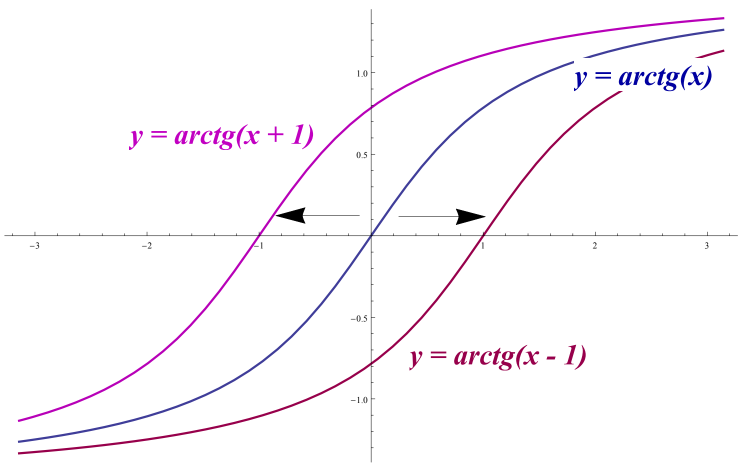
Obr. 1.54: Graf funkcie $y = \mathrm{arctg}(x)$.

Obr.1.55 znázorňuje graf funkcie v tvare $y = \mathrm{arctg}(cx)$, kde pri zväčšujúcom sa c sa graf "rozširuje", pričom obor hodnôt sa nezmení. Tieto zmeny sú rovnaké ako pri funkcii $y = \mathrm{tg}(x)$.



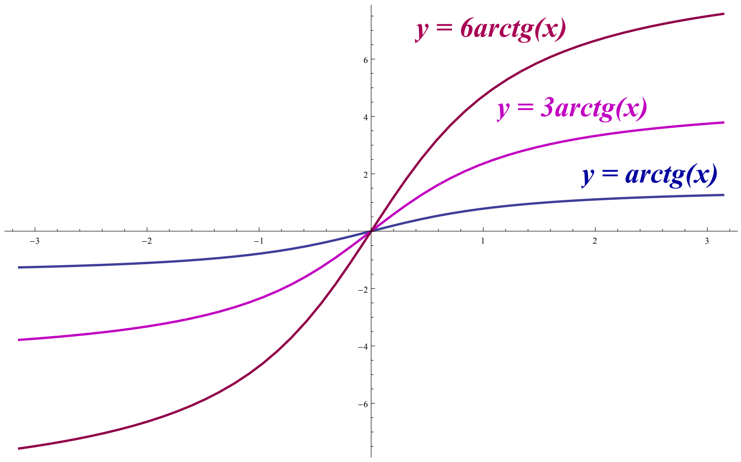
Obr. 1.55: Grafy funkcií $y = \mathrm{arctg}(x)$, $y = \mathrm{arctg}(2x)$ a $y = \mathrm{arctg}(7x)$.

Na Obr.1.56 vidíme posun grafu funkcie v tvare $y = \mathrm{arctg}(x + c)$ po osi Ox v kladnom alebo zápornom smere. Tvar funkcie a obor hodnôt sa nemenia.



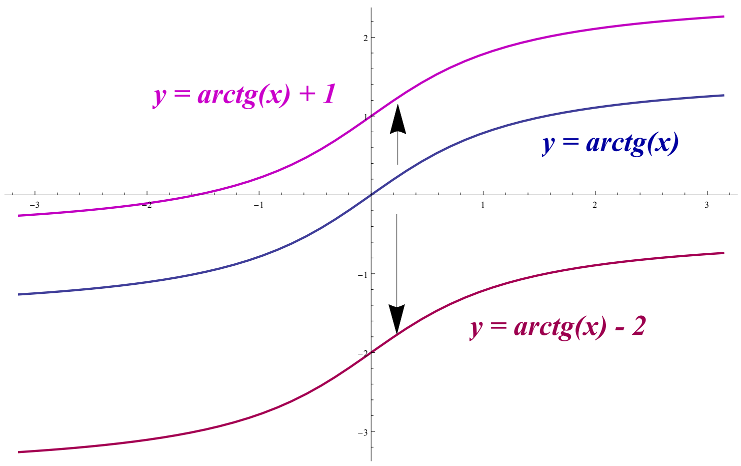
Obr. 1.56: Grafy funkcií $y = \mathrm{arctg}(x)$, $y = \mathrm{arctg}(x + 1)$ a $y = \mathrm{arctg}(x - 1)$.

Na Obr.1.57 je znázornený graf funkcie v tvare $y = c \cdot \mathrm{arctg}(x)$. So zväčšujúcim sa c sa funkcia "rozširuje", čím sa mení jej obor hodnôt.



Obr. 1.57: Grafy funkcií $y = \mathrm{arctg}(x)$, $y = 3\mathrm{arctg}(x)$ a $y = 6\mathrm{arctg}(x)$.

Na Obr.1.58 vidíme posun grafu funkcie v tvare $y = \mathrm{arctg}(x) + c$ po osi Oy v kladnom alebo zápornom smere. Tvar funkcie sa nemení, mení sa len obor hodnôt.

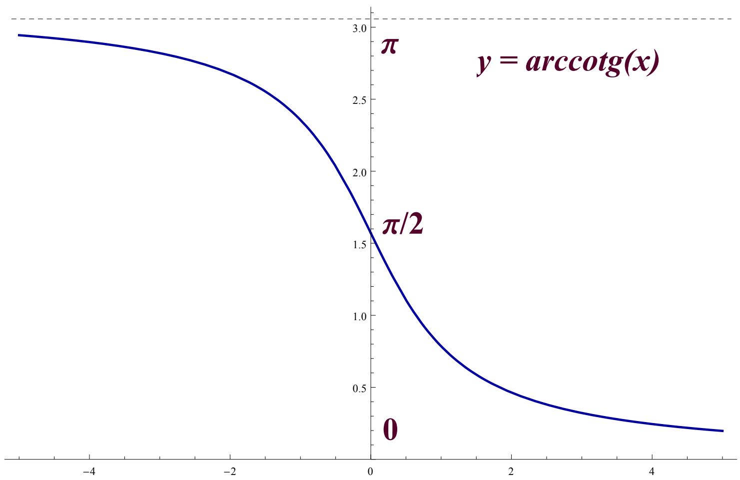


Obr. 1.58: Grafy funkcií $y = \mathrm{arctg}(x)$, $y = \mathrm{arctg}(x) + 1$ a $y = \mathrm{arctg}(x) - 2$.

1.9.4 $y = \mathrm{arccotg}(x)$

Funkcia $y = \mathrm{arccotg}(x)$ je inverznou funkciou ku goniometrickej funkcii $y = \mathrm{cotg}(x)$ pre $x \in (0, \pi)$. Definičným oborom $y = \mathrm{arccotg}(x)$ je interval $(-\infty, \infty)$ a oborom hodnôt je množina $(0, \pi)$, čo môžeme vidieť na Obr.1.59.

Graf funkcie $y = \mathrm{arccotg}(x)$ sa správa pri akejkoľvek c-násobnej zmene podobne, ako funkcia $y = \mathrm{arctg}(x)$, preto detaily nebudeme uvádzať.



Obr. 1.59: Graf funkcie $y = \mathrm{arccotg}(x)$.

1.10 Definičné obory funkcií

Definičný obor funkcie f je množina všetkých reálnych čísel x, pre ktoré je hodnota $f(x)$ definovaná.

Príklad č. 1. Vypočítajme definičný obor funkcie

$$f(x) = \mathrm{arccotg}\sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 3}}\,.$$

Riešenie: Zlomok pod odmocninou $\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+3}$ musí byť nezáporný, čo je práve vtedy, keď menovateľ je kladný a čitateľ nezáporný alebo keď menovateľ je záporný a čitateľ nekladný. Keďže menovateľ je kladný pre každé reálne x (pretože daný kvadratický trojčlen má záporný diskriminant), stačí určiť, kedy je čitateľ nezáporný. Výsledok bude zároveň definičným oborom našej funkcie, pretože oborom definície funkcie $\mathrm{arccotg}(x)$ sú všetky reálne čísla. Máme teda jedinú podmienku

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0,$$

čo je ekvivalentné nerovnosti

$$(x-1)(x-2) \geq 0 \ .$$

Tento súčin je nezáporný práve vtedy, keď $x \in (-\infty, 1\rangle \cup \langle 2, \infty)$.

Záver: Definičný obor funkcie je zjednotenie intervalov $(-\infty, 1\rangle \bigcup \langle 2, \infty)$. □

Príklad č. 2. Vypočítajme definičný obor funkcie

$$f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}} \ .$$

Riešenie: Výraz $x^2 - 5x + 6$ menovateli pod odmocninou musí byť kladný. Na určenie definičného oboru teda stačí, ak zistíme, pre ktoré x platí nerovnosť

$$x^2 - 5x + 6 > 0 \ ,$$

alebo v tvare súčinu

$$(x-3)(x-2) > 0 \ .$$

Tento súčin je kladný práve vtedy, keď $x \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$.

Záver: Definičný obor funkcie je zjednotený interval $(-\infty, 2) \bigcup \ (3, \infty)$. □

Príklad č. 3. Vypočítajme definičný obor funkcie

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2 - x - 12} \ .$$

Riešenie: Uvedený výraz bude definovaný práve vtedy, keď menovateľ bude rôzny od nuly. Pre určenie definičného oboru teda stačí vylúčiť tie body x, pre ktoré $x^2 - x - 12 = 0$.

Kvadratický trojčlen prepíšeme do tvaru súčinu (korene kvadratickej rovnice môžeme vypočítať aj pomocou diskriminantu), čím dostávame nerovnosť

$$(x+3)(x-4) \neq 0 \ ,$$

ktorá je splnená práve vtedy, keď $x+3 \neq 0$ a súčasne $x-4 \neq 0$, čiže keď $x_1 \neq -3$ a taktiež $x_2 \neq 4$.

Záver: Definičný obor funkcie je zjednotenie intervalov $(-\infty, -3) \cup (-3, 4) \cup (4, \infty)$. $\square$

Príklad č. 4. Vypočítajme definičný obor funkcie

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{3x-2}{4}\right) .$$

Riešenie: Vychádzame zo skutočnosti, že definičným oborom funkcie $\arcsin(x)$ je uzavretý interval $\langle -1, 1\rangle$. Preto hodnota v zátvorke musí ležať v tomto intervale, t. j.

$$-1 \leq \frac{3x-2}{4} \leq 1 .$$

Dostávame dve nerovnice:

$$-1 \leq \frac{3x-2}{4}$$

a zároveň

$$\frac{3x-2}{4} \leq 1 .$$

Z prvej nerovnice máme nerovnosť

$$-4 \leq 3x - 2 .$$

Riešením prvej nerovnice je teda interval $\langle -\frac{2}{3}, \infty)$.

Z druhej nerovnice máme

$$4 \geq 3x - 2 .$$

Riešením druhej nerovnice je interval $(-\infty, 2\rangle$.

Záver: Definičný obor funkcie je prienik intervalov $\langle -\frac{2}{3}, \infty) \cap (-\infty, 2\rangle$, teda $\langle -\frac{2}{3}, 2\rangle$. $\square$

Príklad č. 5. Vypočítajme definičný obor funkcie

$$f(x) = \log_3(x+1) + 2 .$$

Riešenie: Jedinou podmienkou na určenie definičného oboru funkcie je, aby výraz pod logaritmom bol kladný, teda

$$x + 1 > 0 .$$

Záver: Definičný obor funkcie je interval $(-1, \infty)$. $\square$

Príklad č. 6. Vypočítajme definičný obor funkcie

$$f(x) = \sqrt{2\sin(3x) - \sqrt{2}}\ .$$

Riešenie: Podmienka na určenie definičného oboru funkcie je, aby výraz $2\sin(3x) - \sqrt{2}$ pod odmocninou bol nezáporný.

$$2\sin(3x) - \sqrt{2} \geq 0\ .$$

Po jednoduchých úpravách dostávame

$$\sin(3x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\ .$$

Pre prehľadnosť použijeme substitúciu $z = 3x$. Z grafu funkcie "sínus" vyčítame, že nerovnosť

$$\sin(z) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

je splnená práve vtedy, keď

$$z \in \langle \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \rangle\ ,$$

kde k je ľubovoľné celé číslo.

Keďže $z = 3x$, máme

$$3x \in \langle \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \rangle\ ,$$

a teda

$$x \in \langle \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi,\ \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}k\pi \rangle\ .$$

Záver: Definičným oborom funkcie je zjednotenie intervalov tvaru $\langle \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi,\ \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}k\pi \rangle$, kde k je ľubovoľné celé číslo. Keďže $f(x)$ má evidentne minimálnu hodnotu 0 a maximálnu $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ (vtedy, keď $\sin(3x) = 1$), obor hodnôt našej funkcie je interval $\langle 0, \sqrt{2 - \sqrt{2}} \rangle$. $\square$

Príklad č. 7. Vypočítajme definičný obor funkcie

$$f(x) = \sqrt{\log_3(x+1)+2}\ .$$

Riešenie: V tomto prípade máme dve obmedzenia:

(1) Výraz pod odmocninou musí byť nezáporný.

(2) Výraz pod logaritmom musí byť kladný.

Dostávame tak nasledovné nerovnosti:

(1) $\log_3(x+1)+2 \geq 0$,

(2) $x+1>0$.

Pre tieto dve podmienky opäť určíme intervaly, na ktorých budú splnené, a výsledným definičným oborom našej funkcie bude prienik intervalov.

(1) Z nerovnice $\log_3(x+1) \geq -2$ vyjadríme neznámu x. Už vieme, že inverznou funkciou k logaritmickej funkcii je exponenciálna funkcia so základom 3. Keďže obe funkcie sú rastúce, nerovnosť sa pri odlogaritmovaní zachová a dostaneme:

$$(x+1) \geq 3^{-2}\ .$$

Riešením tejto nerovnice je interval $\langle -\frac{8}{9}, \infty)$.

(2) Z nerovnice $x+1>0$ dostávame druhú podmienku, že $x \in (-1,\infty)$.

Riešením druhej podmienky je inteval $(-1,\infty)$.

Záver: Definičným oborom našej funkcie je prienik intervalov $\langle -\frac{8}{9}, \infty)$ a $(-1,\infty)$, teda $\langle -\frac{8}{9}, \infty)$. □

Príklad č. 8. Vypočítajme definičný obor funkcie

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-x-12}}{\ln(4+3x)}\ .$$

Riešenie: V tomto prípade máme až tri obmedzenia:

(1) Výraz pod odmocninou nesmie nadobúdať záporné hodnoty.

(2) Výraz pod logaritmom musí byť kladný.

(3) Výraz v menovateli nesmie byť rovný nule.

Preložené do reči matematiky, tieto podmienky dávajú nasledujúce nerovnosti:

(1) $x^2 - x - 12 \geq 0$,

(2) $4 + 3x > 0$,

(3) $\ln(4 + 3x) \neq 0$.

Pre každé z týchto podmienok stanovíme množiny, kde sú splnené a definičný obor našej funkcie bude prienikom týchto troch množín.

(1) Kvadratický trojčlen prepíšeme do tvaru súčinu

$$(x + 3)(x - 4) \geq 0 \ .$$

Môžu nastať dva prípady. V prvom prípade môže byť $(x+3)$ a súčasne $(x-4)$ nezáporné

$$x + 3 \geq 0 \quad \wedge \quad x - 4 \geq 0 \ ,$$

čo je splnené práve vtedy, keď $x \in \langle 4, \infty)$.

V druhom prípade môžu $(x + 3)$ a súčasne $(x - 4)$ byť nekladné:

$$x + 3 \leq 0 \quad \wedge \quad x - 4 \leq 0 \ ,$$

čo je splnené práve vtedy, keď $x \in (-\infty, -3\rangle$.

Výsledok (1): Kvadratický trojčlen je nezáporný práve vtedy, keď $x \in (-\infty, -3\rangle \cup \langle 4, \infty)$.

(2) Z nerovnice $4 + 3x > 0$ si vyjadríme neznámu x a dostávame

$$x > -4/3 \ .$$

Z tejto podmienky dostávame interval $x \in (-4/3, \infty)$.

(3) Nerovnosť $\ln(4 + 3x) \neq 0$ prepíšeme v tvare

$$\ln(4 + 3x) \neq \ln 1 \ ,$$

a máme

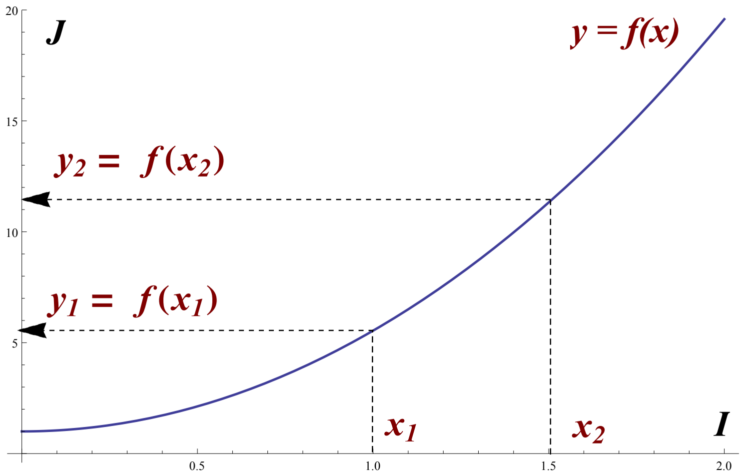
$$4 + 3x \neq 1 \ .$$

Z tejto nerovnice dostávame polední obmedzenie $x \neq -1$.

Záver: Prienikom množín získaných v (1), (2), (3) je interval $\langle 4, \infty)$, čo je definičný obor našej funkcie. □

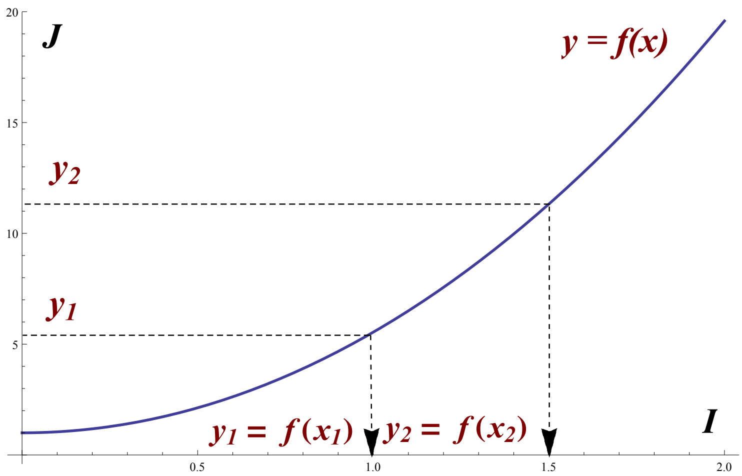
1.11 Inverzné funkcie

Pripomeňme si teraz pojem inverznej funkcie. Predpokladajme, že $y = f(x)$ je rastúca funkcia definovaná na intervale I a zobrazuje tento interval na osi Ox na interval J na osi Oy tak, ako na Obr.1.60, pričom "smer" zobrazovania je naznačený šípkami.



Obr. 1.60: $y = f(x)$.

V tejto situácii možno uvažovať o funkcii, ktorá vznikne obrátením šípiek, označíme ju f^{-1}.



Obr. 1.61: $x = f^{-1}(y)$.

Funkciu f^{-1} nazveme inverznou funkciou k funkcii f. Všimnime si, že ak f zobrazuje interval I na interval J, tak f^{-1} zobrazuje J na I.

Inverzná funkcia k našej (rastúcej) funkcii f je definovaná predpisom:

$$f^{-1}(y) = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = f(x). \tag{1.1}$$

Ak dosadíme x z rovnosti vľavo do rovnosti vpravo, máme

$$y = f(f^{-1}(y)) \ .$$

Naopak, ak dosadíme y sprava doľava, dostávame:

$$f^{-1}(f(x)) = x \ .$$

To znamená, že ak na $x \in I$, aplikujeme najprv funkciu f a potom k nej inverznú funkciu f^{-1}, ich účinok sa "ruší" a dostaneme naspäť pôvodnú hodnotu. Podobne, ak na $y \in J$ aplikujeme najprv f^{-1} a potom f, ich účinok sa opäť "ruší".

Ak funkcia f zobrazujúca interval I na interval J je rastúca na I, tak k nej inverzná funkcia f^{-1} zobrazujúca J na I existuje a je jednoznačne určená a je tiež rastúca. Analogické definície a tvrdenia sa vzťahujú aj na inverzné funkcie k funkciám f z intervalu I na interval J, ktoré sú na I klesajúce.

Ak $y = f(x)$ je navyše definovaná "jednoduchým predpisom", tak inverznú funkciu možno z rovnice $y = f(x)$ vypočítať elimináciou x, čím rovno dostaneme výraz pre f^{-1}, čiže výraz tvaru $x = f^{-1}(y)$. Aby sme dodržali konvenciu, že x je nezávislá premenná a y je závislá premenná, jednoducho vymeníme role x a y, t. j. urobíme zámenu $x \leftrightarrow y$. Túto zámenu obvykle robíme ako prvý krok výpočtu inverznej funkcie, ako uvidíme na príkladoch.

Vo viacerých dôležitých prípadoch však takto nemožno x eliminovať a napriek tomu inverzné funkcie existujú, ako napr. $e^x \to \ln(x)$, $\sin(x) \to \arcsin(x)$.

Pri zisťovaní existencie inverznej funkcie k funkcii f na I je potrebné presvedčiť sa, či f je na I monotónna, t. j. len rastúca alebo len klesajúca. Ak f je zložená z dvoch funkcií, čiže $f(x) = f_1(f_2(x))$, tak táto funkcia je v príslušnom intervale

(a) rastúca, ak obe f_1, f_2 sú rastúce alebo obe sú klesajúce (na príslušných intervaloch),

(b) klesajúca, ak jedna z f_1, f_2 je rastúca a druhá klesajúca (na príslušných intervaloch).

Príklad č. 1. Určíme inverznú funkciu k funkcii

$$y = 2x + 4 \ .$$

Riešenie:

(1) Definičným oborom našej funkcie je interval $(-\infty, \infty)$ a ten istý interval je aj oborom hodnôt.

(2) Z predchádzajúcej kapitoly vieme, že lineárna funkcia v tvare $y = ax + b$ rastie, ak $a > 0$. Naša funkcia túto podmienku spĺňa, teda je rastúca na celom svojom definičnom obore. To znamená, že k funkcii $y = 2x + 4$ existuje inverzná funkcia na $(-\infty, \infty)$.

(3) Určíme inverznú funkciu k funkcii $y = 2x + 4$ tak, že zameníme premenné $x \longleftrightarrow y$ a eliminujeme y:

$$x = 2y + 4 \ .$$

Po vyjadrení y dostávame inverznú funkciu, ktorej definičným oborom aj oborom hodnôt je taktiež interval $(-\infty, \infty)$.

$$f^{-1} : y = \frac{x - 4}{2} \ .$$

□

Príklad č. 2. Určíme inverznú funkciu k funkcii

$$y = \sqrt{\log_3(x + 1) + 2} \ .$$

Riešenie:

(1) Z príkladu č.7 vieme, že definičným oborom našej funkcie je interval $\langle -\frac{8}{9}, \infty)$ a obor hodnôt je $\langle 0, \infty)$.

(2) Ide o zloženú funkciu z dvoch rastúcich funkcií $z = \log_3(x + 1) + 2$ a $y = \sqrt{z}$, teda naša funkcia je rastúca na celom definičnom obore a existuje k nej inverzná funkcia.

(3) Na určenie inverznej funkcie zameníme premenné $x \longleftrightarrow y$ a eliminujeme y:

$$x = \sqrt{\log_3(y + 1) + 2} \ .$$

Rovnicu umocníme, aby sme odstránili odmocninu na pravej strane

$$x^2 = \log_3(y + 1) + 2 \ .$$

Po vyjadrení y dostávame

$$x^2 - 2 = \log_3(y+1) \ .$$

Inverzná funkcia k logaritmickej funkcii $y = \log_a(x)$ je exponenciálna funkcia $y = a^x$, preto

$$3^{x^2-2} = y + 1 \ .$$

Odčítame konštantu 1 od oboch strán rovnice, vyjadríme y a dostávame inverznú funkciu

$$f^{-1} : y = 3^{x^2-2} - 1 \ ,$$

ktorej definičným oborom je interval $\langle 0, \infty)$ a oborom hodnôt je $\langle -\frac{8}{9}, \infty)$.

Všimnime si, že definičný obor funkcie $z = 3^{x^2-2} - 1$ je interval $(-\infty, \infty)$. Prečo sme teda povedali, že definičný obor našej funkcie f^{-1} je len $\langle 0, \infty)$? Preto, lebo ide o *inverznú funkciu* k $y = \sqrt{\log_3(x+1)+2}$. Táto inverzná funkcia je naozaj definovaná len na $\langle 0, \infty)$, hoci formálne do výrazu $3^{x^2-2} - 1$ možno dosadiť akékoľvek reálne číslo. □

Príklad č. 3. Určíme inverznú funkciu k funkcii

$$y = \arcsin\left(\frac{3x-2}{4}\right) \ .$$

Riešenie:

(1) Z príkladu č. 4 vieme, že definičným oborom funkcie je uzavretý interval $\langle -\frac{2}{3}, 2\rangle$, obor hodnôt je $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$.

(2) Funkcia rastie na celom svojom definičnom obore.

(3) V ďalšom kroku zameníme premenné $x \longleftrightarrow y$ a eliminujeme y:

$$x = \arcsin\left(\frac{3y-2}{4}\right) \ .$$

Inverzná funkcia k cyklometrickej funkcii $y = \arcsin(x)$ je goniometrická funkcia $y = \sin(x)$, preto

$$\sin(x) = \frac{3y-2}{4} \ .$$

Po krátkej úprave vyjadríme y a výsledná inverzná funkcia je

$$f^{-1} : y = \frac{4 \cdot \sin(x) + 2}{3} \ ,$$

ktorej definičným oborom je množina $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$ a oborom hodnôt je $\langle -\frac{2}{3}, 2\rangle$.

Poznámka: Tu sa opäť stretávame so situáciou, kedy do výsledku môžme dosadiť akékoľvek reálne číslo, ale naša funkcia je *inverzná* k $y = \arcsin\left(\frac{3x-2}{4}\right)$ len na $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$.

$\square$

Príklad č. 4. Určíme inverznú funkciu k funkcii

$$y = 10^{5-x} + 4\ .$$

Riešenie:

(1) Definičným oborom funkcie je interval $(-\infty, \infty)$ a oborom hodnôt je $(4, \infty)$.

(2) Funkcia klesá na celom svojom definičnom obore, preto k nej existuje inverzná funkcia k našej funkcii.

(3) Zameníme premenné $x \longleftrightarrow y$ a eliminujeme y:

$$x = 10^{5-y} + 4\ .$$

Odčítame od oboch strán rovnice hodnotu 4

$$x - 4 = 10^{5-y}\ .$$

Z predchádzajúceho textu vieme, že k exponenciálnej funkcii $y = a^x$ je inverzná logaritmická funkcia $y = \log_a(x)$:

$$\log_{10}(x-4) = 5 - y\ .$$

Vyjadríme z rovnice y a dostávame inverznú funkciu k našej funkcii

$$f^{-1} : y = 5 - \log_{10}(x-4)\ .$$

Definičným oborom inverznej funkcie je interval $(4, \infty)$ a oborom hodnôt je $(-\infty, \infty)$.

$\square$

Príklad č. 5. Určíme inverznú funkciu k funkcii

$$y = 4 + \ln\left(\frac{x-1}{2}\right)\ .$$

Riešenie:

(1) Definičným oborom funkcie je interval $(1, \infty)$ a obor hodnôt je $(-\infty, \infty)$.

(2) Funkcia rastie na celom svojom definičnom obore.

(3) Na určenie inverznej funkcie zameníme premenné $x \longleftrightarrow y$ a eliminujeme y:

$$x = 4 + \ln\left(\frac{y-1}{2}\right) .$$

Odčítame od oboch strán rovnice konštantu 4

$$x - 4 = \ln\left(\frac{y-1}{2}\right) .$$

Inverzná funkcia k $y = \ln(x)$ je exponenciálna funkcia $y = e^x$, teda

$$e^{x-4} = e^{\ln(\frac{y-1}{2})}$$

po úprave dostávame

$$e^{x-4} = \frac{y-1}{2} .$$

Z rovnice jednoduchými úpravami vyjadríme y a dostávame inverznú funkciu

$$f^{-1}:\ y = 2e^{x-4} + 1 ,$$

ktorej definičným oborom je množina $(-\infty, \infty)$ a oborom hodnôt je $(1, \infty)$. □

Príklad č. 6. Určíme inverznú funkciu k funkcii

$$y = \sqrt{2\sin(3x) - \sqrt{2}} .$$

Riešenie:

(1) Z príkladu č. 6 vieme, že definičným oborom našej funkcie je zjednotenie intervalov $\langle \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi, \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}k\pi\rangle$, kde k je celé číslo, a obor hodnôt je interval $\langle 0, \sqrt{2-\sqrt{2}}\rangle$.

(2) Z tvaru grafu funkcie sin vidíme, že naša funkcia rastie na každom z intervalov $\langle \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi, \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi\rangle$. Pre výpočet inverznej funkcie musíme vziať len jeden z týchto intervalov, napr. $\langle \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\rangle$, ktorý dostaneme pre $k = 0$. Keďže ide o jediný interval a naša funkcia je na ňom rastúca, môžme počítať príslušnú inverznú funkciu.

(3) Ešte pred zámenou $x \longleftrightarrow y$ najprv z nášho výrazu pre y eliminujeme $\sin(3x)$:

$$\sin(3x) = \frac{y^2 + \sqrt{2}}{2}. \tag{1.2}$$

Presvečte sa sami, že ak $x \in \langle \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\rangle$, tak rastúca funkcia $y = \sqrt{2\sin(3x) - \sqrt{2}}$ má maximálnu hodnotu $\sqrt{2-\sqrt{2}}$, a teda hodnota výrazu na pravej strane (1.2) je menšia alebo rovná 1.

Zámenou premenných $x \longleftrightarrow y$ dostaneme:

$$\sin(3y) = \frac{x^2 + \sqrt{2}}{2} \ .$$

Na elimináciu y použijeme inverznú funkciu ku goniometrickej funkcii sin, ktorou je cyklometrická funkcia arcsin:

$$\arcsin\left(\frac{x^2 + \sqrt{2}}{2}\right) = \arcsin(\sin(3y)) \ .$$

Aplikovaním funkcie arcsin máme

$$\arcsin\left(\frac{x^2 + \sqrt{2}}{2}\right) = 3y \ .$$

Z rovnice vyjadríme y a dostávame inverznú funkciu

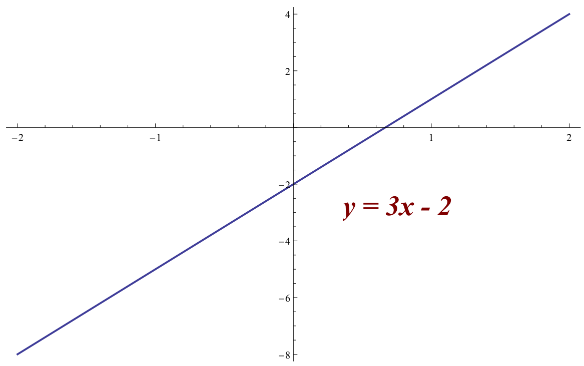
$$f^{-1}: \ y = \frac{\arcsin(\frac{x^2+\sqrt{2}}{2})}{3} \ .$$

Definičným oborom našej inverznej funkcie je interval $\langle 0, \sqrt{2-\sqrt{2}}\rangle$, s oborom hodnôt $\langle \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\rangle$, čo bol náš zvolený interval, na ktorom sme sa inverznú funkciu rozhodli počítať. $\square$

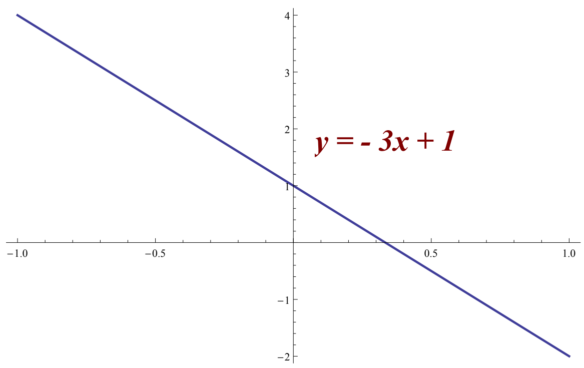
Príklady na cvičenia:

1. Zostrojte grafy nasledujúcich funkcií:

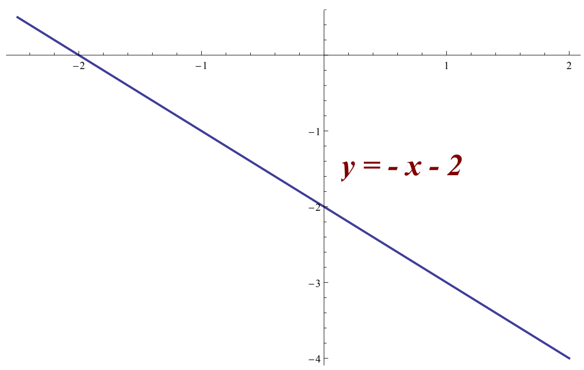
(a) $y = 3x - 2$



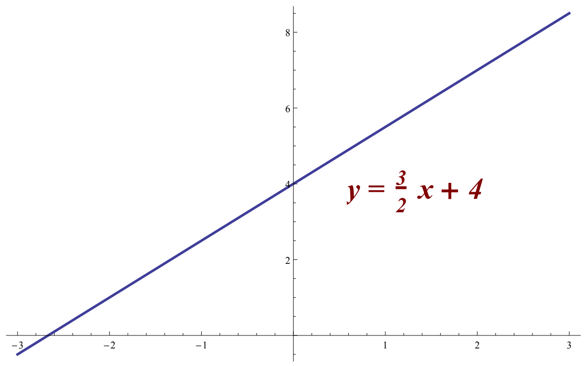
(b) $y = -3x + 1$



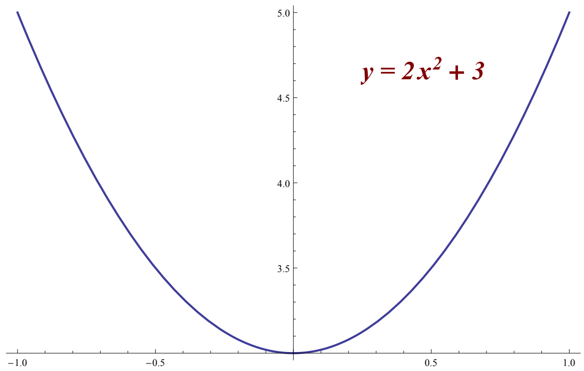
(c) $y = -x - 2$



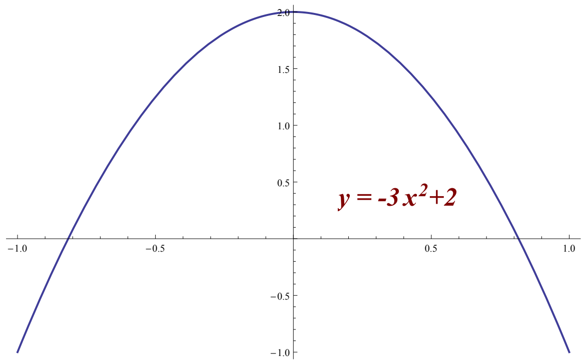
(d) $y = \frac{3}{2}x + 4$



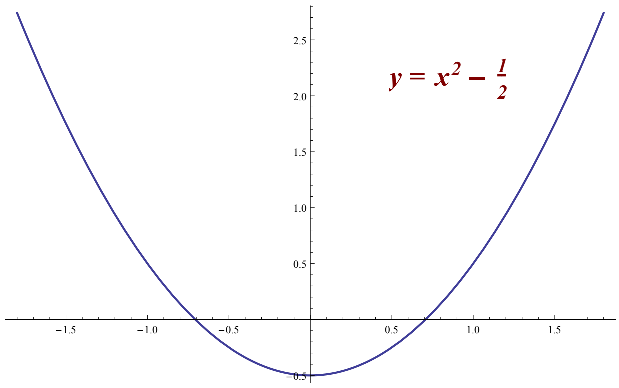
(e) $y = 2x^2 + 3$



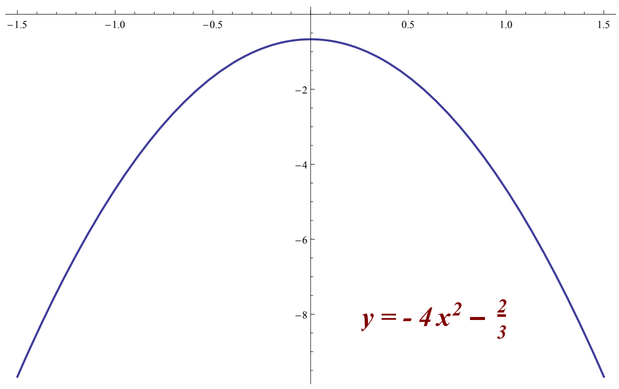
(f) $y = -3x^2 + 2$



(g) $y = x^2 - \frac{1}{2}$

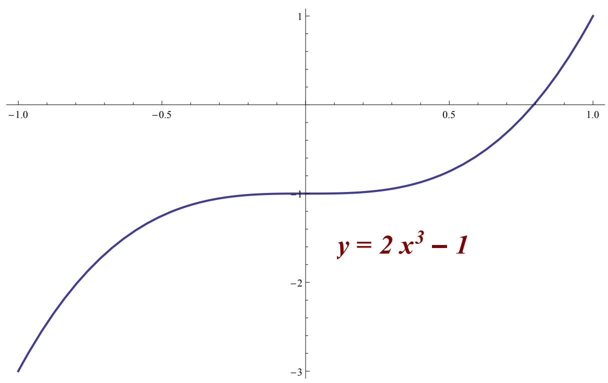


(h) $y = -4x^2 - \frac{2}{3}$

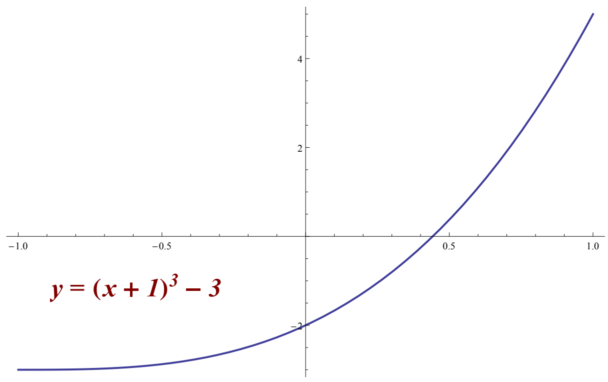


2. Pomocou grafu funkcie $y = x^3$ zostrojte grafy funkcií:

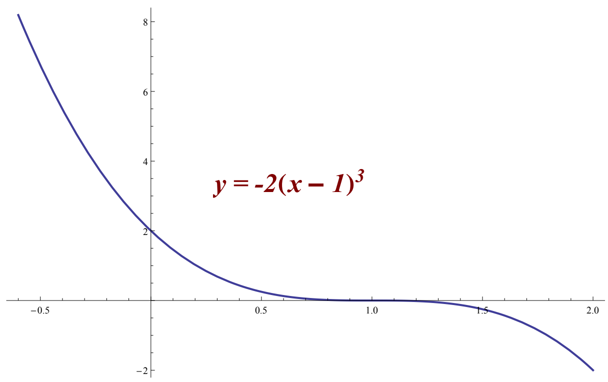
(a) $y = 2x^3 - 1$



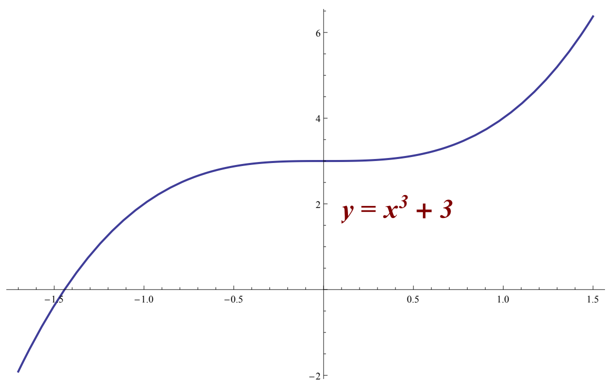
(b) $y = (x + 1)^3 - 3$



(c) $y = -2(x - 1)^3$

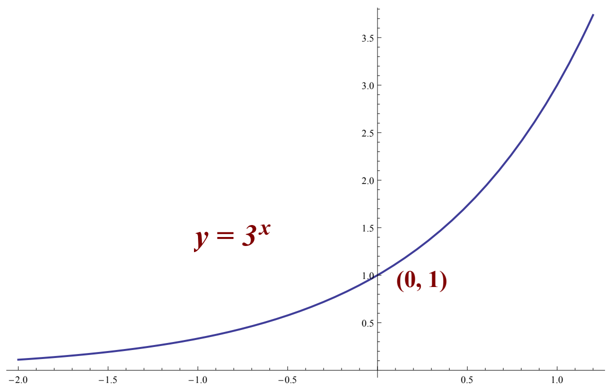


(d) $y = x^3 + 3$

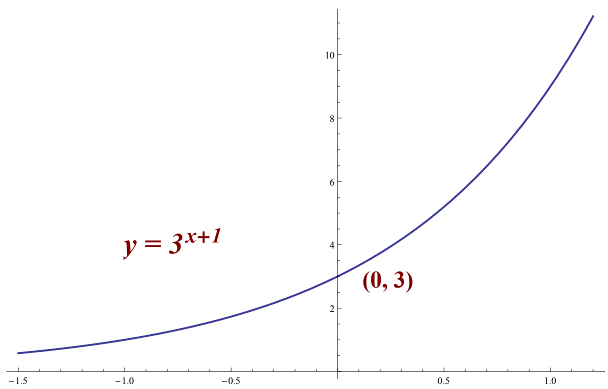


3. Zostrojte grafy nasledujúcich funkcií:

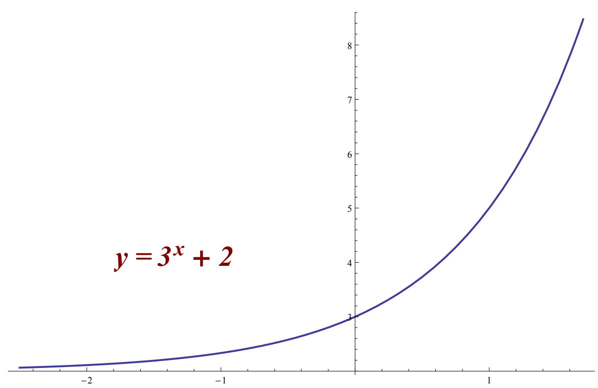
(a) $y = 3^x$



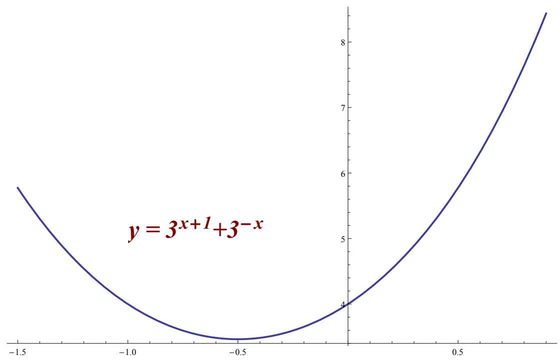
(b) $y = 3^{x+1}$



(c) $y = 3^x + 2$

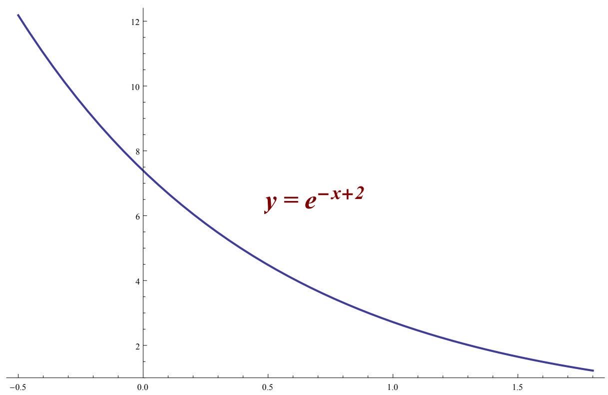


(d) $y = 3^{x+1} + 3^{-x}$

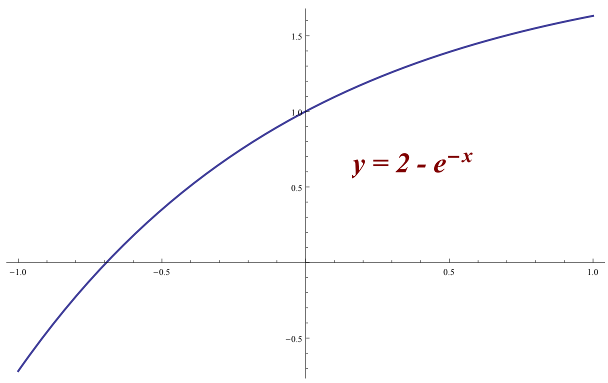


4. Pomocou grafu funkcie $y = e^x$ zostrojte grafy funkcií:

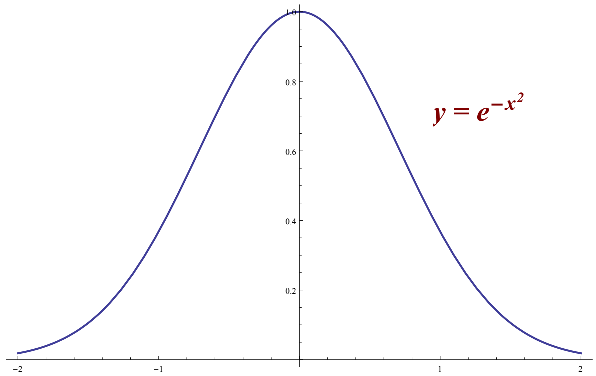
(a) $y = e^{-x+2}$



(b) $y = 2 - e^{-x}$

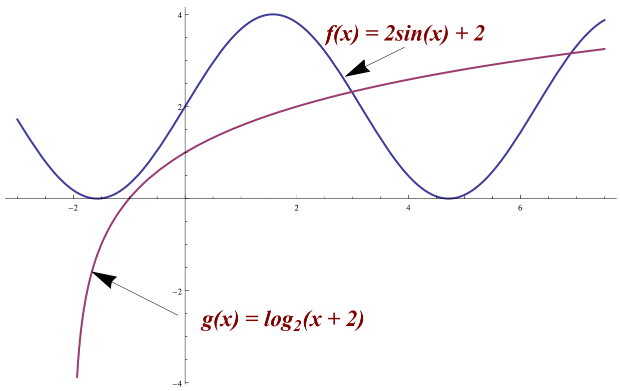


(c) $y = e^{-x^2}$

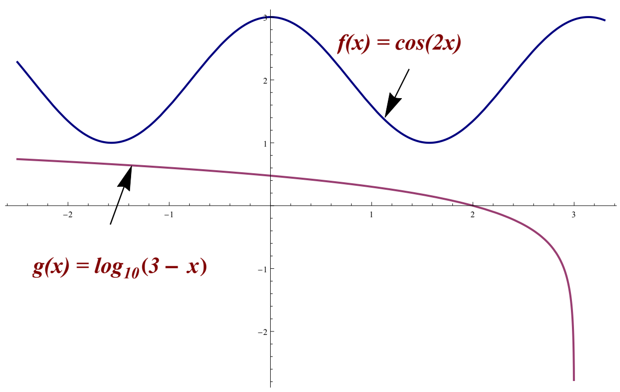


5. V príkladoch (a) - (f) načrtnite grafy dvoch funkcií $f(x)$ a $g(x)$ v jednom obrázku:

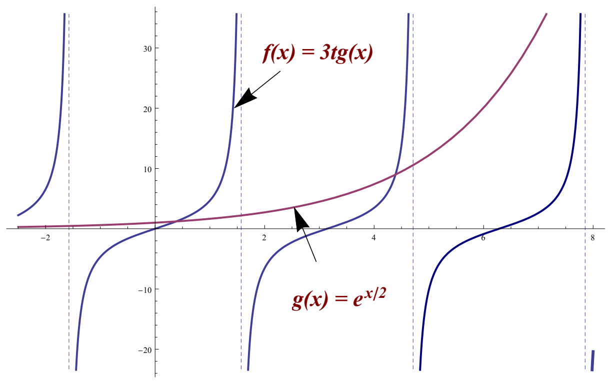
(a) $f(x) = 2\sin(x) + 2, \quad g(x) = \log_2(x+2)$



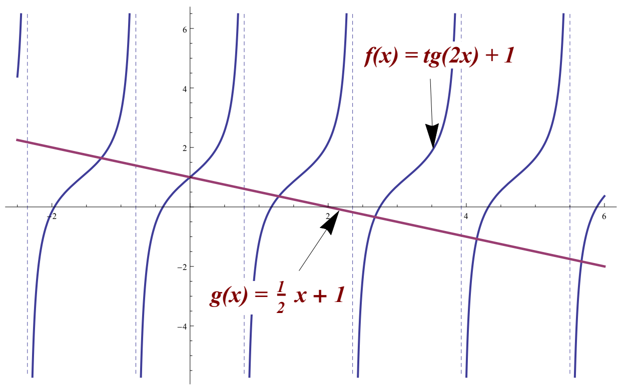
(b) $f(x) = \cos(2x), \quad g(x) = \log_{10}(3-x)$



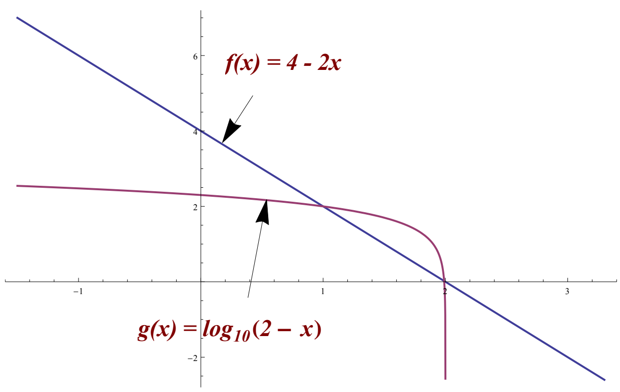
(c) $f(x) = 3\mathrm{tg}(x), \quad g(x) = e^{x/2}$



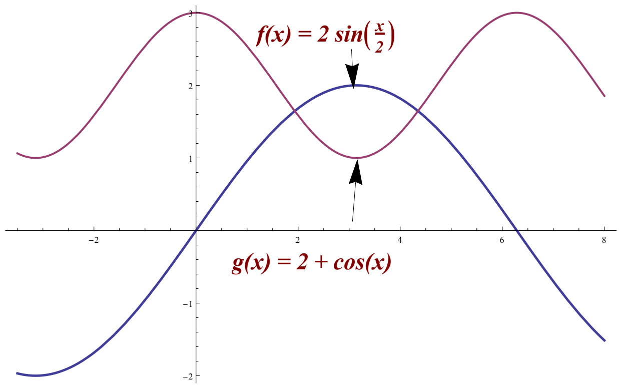
(d) $f(x) = \mathrm{tg}(2x) + 1, \quad g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$



(e) $f(x) = 4 - 2x, \quad g(x) = 2 + \log_{10}(2 - x)$

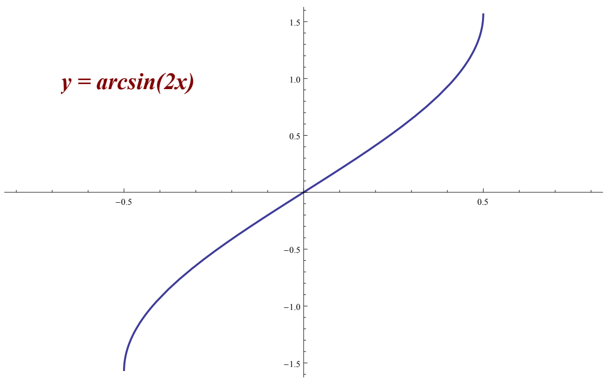


(f) $f(x) = 2\sin(\frac{x}{2})$, $g(x) = 2 + \cos(x)$

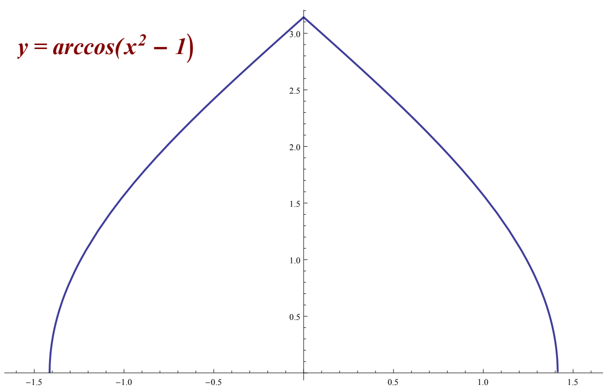


6. Načrtnite grafy nasledujúcich funkcií:

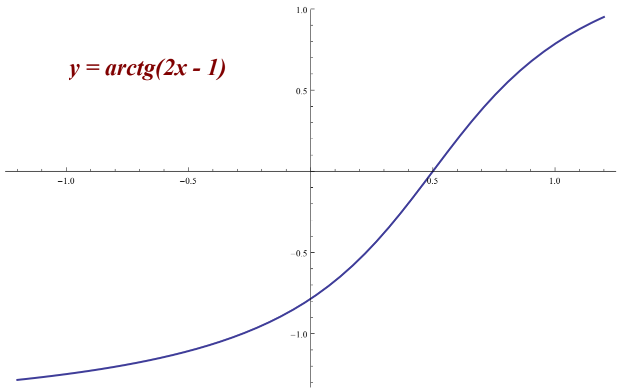
(a) $y = \arcsin(2x)$



(b) $y = \arccos(x^2 - 1)$



(c) $y = \operatorname{arctg}(2x-1)$



7. Určte definičný obor nasledujúcich funkcií:

V nasledujúcich príkladoch symbolom $D(f)$ označíme definičný obor funkcie f.

(a) $y = \frac{\sqrt{2x+1}}{\cos(3x)}$

Výsledok: $D(f) = \langle -1/2, \infty) \setminus \{\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k, k \geq 0\}$.

(b) $y = \sqrt{\log_{1/2}(x+2) - 1}$

Výsledok: $D(f) = (-2, -3/2\rangle$.

(c) $y = \frac{\sqrt{x^2+5x-6}}{x+1}$

Výsledok: $D(f) = (-\infty, -6\rangle \cup \langle 1, \infty)$.

(d) $y = \frac{\sin(x)}{\sqrt{3 - 2\cos(x)}}$

Výsledok: $D(f)$ je zjednotenie intervalov $(-\pi/6+2k\pi, +\pi/6+2k\pi) \cup (\pi/6+2k\pi, (11/6)\pi + 2k\pi)$, kde k je ľubovoľné celé číslo.

(e) $y = \arccos(2x-5)$

Výsledok: $D(f) = \langle 2, 3\rangle$.

(f) $y = \frac{1}{\sqrt{e^x - 4}}$

Výsledok: $D(f) = (\ln 4, \infty)$.

(g) $y = \ln(2\sin(x) - 1)$

Výsledok: $D(f)$ je interval $(\pi/6 + 2k\pi, (5/6)\pi + 2k\pi)$, kde k je ľubovoľné celé číslo.

(h) $y = \frac{1}{(2x+3).(x-2)}$

Výsledok: $D(f) = (-\infty, -3/2) \cup (-3/2, 2) \cup (2, \infty)$.

8. Nájdite inverznú funkciu k nasledujúcim funkciám:

(a) $y = \sqrt{\log_{1/2}(x+2) - 1}, \quad D(f) = (-2, -\frac{3}{2}\rangle$

Výsledok: $f^{-1}: \; y = \frac{1}{2}^{(x^2+1)} - 2, \quad D(f^{-1}) = \langle 0, \infty)$.

(b) $y = 2\arccos(2x-5) - 5, \quad D(f) = \langle 2, 3\rangle$

Výsledok: $f^{-1}: \; y = \frac{\cos(\frac{x+5}{2})+5}{2}, \quad D(f^{-1}) = \langle -5, 2\pi - 5\rangle$.

(c) $y = \frac{1}{\sqrt{e^{2x-4}}}, \quad D(f) = (\ln 2, \infty)$

Výsledok: $f^{-1}: \; y = \frac{\ln(1/x^2+4)}{2}, \quad D(f^{-1}) = (0, \infty)$.

(d) $y = 1 - 2\mathrm{arctg}(x-5), \quad D(f) = (-\infty, \infty)$

Výsledok: $f^{-1}: \; y = \mathrm{tg}(\frac{1-\mathrm{x}}{2}) + 5, \quad D(f^{-1}) = (-\pi + 1, \pi + 1)$.

(e) $y = 4^{2x-3} + 5, \quad D(f) = (-\infty, \infty)$

Výsledok: $f^{-1}: \; y = \frac{\log_4(x-5)+3}{2}, \quad D(f^{-1}) = (5, \infty)$.

(f) $y = \frac{2x+9}{3x+2}, \quad D(f^{-1}) = (-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (-\frac{2}{3}, \infty)$

Výsledok: $f^{-1}: \; y = \frac{9-2x}{3x-2}, \quad D(f^{-1}) = (-\infty, \frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}, \infty)$.

(g) $y = \sqrt{e^{5x+4} - 2}, \quad D(f) = \langle \frac{\ln 2 - 4}{5}, \infty)$

Výsledok: $f^{-1}: \; y = \frac{\ln(x^2+2)-4}{5}, \quad D(f^{-1}) = \langle 0, \infty)$.

(h) $y = 2 - 6^{x-4}, \quad D(f) = (-\infty, \infty)$

Výsledok: $f^{-1}: \; y = \log_6(2-x) + 4, \quad D(f^{-1}) = (-\infty, 2)$.

Kapitola 2

Derivácie

Nech funkcia $y = f(x)$, t. j. priradenie $x \mapsto f(x)$, je definovaná na nejakom otvorenom intervale I. Ak v nejakom bode $x \in I$ existuje limita

$$\lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}, \tag{2.1}$$

tak hodnotu tejto limity nazývame deriváciou funkcie f v bode x a označujeme ju symbolom $f^{'}(x)$ alebo $y^{'}$. Ak limita (2.1) existuje v každom bode $x \in I$, tak priradenie $x \mapsto f^{'}(x)$ definuje funkciu, ktorú nazývame deriváciou funkcie f na intervale I. Označenie tejto novej funkcie je $f^{'}$, alebo $y^{'}$.

Pre derivovanie je v matematike odvodených viacero pravidiel a vzorčekov. Uvedieme najprv niekoľko základných pravidiel, platných pre ľubovoľné dve funkcie f, g, ktoré na intervale I majú derivácie $f^{'}$, $g^{'}$ a pre ľubovoľné konštanty c, d.

- Derivovanie konštantného násobku funkcie:

$$(cf)^{'} = cf^{'} \ .$$

- Derivovanie lineárnej kombinácie:

$$(cf + dg)^{'} = cf^{'} + dg^{'} \ .$$

- V špeciálnom prípade, pre deriváciu súčtu a rozdielu dvoch funkcií máme:

$$(f + g)^{'} = f^{'} + g^{'} \ ,$$
$$(f - g)^{'} = f^{'} - g^{'} \ .$$

- Derivovanie súčinu funkcií:

$$(f \cdot g)^{'} = f^{'} \cdot g + f \cdot g^{'}.$$

- Derivovanie podielu funkcií za predpokladu, že g je rôzna od nuly pre každé $x \in I$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} .$$

O niečo zložitejšie je naše posledné pravidlo o derivovaní zloženej funkcie. Nech funkcia f zobrazuje otvorený interval I na otvorený interval J a nech funkcia g je definovaná na intervale J. Ak obe funkcie majú na uvedených intervaloch derivácie, tak pre deriváciu zloženej funkcie $x \mapsto g(f(x))$ platí

$$(g(f(x))' = g'(f(x)) \cdot f'(x) .$$

Pre základné funkcie ako mocninové, trigonometrické, exponenciálne atď., sú hodnoty limity (2.1) známe vo forme vzorčekov, z ktorých uvádzame nasledujúce:

$(c)' = 0$ $\qquad c \in \mathcal{R}$

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ $\qquad (n = 1, 2, ...)$ $\qquad x \in \mathcal{R}$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ $\qquad (a > 0)$ $\qquad x \in \mathcal{R}$

$(e^x)' = e^x$ $\qquad x \in \mathcal{R}$

$(\sin(x))' = \cos(x)$ $\qquad x \in \mathcal{R}$

$(\cos(x))' = -\sin(x)$ $\qquad x \in \mathcal{R}$

$(\mathrm{tg}(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$ $\qquad x \in \mathcal{R}, \quad \cos(x) \neq 0$

$(\mathrm{cotg}(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$ $\qquad x \in \mathcal{R}, \quad \sin(x) \neq 0$

$(\log_a(x))' = \frac{1}{x . \ln a}$ $\qquad (a > 0, a \neq 1)$ $\qquad x > 0$

$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ $\qquad x > 0$

$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad x \in (-1, 1)$

$(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad x \in (-1, 1)$

$(\mathrm{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$ $\qquad x \in \mathcal{R}$

$(\mathrm{arccotg}(x))' = -\frac{1}{1+x^2}$ $\qquad x \in \mathcal{R}$

Pomocou uvedených pravidiel a vzorčekov by ste mali vedieť vypočítať deriváciu ľubovoľnej funkcie nielen z týchto skrípt, ale aj derivácie takých funkcií, s ktorými sa stretnete v odborných predmetoch.

Príklad č. 1. Vypočítame derivácie nasledujúcich funkcií:

(a) $y = x^5 \cdot (2x + 3)$

Riešenie: Daná funkcia je súčinom $f(x) \cdot g(x)$, kde $f(x) = x^5$ a $g(x) = 2x+3$. Aplikujeme preto vzorec $(f \cdot g)^{'} = f^{'} \cdot g + f \cdot g^{'}$ pre deriváciu súčinu dvoch funkcií, teda

$$y^{'} = (x^5)^{'} \cdot (2x+3) + x^5 \cdot (2x+3)^{'} .$$

Použitím základných vzorcov $(c)^{'} = 0$, $(x^n)^{'} = n \cdot x^{n-1}$ a postupným výpočtom dostávame:

$$y^{'} = 5x^4 \cdot (2x+3) + 2x^5 .$$

Po úprave máme výsledok:

$$y^{'} = 12x^5 + 15x^4 = 3x^4 \cdot (4x+5) .$$

□

(b) $y = \ln(2x) \cdot \cos(5x)$

Riešenie: Táto funkcia je súčinom dvoch zložených funkcií $f(x) = \ln(2x)$ a $g(x) = \cos(5x)$. Opäť použijeme vzťah na deriváciu súčinu dvoch funkcií $(f \cdot g)^{'} = f^{'} \cdot g + f \cdot g^{'}$

$$y^{'} = (\ln(2x))^{'} \cdot \cos(5x) + \ln(2x) \cdot (\cos(5x))^{'}.$$

Funkcie $f(x) = \ln(2x)$ a $g(x) = \cos(5x)$ sú zložené funkcie, preto derivujeme podľa vzťahu $(g(f(x))^{'} = g^{'}(f(x)) \cdot f^{'}(x)$. Použijeme základné vzorčeky $(\ln(x))^{'} = \frac{1}{x}$ a $(x^n)^{'} = n \cdot x^{n-1}$, presne v tomto poradí, na funkciu $f(x)$ a na funkciu $g(x)$ použijeme vzorce $(\cos(x))^{'} = -\sin(x)$ a $(x^n)^{'} = n \cdot x^{n-1}$. Dostávame tak

$$y^{'} = \frac{1}{2x} \cdot 2 \cdot \cos(5x) + \ln(2x) \cdot (-\sin(5x)) \cdot 5 ,$$

a po úprave dostávame výsledok

$$y^{'} = \frac{\cos(5x)}{x} - 5 \cdot \ln(2x) \cdot \sin(5x) .$$

□

(c) $y = \frac{x^4 - x^2 + 2x}{\sin^2(x)}$

Riešenie: Vidíme, že funkcia je podiel dvoch funkcií $\frac{f}{g}$, kde $f(x) = x^4 - x^2 + 2x$ a $g(x) = \sin^2(x)$. Na výpočet použijeme vzťah na deriváciu podielu funkcií $\left(\frac{f}{g}\right)^{'} = \frac{f^{'} \cdot g - f \cdot g^{'}}{g^2}$:

$$y^{'} = \frac{(x^4 - x^2 + 2x)^{'} \cdot \sin^2(x) - (x^4 - x^2 + 2x) \cdot (\sin^2(x))^{'}}{(\sin^2(x))^2} .$$

Na zderivovanie funkcie $f(x)$ použijeme vzťah $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$. Funkcia $g(x)$ je zložená, preto použijeme vzťah $(g(f(x))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$, presnejšie dva vzorčeky $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ a $(\sin(x))' = \cos(x)$. Dostávame tak

$$y' = \frac{(4x^3 - 2x + 2) \cdot \sin^2(x) - (x^4 - x^2 + 2x) \cdot 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)}{\sin^4(x)} \, ,$$

a po krátkej úprave máme

$$y' = \frac{(4x^3 - 2x + 2) \cdot \sin(x) - 2 \cdot (x^4 - x^2 + 2x) \cdot \cos(x)}{\sin^3(x)} \, .$$

□

(d) $\quad y = \frac{\arcsin(x)}{1-\mathrm{tg}(x)}$

Riešenie: Na deriváciu tejto funkcie použijeme opäť vzorček na deriváciu podielu dvoch funkcií $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$. Funkcia $f(x) = \arcsin(x)$ a funkcia $g(x) = 1 - \mathrm{tg}(x)$, teda

$$y' = \frac{(\arcsin(x))' \cdot (1 - \mathrm{tg}(x)) - \arcsin(x) \cdot (1 - \mathrm{tg}(x))'}{(1 - \mathrm{tg}(x))^2} \, .$$

Na deriváciu funkcie $f(x)$ použijeme vzorček $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Funkcia $g(x)$ sa skladá z konštanty a zo základnej funkcie $\mathrm{tg}(x)$, preto jej deriváciu vypočítame pomocou vzťahu $(c)' = 0$ a $(\mathrm{tg}(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$:

$$y' = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (1 - \mathrm{tg}(x)) - \arcsin(x) \cdot \left(-\frac{1}{\cos^2(x)}\right)}{(1 - \mathrm{tg}(x))^2} \, ,$$

po malej úprave dostávame výsledok

$$y' = \frac{\frac{1-\mathrm{tg}(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin(x)}{\cos^2(x)}}{(1 - \mathrm{tg}(x))^2} \, .$$

□

(e) $\quad y = \log_2(4x) \cdot \mathrm{arctg}(e^x)$

Riešenie: Funkcia je súčinom dvoch funkcií $f(x) \cdot g(x)$, kde $f(x) = \log_2(4x)$ a $g(x) = \mathrm{arctg}(e^x)$. Použijeme preto vzorček na deriváciu súčinu dvoch funkcií $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

$$y' = (\log_2(4x))' \cdot \mathrm{arctg}(e^x) + \log_2(4x) \cdot (\mathrm{arctg}(e^x))'.$$

Funkcie $f(x)$ a $g(x)$ sú zložené funkcie, preto derivujeme podľa vzťahu $(g(f(x))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$. Pri derivácii zloženej funkcie $f(x)$ použijeme vzťahy $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ a $(\log_a(x))' = \frac{1}{x. \ln a}$. Na deriváciu zloženej funkcie $g(x)$ použijeme derivačné vzorčeky $(\mathrm{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$ a $(e^x)' = e^x$:

$$y' = \frac{1}{4x \cdot \ln 2} \cdot 4 \cdot \operatorname{arctg}(e^x) + \log_2(4x) \cdot \frac{1}{1+(e^x)^2} \cdot e^x \ .$$

Po úprave máme výsledok

$$y' = \frac{\operatorname{arctg}(e^x)}{x \cdot \ln 2} + \frac{e^x \cdot \log_2(4x)}{1+(e^x)^2} \ .$$

□

(f) $\quad y = \operatorname{tg}^3(\ln^4(5x+3))$

Riešenie: Máme danú zloženú funkciu, teda použijeme vzťah pre výpočet zloženej funkcie $(f \circ g)' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$. Pri derivácii postupne zloženú funkciu "rozoberieme" nasledovne:

$$y' = ((\quad)^3)' \cdot (\operatorname{tg}(\quad))' \cdot ((\quad)^4)' \cdot (\ln(\quad))' \cdot (5x+3)'$$

a použijeme pritom niekoľko základných derivačných vzťahov $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $(\operatorname{tg}(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$, $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ a $(c)' = 0$:

$$y' = 3 \cdot \operatorname{tg}^2(\ln^4(5x+3)) \cdot \frac{1}{\cos^2(\ln^4(5x+3))} \cdot 4 \cdot \ln^3(5x+3) \cdot \frac{1}{5x+3} \cdot 5 \ .$$

Po úprave dostaneme

$$y' = \frac{60 \cdot \operatorname{tg}^2(\ln^4(5x+3)) \cdot \ln^3(5x+3)}{(5x+3) \cdot \cos^2(\ln^4(5x+3))} \ .$$

□

(g) $\quad y = \log_2^2(x) \cdot \arcsin^5(2^x)$

Riešenie: Funkcia je súčinom dvoch zložených funkcií $f(x) = \log_2^2(x)$ a $g(x) = \arcsin^5(2^x)$. Na deriváciu funkcie použijeme už známy vzťah $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$:

$$y' = (\log_2^2(x))' \cdot \arcsin^5(2^x) + \log_2^2(x) \cdot (\arcsin^5(2^x))'.$$

Na deriváciu zloženej funkcie $f(x) = \log_2^2(x)$ použijeme vzťah $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ a $(\log_a(x))' = \frac{1}{x.\ln a}$. Na deriváciu zloženej funkcie $g(x) = \arcsin^5(2^x)$ použijeme vzťahy $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ a $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$. Dostávame:

$$y' = 2 \cdot \log_2(x) \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 2} \cdot \arcsin^5(2^x) + \log_2^2(x) \cdot 5 \cdot \arcsin^4(2^x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(2^x)^2}} \cdot 2^x \cdot \ln 2 \ ,$$

a po krátkej úprave máme výsledok

$$y' = \log_2(x) \cdot \arcsin^4(2^x) \cdot \left(\frac{2 \arcsin(2^x)}{x \cdot \ln 2} + \frac{5 \log_2(x) \cdot 2^x \ln 2}{\sqrt{1-(2^x)^2}} \right) \ .$$

□

(h) $y = e^{-3x} + 4\mathrm{arctg}(\ln(2x))$

Riešenie: Zadaná funkcia je súčtom dvoch zložených funkcií $(f+g)' = f' + g'$, kde $f(x) = e^{-3x}$ a $g(x) = 4\mathrm{arctg}(\ln(2x))$, preto

$$y' = (e^{-3x})' + (4\mathrm{arctg}(\ln(2x)))' .$$

Keďže obe funkcie $f(x)$ a $g(x)$ sú zložené funkcie, rozpíšeme ich podrobnejšie

$$y' = (e^{(\quad)})' \cdot (-3x)' + (4\mathrm{arctg}(\qquad))' \cdot (\ln(\quad))' \cdot (2x)' .$$

Na deriváciu jednotlivých častí použijeme vzťahy $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $(e^x)' = e^x$, $(\mathrm{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$, $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$. Po zderivovaní dostávame:

$$y' = -3 \cdot e^{-3x} + 4 \cdot \frac{1}{1 + (\ln(2x))^2} \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 ,$$

a po úprave máme výsledok

$$y' = -3e^{-3x} + \frac{4}{x(1 + (\ln(2x))^2)} .$$

□

(i) $y = \frac{\sin(2x)\cdot\cos(2x)}{\ln^2(x)}$

Riešenie: Zadaná funkcia má v čitateli súčin dvoch zložených funkcií $f(x) = \sin(2x) \cdot \cos(2x)$ a v menovateli zloženú funkciu $g(x) = \ln^2(x)$. Keďže ide o deriváciu podielu, použijeme vzťah $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$:

$$y' = \frac{(\sin(2x)\cdot\cos(2x))' \cdot \ln^2(x) - \sin(2x)\cdot\cos(2x)\cdot(\ln^2(x))'}{(\ln^2(x))^2} .$$

Funkcia $f(x) = \sin(2x) \cdot \cos(2x)$ je súčinom dvoch funkcií $\sin(2x)$ a $\cos(2x)$, preto musíme deriváciu čitateľa poupraviť. Derivácia súčinu sa riadi vzťahom $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f \cdot g'$. Po upresnení dostávame:

$$y' = \frac{((\sin(2x))' \cdot \cos(2x) + \sin(2x)\cdot(\cos(2x))') \cdot \ln^2(x) - (\sin(2x)\cdot\cos(2x))\cdot(\ln^2(x))'}{(\ln^2(x))^2} .$$

Na deriváciu jednotlivých častí funkcie použijeme základné vzorce $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $(\sin(x))' = \cos(x)$, $(\cos(x))' = -\sin(x)$ a $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$y^{'} = \frac{(2\cos(2x)\cdot\cos(2x) + \sin(2x)\cdot(-2\sin(2x)))\cdot\ln^2(x) - (\sin(2x)\cdot\cos(2x))\cdot 2\ln(x)\frac{1}{x}}{(\ln^2(x))^2} ,$$

a po úprave dostávame výsledok

$$y^{'} = \frac{(2\cos^2(2x) - 2\sin^2(2x))\cdot\ln(x) - 2\sin(2x)\cdot\cos(2x)}{\ln^3(x)} .$$

□

(j) $y = \ln(\mathrm{cotg}^2(3^x))$

Riešenie: Na výpočet derivácie danej funkcie použijeme vzťah pre výpočet zloženej funkcie $(f\circ g)^{'} = g^{'}(f(x))\cdot f^{'}(x)$. Pri derivácii postupne zloženú funkciu "rozoberieme" nasledovne:

$$y^{'} = (\ln(\quad))^{'}\cdot(\quad)^2\cdot(\mathrm{cotg}(\quad))^{'}\cdot(3^x)^{'} .$$

Jednotlivé časti zderivujeme pomocou základných vzťahov $(\ln(x))^{'} = \frac{1}{x}$, $(x^n)^{'} = n{\cdot}x^{n-1}$, $(\mathrm{cotg}(x))^{'} = -\frac{1}{\sin^2(x)}$ a $(a^x)^{'} = a^x\cdot\ln a$.

$$y^{'} = \frac{1}{\mathrm{cotg}^2(3^x)}\cdot 2\mathrm{cotg}(3^x)\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2(3^x)}\right)\cdot 3^x\cdot\ln 3 ,$$

po úprave dostávame

$$y^{'} = \frac{-2\cdot 3^x\cdot\ln 3}{\mathrm{cotg}(3^x)\cdot\sin^2(3^x)} .$$

□

(k) $y = 2x^5\cdot\mathrm{arctg}^4(e^{2x}) + \log_3^2(x)$

Riešenie: Derivácia tejto funkcie je trošku komplikovanejšia, keďže sa tu vyskytuje kombinácia súčinu častí funkcie $f(x) = 2x^5\cdot\mathrm{arctg}^4(e^{2x})$ a súčet s funkciou $g(x) = \log_3^2(x)$. Deriváciu funkcie vypočítame podľa známych vzťahov na deriváciu súčinu $(f\cdot g)^{'} = f^{'}\cdot g + f\cdot g^{'}$ a deriváciu súčtu $(f+g)^{'} = f^{'} + g^{'}$ funkcií:

$$y^{'} = (2x^5)^{'}\cdot\mathrm{arctg}^4(e^{2x}) + 2x^5\cdot(\mathrm{arctg}^4(e^{2x}))^{'} + (\log_3^2(x))^{'}.$$

Na deriváciu jednotlivých častí funkcie použijeme základné vzorce $(x^n)^{'} = n\cdot x^{n-1}$, $(\mathrm{arctg}(x))^{'} = \frac{1}{1+x^2}$, $(e^x)^{'} = e^x$ a $(\log_a(x))^{'} = \frac{1}{x.\ln a}$ a dostávame

$$y^{'} = 10x^4\cdot\mathrm{arctg}^4(e^{2x}) + 2x^5\cdot 4\mathrm{arctg}^3(e^{2x})\cdot\frac{1}{1+(e^{2x})^2}\cdot 2e^{2x} + 2\log_3(x)\cdot\frac{1}{x\cdot\ln 3} .$$

Po jednoduchej úprave máme

$$y^{'} = 2x^4 \cdot \mathrm{arctg}^3(e^{2x}) \cdot \left(5\mathrm{arctg}(e^{2x}) + \frac{8xe^{2x}}{1+(e^{2x})^2}\right) + \frac{2\log_3(x)}{x \cdot \ln 3} \ .$$

□

(l) $y = 5\arccos^5(\mathrm{tg}^4(x^6))$

Riešenie: Na výpočet derivácie zloženej funkcie použijeme vzťah pre výpočet zloženej funkcie $(f \circ g)^{'} = g^{'}(f(x)) \cdot f^{'}(x)$. Pri derivácii postupne zloženú funkciu "rozoberieme" nasledovne:

$$y^{'} = (5\arccos^5(\quad))^{'} \cdot (\arccos(\quad))^{'} \cdot (\mathrm{tg}^4(\quad))^{'} \cdot (\mathrm{tg}(\quad))^{'} \cdot (x^6)^{'} \ .$$

Jednotlivé časti zloženej funkcie zderivujeme podľa vzťahov $(x^n)^{'} = n{\cdot}x^{n-1}$, $(\arccos(x))^{'} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ a $(\mathrm{tg}(x))^{'} = \frac{1}{\cos^2(x)}$:

$$y^{'} = 25\arccos^4(\mathrm{tg}^4(x^6)) \cdot (\frac{-1}{\sqrt{1-(\mathrm{tg}^4(x^6))^2}}) \cdot 4\mathrm{tg}^3(x^6) \cdot \frac{1}{\cos^2(x^6)} \cdot 6x^5 \ ,$$

a po malej úprave dostávame výsledné riešenie

$$y^{'} = \frac{-25\arccos^4(\mathrm{tg}^4(x^6))}{\sqrt{1-(\mathrm{tg}^4(x^6))^2}} \cdot \frac{4\mathrm{tg}^3(x^6) \cdot 6x^5}{\cos^2(x^6)} \ .$$

□

Príklad č. 2. Vypočítame druhé derivácie nasledujúcich funkcií:

(a) $y = \mathrm{arctg}(2x)$

Riešenie: Máme zadanú ľahkú zloženú funkciu, ktorej prvú deriváciu vypočítame podľa vzťahu $(\mathrm{arctg}(x))^{'} = \frac{1}{1+x^2}$ a $(x^n)^{'} = n \cdot x^{n-1}$. Rozložíme funkciu na časti a zderivujeme:

$$y^{'} = \frac{1}{1+(2x)^2} \cdot 2 \ .$$

Druhú deriváciu funkcie dostaneme, ak už zderivovanú funkciu $y^{'}$ opäť zderivujeme. Derivujeme teda podiel dvoch funkcií $f(x) = 2$ a $g(x) = 1 + (2x)^2$ podľa vzťahu pre deriváciu podielu funkcií $\left(\frac{f}{g}\right)^{'} = \frac{f^{'} \cdot g - f \cdot g^{'}}{g^2}$, teda

$$y^{''} = \frac{(2)^{'} \cdot (1+(2x)^2) - 2 \cdot (1+(2x)^2)^{'}}{(1+(2x)^2)^2} \ .$$

Na deriváciu jednotlivých častí použijeme jednoduché vzorčeky $(c)^{'} = 0$ a $(x^n)^{'} = n \cdot x^{n-1}$

$$y'' = \frac{0 \cdot (1+(2x)^2) - 2 \cdot 8x}{(1+4x^2)^2} \ .$$

Druhá derivácia funkcie po krátkej úprave bude

$$y'' = -\frac{16x}{(1+4x^2)^2} \ .$$

□

(b) $y = 2x^3 \cdot e^{-x^3/2}$

Riešenie: Funkciu tvorí súčin dvoch funkcií $f(x) = 2x^3$ a $g(x) = e^{-x^3/2}$. Na výpočet použijeme vzťah pre deriváciu súčinu $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$:

$$y' = (2x^3)' \cdot e^{-x^3/2} + (2x^3) \cdot (e^{-x^3/2})' \ .$$

Na výpočet prvej derivácie použijeme základné vzťahy $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ a $(e^x)' = e^x$

$$y' = 6x^2 \cdot e^{-x^3/2} + 2x^3 \cdot e^{-x^3/2} \cdot \left(-\frac{3x^2}{2}\right) \ ,$$

a po úprave dostávame prvú deriváciu funkcie

$$y' = 3x^2 \cdot e^{-x^3/2} \ .$$

Druhú deriváciu funkcie vypočítame, ak zderivujeme už raz derivovanú funkciu $y' = 3x^2 \cdot e^{-x^3/2}$. Opäť ide o súčin dvoch funkcií $f(x) = 3x^2$ a $g(x) = e^{-x^3/2}$, preto použijeme vzťah pre deriváciu súčinu $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$$y'' = (3x^2)' \cdot e^{-x^3/2} + (3x^2) \cdot (e^{-x^3/2})' \ .$$

Použijeme rovnaké základné vzťahy ako pri prvej derivácii, čiže $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ a $(e^x)' = e^x$ a dostaneme druhú deriváciu funkcie

$$y'' = 6x \cdot e^{-x^3/2} + 3x^2 \cdot e^{-x^3/2} \cdot \left(-\frac{3x^2}{2}\right) \ ,$$

po jednoduchej úprave dostaneme druhú deriváciu v tvare

$$y'' = e^{-x^3/2} \cdot \left(6x - \frac{9}{2} \cdot x^4\right) \ .$$

□

Príklady na cvičenia:

1. Vypočítajte derivácie nasledujúcich funkcií:

(a) $y = \sin(5x) + 5\log_3(x)$

Výsledok:

$$y' = 5\cos(5x) + 5 \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 3} \ .$$

(b) $y = \arcsin(x) \cdot 3^x$

Výsledok:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot 3^x + \arcsin(x) \cdot 3^x \cdot \ln 3 \ .$$

(c) $y = \frac{x^3+\mathrm{tg}(x)}{\cos(x)+\sin(x)}$

Výsledok:

$$y' = \frac{\left(3x^2 + \frac{1}{\cos^2(x)}\right) \cdot (\cos(x) + \sin(x)) - (x^3 + \mathrm{tg}(x)) \cdot (\cos(x) - \sin(x))}{(\cos(x) + \sin(x))^2} \ .$$

(d) $y = \frac{e^x \cdot \mathrm{cotg}(x)}{\arccos(x)}$

Výsledok:

$$y' = \frac{\left(e^x \cdot \mathrm{cotg}(x) + e^x(-\frac{1}{\sin^2(x)})\right) \cdot \arccos(x) - e^x \cdot \mathrm{cotg}(x) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{\arccos^2(x)} \ .$$

(e) $y = 4 \cdot 5^x + \cos(3x)$

Výsledok:

$$y' = 4 \cdot 5^x \cdot \ln 5 - 3\sin(3x) \ .$$

(f) $y = \log_2(x) \cdot \mathrm{cotg}(x)$

Výsledok:

$$y' = \frac{1}{x \cdot \ln 2} \cdot \mathrm{cotg}(x) - \log_2(x) \cdot \frac{1}{\sin^2(x)} \ .$$

(g) $y = \frac{x^2+\cos(x)}{4x+\sin(x)}$

Výsledok:

$$y^{'}=\frac{(2x-\sin(x))\cdot(4x+\sin(x))-(x^2+\cos(x))\cdot(4+\cos(x))}{(4x+\sin(x))^2}\ .$$

(h) $\quad y=\frac{\mathrm{arctg}(x)\cdot 4x^5}{\log_5(x)}$

Výsledok:

$$y^{'}=\frac{\left(\frac{1}{1+x^2}\cdot 4x^5+\mathrm{arctg}(x)\cdot 20x^4\right)\cdot\log_5(x)-\mathrm{arctg}(x)\cdot 4x^5\cdot\frac{1}{x\cdot\ln 5}}{\log_5^2(x)}\ .$$

(i) $\quad y=\arcsin(\ln^2(x)\cdot e^{2x})$

Výsledok:

$$y^{'}=\frac{1}{\sqrt{1-(\ln^2(x)\cdot e^{2x})^2}}\cdot\left(2\ln(x)\cdot\frac{1}{x}\cdot e^{2x}+\ln^2(x)\cdot 2e^{2x}\right)\ .$$

(j) $\quad y=\frac{\arcsin(x)}{\log_3(x)\cdot\sqrt{x}}$

Výsledok:

$$y^{'}=\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot(\log_3(x).\sqrt{x})-\arcsin(x)\cdot\left(\frac{1}{x\cdot\ln 3}\cdot\sqrt{x}+\log_3(x)\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-1/2}\right)}{(\log_3(x)\cdot\sqrt{x})^2}\ .$$

(k) $\quad y=5^x\cdot\mathrm{arctg}(\ln(5x^4))$

Výsledok:

$$y^{'}=5^x\cdot\ln 5\cdot\mathrm{arctg}(\ln(5x^4))+\frac{4\cdot 5^x}{x\cdot(1+\ln^2(5x^4))}\ .$$

(l) $\quad y=\arccos^2(\ln(e^{4x}))$

Výsledok:

$$y^{'}=\frac{-8\cdot\arccos(\ln(e^{4x}))}{\sqrt{1-(\ln(e^{4x}))^2}}\ .$$

(m) $\quad y=4\mathrm{tg}(4^x+\ln^5(x))$

Výsledok:

$$y^{'}=\frac{4}{\cos^2(4^x+\ln^5(x))}\cdot\left(4^x\cdot\ln 4+5\ln^4(x)\cdot\frac{1}{x}\right)\ .$$

(n) $\quad y=\sqrt{3^x+3x}\cdot(\sin(e^x+4)^2)$

Výsledok:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{3^x + 3x}}(3^x \ln 3 + 3)(\sin(e^x + 4)^2) + \sqrt{3^x + 3x} \cdot (\cos(e^x + 4)^2 \cdot 2(e^x + 4)e^x) \ .$$

(o) $y = \sin(\arcsin^2(2x))$

Výsledok:

$$y' = \cos(\arcsin^2(2x)) \cdot 2\arcsin(2x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (2x)^2}} \cdot 2 \ .$$

(p) $y = \sqrt{\frac{\cos(x^2)}{e^{4x}\ln(x)}}$

Výsledok:

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos(x^2)}{e^{4x} \cdot \ln(x)}\right)^{-1/2} \cdot \frac{(-\sin(x^2)2x) \cdot e^{4x} \cdot \ln(x) - \cos(x^2) \cdot \left(4e^{4x} \cdot \ln(x) + e^{4x}\frac{1}{x}\right)}{(e^{4x} \cdot \ln(x))^2} \ .$$

(r) $y = 4^x \cdot \ln(\sqrt{e^x + 2})$

Výsledok:

$$y' = 4^x \cdot \ln 4 \cdot \ln\sqrt{e^x + 2} + \frac{4^x \cdot e^x}{2(e^x + 2)} \ .$$

(s) $y = \operatorname{arctg}^2\sqrt{\operatorname{tg}(x) + 4^x}$

Výsledok:

$$y' = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{tg}(x) + 4^x} \cdot \frac{1}{1 + (\operatorname{tg}(x) + 4^x)^2} \cdot \frac{1}{2}(\operatorname{tg}(x) + 4^x)^{-1/2} \cdot \left(\frac{1}{\cos^2(x)} + 4^x \ln 4\right) \ .$$

(t) $y = \frac{\sin^2(x)}{\cos(x^2)}$

Výsledok:

$$y' = \frac{2\sin(x) \cdot \cos(x) \cdot \cos(x^2) + \sin^2(x) \cdot \sin(x^2) \cdot 2x}{\cos^2(x^2)} \ .$$

(u) $y = \frac{\arcsin(x)}{x}$

Výsledok:

$$y^{'} = \frac{x - \sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin(x)}{x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}} \ .$$

(v) $\quad y = 3^{\frac{2x}{3-x^2}}$

Výsledok:

$$y^{'} = 3^{\frac{2x}{3-x^2}} \cdot \ln 3 \cdot \frac{2x^2+6}{(3-x^2)^2} \ .$$

(x) $\quad y = 2^{3x} \cdot \ln^2(\sin(5x))$

Výsledok:

$$y^{'} = 2^{3x} \cdot \ln(\sin(5x)) \cdot (3 \ln 2 \cdot \ln(\sin(5x)) + 10 \cdot \mathrm{cotg}(5x)) \ .$$

(y) $\quad y = \frac{\sqrt{\sin(x)}}{\cos^2(x)}$

Výsledok:

$$y^{'} = \frac{1}{2\sqrt{\sin(x)}} \cdot \cos^2(x) - \sin(2x) \cdot \sqrt{\sin(x)} \ .$$

(z) $\quad y = \ln(3^{x^2} + \mathrm{tg}(4x))$

Výsledok:

$$y^{'} = \frac{1}{3^{x^2} + \mathrm{tg}(4x)} \cdot \left(3^{x^2} \cdot \ln 3 \cdot 2x + \frac{1}{\cos^2(4x)} \cdot 4\right) \ .$$

2. Vypočítajte druhé derivácie nasledujúcich funkcií:

(a) $\quad y = \sin(2x) \cdot \sqrt{x}$

Výsledok:

$$y^{'} = 2\sqrt{x} \cdot \cos(2x) + \frac{\sin(2x)}{2\sqrt{x}} \ ,$$

$$y^{''} = \frac{\cos(2x)}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x} \cdot (\sin(2x)) + \frac{4 \cdot \sqrt{x} \cdot \cos(2x) - \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}}}{4x} \ .$$

(b) $y = \frac{2x+3}{5-4x}$

Výsledok:

$$y^{'} = \frac{22}{(5-4x)^2} \ ,$$

$$y^{''} = \frac{176}{(5-4x)^3} \ .$$

(c) $y = (\sqrt{x^2-3}) \cdot \ln(1/x)$

Výsledok:

$$y^{'} = \frac{x \cdot \ln(1/x)}{\sqrt{x^2-3}} - \frac{\sqrt{x^2-3}}{x} \ ,$$

$$y^{''} = \frac{\ln(1/x) \cdot (\sqrt{x^2-3}) - x^2 \cdot \ln(1/x)}{(x^2-3) \cdot \sqrt{x^2-3}} \ .$$

(d) $y = (x^4 - 3x^3 + 2x) \cdot \ln(x)$

Výsledok:

$$y^{'} = (4x^3 - 9x^2 + 2)\ln(x) + (x^4 - 3x^2 + 2x) \cdot \frac{1}{x} \ ,$$

$$y^{''} = (12x^2 - 18x)\ln(x) + (4x^3 - 9x^2 + 2)\frac{1}{x} + (4x^3 - 9x^2 + 2)\frac{1}{x} + (x^4 - 3x^3 + 2x)\left(-\frac{1}{x^2}\right) .$$

(e) $y = \mathrm{tg}(2x+3)$

Výsledok:

$$y^{'} = \frac{2}{\cos^2(2x+3)} \ ,$$

$$y^{''} = \frac{8\sin(2x+3)}{\cos^3(2x+3)} \ .$$

(f) $y = e^{x^3+4x}$

Výsledok:

$$y^{'} = e^{x^3+4x} \cdot (3x^2+4) \ ,$$

$$y^{''} = e^{x^3+4x} \cdot (3x^2+4) \cdot (3x^2+4) + e^{x^3+4x} \cdot 6x \ .$$

(g) $y = \text{arctg(2x)}$

Výsledok:

$$y^{'} = \frac{2}{1+4x^2} \ ,$$

$$y^{''} = -\frac{16x}{(1+4x^2)^2} \ .$$

(h) $y = \cos^3(x)$

Výsledok:

$$y^{'} = -3\cos^2(x)\sin(x) \ ,$$

$$y^{''} = 6\cos(x)\cdot\sin^2(x) - 3\cos^3(x) \ .$$

(i) $y = \text{cotg}(3x)$

Výsledok:

$$y^{'} = -\frac{3}{\sin^2(3x)} \ ,$$

$$y^{''} = \frac{18\sin(3x)\cdot\cos(3x)}{\sin^4(3x)} \ .$$

(j) $y = \sin(5x)\cdot\cos(5x)$

Výsledok:

$$y^{'} = 5\cos^2(5x) - 5\sin^2(5x) \ ,$$

$$y^{''} = -100\sin(5x)\cdot\cos(5x) \ .$$

Kapitola 3

Geometrické aplikácie derivácií

Ak f má deriváciu na otvorenom intervale I, tak v ľubovoľnom bode $x_0 \in I$ rovnica dotyčnice ku grafu funkcie f v bode x_0 je

$$y = y_0 + f^{'}(x_0)(x - x_0) = y_0 + y^{'}(x_0)(x - x_0) \ .$$

Ak $f^{'}(x_0) \neq 0$, rovnica normály má tvar

$$y = y_0 - \frac{1}{f^{'}(x_0)}(x - x_0) = y_0 - \frac{1}{y^{'}(x_0)}(x - x_0) \ .$$

Ak $f^{'}(x_0) = 0$, rovnica normály je

$$x = x_0.$$

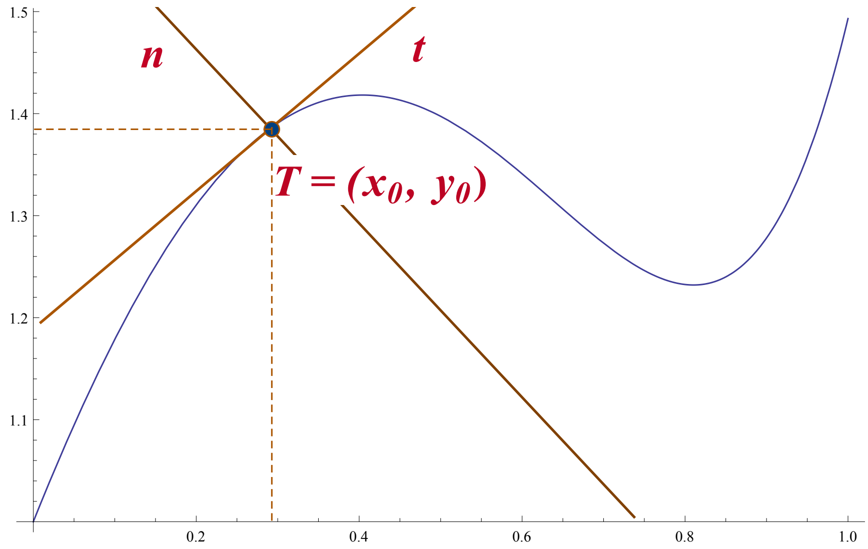
Rovnicu dotyčnice si možno pamätať aj v ekvivalentnom tvare

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

kde $k = f^{'}(x_0) = y^{'}(x_0)$.

Podobne, ak $k \neq 0$, rovnicu normály je vhodné zapamätať si aj v ekvivalentnom tvare

$$y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0).$$



Príklad č. 1. Vypočítajme deriváciu funkcie $y = \ln(x) + 2$ a napíšeme rovnice dotyčnice a normály v bode $x_0 = e$.

Riešenie:

Krok č. 1: Z predchádzajúceho textu vieme, že k tomu, aby sme vedeli napísať rovnicu dotyčnice, resp. normály, musíme poznať súradnice dotykového bodu T so súradnicami $(x_0,\ y_0)$. x-ovú súradnicu bodu T poznáme (x_0), preto dopočítame y-ovú súradnicu dosadením x_0 do našej funkcie.

Dotykový bod $T = (x_0, y_0) = (e, 3)$.

$$y_0 = \ln(e) + 2\ ,$$

$$y_0 = 1 + 2 = 3\ .$$

Krok č. 2: Dotyčnica je priamka, ktorá má tvar $y = y_0 + k(x - x_0)$. Smernica priamky k je definovaná ako derivácia funkcie $y = \ln(x) + 2$ v bode x_0. Preto funkciu zderivujeme:

$$y^{'} = \frac{1}{x}\ .$$

Krok č. 3: Smernicu dotyčnice $k = y^{'}(x_0)$ získame dosadením $x_0 = e$ do derivácie funkcie.

$$y^{'}(e) = \frac{1}{e}\ .$$

Krok č. 4: Teraz už máme všetky potrebné údaje a vieme napísať rovnicu dotyčnice a rovnicu normály.

Rovnica dotyčnice má tvar $t: \ y - y_0 = k(x - x_0)$. Po dosadení $T = (e, 3)$ a $k = \frac{1}{e}$ dostávame:

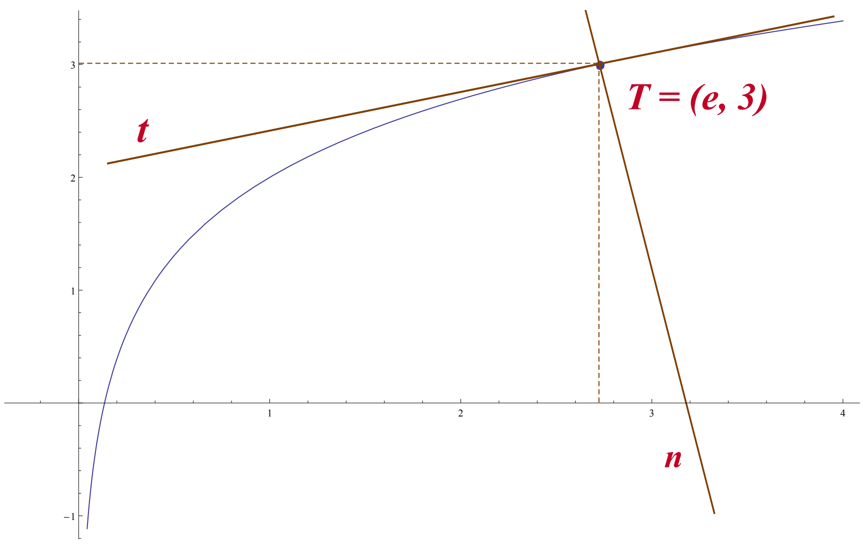
$$t: \ y - 3 = \frac{1}{e}(x - e) \ ,$$

po úprave

$$t: \ y = \frac{1}{e}(x - e) + 3 \ .$$

Rovnica normály má tvar $n: y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0)$. Od rovnice dotyčnice sa líši len smernicou, čo je obrátená hodnota derivácie funkcie v bode x_0, len so záporným znamienkom. To znamená, že normála je kolmá na dotyčnicu a prechádza dotykovým bodom T. Po dosadení $T = (e, 3)$ a $k = \frac{1}{e}$ dostávame:

$$n: y = -e(x - e) + 3 \ .$$



Obr. 3.1: $y = \ln(x) + 2$.

Príklad č. 2. Vypočítajme deriváciu nasledujúcej funkcie $y = \frac{1}{x}\sin(x)$ a napíšeme rovnice dotyčnice a normály v danom bode $x_0 = \pi/2$.

Riešenie:

Krok č. 1: Máme zadanú x-ovú súradnicu dotykového bodu T, teda stačí dopočítať y-ovú súradnicu. Dosadíme preto súradnicu x_0 do zadanej funkcie a vypočítame y_0:

$$y_0 = \frac{1}{\pi/2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \ ,$$

$$y_0 = \frac{2}{\pi} \cdot 1 = \frac{2}{\pi} \ .$$

Krok č. 2: Rovnica dotyčnice je definovaná v tvare $y = y_0 + k(x - x_0)$. Súradnice dotykového bodu už poznáme, preto určíme ešte smernicu dotyčnice k. Smernicu k určuje derivácia funkcie v dotykovom bode T, teda $k = y^{'}(x_0)$. Funkciu $y = \frac{1}{x}\sin(x)$ preto zderivujeme.

$$y^{'} = -\frac{1}{x^2}\sin(x) + \frac{1}{x}\cos(x) \ .$$

Krok č. 3: Do derivácie funkcie dosadíme súradnicu $x_0 = \pi/2$ bodu T.

$$k = y^{'}(\pi/2) = -\frac{1}{(\pi/2)^2} \cdot \sin(\pi/2) + \frac{1}{\pi/2}\cos(\pi/2) \ ,$$

$$k = y^{'}(\pi/2) = -\frac{1}{(\pi/2)^2} \cdot 1 + \frac{2}{\pi} \cdot 0 = -\frac{4}{\pi^2} \ .$$

Smernica dotyčnice k je teda $-\frac{4}{\pi^2}$.

Krok č. 4: Dotyčnica je priamka, ktorá je určená bodom T, v ktorom sa dotýka našej funkcie, a smenicou dotyčnice k. Smernica určuje “smer" našej dotyčnice. Tieto dva údaje sme už získali predošlým výpočtom, preto môžeme napísať rovnicu dotyčnice.

Rovnica dotyčnice má tvar $t: \ y - y_0 = k(x - x_0)$. Po dosadení $T = (\frac{\pi}{2}, \frac{2}{\pi})$ a $k = -\frac{4}{\pi^2}$ dostávame:

$$t: \ y - \frac{2}{\pi} = -\frac{4}{\pi^2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \ ,$$

a po úprave máme

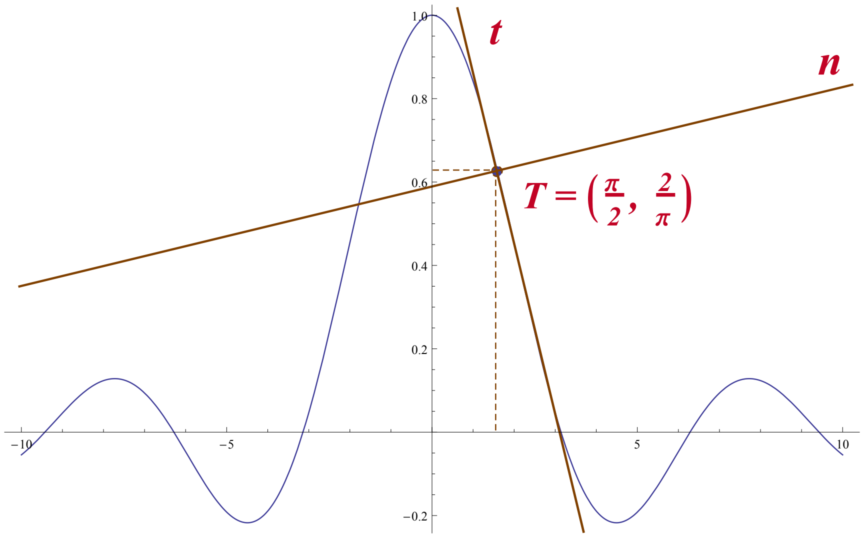
$$t: \ y = -\frac{4}{\pi^2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{\pi} \ .$$

Rovnica normály má tvar:

$$n: \ y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0) \ .$$

Po dosadení $T = (\frac{\pi}{2}, \frac{2}{\pi})$ a $k = -\frac{4}{\pi^2}$ dostávame:

$$n: \ y = \frac{\pi^2}{4}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{\pi} \ .$$



Obr. 3.2: $y = \frac{1}{x}\sin(x)$.

Príklad č. 3. Vypočítajme deriváciu nasledujúcej funkcie $y = x^3 + 3x^2 + 4$ a napíšeme rovnice dotyčnice a normály v danom bode $x_0 = -1$.

Riešenie:

Krok č. 1: Opäť máme zadanú x-ovú súradnicu dotykového bodu T, dopočítame preto y-ovú súradnicu y_0 dosadením x_0 do našej funkcie $y = x^3 + 3x^2 + 4$:

$$y_0 = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 4 = 6 \ .$$

Krok č. 2: Smernica dotyčnice k je daná deriváciou funkcie $y = x^3 + 3x^2 + 4$ v bode x_0, preto funkciu zderivujeme:

$$y' = 3x^2 + 6x \ .$$

Krok č. 3: Dosadíme súradnicu x_0 dotykového bodu T a vyčíslime smernicu dotyčnice k:

$$k = y'(-1) = 3(-1)^2 + 6(-1) = -3 \ .$$

Smernica dotyčnice k je -3.

Krok č. 4: Dosadíme súradnice bodu $T = (-1, 6)$ a smernicu $k = -3$ do rovnice dotyčnice $y = y_0 + k(x - x_0)$:

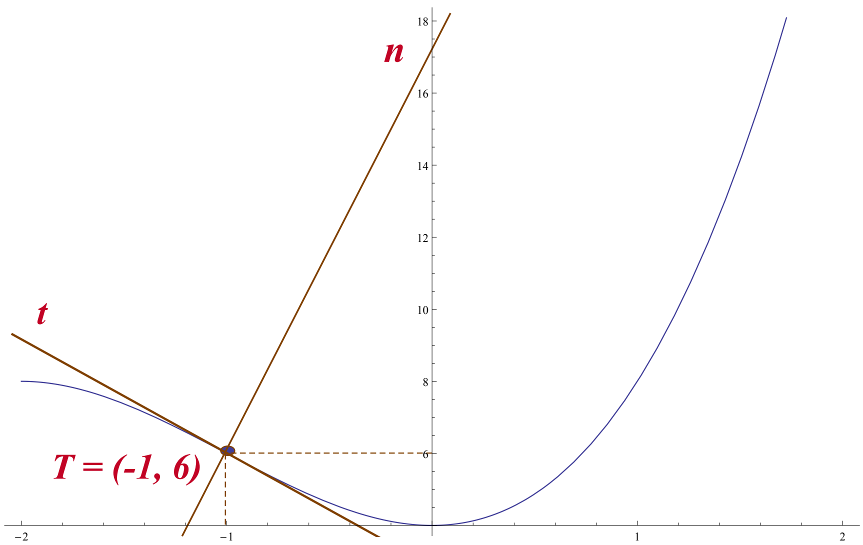
$$t: \ y - 6 = -3(x - 1) \ .$$

Rovnica dotyčnice má tvar

$$t: \ y = -3(x-1) + 6 \ .$$

Rovnica normály má tvar $n: y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0)$, pričom smernica je obrátená hodnota derivácie našej funkcie v bode x_0 so záporným znamienkom, teda $k = -\frac{1}{y'(x_0)}$:

$$n: \ y = \frac{1}{3}(x-1) + 6 \ .$$



Obr. 3.3: $y = x^3 + 3x^2 + 4$.

Príklad č. 4. Vypočítajme deriváciu nasledujúcej funkcie $y = 3^x + x^3$ a napíšeme rovnice dotyčnice a normály v danom bode $x_0 = 1$.

Riešenie:

Krok č. 1: Postupujeme rovnako ako v predošlých prípadoch, teda dopočítame y-ovú súradnicu y_0 bodu T dosadením x_0 do našej funkcie $y = 3^x + x^3$:

$$y_0 = 3^1 + 1^3 = 4 \ .$$

Krok č. 2: Smernica dotyčnice k je derivácia funkcie v dotykovom bode T, preto funkciu $y = 3^x + x^3$ zderivujeme:

$$y' = 3^x \cdot \ln 3 + 3x^2 \ .$$

Krok č. 3: Dosadíme súradnicu $x_0 = 1$ dotykového bodu T do derivácie našej funkcie a vyčíslime smernicu dotyčnice k.

$$k = y^{'}(1) = 3^1 \cdot \ln 3 + 3 \cdot 1^2 \ ,$$

$$k = y^{'}(1) = 3\ln 3 + 3 \ .$$

Krok č. 4: Dosadíme súradnice bodu $T = (1, 4)$ a smernicu $k = 3\ln 3 + 3$ do rovnice dotyčnice $y = y_0 + k(x - x_0)$.

$$t: \ y - 4 = (3\ln 3 + 3)(x - 1) \ .$$

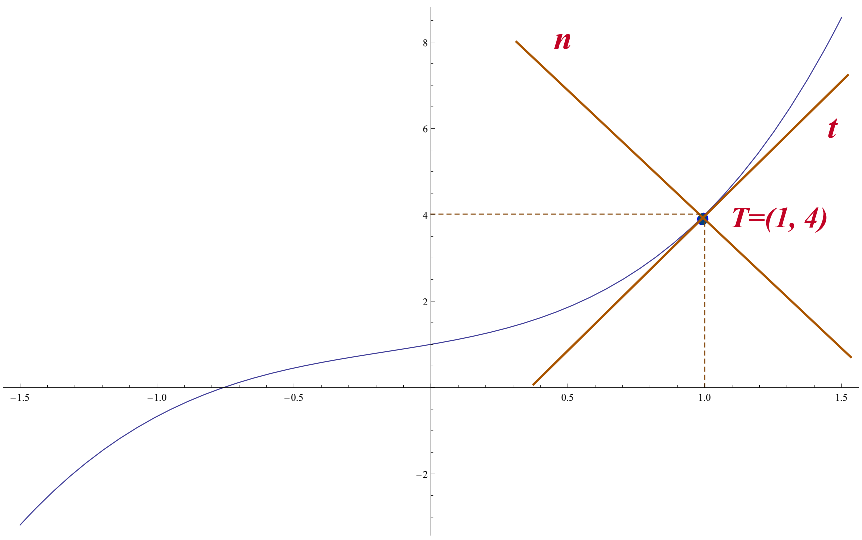
Rovnica dotyčnice po úprave

$$t: \ y = (3\ln 3 + 3)(x - 1) + 4 \ .$$

Rovnica normály má tvar $n: \ y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0)$, kde smernica $k = -\frac{1}{y^{'}(x_0)}$.

Rovnica normály po dosadení a úprave bude

$$n: \ y = \frac{-1}{3\ln 3 + 3}(x - 1) + 4 \ .$$



Obr. 3.4: $y = 3^x + x^3$.

Príklad č. 5. Vypočítame uhly, pod ktorými pretína graf danej funkcie $y = \sin(x)$ os x.

Riešenie:

Krok č. 1: Funkcia $y = \sin(x)$ je periodická s periódou 2π a pretína os x v bodoch 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, atď. Vzhľadom na periódu stačí príklad vyriešiť pre dva z týchto bodov, napr. $x_1 = 0$ a $x_2 = \pi$.

Krok č. 2: V ďalšom kroku vypočítame smernicu dotyčníc k v bodoch, v ktorých graf funkcie $y = \sin(x)$ pretína os x

$$y' = \cos(x) \ .$$

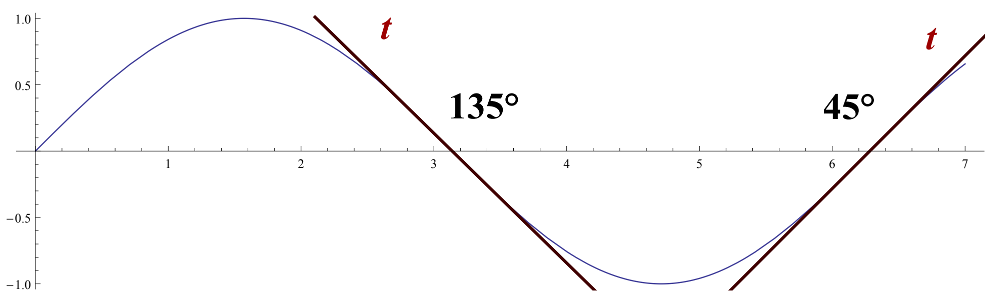
Smernica dotyčnice k_1 v bode $x_1 = 0$ ($k_1 = y'(0)$) má hodnotu $k_1 = \cos(0) = 1$.

Smernica dotyčnice k_2 v bode $x_2 = \pi$ ($k_2 = y'(\pi)$) má hodnotu $k_2 = \cos(\pi) = -1$.

Krok č. 3: V poslednom kroku vypočítame uhly α, ktoré zvierajú dotyčnice v bodoch $x = 0, \pi$ s osou x.

Uhol, ktorý zviera dotyčnica v bode $x_1 = 0$ vypočítame pomocou vzťahu $k_1 = \mathrm{tg}(\alpha)$, teda $1 = \mathrm{tg}(\alpha)$. Uhol α je potom $\mathrm{arctg}(1) = 45°$.

Uhol, ktorý zviera dotyčnica v bode $x_2 = \pi$ vypočítame pomocou vzťahu $k_2 = \mathrm{tg}(\alpha)$, teda $-1 = \mathrm{tg}(\alpha)$. Uhol α bude $\mathrm{arctg}(-1) = 135°$.



Obr. 3.5: $y = \sin(x)$.

Príklad č. 6. Vypočítame uhly, pod ktorými pretína graf danej funkcie $y = x^2 - x - 12$ os x.

Riešenie:

Krok č. 1: Aby sme vedeli zistiť body, v ktorých pretína daná funkcia os x, položíme funkciu $y = x^2 - x - 12$ rovnú nule:

$$x^2 - x - 12 = 0 \ .$$

Určíme korene kvadratickej rovnice

$$(x+3)(x-4) = 0 \ ,$$

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 4 \ .$$

Naša funkcia pretína os x v bodoch -3 a 4.

Krok č. 2: Pokračujeme v určení smernice dotyčníc k v bodoch, v ktorých graf funkcie $y = x^2 - x - 12$ pretína os x:

$$y^{'} = 2x - 1 \ .$$

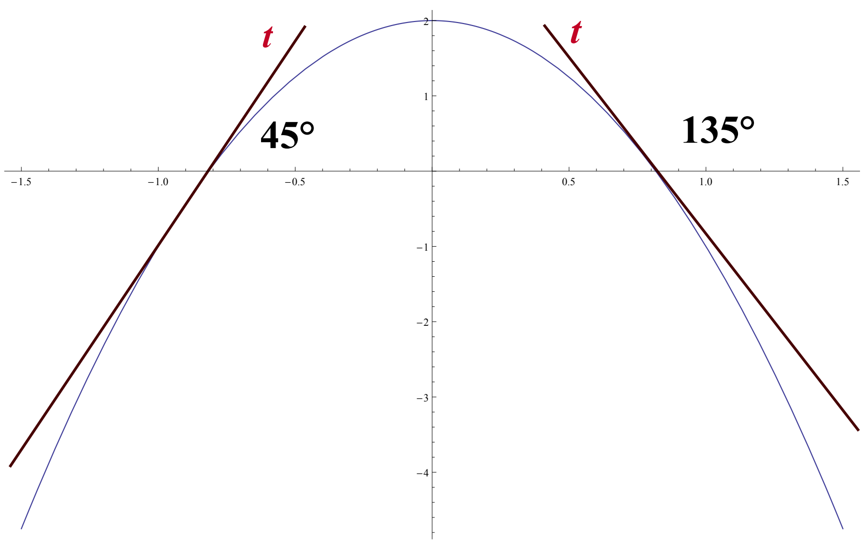
Smernica dotyčnice k_1 v bode $x_1 = -3$ ($k_1 = y^{'}(-3)$) má hodnotu $k_1 = 2 \cdot (-3) - 1 = -7$.

Smernica dotyčnice k_2 v bode $x_2 = 4$ ($k_2 = y^{'}(4)$) má hodnotu $k_2 = 2 \cdot (4) - 1 = 7$.

Krok č. 3: Vypočítame ešte uhly α, ktoré zvierajú dotyčnice v bodoch $x_1 = -3$, $x_2 = 4$ s osou x.

Uhol, ktorý zviera dotyčnica v bode $x_1 = -3$ vypočítame už pomocou známeho vzťahu $k_1 = \mathrm{tg}(\alpha)$, teda $-7 = \mathrm{tg}(\alpha)$. Uhol α je potom $\mathrm{arctg}(-7) = 98^{\circ}7^{'}$.

Uhol, ktorý zviera dotyčnica v bode $x_2 = 4$ dostaneme zo vzťahu $7 = \mathrm{tg}(\alpha)$. Uhol α je bude $\mathrm{arctg}7 = 81^{\circ}52^{'}$.



Obr. 3.6: $y = x^2 - x - 12$.

Príklady na cvičenia:

1. Vypočítajte derivácie nasledujúcich funkcií a pre každú z nich napíšte rovnice dotyčnice a normály v danom bode x_0:

(a) $y = \sqrt[3]{x^2+4}, \quad x_0 = 2$

Výsledok: $t: y = \frac{4}{3\cdot\sqrt[3]{64}}(x-2)+2,$ $n: y = \frac{-3\cdot\sqrt[3]{64}}{4}(x-2)+2.$

(b) $y = (1+1/x)^3, \quad x_0 = 1$

Výsledok: $t: y = -12(x-1)+8,$ $n: y = \frac{1}{12}(x-1)+8.$

(c) $y = (x^4+16)(x-1), \quad x_0 = 0$

Výsledok: $t: y = 16x-16,$ $n: y = -\frac{1}{16}x-16.$

(d) $y = e^{2x-1}, \quad x_0 = 1$

Výsledok: $t: y = 2e(x-1)+e,$ $n: y = -\frac{1}{2e}(x-1)+e.$

(e) $y = 5^{x+1}, \quad x_0 = -2$

Výsledok: $t: y = \frac{1}{5}\ln 5(x+2)+\frac{1}{5},$ $n: y = -\frac{5}{\ln 5}(x+2)+\frac{1}{5}.$

(f) $y = \ln(x^2/4), \quad x_0 = 2$

Výsledok: $t: y = -1(x-2),$ $n: y = -x+2.$

(g) $y = 2\cos(x)-3, \quad x_0 = \pi/2$

Výsledok: $t: y = -2(x-\pi/2)-3,$ $n: y = \frac{1}{2}(x-\pi/2)-3.$

(h) $y = 3x\cdot\sin(x)+4\cdot\cos(x), \quad x_0 = \pi$

Výsledok: $t: y = -3\pi(x-\pi)-4,$ $n: y = \frac{1}{3\pi}(x-\pi)-4.$

(i) $y = \mathrm{tg}(2x)+1, \quad x_0 = \pi/2$

Výsledok: $t: y = 2(x-\pi/2)+1,$ $n: y = -\frac{1}{2}(x-\pi/2)+1.$

(j) $y = \frac{\mathrm{cotg}(x)}{x}, \quad x_0 = \pi/4$

Výsledok: $t: y = \frac{-8(\pi+2)}{\pi^2}(x-\pi/4)+4/\pi,$ $n: y = \frac{\pi^2}{8(\pi+2)}(x-\pi/4)+4/\pi.$

(k) $y = (x^5-2)\sin(x), \quad x_0 = 0$

Výsledok: $t: y = -2x,$ $n: y = \frac{1}{2}x.$

(l) $y = e^{-x} + 2x, \quad x_0 = 1$

Výsledok: $t: y = (2-1/e)(x-1)+1/e+2,$ $n: y = \left(\frac{-1}{2-1/e}\right)(x-1)+1/e+2.$

(m) $y = \frac{2x-1}{3x+2}, \quad x_0 = 1$

Výsledok: $t: y = \frac{7}{25}(x-1) + \frac{1}{5},$ $n: y = -\frac{25}{7}(x-1) + \frac{1}{5}.$

(n) $y = x^2 \cdot \ln(2x), \quad x_0 = 1$

Výsledok: $t: y = (2\ln 2 + 1)(x-1),$ $n: y = -\frac{1}{2\ln 2+1}(x-1).$

(o) $y = \frac{e^x-1}{e^{-x}+1}, \quad x_0 = 0$

Výsledok: $t: y = \frac{1}{2}x,$ $n: y = -2x.$

2. V nasledujúcich príkladoch vypočítajte uhly, pod ktorými pretínajú grafy daných funkcií os x:

(a) $y = \sin(2x)$

Výsledok: $x_1 = 0$, $x_2 = \pi/2$, $x_3 = \pi$, $\alpha_1 = \operatorname{arctg} 2$, $\alpha_2 = \operatorname{arctg}(-2)$, $\alpha_3 = \operatorname{arctg} 2$.

(b) $y = \ln(x) + 2$

Výsledok: $x = 1/e^2$, $\alpha = \operatorname{arctg}(e^2)$.

(c) $y = x^3 + 2x^2 - x - 2$

Výsledok: $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$, $\alpha_1 = \operatorname{arctg}(-2)$, $\alpha_2 = \operatorname{arctg} 2$, $\alpha_3 = \operatorname{arctg} 6$.

(d) $y = x^2 + 2x - 3$

Výsledok: $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, $\alpha_1 = \operatorname{arctg}(-4)$, $\alpha_2 = \operatorname{arctg} 2$.

(e) $y = e^{2x} - e$

Výsledok: $x = 1/2$, $\alpha = \operatorname{arctg}(2e)$.

(f) $y = 2\operatorname{arctg}(2x)$

Výsledok: $x = 0$, $\alpha = \operatorname{arctg} 4$.

(g) $y = \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{x}$

Výsledok: $x = 1$, $\alpha = \operatorname{arctg}(-1)$.

Kapitola 4

Lokálne a globálne extrémy funkcie jednej premennej

Nech funkcia f je definovaná na intervale I a nech má druhú deriváciu v každom vnútornom bode tohoto intervalu.

Z teórie vieme, že ak x_0 je vnútorný bod intervalu I, tak:

(1) f má v x_0 **lokálne maximum**, ak $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) < 0$,

(2) f má v x_0 **lokálne minimum**, ak $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) > 0$.

Body x_0, v ktorých je $f'(x_0) = 0$, nazývame **kritické body**, používa sa aj pojem stacionárne body.

Na určenie globálnych extrémov funkcie f na konečnom *uzavretom* intervale I, teda na určenie najväčšej a najmenšej hodnoty f na I (a bodov, v ktorých sa tieto hodnoty nadobúdajú), používame nasledujúcu metódu:

(a) Určíme všetky stacionárne body funkcie f vnútri intervalu I a hodnoty funkcie v týchto bodoch.

(b) Vypočítame hodnoty funkcie f v krajných bodoch intervalu I.

(c) Spomedzi hodnôt získaných v (a), (b), vyberieme najväčšiu a najmenšiu hodnotu.

Ak f je definovaná na zjednotení viacerých intervalov, spracujeme ju v jednotlivých intervaloch a výsledky zhrnieme tak, ako je uvedené v bode (c).

Tento postup nám postačí v príkladoch, s ktorými sa pri štúdiu stretneme. Viac metód na určenie extrémov sa dozviete na prednáškach.

Príklad č. 1. Nájdime lokálne extrémy funkcie $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$.

Riešenie: Lokálne extrémy funkcie hľadáme v bodoch, kde je derivácia funkcie rovná nule, teda $f'(x) = 0$. Preto funkciu zderivujeme

$$f'(x) = 3x^2 - 4x \ ,$$

a položíme rovnú nule

$$3x^2 - 4x = 0 \ .$$

Vyjadríme z rovnice neznámu x a dostávame možných kandidátov na extrémy

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{4}{3} \ .$$

Vypočítame funkčné hodnoty funkcie v týchto dvoch bodoch dosadením $x_1 = 0$ a $x_2 = \frac{4}{3}$ do našej funkcie $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$:

$$f(0) = 0^3 - 2 \cdot 0^2 + 1 = 1 \ ,$$

$$f(4/3) = (4/3)^3 - 2(4/3)^2 + 1 = -5/27 \ .$$

Vypočítali sme súradnice dvoch kritických bodov $(0, 1)$ a $(\frac{4}{3}, -\frac{5}{27})$.

Druhá derivácia funkcie nám umožní určiť, či sa jedná o lokálne maximum alebo minimum. Preto funkciu ešte raz zderivujeme

$$f''(x) = 6x - 4 \ .$$

Do druhej derivácie dosadíme hodnotu kritického bodu $x_1 = 0$:

$$f''(0) = 6 \cdot 0 - 4 = -4 \ .$$

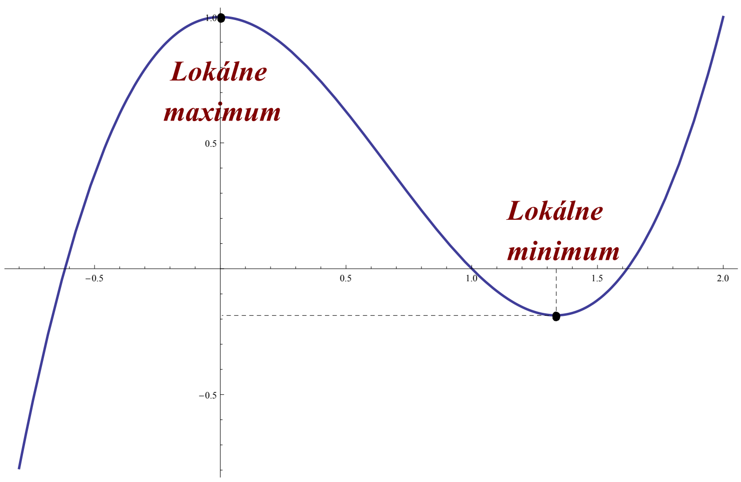
Podľa pravidiel popísaných na začiatku tejto kapitoly môžeme rozhodnúť, že v bode $x_1 = 0$ bude lokálne maximum, pretože $f''(0) = -4$.

Pre bod $x_2 = \frac{4}{3}$ podobne dostávame

$$f''\left(\frac{4}{3}\right) = 6 \cdot \frac{4}{3} - 4 = 4 \ .$$

V tomto prípade sme dostali kladnú hodnotu, čo znamená, že v bode $x_2 = \frac{4}{3}$ bude lokálne minimum.

Záver: Funkcia $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ nadobúda lokálne maximum v bode $x_1 = 0$ s hodnotou $f(0) = 1$, a lokálne minimum v bode $x_2 = \frac{4}{3}$ s hodnotou $f(4/3) = -5/27$.



Obr. 4.1: $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$.

Príklad č. 2. Nájdime globálne extrémy funkcie $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{x}$ na zjednotení intervalov $\langle -6, -2\rangle \cup \langle 4, 6\rangle$.

Riešenie: Vypočítame deriváciu našej funkcie

$$f'(x) = \frac{(1/2)(x^2 - 2x - 3)^{-1/2} \cdot (2x - 2)x - \sqrt{x^2 - 2x - 3}}{x^2} ,$$

a po krátkej úprave dostávame

$$f'(x) = \frac{x + 3}{x^2 \cdot \sqrt{x^2 - 2x - 3}} .$$

Kritické body hľadáme tam, kde $f'(x) = 0$, preto

$$\frac{x + 3}{x^2 \cdot \sqrt{x^2 - 2x - 3}} = 0 .$$

Dostávame rovnicu $x + 3 = 0$, odkiaľ po vyjadrení neznámej x dostávame

$$x = -3 .$$

Funkčnú hodnotu v tomto bode dostaneme dosadením za $x = -3$ do našej funkcie

$$f(-3) = \frac{\sqrt{9 + 6 - 3}}{-3} = -\frac{\sqrt{12}}{3} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} .$$

Súradnice prvého kritického bodu sú $(-3, -\frac{2\sqrt{3}}{3})$.

Musíme ešte určiť funkčné hodnoty v krajných bodoch našich intervalov:

$$f(-6) = \frac{\sqrt{36+12-3}}{-6} = -\frac{\sqrt{5}}{2}\ ,$$

$$f(-2) = \frac{\sqrt{4+4-3}}{-2} = -\frac{\sqrt{5}}{2}\ ,$$

$$f(4) = \frac{\sqrt{16-8-3}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{4}\ ,$$

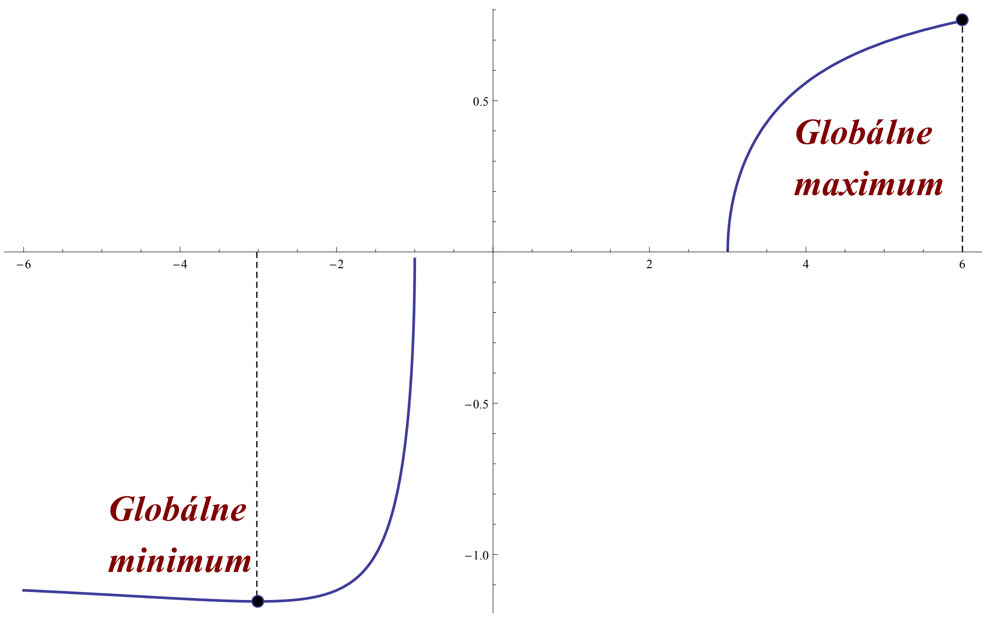
$$f(6) = \frac{\sqrt{36-12-3}}{6} = \frac{\sqrt{21}}{6}\ .$$

Súradnice ďalších kritických bodov sú $(-6, -\frac{\sqrt{5}}{2})$, $(-2, -\frac{\sqrt{5}}{2})$, $(4, \frac{\sqrt{5}}{4})$ a $(6, \frac{\sqrt{21}}{6})$.

Aby sme zachovali postup uvedený na začiatku tejto kapitoly, vyberieme teraz najväčšiu a najmenšiu funkčnú hodnotu kritických bodov.

- Najmenšia hodnota je v bode $(-3, -\frac{2\sqrt{3}}{3})$.
- Najväčšia hodnota je v bode $(6, \frac{\sqrt{21}}{6})$.

Záver: Funkcia $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{x}$ má lokálne a súčasne globálne minimum v bode $x = -3$ s hodnotou $f(-3) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Lokálne a súčasne globálne maximum nadobúda v bode $x = 6$ s funkčnou hodnotou $f(6) = \frac{\sqrt{21}}{6}$.



Obr. 4.2: $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{x}$.

Príklad č. 3. Nájdime globálne extrémy funkcie $f(x) = \frac{5}{2+3x}$ na intervale $\langle 0, 4\rangle$.

Riešenie: Na určenie najmenšej a najväčšej hodnoty použijeme prvú deriváciu funkcie

$$f'(x) = -\frac{15}{(2+3x)^2} \ .$$

Kritické body vo vnútri vyšetrovaného intervalu určíme z rovnice $f'(x) = 0$, teda

$$-\frac{15}{(2+3x)^2} = 0 \ .$$

Z riešenia rovnice vidíme, že naša funkcia nemá žiadne kritické body vo vnútri intervalu $\langle 0, 4\rangle$.

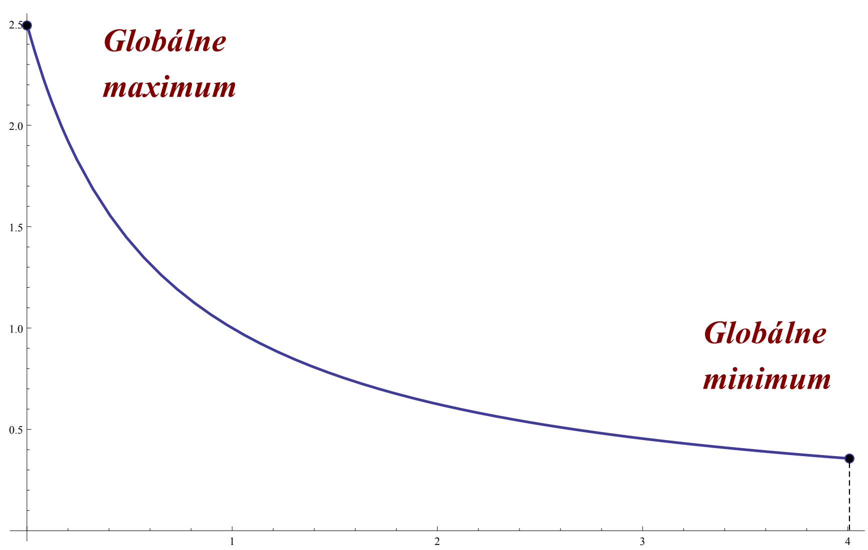
Globálne extrémy budú teda v krajných bodoch intervalu. Vypočítame funkčné hodnoty v týchto bodoch:

$$f(0) = \frac{5}{2+3\cdot 0} = \frac{5}{2} \ ,$$

$$f(4) = \frac{5}{2+3\cdot 4} = \frac{5}{14} \ .$$

Dostali sme súradnice krajných bodov intervalu $(0, \frac{5}{2})$ a $(4, \frac{5}{14})$ a vidíme, že najväčšia hodnota je $\frac{5}{2}$ a najmenšia hodnota je $\frac{5}{14}$.

Záver: Funkcia $f(x) = \frac{5}{2+3x}$ má globálne minimum v bode $x = 4$ s hodnotou $f(4) = \frac{5}{14}$, globálne maximum v bode $x = 0$ s hodnotou $f(0) = \frac{5}{2}$.



Obr. 4.3: $f(x) = \frac{5}{2+3x}$.

Príklad č. 4. Nájdime globálne extrémy funkcie $f(x) = 2x + \frac{8}{x}$ na zjenotení intervalov $\langle -6, -1\rangle \cup \langle 1, 5\rangle$.

Riešenie: Derivácia našej funkcie bude

$$f'(x) = 2 - \frac{8}{x^2} \ .$$

Kritické body vo vnútri intervalu určíme v bodoch, kde $f'(x) = 0$, teda

$$2 - \frac{8}{x^2} = 0 \ .$$

Rovnicu vyriešime a dostávame dva korene $x_1 = 2$ a $x_2 = -2$. Tieto body ležia vo vyšetrovaných intervaloch, takže sú kandidátmi na extrémy. Vypočítame funkčné hodnoty v týchto dvoch bodoch:

$$f(2) = 2 \cdot 2 + \frac{8}{2} = 8 \ ,$$

$$f(-2) = 2 \cdot (-2) - \frac{8}{2} = -8 \ .$$

Kritické body vo vnútri vyšetrovaného intervalu sú $(2, 8)$ a $(-2, -8)$.

Musíme ešte vypočítať funkčné hodnoty v krajných bodoch intervalov:

$$f(-6) = 2 \cdot (-6) - \frac{8}{6} = -\frac{40}{3} \ ,$$

$$f(-1) = 2 \cdot (-1) - \frac{8}{1} = -10 \ ,$$

$$f(1) = 2 \cdot 1 + \frac{8}{1} = 10 \ ,$$

$$f(5) = 2 \cdot 5 + \frac{8}{5} = \frac{58}{5} \ .$$

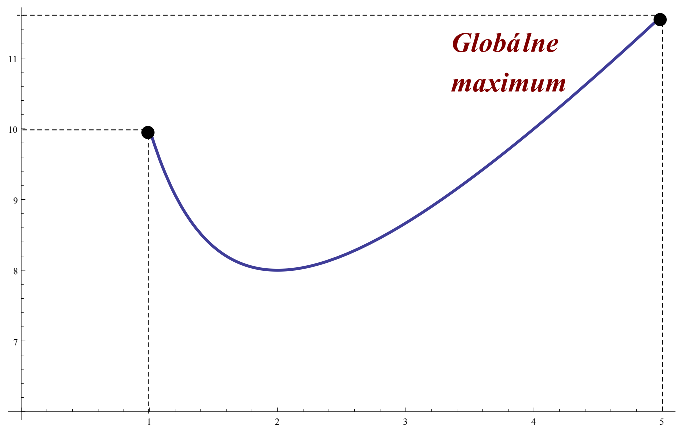
Súradnice ďalších kritických bodov sú $(-6, -\frac{40}{3})$, $(-1, -10)$, $(1, 10)$ a $(5, \frac{58}{5})$.

Vyberieme najväčšiu a najmenšiu funkčnú hodnotu z vyššie uvedených kritických bodov.

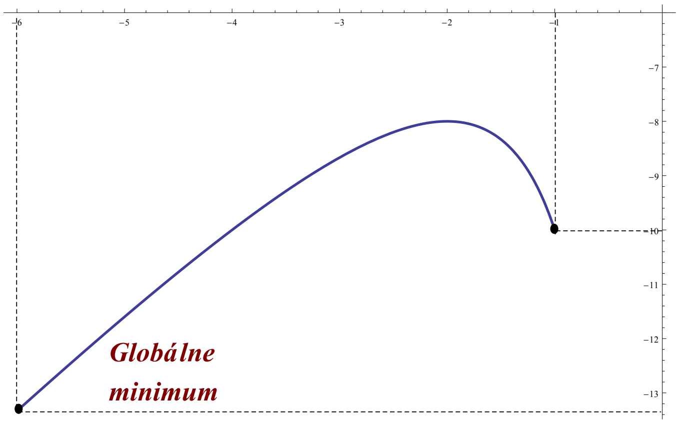
- Najmenšia hodnota je v bode $(-6, -\frac{40}{3})$.

- Najväčšia hodnota je v bode $(5, \frac{58}{5})$.

Záver: Funkcia $f(x) = 2x + \frac{8}{x}$ má na intervale $\langle -6, -1\rangle \cup \langle 1, 5\rangle$ globálne minimum v bode $x = -6$ s hodnotou $f(-6) = -\frac{40}{3}$ a globálne minimum v bode $x = 5$ s hodnotou $\frac{58}{5}$.



Obr. 4.4: $f(x) = 2x + \frac{8}{x}$.



Obr. 4.5: $f(x) = 2x + \frac{8}{x}$.

Príklad č. 5. Nájdime globálne extrémy funkcie $f(x) = \ln(x^2+x+1)$ na intervale $\langle -3, 1\rangle$.

Riešenie: Na určenie kritického bodu vo vnútri vyšetrovaného intervalu musíme funkciu zderivovať

$$f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1} \ ,$$

a vypočítať neznámu x z rovnice $f'(x) = 0$, teda

$$\frac{2x+1}{x^2+x+1} = 0 \ .$$

Koreňom rovnice je $x = -\frac{1}{2}$. Dopočítame funkčnú hodnotu v tomto bode dosadením za x do pôvodnej funkcie

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\left(-\frac{1}{2}\right)x^2 - \frac{1}{2} + 1\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right) \ .$$

Kritický bod vo vnútri vyšetrovaného intervalu má súradnice $(-\frac{1}{2}, \ln(\frac{3}{4}))$.

Určíme ešte funkčné hodnoty v krajných bodoch intervalu

$$f(-3) = \ln((-3)^2 - 3 + 1) = \ln 5 \ ,$$

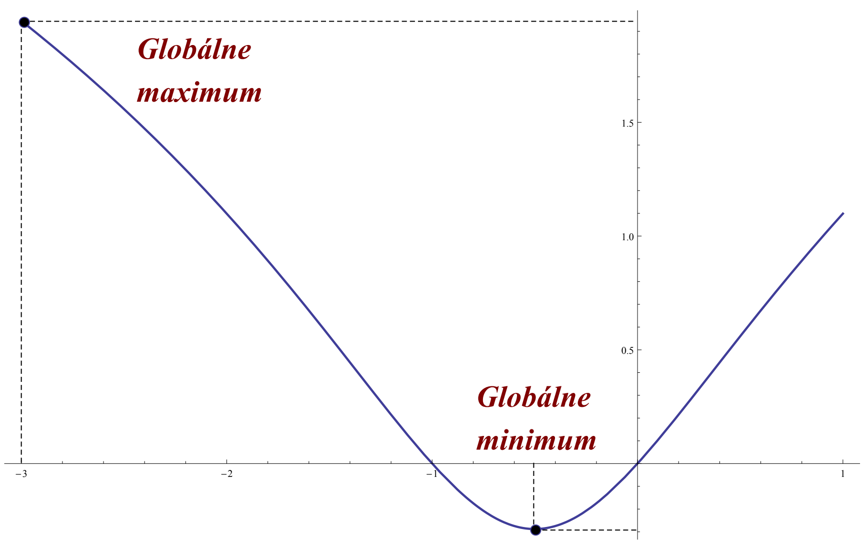
$$f(1) = \ln(1^2 + 1 + 1) = \ln 3 \ .$$

Súradnice kritických bodov v krajných bodoch intervalu sú $(-3, \ln 5)$, $(1, \ln 3)$.

Pokračujeme výberom najmenšej a najväčšej hodnoty z vyššie uvedených kritických bodov.

- Najmenšia hodnota je v bode $(-\frac{1}{2}, \ln(\frac{3}{4}))$.
- Najväčšia hodnota je v bode $(-3, \ln 5)$.

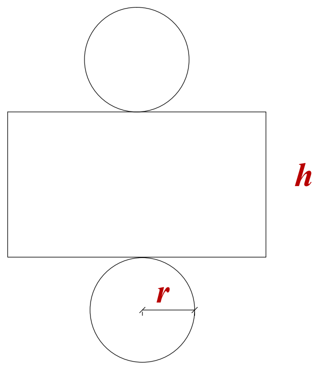
Záver: Funkcia $f(x) = \ln(x^2+x+1)$ nadobúda na intervale $\langle -3, 1\rangle$ v bode $x = -\frac{1}{2}$ globálne minimum s hodnotou $f(-\frac{1}{2}) = \ln(\frac{3}{4})$ a globálne maximum v bode $x = -3$ s hodnotou $\ln 5$.



Obr. 4.6: $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$.

4.1 Slovné úlohy na extrémy

Príklad č. 1. Uzavretý plechový valec má objem 1000 cm^3. Úlohou je nájsť rozmery valca (výšku valca a polomer podstáv), ktoré minimalizujú množstvo plechu na jeho výrobu, pričom jeho polomer nemôže byť menší ako 1 cm a väčší ako 10 cm.



Riešenie: Plochu valca vypočítame ako súčet plôch oboch podstáv a plochy plášťa. Podstavy valca majú kruhový tvar, teda S podstavy je $S_{pod} = \pi r^2$. Plášť valca má tvar obdĺžnika, teda jeho obsah bude $S_{pl} = 2\pi rh$.

Našou úlohou je nájsť globálne minimum výrazu

$$S_V = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi rh$$

pre $r \in \langle 1, 10 \rangle$.

Výraz obsahuje dve premenné, preto je nutné jednu z nich eliminovať. Použijeme na to fakt, že poznáme objem valca $V = 1000\ cm^3$. Objem valca vieme vypočítať podľa vzorca $V = \pi r^2 h$. Dostávame ďalší vzťah pre objem

$$1000 = \pi r^2 h\ .$$

Vyjadríme si z rovnice pre objem valca výšku valca h:

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

a dosadíme do vzťahu pre plochu valca

$$S_V = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{1000}{\pi r^2}\ .$$

Po úprave dostávame funkciu jednej premennej r

$$S(r) = 2 \cdot \pi r^2 + \frac{2000}{r}\ .$$

Tým sme dostali funkciu jednej premennej a budeme hľadať jej globálne minimum na intervale $r \in \langle 1, 10 \rangle$.

Derivácia funkcie $S^{'}(r)$ bude

$$S^{'}(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} \ .$$

Kritické body existujú tam, kde derivácia našej funkcie $S^{'}(r) = 0$. Dostávame rovnicu o jednej neznámej r, teda

$$4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0 \ .$$

Rovnicu si upravíme na tvar

$$4\pi r^3 - 2000 = 0 \ ,$$

a vyjadríme neznámu r

$$r^3 = \frac{2000}{4\pi} \ .$$

Po odmocnení dostávame

$$r = \left(\frac{2000}{4\pi}\right)^{1/3} = \left(\frac{500}{\pi}\right)^{1/3} \approx 5,419 \ cm \ .$$

Vypočítame funkčnú hodnotu v bode $r = 5,419$ dosadením r do funkcie $S(r) = 2 \cdot \pi r^2 + \frac{2000}{r}$

$$S(5,419) = 2 \cdot \pi \cdot 5,419^2 + \frac{2000}{5,419} = 553,49 \ .$$

Vypočítame ešte funkčné hodnoty v koncových bodoch intervalu $x = 1$ a $x = 10$:

$$S(1) = 2 \cdot \pi \cdot 1^2 + \frac{2000}{1} = 2006,28 \ ,$$

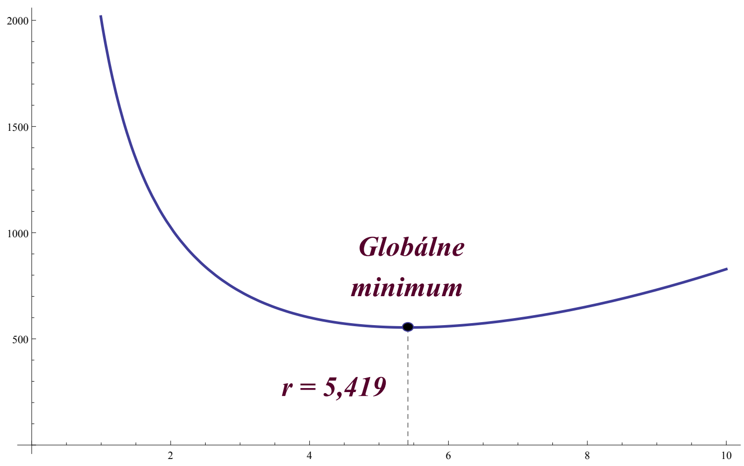
$$S(10) = 2 \cdot \pi \cdot 10^2 + \frac{2000}{10} = 828 \ .$$

Vzťah pre výšku valca sme vyjadrili na začiatku príkladu, preto stačí len dopočítať jeho hodnotu

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi \cdot 5,419^2} \approx 10,839 \ cm \ .$$

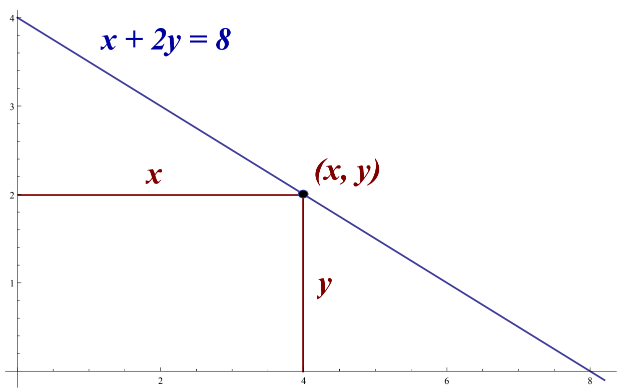
Záver: Rozmery valca minimalizujúce jeho povrch sú: $r = 5,419 \ cm$ a $h = 10,839 \ cm$.

Graf našej funkcie $S(r) = 2 \cdot \pi r^2 + \frac{2000}{r}$ môžeme vidieť na Obr.4.7. Grafom funkcie je parabola a vidíme, že hodnota pre $r = 5,419 \ cm$ je naozaj globálne minimum na intervale $\langle 1, 10 \rangle$.



Obr. 4.7: $S(r) = 2 \cdot \pi r^2 + \frac{2000}{r}$.

Príklad č. 2. Obdĺžnik má obe strany rovnobežné s osami súradnicovej sústavy x a y. Jeden jeho vrchol so súradnicami (x, y) leží v prvom kvadrante na priamke $x + 2y = 8$. Nájdime rozmery obdĺžnika x a y, ktoré maximalizujú jeho obsah.



Riešenie: Poznáme rovnicu priamky, na ktorej leží jeden z vrcholov obdĺžnika. Vyjadríme z rovnice y a dostávame rovnicu priamky

$$y = 4 - \frac{x}{2} \ .$$

Obsah obdĺžnika je daný vzťahom $S = x \cdot y$, čo je rovnica s dvomi premennými.

Aby sme mohli určiť extrém, potrebujeme funkciu o jednej premennej, preto do vzťahu pre obsah obdĺžnika dosadíme namiesto y rovnicu priamky $y = 4 - \frac{x}{2}$:

$$S = x \cdot (4 - \frac{x}{2}) = 4x - \frac{x^2}{2} \ .$$

Dostali sme funkciu o jednej premennej x

$$S(x) = 4x - \frac{x^2}{2} \ ,$$

a našou úlojou je nájsť jej globálne maximum na intervale $\langle 0, 8 \rangle$.

Funkciu zderivujeme

$$S^{'}(x) = 4 - x \ .$$

Extrémy určujeme v bodoch, kde $S^{'}(x) = 0$, preto položíme

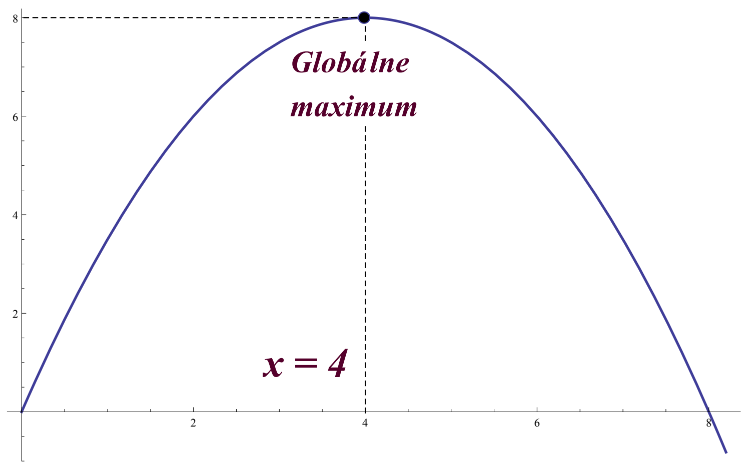
$$4 - x = 0$$

a vyjadríme x. Získali sme prvý rozmer obdĺžnika $x = 4$.

Druhý rozmer získame dosadením za $x = 4$ do rovnice priamky $y = 4 - \frac{x}{2}$, teda

$$y = 4 - \frac{4}{2} = 2 \ .$$

Obsah obdĺžnika bude $S = x \cdot y = 4 \cdot 2 = 8$.



Obr. 4.8: $S(x) = 4x - \frac{x^2}{2}$.

Vidíme, že ide o parabolu so záporným koeficientom pri x, z čoho je jasné, že vo vrchole paraboly je globálne maximum. Túto skutočnosť si overíme aj výpočtom tak, že vypočítame funkčné hodnoty v bodoch na krajoch intervalu $\langle 0, 8 \rangle$.

$$S(0) = 4 \cdot 0 - \frac{0^2}{2} = 0 \ ,$$

$$S(8) = 4 \cdot 8 - \frac{8^2}{2} = 0 \ .$$

Záver: Rozmery obdĺžnika sú $x = 4$ a $y = 2$ s maximálnym obsahom $S = 8$.

Príklad č. 3. Určte také dve prirodzené čísla, ktorých súčet je 15, a aby súčet ich tretích mocnín bol čo najmenší.

Riešenie: Súčet dvoch čísel $x + y$ má byť 15. Vyjadríme si y z rovnice a dostaneme $y = 15 - x$, pričom vieme, že $x \in \langle 1, 14 \rangle$.

Úlohou je minimalizovať súčet tretích mocnín týchto dvoch prirodzených čísel, teda

$$S = x^3 + (15 - x)^3$$

na intervale $\langle 1, 14 \rangle$.

Po umocnení a úprave máme

$$S = 3375 - 675x + 45x^2 \ .$$

Dostávame funkciu s jednou premennou x

$$S(x) = 3375 - 675x + 45x^2 \ .$$

Extrémy určujeme v bodoch, v ktorých $S'(x) = 0$, preto funkciu zderivujeme

$$S'(x) = -675 + 90x$$

a položíme rovnú nule

$$-675 + 90x = 0 \ .$$

Z rovnice vyjadríme neznámu x a dostávame extrém v bode $x = 7,5$. Pretože x má byť z intervalu $\langle 1, 14 \rangle$, naša vypočítaná hodnota patrí do toho intervalu a je teda náš hľadaný extrém.

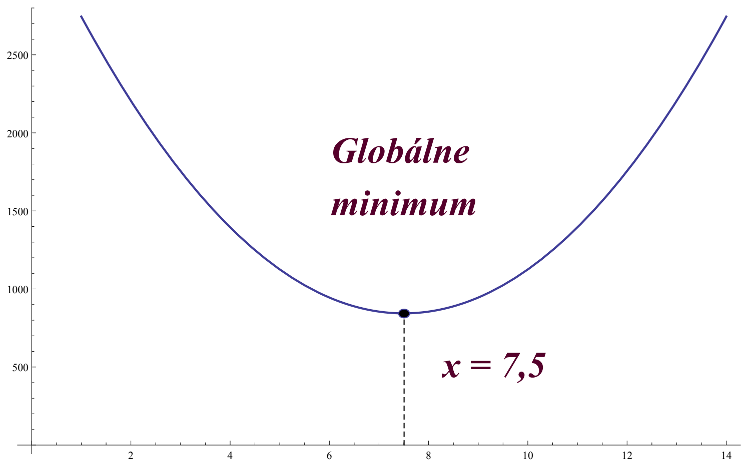
Vypočítame funkčnú hodnotu funkcie v bode $x = 7,5$:

$$S(7,5) = 3375 - 675 \cdot 7,5 + 45 \cdot 7,5^2 = 843,75 \ .$$

Či naozaj ide o globálne minimum, si overíme ešte v krajných bodoch nášho intervalu $\langle 1, 14 \rangle$:

$$S(1) = 3375 - 675 \cdot 1 + 45 \cdot 1^2 = 2745 \ ,$$

$$S(14) = 3375 - 675 \cdot 14 + 45 \cdot 14^2 = 2745 \ .$$



Obr. 4.9: $S(x) = 3375 - 675x + 45x^2$.

Súčet tretích mocnín je

$$S = x^3 + (15 - x)^3 = (7,5)^3 + (15 - 7,5)^3 = 421,875 + 421,875 = 843,75 \ .$$

Na Obr.4.9 vidíme, že náš kritický bod je skutočne globálne minimum.

Záver: Hľadané prirodzené čísla sú $x = 7,5$ a $y = 7,5$ pri dosiahnutí minimálnej hodnoty súčtu ich tretích mocnín s hodnotou $843,75$.

Príklad č. 4. Chceme oplotiť záhradu obdĺžnikového pôdorysu. Máme k dispozícii 300 m pletiva. Úlohou je nájsť také rozmery x a y, ktoré maximalizujú plochu záhrady.

Riešenie: Máme zadaný obvod obdĺžnika 300 m, čo je tiež množstvo pletiva, ktoré máme k dispozícii. Obvod obdĺžnika vypočítame ako

$$O = 2(x + y) \ ,$$

kde $0 \leq x \leq 150$.

Vyjadríme si jednu stranu obdĺžnika

$$300 = 2x + 2y \ ,$$

po úprave dostávame

$$y = 150 - x \ .$$

Dosadíme $y = 150 - x$ do rovnice pre výpočet obsahu obdĺžnika $S = x \cdot y$:

$$S = x(150 - x) \ ,$$

čo po úprave dáva

$$S = 150x - x^2 \ .$$

Dostali sme funkciu o jednej premennej $S(x) = 150x - x^2$, ktorú ďalej zderivujeme

$$S^{'}(x) = 150 - 2x \ .$$

Na určenie extrému položíme $S^{'}(x) = 0$:

$$150 - 2x = 0$$

a vyjadríme neznámu x

$$x = 150/2 = 75 \ .$$

Dopočítame y-ovú súradnicu dosadením $x = 75$ do rovnice $y = 150 - x$ a dostaneme

$$y = 150 - 75 = 75 \ .$$

Maximálna plocha záhrady bude teda $S = x \cdot y = 75 \cdot 75 = 5625 \ m^2$.

Vieme, že grafom funkcie $S = 150x - x^2$ je parabola so záporným koeficientom pri x, preto vo vrchole paraboly bude určite globálne maximum funkcie.

Pre úplnosť dopočítame funkčnú hodnotu v bode $x = 75$ dosadením x do našej funkcie $S(x) = 150x - x^2$:

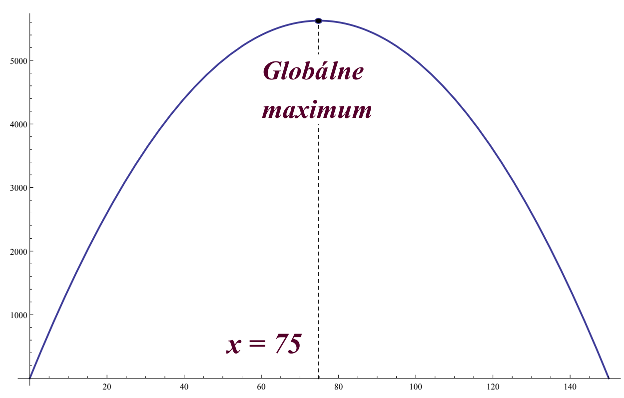
$$S(75) = 150 \cdot 75 - 75^2 = 5625 \ .$$

Funkčná hodnota v krajných bodoch intervalu bude

$$S(0) = 150 \cdot 0 - 0^2 = 0 \ ,$$

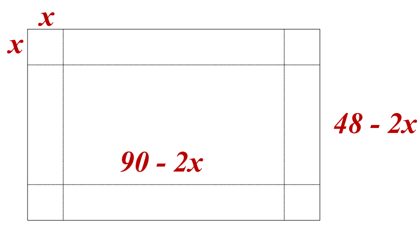
$$S(150) = 150 \cdot 150 - 150^2 = 0 \ .$$

Záver: Maximálna plocha záhrady je $5625 \ m^2$ s rozmermi $x = 75 \ m$ a $y = 75 \ m$.



Obr. 4.10: $S(x) = 150x - x^2$.

Príklad č. 5. Z kartónu tvaru obdĺžnika s rozmermi 90 cm a 48 cm musíme vystrihnúť v rohoch rovnaké štvorce tak, aby krabica po zložení mala najväčší objem. Treba určiť stranu štvorcov.



Riešenie: Objem otvorenej krabice je daný všeobecne vzťahom $V = abh$, v našom prípade

$$V = (90 - 2x)(48 - 2x) \cdot x \ .$$

Po roznásobení a úprave máme

$$V = 4320x - 276x^2 + 4x^3 \ ,$$

kde $x \in \langle 0, 24 \rangle$.

Dostávame funkciu o jednej premennej x, ktorú zderivujeme

$$V' = 4320 - 552x + 12x^2 = 0$$

a po vydelení číslom 12 položíme deriváciu $V' = 0$ a dostávame

$$x^2 - 46x + 360 = 0 \ .$$

Vypočítame kvadratickú rovnicu a určíme možných kandidátov na extrémy. Dostávame výsledné x

$$x = 23 \pm 13 \ ,$$

teda buď $x = 36$ alebo $x = 10$.

Pretože vieme, že $x \in \langle 0, 24 \rangle$, musíme vylúčiť hodnotu $x = 36$, pretože nevyhovuje riešeniu.

Riešenie $x = 10$ vyhovuje, čo znamená, že treba odstrihnúť štvorce so stranou dĺžky $x = 10 \ cm$.

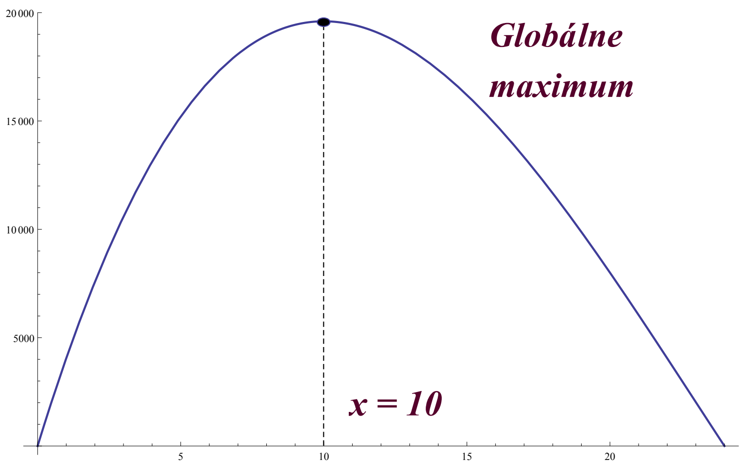
Maximálny objem krabice vypočítame ako $V = (90-2\cdot 10)(48-2\cdot 10)\cdot 10 = 19\,600 \ cm^3$.

Určíme ešte funkčné hodnoty v krajných bodoch intervalu, teda $x = 0$ a $x = 24$ dosadením do našej funkcie $V = 4320x - 276x^2 + 4x^3$:

$$V(0) = 4320 \cdot 0 - 276 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0^3 = 0 \ ,$$

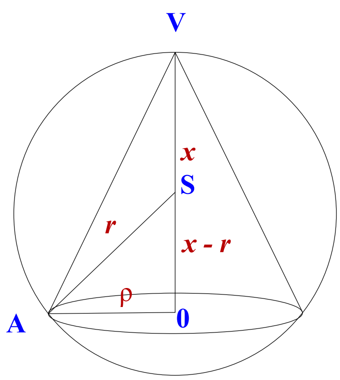
$$V(24) = 4320 \cdot 24 - 276 \cdot 24^2 + 4 \cdot 24^3 = 0 \ .$$

Záver: Objem krabice je 19600 cm^3.



Obr. 4.11: $V = 4320x - 276x^2 + 4x^3$.

Príklad č. 6. Do gule polomeru r je potrebné vpísať kužeľ s výškou väčšou ako r. Akú výšku má mať taký kužeľ, aby jeho objem bol najväčší možný za predpokladu, že výška kužeľa je väčšia ako polomer gule?



Riešenie: Vpísaný kužeľ má polomer podstavy ρ a výšku x. Potom objem rotačného kužeľa bude

$$V = \frac{1}{3}\pi\rho^2 x \ ,$$

pričom $\rho \in (0, r)$ a $x \in (0, 2r)$.

Objem kužeľa je funkciou dvoch premenných ρ a x. Z pravouhlého trojuholníka $A0S$ podľa Pytagorovej vety dostávame

$$\rho^2 = r^2 - (x-r)^2 \ .$$

Po úprave máme

$$\rho^2 = 2rx - x^2 \ .$$

Dosadíme ρ^2 do vzťahu pre objem kužeľa

$$V = \frac{1}{3}\pi(2rx - x^2)x$$

a po úprave dostávame

$$V = \frac{1}{3}\pi(2rx^2 - x^3) \ .$$

Dostali sme funkciu jednej premennej x, ktorú následne zderivujeme

$$V'(x) = \frac{1}{3}\pi(4rx - 3x^2) \ .$$

Kritické body získame z rovnice $V'(x) = 0$, teda

$$\frac{1}{3}\pi(4rx - 3x^2) = 0 \ .$$

Vyjmeme neznámu x pred zátvorku

$$\frac{1}{3}\pi x(4r - 3x) = 0 \ .$$

Keďže $x \neq 0$, extrém nastane, ak $4r - 3x = 0$, teda

$$x = \frac{4}{3}r \ .$$

Vypočítame funkčnú hodnotu v bode $x = \frac{4}{3}r$ dosadením do funkcie $V = \frac{1}{3}\pi(2rx^2 - x^3)$:

$$V\left(\frac{4}{3}r\right) = \frac{1}{3}\pi\left(2r\left(\frac{4}{3}r\right)^2 - \left(\frac{4}{3}r\right)^3\right) = 1,24r^3 \ .$$

Funkčné hodnoty v krajných bodoch intervalu $r \in \langle 0, 2r\rangle$ pre x budú

$$V(0) = \frac{1}{3}\pi(2r\cdot 0^2 - 0^3) = 0 \ ,$$

$$V(2r) = \frac{1}{3}\pi(2r\cdot(2r)^2 - (2r)^3) = 0 \ .$$

Vidíme, že hodnota pre $x = \frac{4}{3}r$ je naozaj globálne maximum našej funkcie.

Vyjadríme polomer podstavy ρ^2 dosadením $x = \frac{4}{3}r$:

$$\rho^2 = 2r\frac{4}{3}r - (\frac{4}{3}r)^2 \ ,$$

po úprave máme polomer podstavy kužeľa

$$\rho^2 = \frac{8}{9}r^2 \ .$$

Po odmocnení dostávame výsledný polomer podstavy kužeľa ρ:

$$\rho = \sqrt{\frac{8}{9}r^2} = \frac{2}{3}r\sqrt{2} \ .$$

Pre $x = \frac{4}{3}r$ a pre $\rho = \frac{2}{3}r\sqrt{2}$ má vpísaný kužeľ maximálny objem

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{4}{9}r^2 \cdot 2 \cdot \frac{4}{3}r = \frac{32}{81}\pi r^3 \ .$$

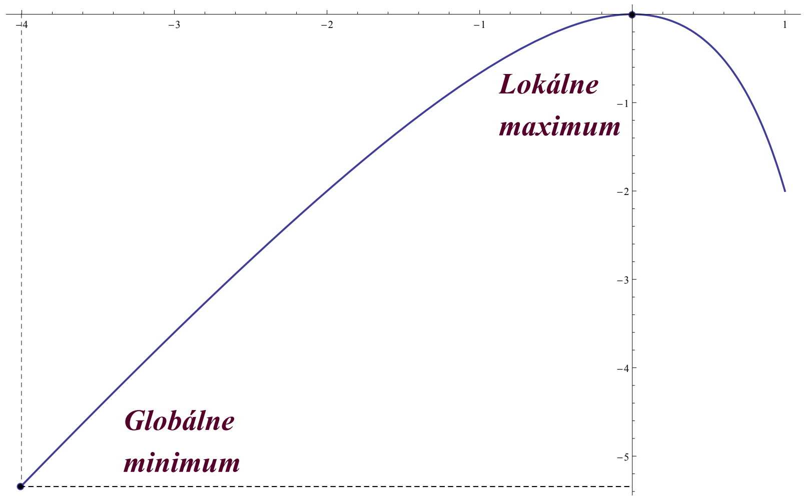
Záver: Maximálny objem kužeľa vpísaného do gule je $V = \frac{32}{81}\pi r^3$ pre výšku kužeľa $x = \frac{4}{3}r$ a polomer podstavy kužeľa $\rho = \frac{2}{3}r\sqrt{2}$.

Príklady na cvičenia:

1. Určte lokálne a globálne extrémy nasledujúcich funkcií:

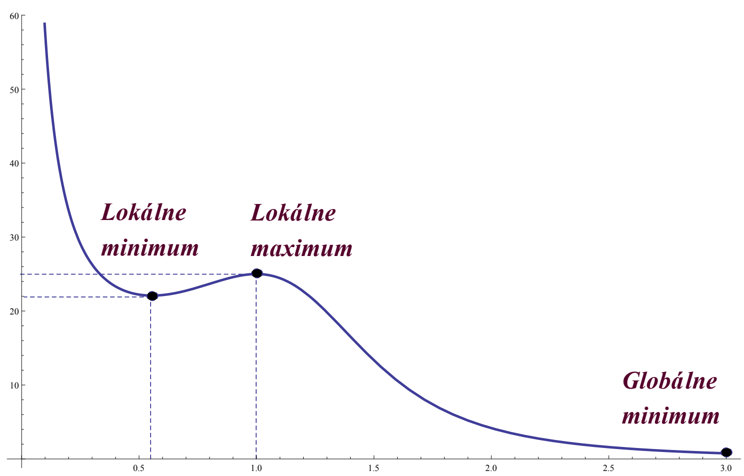
   (a) $y = \frac{2x^2}{x-2}$ na intervale $\langle -4, 1 \rangle$

Výsledok: Lokálne maximum v bode $(0, 0)$, globálne minimum v bode $(-4, -16/3)$.



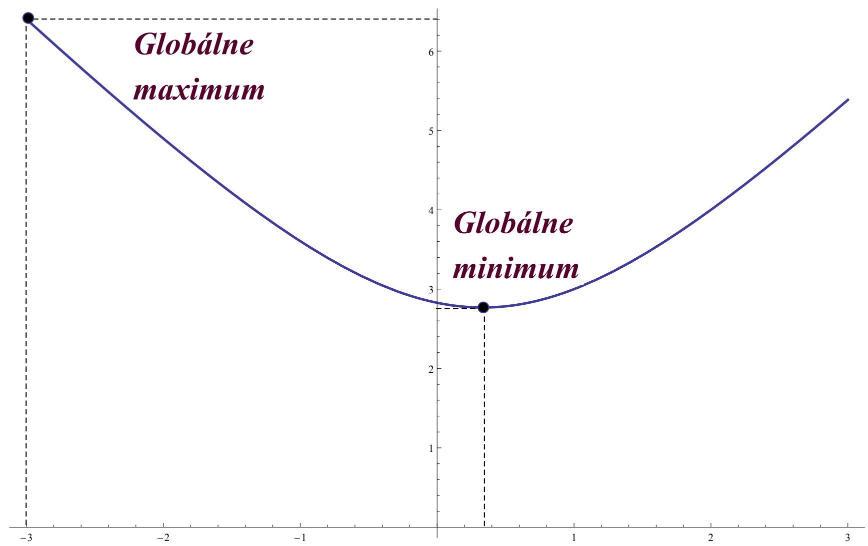
   (b) $y = \frac{25}{(3x^3 - 7x^2 + 5x)}$ na intervale $\langle 0.25, 3 \rangle$

Výsledok: Globálne minimim v bode $(3, 25/33)$, globálne maximum v bode $(0.25, 29.09)$.



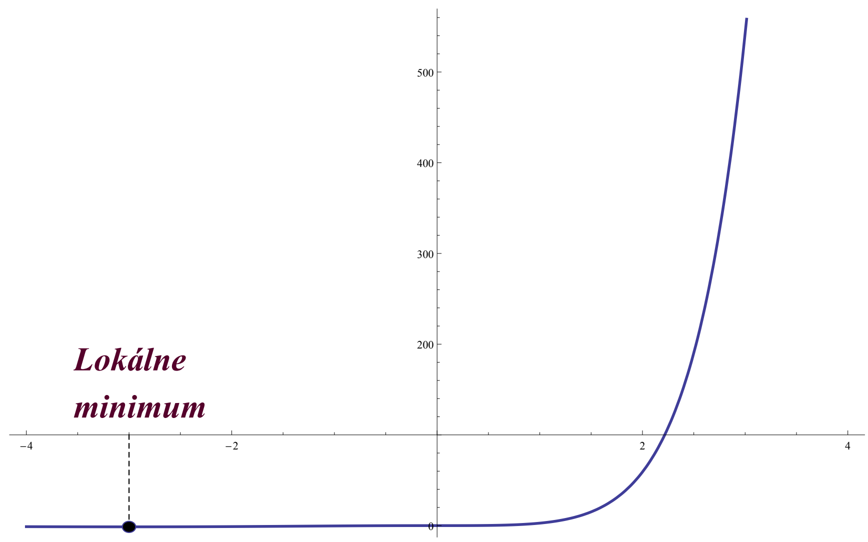
(c) $y = \sqrt{3x^2 - 2x + 8}$ na intervale $\langle -3, 3\rangle$

Výsledok: Gobálne minimum v bode $(1/3, \sqrt{23/3})$, globálne maximum v bode $(-3, \sqrt{41})$.



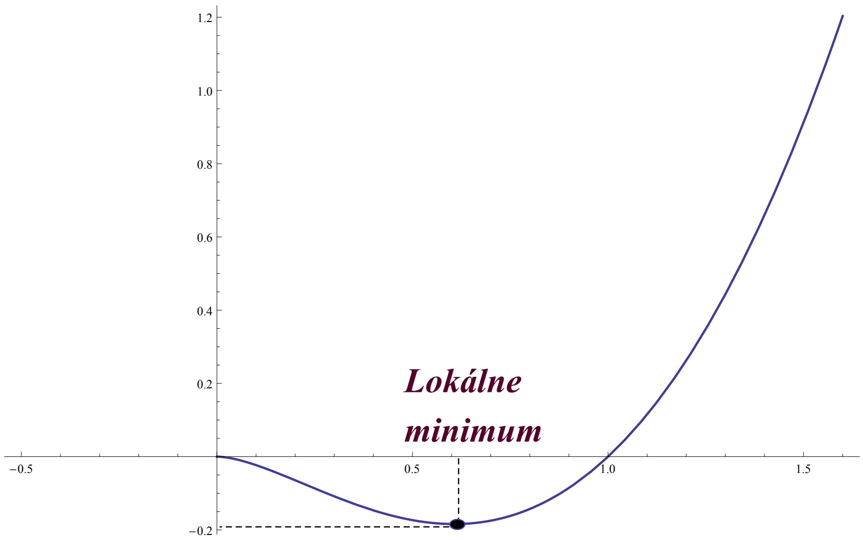
(d) $y = \frac{x^3}{e^{-x}}$

Výsledok: Lokálne minimum v bode $(-3, \frac{-27}{e^3})$.



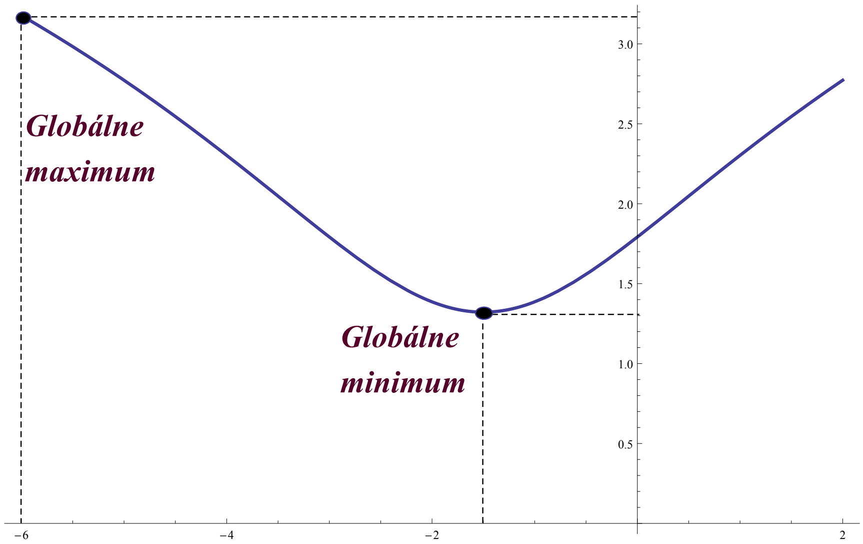
(e) $y = x^2 . \ln(x)$

Výsledok: Lokálne minimum v bode $(\frac{1}{\sqrt{e}})$, globálne minimum v bode $(0, 0)$.



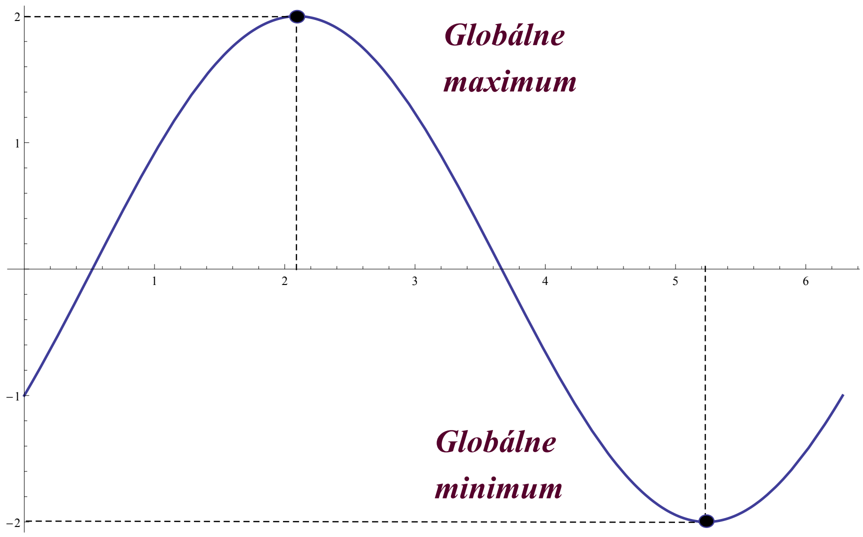
(f) $y = \ln(x^2 + 3x + 6)$ na intervale $\langle -6, 2\rangle$

Výsledok: Lokálne minimum v bode $(-3/2, \ln(15/4))$, globálne minimumm v bode $(2, \ln(16))$, globálne maximum v bode $(-6, \ln(24))$.



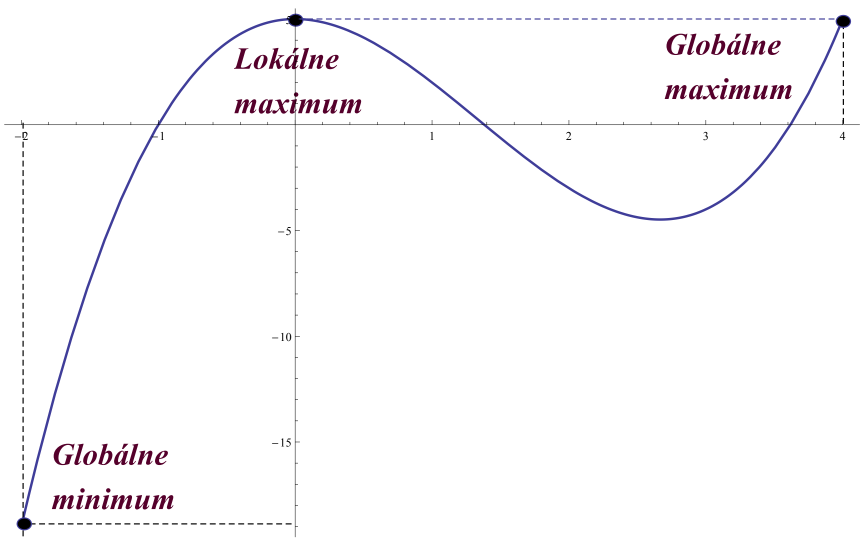
(g) $y = \sqrt{3}\sin(x) - \cos(x)$ na intervale $\langle 0, 2\pi \rangle$

Výsledok: Globálne maximum v bode $(\frac{2}{3}\pi, 2)$, globálne minimum v bode $(\frac{5}{3}\pi, -2)$.



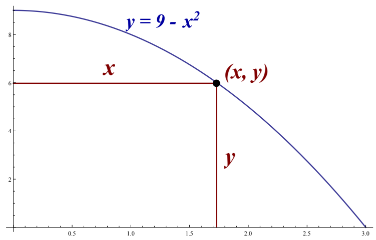
(h) $y = x^3 - 4x^2 + 5$ na intervale $\langle -2, 4 \rangle$

Výsledok: Lokálne maximum v bode $(0, 5)$, globálne maximum v bode $(4, 5)$, globálne minimum v bode $(-2, -19)$.



2. Riešte nasledujúce slovné úlohy:

(a) Obdĺžnik má strany rovnobežné s osami súradnicovej sústavy x a y. Jeden jeho vrchol so súradnicami (x, y) leží v pravom kvadrante na parabole s rovnicou $y = 9 - x^2$. Nájdite rozmery obdĺžnika, ktoré maximalizujú jeho obsah.



Výsledok: Rozmery obdĺžnika sú $x = \sqrt{3}$, $y = 6$. Maximálny obsah obdĺžnika je $S = 6\sqrt{3}$.

(b) Číslo 250 napíšte v tvare súčtu $x + y$ tak, aby súčin $x \cdot y$ bol čo najväčší.

Výsledok: Číslo $x = 125$, $y = 125$. Najväčší súčin $x \cdot y = 125^2 = 15625$.

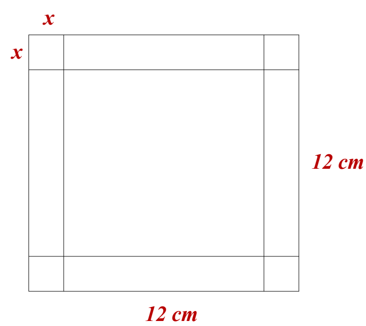
(c) Na priamke $4x - 3y = 2$ vypočítajte bod, ktorý je najbližšie k bodu $(5, -1)$.

Výsledok: Najbližšie k bodu $(5, -1)$ je bod so súradnicami $(\frac{41}{25}, \frac{38}{25})$.

(d) Aké rozmery musí mať valec daného povrchu S, ak má byť jeho objem čo najväčší?

Výsledok: Rozmery valca sú $d = v = \sqrt{\frac{2S}{3\pi}}$.

(e) Štvorcová kartónová krabica má rozmer 12 cm. V rohoch má vystrihnuté malé rovnaké štvorce tak, aby sa dala zložiť krabica. Vypočítajte rozmery výslednej poskladanej krabice tak, aby jej objem bol maximálny.



Výsledok: Krabica je hlboká 2 cm so základňou 8 cm s objemom $V = 128\ cm^3$.

(f) Z drôtu dĺžky 200 cm poskladajme kváder so štvorcovou podstavou. Vypočítajte rozmery kvádra tak, aby jeho povrch bol maximálny.

Výsledok: Kváder má tvar kocky s hranou $x = 50/3$.

(g) Okno, ktoré má tvar rovinného obrazca pozostáva z obdĺžnika a polkruhu nad jednou jeho stranou, má obvod O. Nájdite rozmery obdĺžnika, aby okno malo maximálny plošný obsah.

Výsledok: Rozmery obdĺžnika sú $x = \frac{2O}{4+\pi}$ a $y = \frac{O}{4+\pi}$.

Kapitola 5

Grafy funkcií

Aj v dobe rýchlych počítačov je užitočné vedieť načrtnúť graf danej funkcie pre orientáciu. S doteraz získanými vedomosťami to vieme efektívne urobiť. Vychádzame z predpokladu, že väčšina funkcií, s ktorými sa stretnete, majú prvú a druhú deriváciu v každom vnútornom bode svojho definičného oboru. Intervaly monotónnosti a vypuklosti potom možno zistiť zo znamienka prvej a druhej derivácie. Ak funkcia neobmedzene rastie alebo klesá, prípadne ak premenné môžu nadobúdať neobmedzene veľké kladné (alebo záporné) hodnoty, môže sa tak diať "pozdĺž" priamok (asymptot), ktoré sú pri náčrte grafu nápomocné.

V ďalších častiach sa týmto aspektom budeme venovať podrobnejšie.

5.1 Monotónnosť funkcie

Na identifikáciu intervalov, v ktorých je funkcia monotónna (t. j. rastúca, alebo klesajúca), používame nasledujúce tzv. **Kritérium monotónnosti (KM)** :

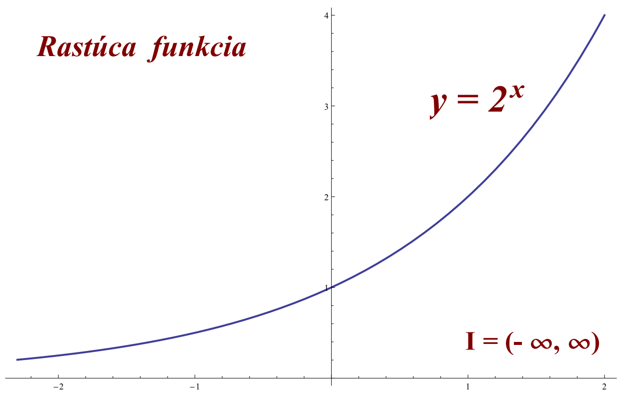
Nech funkcia f má na otvorenom intervale I deriváciu v každom bode.

(a) Ak $f'(x) > 0$ pre každé $x \in I$, tak f je na I **rastúca**.

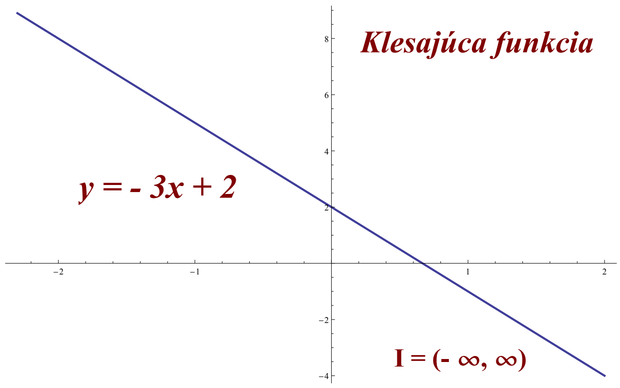
(b) Ak $f'(x) < 0$ pre každé $x \in I$, tak f je na I **klesajúca**.

Príklady rastúcej a klesajúcej funkcie sú zobrazené na Obr.5.1 a na Obr.5.2.

Intervaly, na ktorých funkcia rastie (klesá), často nazývame intervalmi monotónnosti.



Obr. 5.1: $y = 2^x$



Obr. 5.2: $y = -3x + 2$

Príklad č. 1. Vypočítajme intervaly monotónnosti funkcie $f(x) = x^3 - 3x + 6$.

Prvý spôsob:

Riešenie: Definičným oborom našej funkcie je interval $(-\infty, \infty)$.

Intervaly, na ktorých funkcia rastie alebo klesá, určíme tak, že zistíme, pre ktoré x je jej prvá derivácia kladná alebo záporná.

Riešme najprv nerovnosť'

$$f^{'}(x) = 3x^2 - 3 > 0 \ .$$

Táto nerovnosť' je ekvivalentná nerovnosti $x^2 > 1$, čiže $|x| > 1$, a teda $f(x) > 0$ pre $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Z toho vyplýva, že f je rastúca na $(-\infty, -1)$ a aj na intervale $(1, \infty)$.

Opačná nerovnosť'

$$f^{'}(x) = 3x^2 - 3 < 0$$

je komplementárna ku pôvodnej (až na znamienko rovnosti) a teda jej riešením je doplnková množina ku $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ (až na koncové body), čiže interval $(-1, 1)$. Z toho vyplýva, že funkcia je klesajúca na intervale $(-1, 1)$.

Druhý spôsob: Na určenie intervalov monotónnosti budeme postupovať nasledovnými krokmi:

(a) zistíme riešenia rovnice $f'(x) = 0$, t. j. kritické body funkcie f,

(b) identifikujeme otvorené intervaly I, ktoré vzniknú rozdelením definičného oboru funkcie kritickými bodmi,

(c) pre každý taký interval I vyberieme niektorý z vnútorných bodov, vypočítame v ňom hodnotu derivácie a zistíme či je kladná alebo záporná. Z teórie pritom vieme, že ak $f'(x) > 0$ pre nejaký bod $x \in I$, potom $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in I$; obdobné tvrdenie platí aj pre záporné hodnoty $f'(x)$.

Riešenie: Kritické body, v ktorých sa mení monotónnosť funkcie určíme z rovnice $f'(x) = 0$, teda

$$3x^2 - 3 = 0 \ .$$

Z tejto rovnice dostávame, že $x = \pm 1$. Body $x_1 = 1$ a $x_2 = -1$ nám rozdeľujú interval na tri časti: $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$.

Aby sme mohli určiť, na ktorom z týchto intervalov funkcia rastie alebo klesá, vyberieme si z každého intervalu jednu hodnotu, dosadíme do derivácie a zistíme, či výsledok bude kladný alebo záporný.

- $(-\infty, -1)$: Vyberieme napr. bod $x = -2$: $f'(-2) = 3(-2)^2 - 3 = 12 - 3 = 9$.

  Vidíme, že $f'(-2) > 0$, teda funkcia rastie na $(-\infty, -1)$.

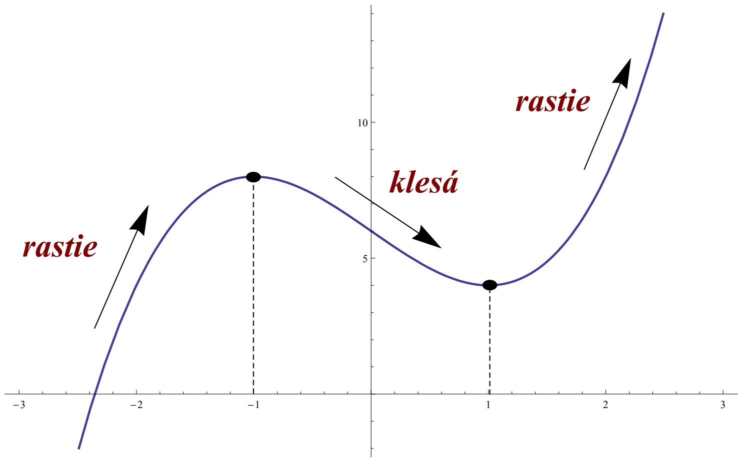
- $(-1, 1)$: Vyberieme napr. bod $x = 0$: $f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 3 = 0 - 3 = -3$.

  Výsledkom je záporná hodnota, teda funkcia klesá na $(-1, 1)$.

- $(1, \infty)$: Vyberieme napr. bod $x = 2$: $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 12 - 3 = 9$.

  Kladná hodnota znamená, že funcia rastie pre každé $x \in (1, \infty)$.

Záver: Funkcia rastie na intervale $(-\infty, -1)$ a aj na $(1, \infty)$ a klesá na intervale $(-1, 1)$.



Obr. 5.3: $f(x) = x^3 - 3x + 6$.

□

Keďže zisťovanie monotónnosti prvým spôsobom môže byť vo všeobecnosti ťažšie, v nasledujúcich príkladoch budeme postupovať druhým spôsobom.

Príklad č. 2. Určíme intervaly monotónnosti funkcie $f(x) = \operatorname{arctg}(x^3 - x)$.

Riešenie: Definičný obor našej funkcie je interval $(-\infty, \infty)$. Na určenie monotónnosti funkciu zderivujeme

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 1}{1 + (x^3 - x)^2} \ .$$

Kritické body, ktoré delia definičný obor funkcie na intervaly monotónnosti, dostaneme z rovnice $f'(x) = 0$, teda

$$\frac{3x^2 - 1}{1 + (x^3 - x)^2} = 0 \ .$$

Korene rovnice sú $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Body $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ a $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ nám rozdeľujú definičný obor funkcie na tri intervaly: $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ a $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$.

Monotónnosť funkcie vyšetríme na každom z týchto troch intervalov jednotlivo, výberom vhodného bodu v každom intervale:

- $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}})$: Vyberieme bod $x = -1$: $f'(-1) = \frac{3\cdot(-1)^2-1}{1+((-1)^3+1)^2} = 2$.

  Keďže $f'(-1) > 0$, funkcia je na $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ rastúca.

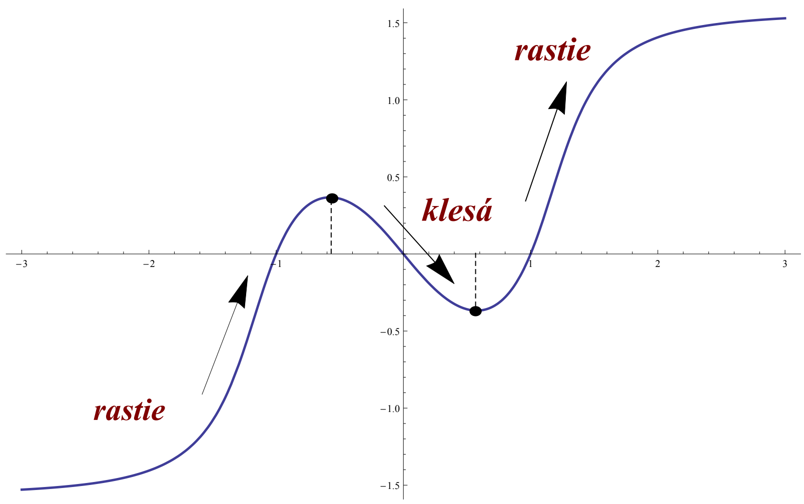
- $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$: Vyberieme bod $x = 0$: $f'(0) = \frac{3\cdot 0^2-1}{1+(0^3-0)^2} = -1$.

Na intervale $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ je funkcia klesajúca, pretože $f'(0) < 0$.

- $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$: Vyberieme bod $x = 1$: $f'(1) = \frac{3 \cdot 1^2 - 1}{1+(1^3-1)^2} = 2$.

Funkcia je na intervale $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$ rastúca, pretože $f'(1) > 0$.

Záver: Podľa kritéria KM funkcia $f(x) = \operatorname{arctg}(x^3 - x)$ na intervaloch $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ a $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$ rastie a na intervale $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ klesá.



Obr. 5.4: $f(x) = \operatorname{arctg}(x^3 - x)$.

□

Ak máme identifikované intervaly monotónnosti, je ľahké z nich vyčítať, v ktorých bodoch nadobúda funkcia lokálne extrémy. To je jasne vidieť aj z obrázkov, ktoré sprevádzajú predchádzajúce príklady.

5.2 Konvexnosť, konkávnosť, inflexný bod

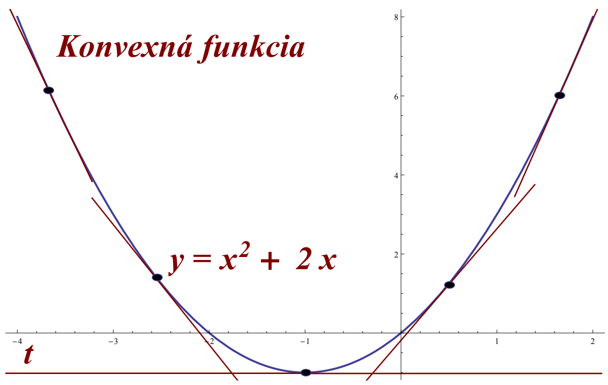
Intuitívne, spojitá funkcia f je na otvorenom intervale I konvexná (konkávna), ak v nejakom (malom) okolí každého bodu intervalu I jej graf leží "nad" ("pod") dotyčnicou v tomto bode. Príklad konvexnej funkcie je znázornený na Obr.5.5 a príklad konkávnej funkcie môžeme vidieť na Obr.5.6. Konvexnosť, resp konkávnosť budeme označovať spoločným názvom **vypuklosť** .

Na zisťovanie vypuklosti používame nasledujúce **Kritérium vypuklosti (KV)**.

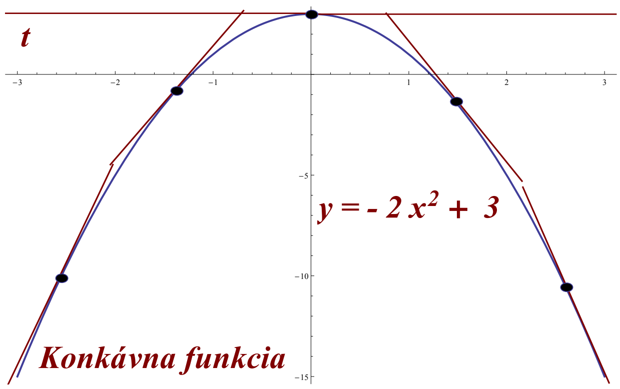
Nech funkcia f má na otvorenom intervale I druhú deriváciu v každom bode. Potom platí:

(a) Ak $f''(x) > 0$ pre každé $x \in I$, tak funkcia f je na I **konvexná**.

(b) Ak $f''(x) < 0$ pre každé $x \in I$, tak funkcia f je na I **konkávna**.

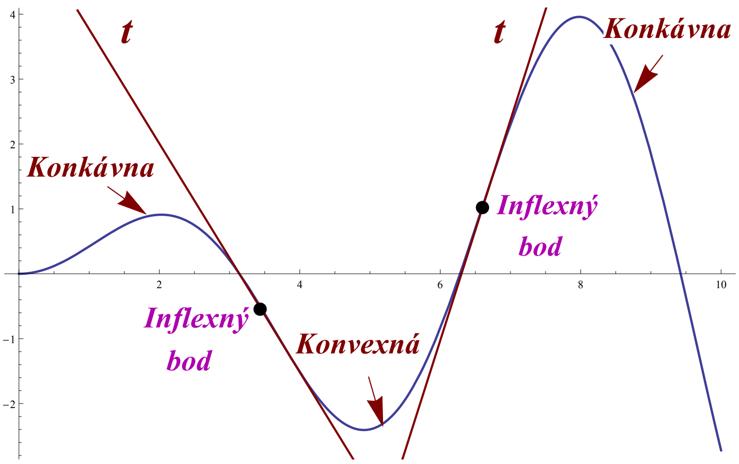


Obr. 5.5: $y = x^2 + 2x$.



Obr. 5.6: $y = -2x^2 + 3$.

Inflexný bod je bod, v ktorom sa graf danej funkcie f "mení" z konvexnej na konkávnu a naopak. Za predpokladu existencie druhej derivácie je v tomto bode druhá derivácia funkcie f nulová, teda $f''(x) = 0$.



Obr. 5.7: Inflexné body.

Na Obr.5.7 vidíme dva inflexné body, ktoré rozdeľujú graf funkcie na tri časti. V prvej časti je funkcia konkávna, v inflexnom bode prechádza do konvexnej časti a v ďalšom inflexnom bode prechádza graf funkcie opäť do konkávnosti.

Na určenie konvexnosti (konkávnosti) použijeme nasledovný postup:

(a) zistíme riešenia rovnice $f^{''}(x) = 0$,

(b) určíme otvorené intervaly I, ktoré vzniknú rozdelením definičného oboru funkcie inflexnými bodmi,

(c) pre každý taký interval I vyberieme jeden z vnútorných bodov, vypočítame v ňom hodnotu druhej derivácie a zistíme, či je kladná alebo záporná. Z teórie vyplýva, že hodnota $f^{''}$ je na celom takom intervale I kladná, resp. záporná.

Príklad č. 1. Určíme intervaly konvexnosti a konkávnosti funkcie $f(x) = 2x^3 - 8x + 2$.

Riešenie: Definičným oborom tejto funkcie je interval $(-\infty, \infty)$. Intervaly vypuklosti určujeme z druhej derivácie funkcie, preto funkciu zderivujeme

$$f^{'}(x) = 6x^2 - 8 \ ,$$

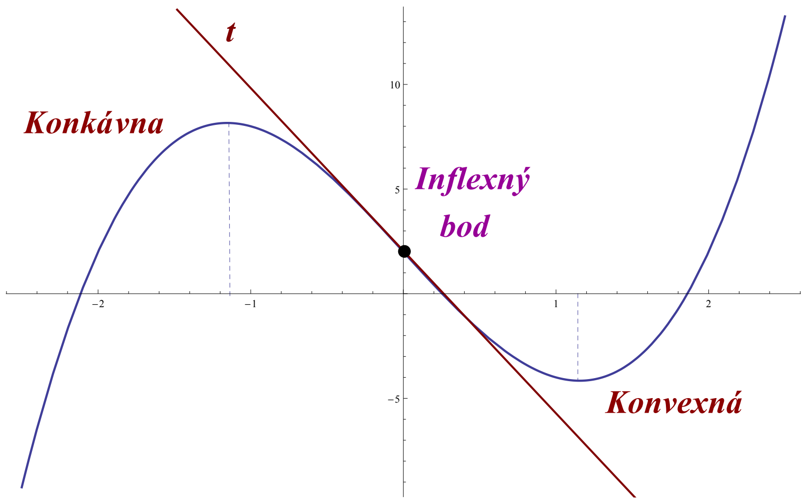
a druhá derivácia bude

$$f^{''}(x) = 12x \ .$$

Vidíme, že $f^{''}(x) = 0$ práve vtedy, keď $x = 0$.

Dostávame tak intervaly $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. Keďže $f^{''}(-1) < 0$ a $f^{''}(1) > 0$, vidíme podľa kritéria KV, že f je konkávna na $(-\infty, 0)$ a konvexná na $(0, \infty)$. Keďže pre $x = 0$ sa konkávnosť mení na konvexnosť, v bode $(0, 2)$ má funkcia inflexný bod.

Záver: Funkcia $f(x) = 2x^3 - 8x + 2$ je konvexná na intervale $(0, \infty)$ a konkávna na intervale $(-\infty, 0)$.



Obr. 5.8: $f(x) = 2x^3 - 8x + 2$.

□

Príklad č. 2. Určíme intervaly konvexnosti a konkávnosti funkcie $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2+6}$.

Riešenie: Definičným oborom našej funkcie je $(-\infty, \infty)$. Konvexnosť a konkávnosť určujeme pomocou druhej derivácie. Prvá derivácia našej funkcie je

$$f'(x) = \frac{2x(6+x^2) - 2x(x^2+3)}{(6+x^2)^2} = \frac{6x}{(6+x^2)^2} \ .$$

Jej druhá derivácia funkcie je

$$f''(x) = \frac{6 \cdot (6+x^2)^2 - 6x \cdot 2 \cdot (6+x^2) \cdot 2x}{(6+x^2)^4} = \frac{36 - 18x^2}{(6+x^2)^3} \ .$$

Určíme tie body, kde $f''(x) = 0$, teda

$$\frac{36 - 18x^2}{(6+x^2)^3} = 0 \ .$$

Táto rovnica má dve riešenia $x = \pm\sqrt{2}$, čím dostávame tri intervaly na skúmanie vypuklosti: $(-\infty, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, \infty)$.

Postupujúc ďalej podľa nášho návodu, čiže vyšetríme jednotlivo každý interval tak, že do f'' dosadíme ľubovoľnú hodnotu z daného intervalu:

- Pre $(-\infty, -\sqrt{2})$ platí

$$f''(-3) = \frac{36 - 18(-3)^2}{(6 + (-3)^2)^3} = -\frac{14}{375}\ ,$$

teda $f''(-3) < 0$, funkcia je na intervale $(-\infty, -\sqrt{2})$ konkávna.

- Pre $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ platí

$$f''(1) = \frac{36 - 18 \cdot 1^2}{(6 + 1^2)^3} = \frac{18}{343}\ ,$$

teda $f''(1) > 0$, funkcia je na intervale $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ konvexná.

- Pre $(\sqrt{2}, \infty)$ platí

$$f''(3) = \frac{36 - 18 \cdot 3^2}{(6 + 3^2)^3} = -\frac{14}{375}\ ,$$

teda $f''(3) < 0$, funkcia je na intervale $(\sqrt{2}, \infty)$ konkávna.

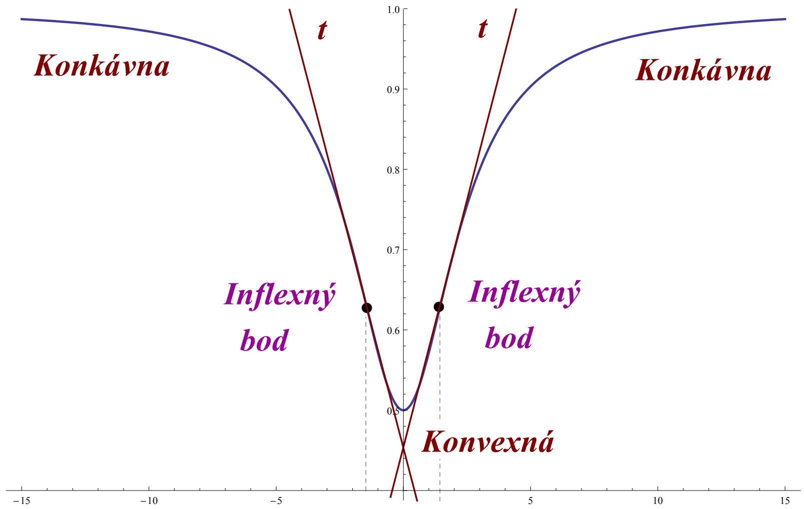
Funkčné hodnoty v bodoch $x = \pm\sqrt{2}$ sú

$$f(\sqrt{2}) = \frac{(\sqrt{2})^2 + 3}{(\sqrt{2})^2 + 6} = \frac{5}{8}\ ,$$

$$f(-\sqrt{2}) = \frac{(-\sqrt{2})^2 + 3}{(-\sqrt{2})^2 + 6} = \frac{5}{8}\ .$$

Keďže pre $x = \pm\sqrt{2}$ sa funkcia mení z konvexnosti na konkávnosť (alebo naopak), preto v bodoch $(\sqrt{2}, \frac{5}{8})$, $(-\sqrt{2}, \frac{5}{8})$ má funkcia inflexné body.

Záver: Funkcia $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2+6}$ je na intervale $(-\infty, -\sqrt{2})$ konkávna, na intervale $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ konvexná a na intervale $(\sqrt{2}, \infty)$ opäť konkávna.



Obr. 5.9: $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2+6}$.

□

5.3 Asymptoty ku grafu funkcie

Intuitívne, ak f je definovaná v nejakom ľavom okolí bodu a, tak priamka $x = a$ je asymptota bez smernice ku grafu f, ak hodnoty $f(x)$ neobmedzene rastú (alebo klesajú), ak sa hodnota x blíži k hodnote a zľava. Podobne definujeme rovnakú asypmtotu, ak f je definovaná v pravom okolí bodu a.

Ak f je definovaná na intervale tvaru (b, ∞), tak priamka $y = kx + q$ je asymptotou ku grafu funkcie f, ak sa funkčné hodnoty $f(x)$ neobmedzene približujú ku hodnotám na priamke $y = kx+q$ pre neobmedzene rastúce x. Podobná definícia sa aplikuje aj na prípad, kedy f je definovaná na intervale tvaru $(-\infty, b)$.

Ilustrácia štúdia asymptot grafu funkcie $f(x) = \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{x-1} + 1$ je na Obr.5.10.

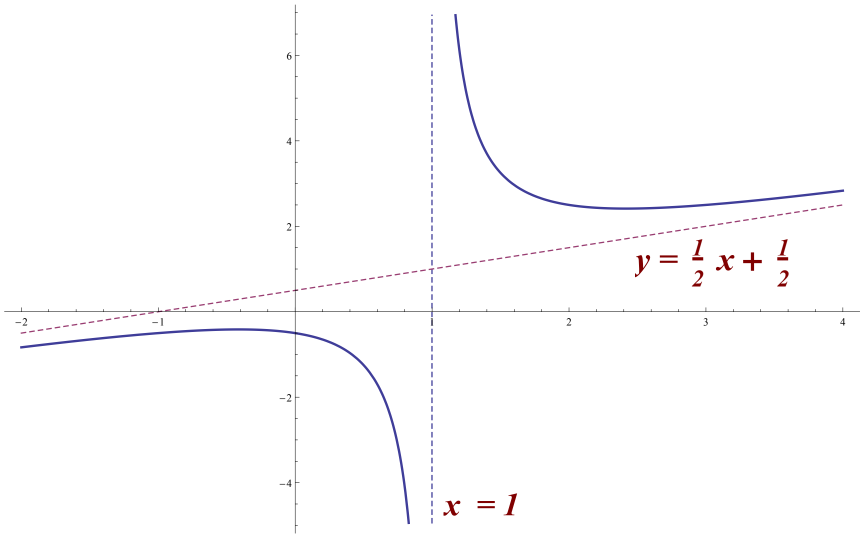
Na pohľad vidíme, že vertikálna priamka $x = 1$ je asymptota bez smernice, pretože vetvy grafu sa k nej "blížia", keď sa body x "blížia" ku 1 (sprava alebo zľava).

Podobne priamka $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ je asymptota so smernicou, pretože vetvy grafu sa k nej "blížia", ak x neobmedzene rastie (klesá).

Presné definície asymptot je možné podať pomocou pojmu limity.

(a) **Asymptoty bez smernice** grafu funkcie $f(x)$ (ABS) sú zvislé priamky dané rovnicou $x = a$ práve vtedy, keď má funkcia $f(x)$ v bode a aspoň jednu jednostrannú nevlastnú limitu:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \qquad \text{alebo} \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \ . \tag{5.1}$$



Obr. 5.10: $f(x) = \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{x-1} + 1$.

V príkladoch, s ktorými sa stretneme v tomto skripte, budeme zisťovať existenciu asymptoty bez smernice len v bodoch a, kde funkcia nie je definovaná, ale tento bod tvorí okraj intervalu, ktorý patrí do definičného oboru funkcie.

(b) **Asymptoty so smernicou**:

Priamku $y = kx + q$ nazývame asymptotou so smernicou grafu funkcie $f(x)$ ak

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - (kx+q)) = 0 \quad \text{alebo} \quad \lim_{x\to-\infty}(f(x) - (kx+q)) = 0\ . \tag{5.2}$$

Pomocou týchto vzťahov sa dá ukázať, že priamka $y = kx + q$ je asymptotou so smernicou pre $x \to +\infty$, resp. pre $x \to -\infty$ práve vtedy, keď platí

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \qquad \text{a} \qquad q = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) \tag{5.3}$$

respektíve

$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} \qquad \text{a} \qquad q = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - kx)\ . \tag{5.4}$$

Pri výpočtoch limít zväčša vystačíme s intuíciou a s faktmi, že

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x} = 0\ , \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0\ , \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = 0\ . \tag{5.5}$$

Hodnoty niektorých limít, ako napr. $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x) = -\infty$ sú evidentné z grafu príslušných funkcií.

Príklad č. 1. Vypočítajme asymptoty grafu funkcie $f(x) = x - \frac{2}{x-1}$.

Riešenie: Definičným oborom funkcie je množina $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. V bode $x = 1$ funkcia nie je definovaná a súčasne tvorí okraj intervalu definičného oboru funkcie.

Asymptoty bez smernice vyšetríme v bode $x = 1$, použijeme pritom vzťahy (5.1):

$$\lim_{x \to 1^+} \left(x - \frac{2}{x-1} \right) = -\infty \ ,$$

$$\lim_{x \to 1^-} \left(x - \frac{2}{x-1} \right) = +\infty \ .$$

Na výpočet hodnôt týchto limít postačí intuícia. Uvedomme si, že hodnoty týchto funkcií v zátvorkách neobmedzene klesajú (rastú), ak sa x blíži k 1 sprava (zľava).

Podmienky pre existenciu asymptot bez smernice sú splnené, teda asymptotou bez smernice je priamka $x = 1$.

Asymptoty so smernicou vyšetríme pomocou vzťahov (5.3) a (5.4).

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{x - \frac{2}{x-1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x} \ .$$

Pre uľahčenie výpočtu vydelíme čitateľa a menovateľa najväčšou mocninou z menovateľa, čo je x^2

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2/x^2 - x/x^2 - 2/x^2}{x^2/x^2 - x/x^2} \ ,$$

a po úprave máme

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - 1/x - 2/x^2}{1 - 1/x} \ .$$

Keďže hodnoty $\frac{1}{x}$ aj $\frac{2}{x^2}$ sa blížia k 0 pre neobmedzene rastúce x, máme $k = 1$.

$$q = \lim_{x \to +\infty} \left(x - \frac{2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{2}{x-1} \right)$$

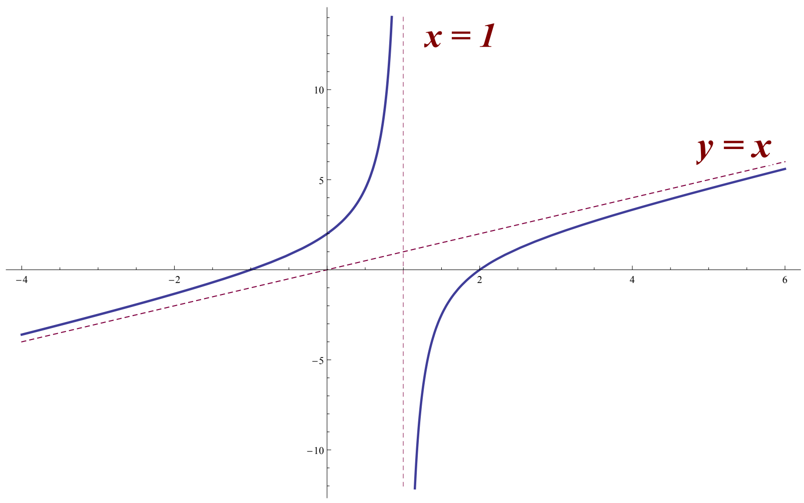
Najväčia mocnina v menovateli je x^1, preto vydelíme čitateľa a menovateľa touto hodnotou.

$$q = \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{2/x}{1 - 1/x} \right) \ .$$

Je jasné, že menovateľ rastie nad všetky medze, a teda $q = 0$. Zistili sme, že funkcia má jednu asymptotu so smernicou, a to $y = x$.

Môžte sa presvedčiť, že limity pre $x \to -\infty$ dávajú tie isté výsledky.

Záver: Funkcia $f(x) = x - \frac{2}{x-1}$ má asymptotu bez smernice ku grafu v bode $x = 1$ a asymptotou so smernicou ku grafu je priamka $y = x$, a to pre $x \to -\infty$ aj pre $x \to +\infty$.



Obr. 5.11: $f(x) = x - \frac{2}{x-1}$.

Príklad č. 2. Vypočítajme asymptoty grafu funkcie $f(x) = x - \cos(2x)$.

Riešenie: Ide o spojitú funkciu definovanú na intervale $(-\infty, \infty)$, preto asymptoty bez smernice neexistujú.

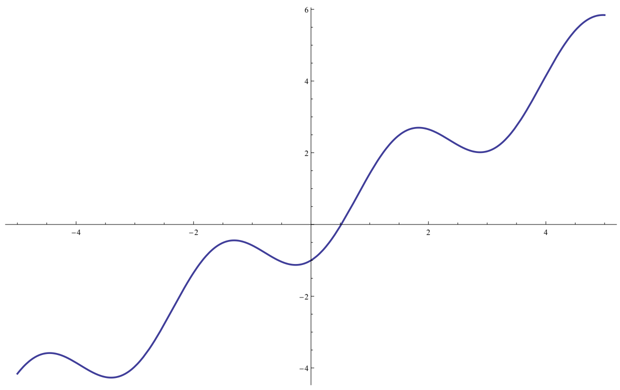
Existenciu asymptot so smernicou testujeme pomocou známych vzťahov (5.3), (5.4).

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{x - \cos(2x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{\cos(2x)}{x}\right) = 1,$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} (x - \cos(2x) - x) = \lim_{x\to+\infty} (-\cos(2x)) \; .$$

Keďže funkcia $\cos(x)$ osciluje so svojimi hodnotami medzi -1 a 1, znamená to, že druhá limita a teda ani asymptota neexistuje. Podobne neexistuje asymptota ani pre $x \to -\infty$.

Záver: Graf funkcie $f(x) = x - \cos(2x)$ nemá žiadne asymptoty.



Obr. 5.12: $f(x) = x - \cos(2x)$.

Príklad č. 3. Určíme asymptoty grafu funkcie $f(x) = \sqrt{3 + 2x^2}$.

Riešenie: Definičným oborom funkcie je interval $(-\infty, \infty)$. Funkcia nemá asymptoty bez smernice.

Asymptoty so smernicou $y = kx + q$ určíme pomocou vzťahov (5.3), (5.4). Najprv sa sústredíme na prípad, keď $x \to +\infty$. Koeficient k počítame zo vzťahu

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3 + 2x^2}}{x} .$$

V tomto kroku vydelíme čitatela aj menovateľa x a dostávame

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3/x^2 + 2x^2/x^2}}{x/x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{3/x^2 + 2} .$$

Opäť použijeme vzťah $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ a dostávame $k = \sqrt{2}$.

Koeficient q počítame zo vzťahu

$$q = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{3 + 2x^2} - \sqrt{2}x\right) .$$

Túto limitu vypočítame tak, že vynásobíme čitateľa a menovateľa vhodným výrazom na odstránenie odmocnín v čitateli:

$$q = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{3 + 2x^2} - \sqrt{2}x\right) \cdot \frac{\sqrt{3 + 2x^2} + \sqrt{2}x}{\sqrt{3 + 2x^2} + \sqrt{2}x}$$

po úprave máme

$$q = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{3 + 2x^2} + \sqrt{2}x} .$$

Výsledok limity je nula, pretože menovateľ neobmedzene rastie, ak x rastie, teda $q = 0$.

Teraz vyšetríme prípad, keď $x \to -\infty$. Keďže skúmame prípad, keď $x < 0$, tak $|x| = -x$, a potom

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x}\sqrt{3+2x^2}}{\frac{1}{x}\cdot x} = \frac{-\frac{1}{|x|}\sqrt{3+2x^2}}{1} \; .$$

Pre $x \to -\infty$ je $|x| > 0$ a výraz $|x|$ môžme "vtiahnut" pod odmocninu:

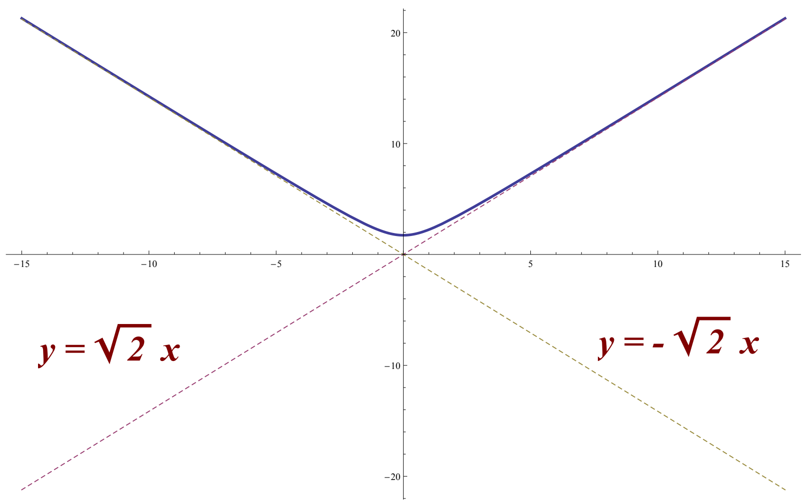
$$k = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{3/x^2 + 2x^2/x^2} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{3/x^2+2} \; .$$

Keďže $3/x^2 \to 0$ pre $x \to -\infty$, máme $k = -\sqrt{2}$.

Druhá limita sa vypočíta rovnako ako v predchádzajúcom prípade:

$$q = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{3+2x^2} - \sqrt{2}x\right) = 0 \; .$$

Záver: Graf funkcie $f(x) = \sqrt{3+2x^2}$ má asymptoty so smernicou $y = \pm\sqrt{2}x$.



Obr. 5.13: $f(x) = \sqrt{3+2x^2}$.

5.4 Analýza priebehu a náčrt grafu funkcie

Pod analýzou priebehu funkcie rozumieme stanovenie najdôležitejších charakteristík, ktorými sú intervaly monotónnosti a vypuklosti, extrémy, inflexné body a asymptoty. Pomocou týchto (a prípadne ďalších) údajov je potom možné pomerne presne načrtnúť graf danej funkcie.

Pri analýze priebehu funkcie je vhodné postupovať podľa nasledujúcej schémy:

1. Určíme definičný obor funkcie.

2. Určíme nulové body, t. j. body, v ktorých funkcia pretína os Ox, priesečníky s osou Oy, prípadne ďalšie významné body.

3. Vyšetríme monotónnosť funkcie pomocou kritéria KM a určíme lokálne extrémy.

4. Pomocou kritéria vypuklosti KV určíme intervaly, v ktorých je funkcia konvexná, resp. konkávna a určíme inflexné body.

5. Vypočítame asymptoty ku grafu funkcie.

6. Pomocou údajov získaných v častiach $1-5$ načrtneme graf funkcie.

Poznámka

Niekedy je pri náčrtoch grafu funkcie možné využiť symetrie podľa osi Oy alebo podľa počiatku súradnicovej sústavy. Funkcie, ktorých grafy sú symetrické podľa osi y, nazývame **párne**. Ide presne o funkcie spĺňajúce rovnosť

$$f(-x) = f(x)$$

pre každé x z definičného oboru funkcie.

Funkcie, ktorých grafy sú symetrické podľa počiatku súradnicovej sústavy, nazývame **nepárne** a ide presne o funkcie spĺňajúce rovnosť

$$f(-x) = -f(x)$$

pre každé x z definičného oboru funkcie.

Príklad č. 1. Vypočítajte intervaly monotónnosti, extrémy, intervaly vypuklosti, inflexné body a asymptoty funkcie $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 2x + 10$ na uzavretom intervale $\langle -2, 2\rangle$ a na základe týchto informácií načrtnite čo najpresnejšie jej graf.

Riešenie:

1. Definičný obor funkcie

Definičným oborom funkcie je interval $(-\infty, \infty)$. My ale určíme priebeh funkcie len na zadanom intervale $\langle -2, 2\rangle$.

2. Nulové body

Určíme priesečníky funkcie s osou x v bodoch, kde $f(x) = 0$:

$$f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 2x + 10 \ .$$

Keďže rovnice tretieho stupňa nie je jednoduché riešiť, tento krok vynechávame. Situácia sa vyjasní na záver, keď načrtneme graf funkcie.

Priesečníky s osou y určíme v bode $x = 0$:

$$f(x) = 2 \cdot 0^3 + 4 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + 10 = 10 \ .$$

Funkcia pretína os y v bode $[0, 10]$.

3. Intervaly monotónnosti

Kritické body určíme z rovnice $f^{'}(x) = 0$, preto funkciu zderivujeme

$$f^{'}(x) = 6x^2 + 8x + 2 \ ,$$

položíme rovnú nule a dostávame kvadratickú rovnicu

$$6x^2 + 8x + 2 = 0 \ .$$

Korene kvadratickej rovnice vypočítame napr. pomocou diskriminantu, a dostávame dva body $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = -1$.

Kritické body (-1) a $(-1/3)$ nám rozdeľujú vyšetrovaný interval bez koncových bodov na tri časti, a to $(-2, -1)$, $(-1, -1/3)$, $(-1/3, 2)$. Na týchto troch intervaloch jednotlivo vyšetríme monotónnosť funkcie podľa Kritéria monotónnosti (KM).

- $(-2, -1)$: $f^{'}(-3/2) = 6 \cdot (-3/2)^2 + 8 \cdot (-3/2) + 2 = 7/2$, teda funkcia na intervale $(-2, -1)$ rastie.

- $(-1, -1/3)$: $f^{'}(-1/2) = 6 \cdot (-1/2)^2 + 8 \cdot (-1/2) + 2 = -1/2$, teda funkcia na intervale $(-1, -1/3)$ klesá.

- $(-1/3, 2)$: $f'(1) = 6 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 + 2 = 16$, preto funkcia na intervale $(-1/3, 2)$ rastie.

Dopočítame funkčné hodnoty v kritických bodoch:

$$f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 4 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 10 = 10 \ ,$$

$$f(-1/3) = 2 \cdot (-1/3)^3 + 4 \cdot (-1/3)^2 + 2 \cdot (-1/3) + 10 = 262/27 \ .$$

Naša funkcia je ohraničená uzavretým intervalom $\langle -2, 2 \rangle$, preto spočítame súradnice koncových bodov funkcie a určíme kandidátov na globálne extrémy

$$f(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + 4 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) + 10 = -16 + 16 - 4 + 10 = 6 \ ,$$

$$f(2) = 2 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 10 = 16 + 16 + 4 + 10 = 46 \ .$$

Súradnice kritických bodov, v ktorých môžu byť extrémy, sú $[-1, 10]$, $[-1/3, 262/27]$, $[-2, 6]$ a $[2, 46]$.

Na základe údajov o intervaloch monotónnosti vidíme, že globálne minimum je v bode $[-2, 6]$, globálne maximum je v bode $[2, 46]$. Lokálne maximum funkcia nadobúda v bode $[-1, 10]$ a lokálne minimum v bode $[-1/3, 262/27]$.

4. Intervaly vypuklosti

Určíme riešenia rovnice $f''(x) = 0$, ktoré nám rozdelia definičný obor na intervaly, preto druhá derivácia funkcie bude

$$f''(x) = 12x + 8 \ .$$

Z rovnice $12x + 8 = 0$ dostávame jedniné riešenie pre $x = -2/3$.

Bod $x = -2/3$ rozdeľuje definičný obor funkcie bez koncových bodov na dva intervaly $(-2, -2/3)$ a $(-2/3, 2)$, v ktorých budme vyšetrovať konvexnosť, a konkávnosť funkcie podľa Kritéria KV.

- $(-2, -2/3)$: $f''(-1) = 12 \cdot (-1) + 8 = -4$, teda funkcia je na intervale $(-2, -2/3)$ konkávna.

- $(-2/3, 2)$: $f''(0) = 12 \cdot 0 + 8 = 8$, teda funkcia je na intervale $(-2/3, 2)$ konvexná.

V bode $x = -2/3$ funkcia "mení" konkávnosť na konvexnosť, teda v tomto bode je inflexný bod.

5. Asymptoty ku grafu funkcie

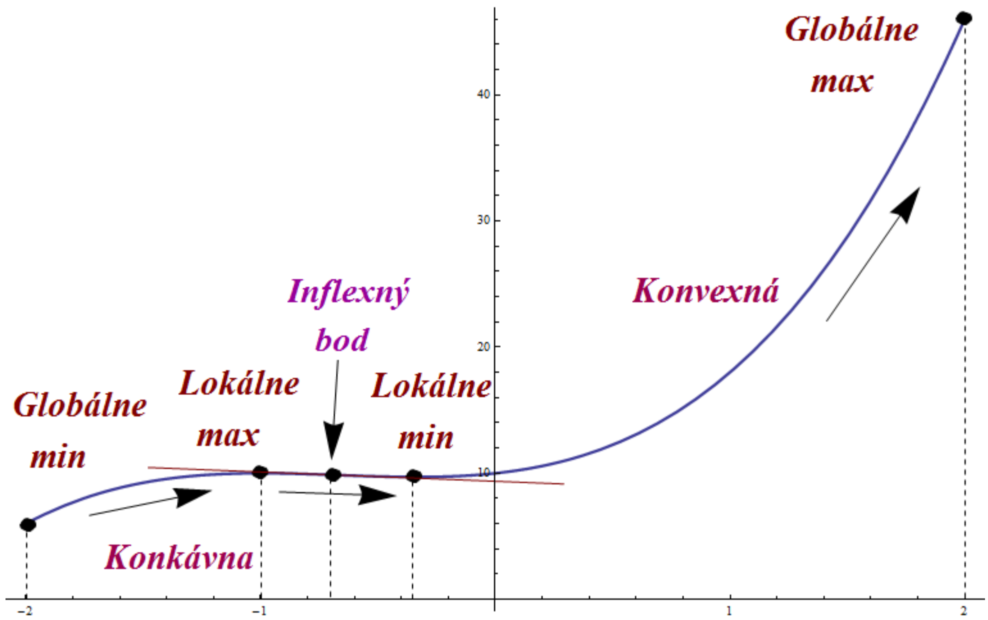
Asymptoty bez smernice ku grafu funkcie neexistujú, pretože naša funkcia je definovaná na uzavretom intervale a je na ňom spojitá.

Testovanie existencie asymptot so smernicou začneme výpočtom limity

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x + 10}{x} \ .$$

Táto limita je však rovná nekonečnu, teda nemá význam počítat' q. Asymptoty so smernicou ku grafu funkcie neexistujú.

6. Graf funkcie $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 2x + 10$ na intervale $\langle -2, 2\rangle$:



Obr. 5.14: $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 2x + 10$.

Príklad č. 2. Vypočítajte intervaly monotónnosti, extrémy, intervaly vypuklosti, inflexné body a asymptoty funkcie $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$ a na základe týchto informácií načrtnite čo najpresnejšie jej graf.

Riešenie:

1. Definičný obor funkcie

Definičným oborom funkcie je interval $(-\infty, \infty)$. Funkcia je spojitá na celom definičnom obore.

2. Nulové body

Priesečníky funkcie s osou x určíme z rovnice $f(x) = 0$, teda

$$x^4 - 2x^2 + 2 = 0 \ .$$

Po substitúcii $z = x^2$ dostaneme kvadratickú rovnicu, ktorá má záporný diskriminant a preto nemá reálne korene. Funkcia preto nemá nulové body na osi x.

Určíme priesečníky s osou y:

$$f(0) = 0^4 - 2 \cdot 0^2 + 2 = 2 \ .$$

Funkcia pretína os y v bode $[0, 2]$.

3. Intervaly monotónnosti

Možných kandidátov na extrémy určíme z rovnice $f^{'}(x) = 0$. Funkciu zderivujeme

$$f^{'}(x) = 4x^3 - 4x \ ,$$

a deriváciu položíme rovnú nule:

$$4x^3 - 4x = 0 \ .$$

Po krátkej úprave máme

$$4x(x-1)(x+1) = 0 \ .$$

Vyjadríme korene rovnice a dostávame kritické body

$$x_1 = 0, \ x_2 = 1, \ x_3 = -1 \ .$$

Kritické body $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$ rozdeľujú definičný obor funkcie na štyri intervaly: $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ a $(1, \infty)$. Na týchto intervaloch je potrebné jednotlivo vyšetriť monotónnosť funkcie.

• $(-\infty, -1)$: $f'(-2) = 4 \cdot (-2)(-2-1)(-2+1) = -24$, preto funkcia je na intervale $(-\infty, -1)$ klesajúca.

• $(-1, 0)$: $f'(-1/2) = 4 \cdot (-1/2)(-1/2-1)(-1/2+1) = 3/2$, teda funkcia je na intervale $(-1, 0)$ rastúca.

• $(0, 1)$: $f'(1/2) = 4 \cdot (1/2)(1/2-1)(1/2+1) = -3/2$, teda funkcia je na intervale $(0, 1)$ klesajúca.

• $(1, \infty)$ $f'(2) = 4 \cdot 2(2-1)(2+1) = 24$, t. j. funkcia je na intervale $(1, \infty)$ rastúca.

Dopočítame funkčné hodnoty v kritických bodoch:

$$f(0) = 0^4 - 2 \cdot 0^2 + 2 = 2 \ ,$$

$$f(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^2 + 2 = 1 \ ,$$

$$f(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^2 + 2 = 1 \ .$$

Kritické body, ktoré sú možnými kandidátmi na extrémy, sú body $[0, 2]$, $[1, 1]$, $[-1, 1]$.

Keďže definičným oborom našej funkcie je interval $(-\infty, \infty)$, zo zistených intervalov monotónnosti vidíme, že funkcia nadobúda súčasne lokálne aj globálne minimum v bodoch $[1, 1]$, $[-1, 1]$ a lokálne (ale nie globálne) maximum v bode $[0, 2]$. Globálne maximum neexistuje, pretože pre $x \to \pm\infty$ funkcia nadobúda neobmedzene veľké hodnoty.

4. Intervaly vypuklosti

Na určenie konvexnosti, resp konkávnosti potrebujeme určiť riešenia rovnice $f''(x) = 0$. Druhá derivácia funkcie bude

$$f''(x) = 12x^2 - 4 \ .$$

Riešime rovnicu $f''(x) = 0$, teda

$$12x^2 - 4 = 0 \ ,$$

a po úprave

$$12(x - 1/\sqrt{3})(x + 1/\sqrt{3}) = 0 \ .$$

Korene rovnice sú

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \ .$$

Body $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ a $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ rozdeľujú definičný obor funkcie na tri intervaly $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ a $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$, v ktorých jednotlivo vyšetríme konvexnosť, resp. konkávnosť funkcie.

• $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}})$: $f''(-1) = 12 \cdot (-1)^2 - 4 = 8$, teda funkcia je na intervale $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ konvexná.

• $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$: $f''(0) = 12 \cdot 0^2 - 4 = -4$, teda funkcia je na intervale $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ konkávna.

• $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$: $f''(1) = 12 \cdot 1^2 - 4 = 8$, t. j. funkcia je na intervale $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$ konvexná.

Tieto dva body $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ a $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ sú súčasne aj inflexnými bodmi našej funkcie. V bode $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ sa naša funkcia mení z konkávnosti na konvexnú a v bode $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ sa funkcia mení z konvexnej na konkávnu.

5. Asymptoty ku grafu funkcie

Asymptoty bez smernice grafu funkcie neexistujú, pretože naša funkcia je spojitá na $(-\infty, \infty)$.

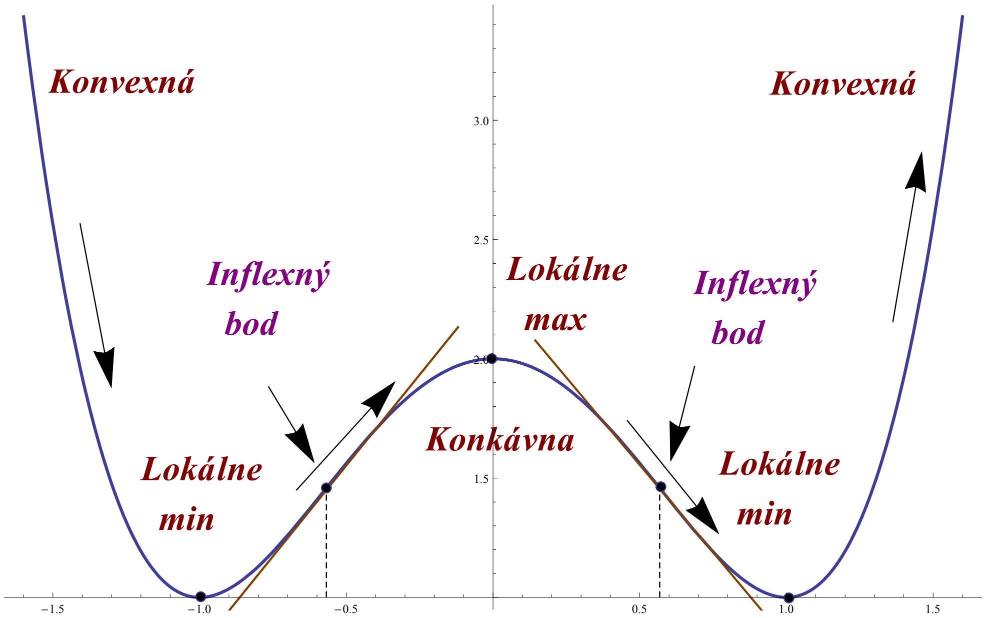
Asymptoty so smernicou určíme podľa už známych vzťahov

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^4 - 2x^2 + 2}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(x^3 - 2x + \frac{2}{x} \right) .$$

Výraz $\frac{2}{x}$ má nulovú limitu pre $x \to \pm\infty$, ale zvyšok výrazu, t. j. člen $x^3 - 2x$, neobmedzene rastie pre $x \to +\infty$ a neobmedzene klesá pre $x \to -\infty$. Preto uvedená limita neexistuje.

Asymptoty so smernicou grafu funkcie neexistujú.

6. Graf funkcie $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$



Obr. 5.15: $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$.

Príklad č. 3. Vypočítajte intervaly monotónnosti, extrémy, intervaly vypuklosti, inflexné body a asymptoty funkcie $f(x) = \frac{x^3-3x^2}{x-2}$ a na základe týchto informácií načrtnite čo najpresnejšie jej graf.

Riešenie:

1. Definičný obor funkcie

Definičným oborom našej funkcie je množina $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$. Funkia nie je definovaná v bode $x = 2$.

2. Nulové body

Hľadáme priesečníky funkcie s osou x, teda musí platiť $f(x) = 0$:

$$\frac{x^3 - 3x^2}{x - 2} = 0 \ .$$

Po krátkej úprave máme

$$x^2(x - 3) = 0 \ .$$

Z rovnice dostávame, že naša funkcia pretína os x v dvoch bodoch

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 3 \ .$$

Určíme priesečníky funkcie s osou y

$$f(0) = \frac{0^3 - 3 \cdot 0^2}{0 - 2} = 0 \ .$$

Funkcia prechádza počiatkom súradnicovej sústavy $[0,0]$.

3. Intervaly monotónnosti

Kritické body určíme z rovnice $f'(x) = 0$. Derivácia našej funkcie je

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 6x)(x-2) - (x^3 - 3x^2) \cdot 1}{(x-2)^2}$$

a po úprave máme

$$f'(x) = \frac{x.(2x^2 - 13x + 12)}{(x-2)^2} \ .$$

Riešime teda rovnicu

$$\frac{x.(2x^2 - 13x + 12)}{(x-2)^2} = 0 \ ,$$

ktorej výsledkom je bod $x = 0$.

Funkčná hodnota v bode $x = 0$ je $f(0) = \frac{0^3 - 3 \cdot 0^2}{0-2} = 0$.

Kritický bod $x = 0$ a krajný bod definičného oboru $x = 2$ nám rozdeľujú definičný obor funkcie na tri intervaly: $(-\infty, 0)$, $(0,2)$, $(2,\infty)$. V týchto troch intervaloch jednotlivo vyšetríme monotónnosť funkcie pomocou Kritéria monotónnosti KM.

• $(-\infty, 0)$: $f'(-1) = \frac{(-1)\cdot(2\cdot(-1)^2 - 13\cdot(-1)+12)}{(-1-2)^2} = -3$, teda funkcia je na intervale $(-\infty, 0)$ klesajúca.

• $(0,2)$: $f'(1) = \frac{1\cdot(2\cdot 1^2 - 13\cdot 1 + 12)}{(1-2)^2} = 1$, teda funkcia je na intervale $(0,2)$ rastúca.

• $(2,\infty)$: $f'(3) = \frac{3\cdot(2\cdot 3^2 - 13\cdot 3 + 12)}{(3-2)^2} = 12$, teda funkcia je na intervale $(2,\infty)$ rastúca.

Naša funkcia bude mať jediný lokálny extrém, a to lokálne minimum v bode $[0,0]$.

4. Intervaly vypuklosti

Na určenie intervalov konvexnosti a konkávnosti si našu funkciu prepíšeme do vhodnejšieho tvaru:

$$f(x) = x^2 - x - 2 - \frac{4}{x-2} \ .$$

Druhá derivácia funkcie bude

$$f''(x) = 2 - \frac{8}{(x-2)^3} \ .$$

Riešime rovnicu $f''(x) = 0$, teda

$$2 - \frac{8}{(x-2)^3} = 0 \ .$$

Rovnica má jediný koreň, a to $x = 2 + \sqrt[3]{4}$.

Definičný obor funkcie nám delí na tri časti bod, v ktorom funkcia nie je definovaná, teda $x = 2$ a bod $x = 2 + \sqrt[3]{4}$.

- $(-\infty, 2)$: $f''(0) = 2 - \frac{8}{(0-2)^3} = 3$, teda funkcia je konvexná na intervale $(-\infty, 2)$.
- $(2, 2+\sqrt[3]{4})$: $f''(3) = 2 - \frac{8}{(3-2)^3} = -6$, preto funkcia je konkávna na intervale $(2, 2+\sqrt[3]{4})$.
- $(2+\sqrt[3]{4}, \infty)$: $f''(4) = 2 - \frac{8}{(4-2)^3} = 1$, teda funkcia je na intervale $(2+\sqrt[3]{4}, \infty)$ konvexná.

5. Asymptoty ku grafu funkcie

Asymptoty bez smernice grafu funkcie vyšetríme v krajnom bode definičného oboru funkcie, v ktorom súčasne funkcia nie je definovaná. Je to bod $x = 2$. Na výpočet použijeme známe vzťahy

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^3 - 3x^2}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2 - 3x}{1 - 2/x} = \lim_{x\to 2^+} (x^2 - 3x) = \infty \ ,$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^3 - 3x^2}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} (x^2 - 3x) = -\infty \ .$$

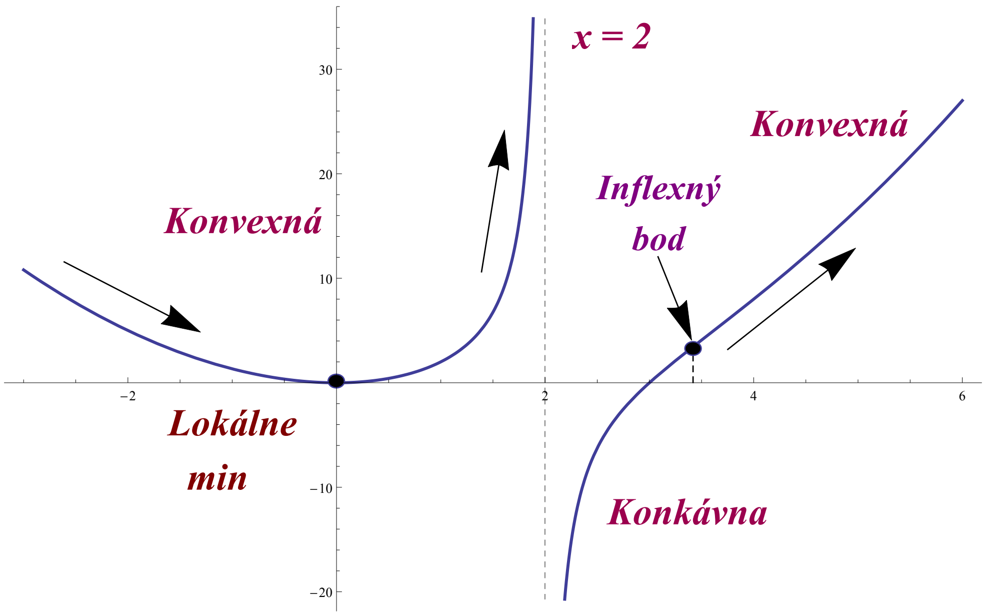
Pri obidvoch limitách vidíme, že ak vydelíme čitateľa a menovateľa najväčšou mocninou z menovateľa, teda x^1, v čitateli nám ostane výraz $x^2 - 3x$. Pri dosadení akejkoľvek hodnoty z definičného oboru funkcie vidíme, že výsledná limita sa nám "blíži" do ∞, resp. $-\infty$. Preto asymptotou bez smernice bude priamka $x = 2$.

Testovanie existencie asymptot so smernicou začneme výpočtom smernice k:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3-3x^2}{x-2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-3}{1 - 2/x} = \infty \ .$$

Pri úprave tejto limity sme opäť použili rovnaký spôsob výpočtu, teda vydelili sme čitateľa a menovateľa najväčšou mocninou v menovateli, t. j. x^2. Pretože v čitateli nám ostal výraz $x - 3$, je jasné, že hodnota tejto limity je nekonečno. Z toho vyplýva, že naša funkcia nemá asymptoty so smernicou.

6. Graf funkcie $f(x) = \frac{x^3-3x^2}{x-2}$



Obr. 5.16: $f(x) = \frac{x^3-3x^2}{x-2}$.

Príklad č. 4. Vypočítajte intervaly monotónnosti, extrémy, intervaly vypuklosti, inflexné body a asymptoty funkcie $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$ a na základe týchto informácií načrtnite čo najpresnejšie jej graf.

Riešenie:

1. Definičný obor funkcie

Výraz pod logaritmom musí byť kladný, preto $x^2 - 3x + 2 > 0$. Definičným oborom našej funkcie je zjednotenie intervalov $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$.

2. Nulové body

Určíme priesečníky s osou x v bodoch, kde $f(x) = 0$:

$$\ln(x^2 - 3x + 2) = 0 \ ,$$

čo po odlogaritmovaní dáva

$$x^2 - 3x + 2 = 1 \ .$$

Korene rovnice a zároveň priesečníky funkcie s osou x, sú $x_1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$ a $x_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$.

Priesečník funkcie s osou y určíme z hodnoty

$$f(0) = \ln(0^2 - 3 \cdot 0 + 2) = \ln 2 \ .$$

Funkcia pretína os y v bode $[0, \ln 2]$.

3. Intervaly monotónnosti

Riešime rovnicu $f^{'}(x) = 0$ na určenie možných kandidátov na lokálne extrémy. Derivácia našej funkcie má tvar

$$f^{'}(x) = \frac{(2x-3)}{x^2-3x+2} \; .$$

Vyriešením rovnice

$$\frac{(2x-3)}{x^2-3x+2} = 0$$

dostávame kritický bod $x = 3/2$.

Definičným oborom našej funkcie je zjednotený interval $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ a vypočítaný kritický bod je mimo tohto intervalu, preto naša funkcia nemá žiadne lokálne extrémy.

Pretože nemáme žiadny kritický bod, monotónnosť našej funkcie vyšetrujeme na dvoch intervaloch, teda na definičnom obore $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$.

- $(-\infty, 1)$: $f^{'}(0) = \frac{(2\cdot 0-3)}{0^2-3\cdot 0+2} = -3/2$, teda funkcia je na intervale $(-\infty, 1)$ klesajúca.

- $(2, \infty)$: $f^{'}(3) = \frac{(2\cdot 3-3)}{3^2-3\cdot 3+2} = 3/2$, preto funkcia je na intervale $(2, \infty)$ rastúca.

4. Intervaly vypuklosti

Na určenie konvexnosti, resp. konkávnosti riešime rovnicu $f^{''}(x) = 0$. Druhá derivácia funkcie je teda

$$f^{''}(x) = \frac{2\cdot(x^2-3x+2)-(2x-3)(2x-3)}{x^2-3x+2} \; .$$

Dostávame rovnicu

$$\frac{2\cdot(x^2-3x+2)-(2x-3)(2x-3)}{x^2-3x+2} = 0 \; .$$

Výpočtom zistíme, že rovnica nemá reálne korene, preto naša funkcia nemá inflexný bod.

Vyšetrujeme preto len dva intervaly, na ktorých je naša funkcia definovaná. Použijeme Kritérium vypuklosti KV:

- $(-\infty, 1)$: $f^{''}(0) = \frac{2\cdot(0^2-3\cdot 0+2)-(2\cdot 0-3)(2\cdot 0-3)}{0^2-3\cdot 0+2} = -5/2$, teda funkcia je na intervale $(-\infty, 1)$ konkávna.

• $(2,\infty)$: $f''(3)=\frac{2\cdot(3^2-3\cdot3+2)-(2\cdot3-3)(2\cdot3-3)}{3^2-3\cdot3+2}=-5/2$, funkcia je na intervale $(2,\infty)$ konkávna.

5. Asymptoty ku grafu funkcie

Asymptoty bez smernice grafu funkcie vyšetríme v bode $x=1$ a v bode $x=2$ podľa vzťahov

$$\lim_{x\to1^-}\ln(x^2-3x+2)=-\infty\ ,$$

$$\lim_{x\to2^+}\ln(x^2-3x+2)=-\infty\ .$$

Asymptotou bez smernice sú priamky $x=1$ a $x=2$.

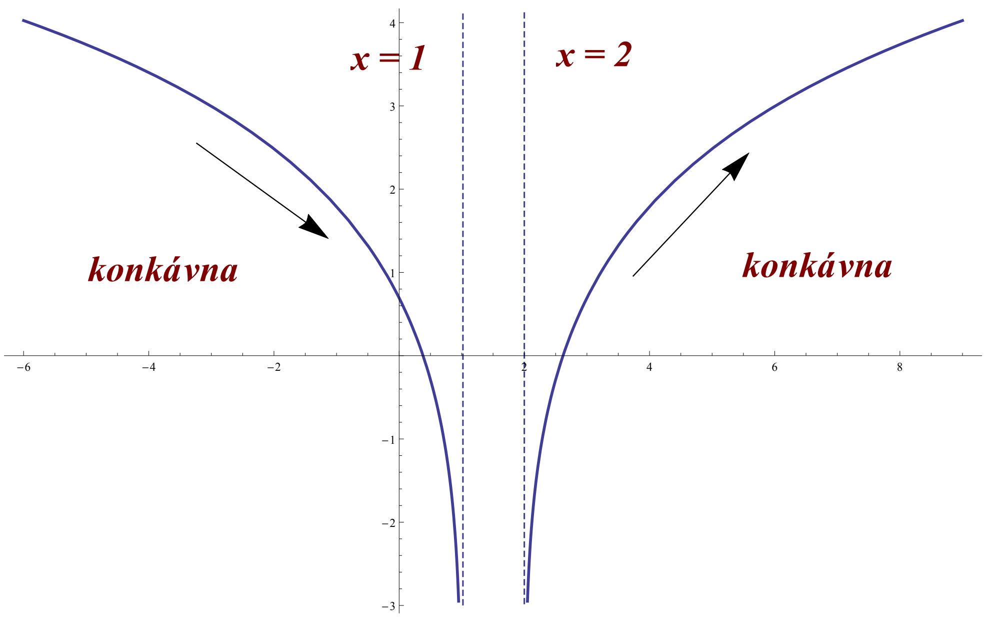
Na testovanie existencie asymptot so smernicou postupne počítame limity zo vzťahov (5.3), (5.4):

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2-3x+2)}{x}=0\ ,$$

$$q=\lim_{x\to\infty}(\ln(x^2-3x+2)-0\cdot x)\ .$$

Druhá limita neexistuje, preto funkcia nemá asymptoty so smernicou.

6. Graf funkcie $f(x)=\ln(x^2-3x+2)$:



Obr. 5.17: $f(x)=\ln(x^2-3x+2)$.

Príklad č. 5. Vypočítajte intervaly monotónnosti, extrémy, intervaly vypuklosti, inflexné body a asymptoty funkcie $f(x) = x - 3\ln(x)$ a na základe týchto informácií načrtnite čo najpresnejšie jej graf.

Riešenie:

1. Definičný obor funkcie

Definičným oborom našej funkcie je interval $(0, \infty)$.

2. Nulové body

Hľadáme body, v ktorých funkcia pretína os x, teda kde je $f(x) = 0$:

$$x - 3\ln(x) = 0 \ . \tag{5.6}$$

Rovnice, kde sa vyskytuje x aj $\ln(x)$, sú vo všeobecnosti neriešiteľné exaktnými metódami, preto (5.6) riešiť nebudeme. (Zo záverečného grafu vidíme, že rovnica má dve riešenia.)

3. Intervaly monotónnosti

Kritické body určíme z rovnice $f'(x) = 0$, teda prvá derivácia je

$$f'(x) = 1 - \frac{3}{x} \ .$$

Z rovnice $1 - \frac{3}{x} = 0$ dostávame kritický bod $x = 3$. Funkčná hodnota v tomto bode je

$$f(3) = 3 - 3\ln(3) \ .$$

Kritický bod $x = 3$ nám delí definičný obor funkcie na dva intervaly $(0, 3)$ a $(3, \infty)$.

- $(0, 3)$: $f'(1) = 1 - \frac{3}{1} = -2$, teda funkcia je na intervale $(0, 3)$ klesajúca.
- $(3, \infty)$: $f'(4) = 1 - \frac{3}{4} = 1/4$, preto funkcia je na intervale $(3, \infty)$ rastúca.

Kritický bod so súradnicami $[3, 3 - 3\ln(3)]$ je lokálne minimum našej funkcie.

4. Intervaly vypuklosti

Druhá derivácia funkcie $f''(x) = \frac{3}{x^2}$ je evidentne kladná na intervale $(0, \infty)$, teda funkcia je konvexná na celom svojom definičnom obore.

5. Asymptoty ku grafu funkcie

Asymptoty bez smernice vyšetrujeme v bode $x = 0$, pretože ide o bod na hranici definičného oboru:

$$\lim_{x\to 0^-}(x - 3\ln(x)) \ .$$

Keďže $\lim\limits_{x\to 0^-} x = 0$ a $\lim\limits_{x\to 0^-} \ln(x) = -\infty$, hodnota našej limity je

$$\lim_{x\to 0^-}(x - 3\ln(x)) = +\infty \ .$$

Funkcia má asymptotu bez smernice v bode $x = 0$.

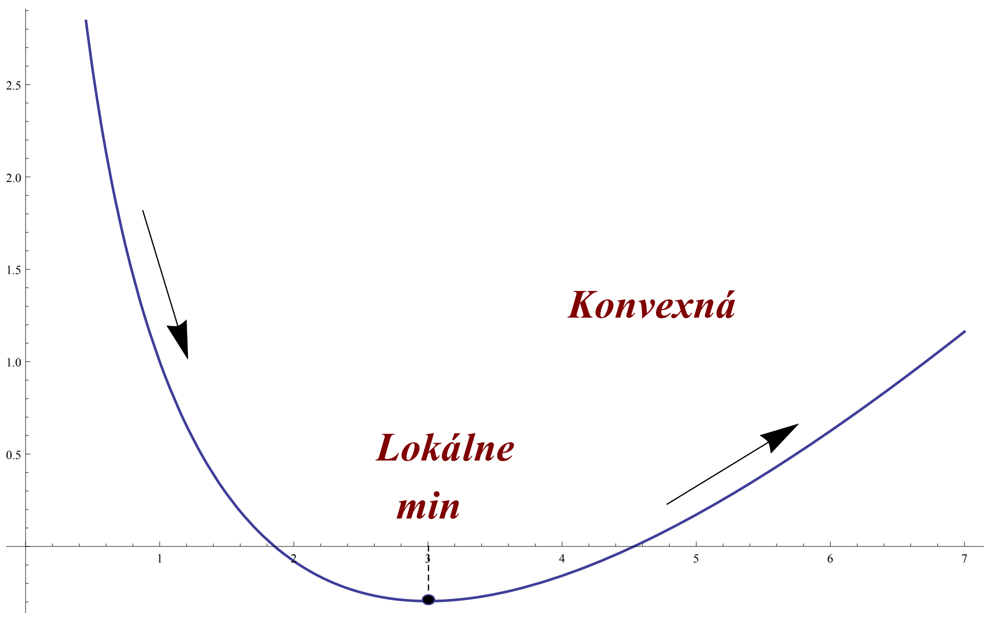
Asymptoty so smernicou určíme výpočtom konštánt k a q:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{x - 3\ln(x)}{x} = 1 \ ,$$

$$q = \lim_{x\to\infty}(x - 3\ln(x) - x) = -\infty \ .$$

Keďže druhá limita neexistuje, funkcia nemá asymptoty so smernicou.

6. Graf funkcie $f(x) = x - 3\ln(x)$:



Obr. 5.18: $f(x) = x - 3\ln(x)$.

Príklad č. 6. Vypočítajte intervaly monotónnosti, extrémy, intervaly vypuklosti, inflexné body a asymptoty funkcie $f(x) = (1 - x^2) \cdot e^{-x}$ a na základe týchto informácií načrtnite čo najpresnejšie jej graf.

Riešenie:

1. Definičný obor funkcie

Definičným oborom funkcie je interval $(-\infty, \infty)$. Funkcia je spojitá na celom definičnom obore.

2. Nulové body

Určíme priesečníky grafu funkcie s osou x tak, že položíme $f(x) = 0$:

$$(1 - x^2) \cdot e^{-x} = 0 \ .$$

Z rovnice dostávame, že priesečníky sú v bodoch $x_1 = 1$ a $x_2 = -1$.

Priesečník s osou y bude

$$f(0) = (1 - 0^2)e^0 = 1 \ .$$

Graf funkcie pretína os y v bode $[0, 1]$.

3. Intervaly monotónnosti

Kandidátov na extrémy určíme z rovnice $f'(x) = 0$. Derivácia našej funkcie je

$$f'(x) = -2xe^{-x} - (1 - x^2)e^{-x} = e^{-x}(-x^2 + 2x + 1) \ .$$

Dostávame tak rovnicu

$$e^{-x}(-x^2 + 2x + 1) = 0 \ .$$

Korene kvadratickej rovnice $(-x^2+2x+1) = 0$, ktoré môžeme vypočítať napr. pomocou diskriminantu, sú $x_1 = 1 - \sqrt{2}$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$.

Vypočítame funkčnú hodnotu v kritických bodoch x_1 a x_2:

$$f(1 - \sqrt{2}) = (1 - (1 - \sqrt{2})^2) \cdot e^{-(1-\sqrt{2})} = 2e^{\sqrt{2}-1} \ ,$$

$$f(1 + \sqrt{2}) = (1 - (1 + \sqrt{2})^2) \cdot e^{-(1+\sqrt{2})} = -2e^{-1-\sqrt{2}} \ .$$

Kritické body $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ a $x_2 = 1 + \sqrt{2}$ nám rozdeľujú definičný obor funkcie na tri intervaly $(-\infty, 1 - \sqrt{2})$, $(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ a $(1 + \sqrt{2}, \infty)$.

• $(-\infty, 1-\sqrt{2})$: $f'(-1) = -2(-1)e^1 - (1-(-1)^2)e^1 = 2e$, funkcia je na intervale $(-\infty, 1-\sqrt{2})$ rastúca.

• $(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$: $f'(0) = -2\cdot 0\cdot e^0 - (1-0^2)e^0 = -1$, funkcia je na intervale $(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ klesajúca.

• $(1+\sqrt{2}, \infty)$: $f'(3) = -2\cdot 3\cdot e^3 - (1-3^2)e^3 = 2e^3$, funkcia je na intervale $(1+\sqrt{2}, \infty)$ rastúca.

Zo získaných informácií o monotónnosti funkcie zatiaľ vidíme, že naša funkcia nadobúda v bode $[1-\sqrt{2},\ 2e^{\sqrt{2}-1}]$ lokálne maximum a v bode $[1+\sqrt{2}, -2e^{-1-\sqrt{2}}]$ lokálne minimum.

4. Intervaly vypuklosti

Hľadáme riešenia rovnice $f''(x) = 0$. Druhá derivácia našej funkcie je

$$f''(x) = e^{-x}(2x+1-x^2) - e^{-x}(-2x+2)\ .$$

Rovnica $f''(x) = 0$ sa redukuje na kvadratickú rovnicu $(-x^2+4x-1) = 0$ a jej korene vypočítané pomocou diskriminantu sú $x_1 = 2-\sqrt{3}$ a $x_2 = 2+\sqrt{3}$.

Body x_1 a x_2 nám rozdeľujú definičný obor funkcie na tri intervaly $(-\infty, 2-\sqrt{3})$, $(2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$ a $(2+\sqrt{3}, \infty)$, v ktorých budeme vyšetrovať vypuklosť funkcie.

• $(-\infty, 2-\sqrt{3})$: $f''(0) = e^0(2\cdot 0+1-0^2) - e^0(-2\cdot 0+2) = -1$, teda funkcia je na $(-\infty, 2-\sqrt{3})$ konkávna.

• $(2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$: $f''(1) = e^1(2\cdot 1+1-1^2) - e^1(-2\cdot 1+2) = 2e$, teda funkcia je na $(2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$ konvexná.

• $(2+\sqrt{3}, \infty)$: $f''(4) = e^4(2\cdot 4+1-4^2) - e^4(-2\cdot 4+2) = -e^4$, teda funkcia je na $(2+\sqrt{3}, \infty)$ konkávna.

Z informácií o vypuklosti funkcie už vieme, že body $x_1 = 2-\sqrt{3}$ a $x_2 = 2+\sqrt{3}$ sú zároveň inflexnými bodmi našej funkcie.

5. Asymptoty ku grafu funkcie

Asymptoty bez smernice neexistujú, pretože definičný obor neobsahuje vhodné hraničné body.

Asymptoty so smernicou určíme výpočtom konštánt k, q:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{(1-x^2)\cdot e^{-x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{xe^x} - \frac{x}{e^x} = 0\ ,$$

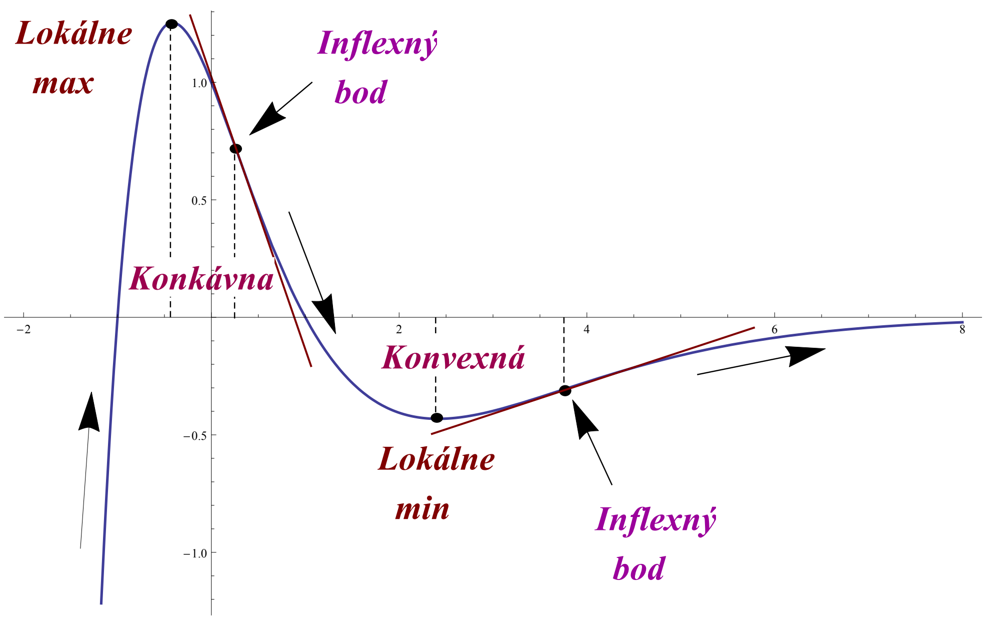
$$q = \lim_{x \to \infty}((1 - x^2) \cdot e^{-x}) = 0 \; .$$

Vyšetríme ešte limitu, keď $x \to -\infty$:

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{(1 - x^2) \cdot e^{-x}}{x} = \infty \; .$$

Vidíme, že pre $x \to +\infty$ má funkcia asymptotu so smernicou: $y = 0x + 0 = 0$, čiže touto asymptotou je os x. Pre $x \to -\infty$ funkcia asymptotu so smernicou nemá.

6. Graf funkcie $f(x) = (1 - x^2) \cdot e^{-x}$



Obr. 5.19: $f(x) = (1 - x^2) \cdot e^{-x}$.

Z grafu je vidieť, že globálne maximum existuje (a je to zároveň bod lokálneho maxima) a globálne minimum neexistuje.

Príklad č. 7. Vypočítajte intervaly monotónnosti, extrémy, intervaly vypuklosti, inflexné body a asymptoty funkcie $f(x) = 2x - 4\text{arctg}(x)$ a na základe týchto informácií načrtnite čo najpresnejšie jej graf.

Riešenie:

1. Definičný obor funkcie

Definičným oborom funkcie je interval $(-\infty, \infty)$. Funkcia je spojitá na celom svojom definičnom obore.

2. Nulové body

Priesečníky s osou x určíme v bodoch, kde $f(x) = 0$, preto

$$2x - 4\text{arctg}(x) = 0 \ .$$

Takéto rovnice nevieme riešiť exaktnými metódami. Výsledok najlepšie uvidíme na grafe funkcie, ktorý ukáže jediné riešenie.

3. Intervaly monotónnosti

Kritické body určíme z rovnice $f'(x) = 0$. Keďže

$$f'(x) = 2 - \frac{4}{1+x^2} \ ,$$

dostávame rovnicu

$$2 - \frac{4}{1+x^2} = 0 \ ,$$

ktorej riešením sú dva korene $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

Dopočítame funkčné hodnoty v týchto dvoch bodoch:

$$f(1) = 2 \cdot 1 - 4\text{arctg}(1) = 2 - 4 \cdot \frac{\pi}{4} = 2 - \pi \ ,$$

$$f(-1) = 2 \cdot (-1) - 4\text{arctg}(-1) = -2 + 4 \cdot \frac{\pi}{4} = 2 + \pi \ .$$

Kritické body nám rodeľujú definičný obor na tri intervaly: $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ a $(1, \infty)$.

- $(-\infty, -1)$: $f'(-2) = 2 - \frac{4}{1+(-2)^2} = 6/5$, funkcia je rastúca na $(-\infty, -1)$.
- $(-1, 1)$: $f'(0) = 2 - \frac{4}{1+0^2} = -2$, funkcia je klesajúca na $(-1, 1)$.

- $(1, \infty)$: $f'(2) = 2 - \frac{4}{1+2^2} = 6/5$, funkcia je rastúca na $(1, \infty)$.

Na základe vyššie uvedených informácii zatiaľ vieme, že funkcia nadobúda lokálne minimum v bode $[1, 2-\pi]$ a lokálne maximum nadobúda v bode $[-1, 2+\pi]$.

4. Intervaly vypuklosti

Na určenie bodov, ktoré nám rozdelia definičný obor funkcie na intervaly, vyriešime rovnicu $f''(x) = 0$. Druhá derivácia funkcie je

$$f''(x) = \frac{4x(1+x^2) - 2x(2x^2-2)}{(1+x^2)^2} \ .$$

Po krátkej úprave máme

$$f''(x) = \frac{8x}{(1+x^2)^2} \ .$$

Riešením rovnice

$$\frac{8x}{(1+x^2)^2} = 0$$

je bod $x = 0$.

Bod $x = 0$ nám delí definičný obor funkcie na dva intervaly $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$:

- $(-\infty, 0)$: $f''(-1) = \frac{8(-1)}{(1+(-1)^2)^2} = -2$, teda funkcia je konkávna na $(-\infty, 0)$.
- $(0, \infty)$: $f''(1) = \frac{8\cdot 1}{(1+1^2)^2} = 2$, teda funkcia je konvexná na $(0, \infty)$.

5. Asymptoty ku grafu funkcie

Asymptoty bez smernice neexistujú, pretože funkcia je spojitá na celom definičnom obore.

Asymptoty so smernicou určíme podľa vzťahov

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{2x - 4\mathrm{arctg}(x)}{x} = 2 \ ,$$

$$q = \lim_{x\to\infty} (2x - 4\mathrm{arctg}(x) - 2x) = \lim_{x\to\infty} (-4\mathrm{arctg}(x)) = -2\pi \ .$$

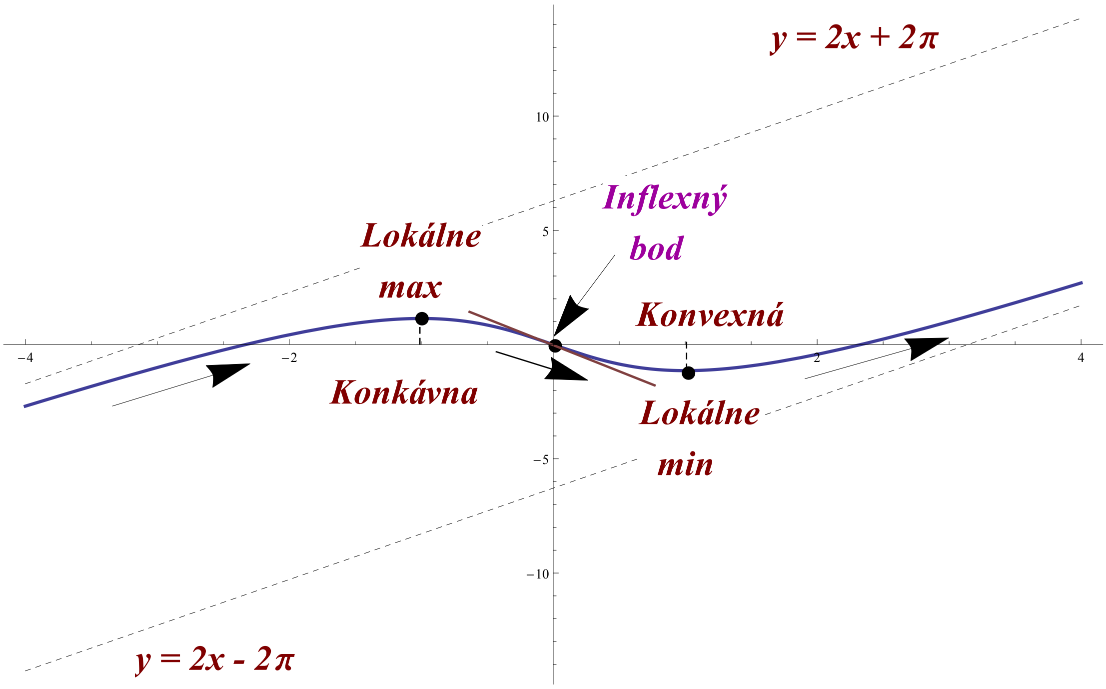
Ten istý výpočet zopakujeme aj pre limitu, keď x sa blíži do $-\infty$:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x - 4\mathrm{arctg}(x)}{x} = 2 \ ,$$

$$q = \lim_{x\to-\infty} (2x - 4\mathrm{arctg}(x) - 2x) = \lim_{x\to-\infty} (-4\mathrm{arctg}(x)) = 2\pi \ .$$

Asymptoty so smernicou sú dve priamky $y = 2x - 2\pi$ pre $x \to +\infty$ a $y = 2x + 2\pi$ pre $x \to -\infty$.

6. Graf funkcie $f(x) = 2x - 4\text{arctg}(x)$:



Obr. 5.20: $f(x) = 2x - 4\text{arctg}(x)$.

Z Obr.5.20 vidíme, že funkcia nemá globálne maximum ani minimum.

Príklad č. 8. Vypočítajte intervaly monotónnosti, extrémy, intervaly vypuklosti, inflexné body a asymptoty funkcie $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$ a na základe týchto informácií načrtnite čo najpresnejšie jej graf.

Riešenie:

1. Definičný obor funkcie

Definičným oborom funkcie je interval $(-\infty, \infty)$. Funkcia je spojitá na celom svojom definičnom obore.

2. Nulové body

Určíme priesečník funkcie s osou x tak, že $f(x) = 0$:

$$x^2 \cdot \sin(x) = 0 \ .$$

Priesečníkmi funkcie s osou x sú body $x = k \cdot \pi$, kde k ľubovoľné celé číslo.

3. Intervaly monotónnosti

Na určenie kritických bodov riešime rovnicu $f'(x) = 0$, preto funkciu zderivujeme:

$$f'(x) = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x) \ .$$

Riešime rovnicu

$$2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x) = 0 \ . \tag{5.7}$$

Rovnice, v ktorých sa vyskytuje x aj $\sin(x)$ alebo $\cos(x)$, nevieme riešiť exaktnými metódami. Napriek tomu si ukážeme postup, ktorým možno získať predstavu o riešeniach.

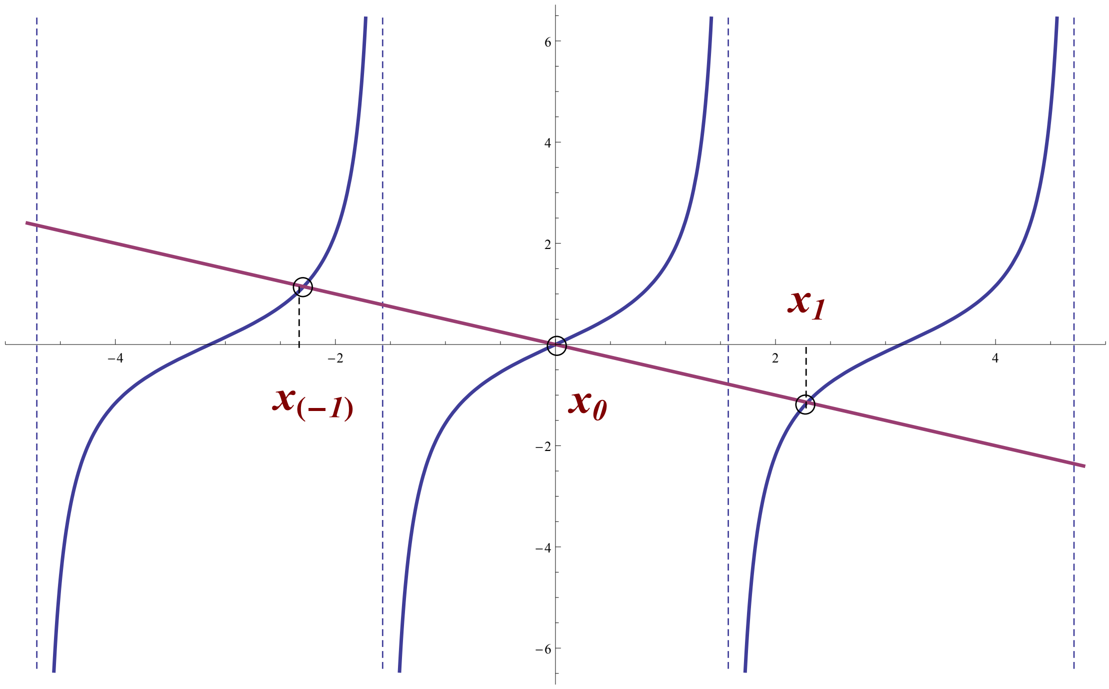
Z rovnice (5.7) po úprave dostávame

$$2\sin(x) + x\cos(x) = 0 \ ,$$

$$2\mathrm{tg}(x) = -x \ ,$$

$$\mathrm{tg}(x) = -\frac{x}{2} \ .$$

Ide opäť o rovnicu, ktorú nevieme exaktne vyriešiť. Z grafov funkcií $y = \mathrm{tg}(x)$ a $y = -\frac{x}{2}$ však vieme, že táto rovnica má nekonečne veľa riešení, ktoré možno označiť symbolmi ... , $x_{(-2)}, x_{(-1)}, x_0, x_1, x_2, \ldots$, viď Obr.5.21.



Obr. 5.21: Graf $y = \mathrm{tg}(x)$ je vyznačený modrou fabou a graf $y = -\frac{x}{2}$ je vynačený fialovou farbou.

4. Intervaly vypuklosti

Na určenie intervalov vypuklosti riešime rovnicu $f''(x) = 0$. Druhá derivácia funkcie bude

$$f''(x) = 2\sin(x) + 2x\cos(x) + 2x\cos(x) - x^2\sin(x)\ .$$

Po krátkej úprave dostávame

$$f''(x) = 2\sin(x) - x^2\sin(x) + 4x\cos(x)\ .$$

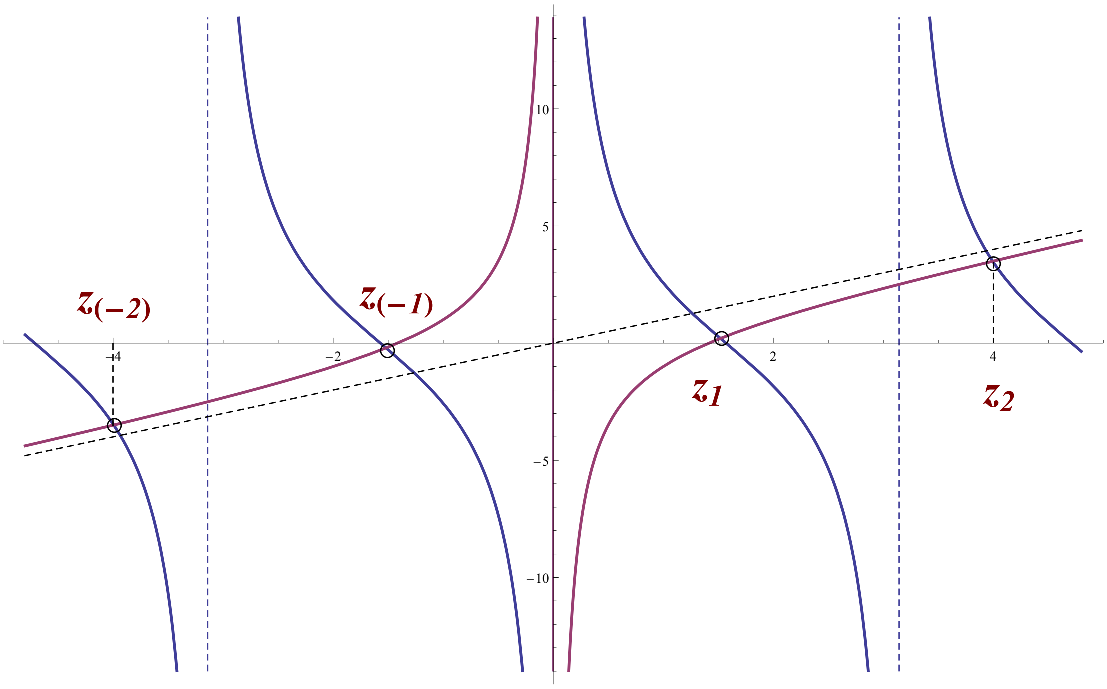
Riešime rovnicu

$$2\sin(x) - x^2\sin(x) + 4x\cos(x) = 0\ ,$$

odkiaľ po úprave dostávame

$$\frac{2}{x} - x + 4\mathrm{cotg}(x) = 0\ .$$

Túto rovnicu tiež nevieme exaktne vyriešiť. Z grafov funkcií $y = 4\mathrm{cotg}(x)$ a $y = x - \frac{2}{x}$ je však opäť vidieť, že táto rovnica má nekonečne veľa riešení ... , $z_{(-2)}, z_{(-1)}, z_0, z_1, z_2, \dots$, čo môžeme vidieť na Obr.5.22.



Obr. 5.22: Graf $y = x - \frac{2}{x}$ je vyznačený fialovou farbou a graf $y = 4\text{cotg}(x)$ je vyznačený modrou farbou.

5. Asymptoty ku grafu funkcie

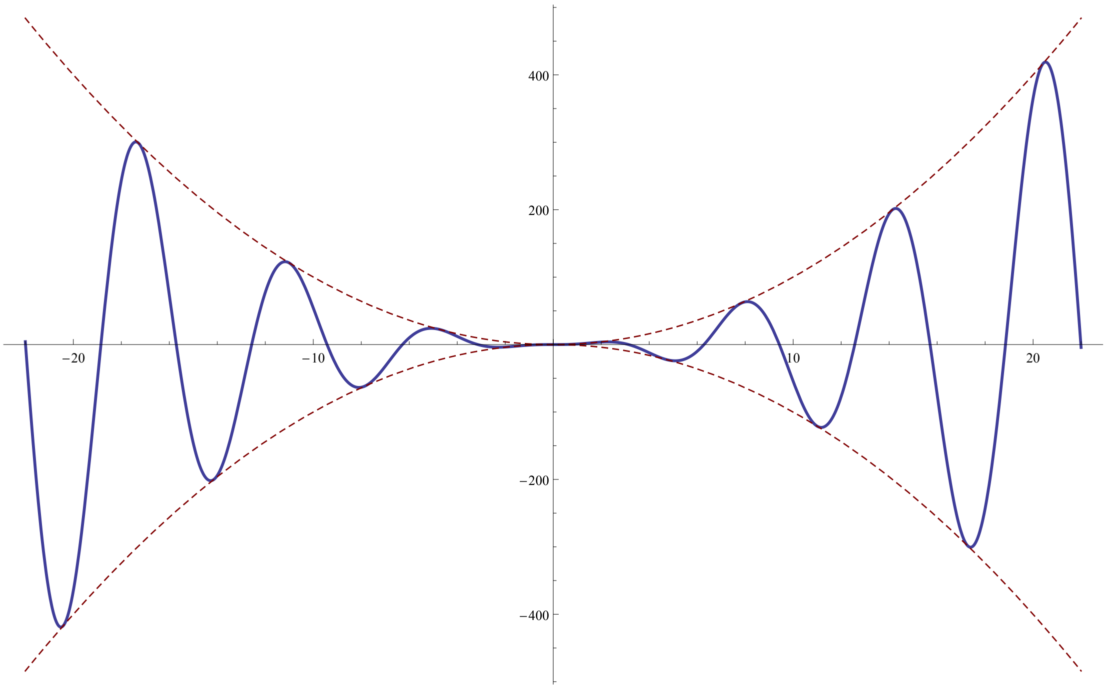
Asymptoty bez smernice neexistujú, pretože funkcia je definovaná na $(-\infty, \infty)$.

Ak $y = kx + q$ je asymptota so smernicou, tak

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \cdot \sin(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} x \cdot \sin(x) = \infty \ .$$

Z tohoto výsledku vidíme, že daná funkcia nemá asymptoty so smernicou.

6. Graf funkcie $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$



Obr. 5.23: $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$.

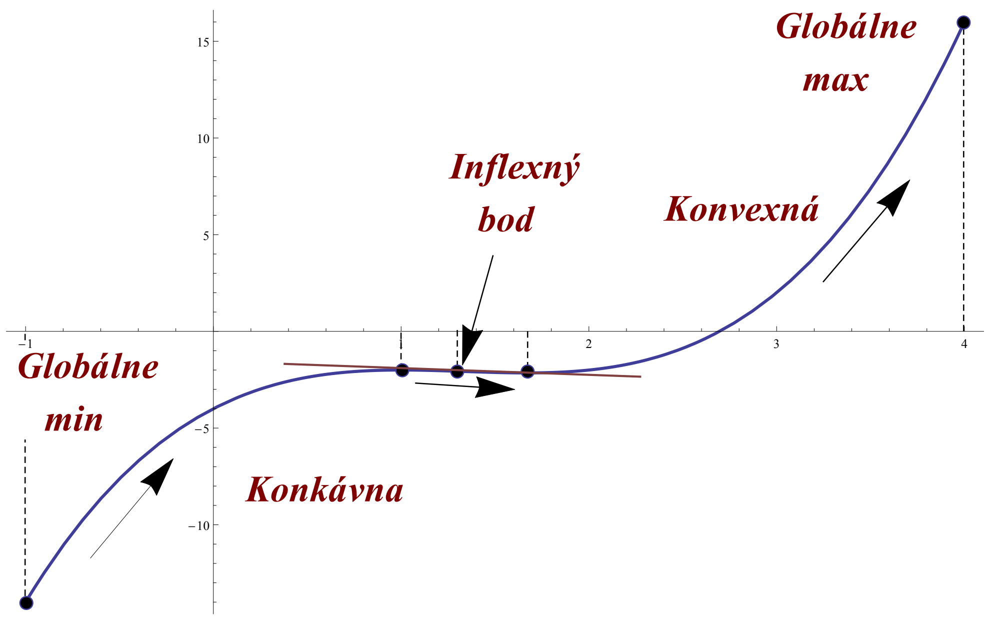
Príklady na cvičenia:

Vypočítajte intervaly monotónnosti, extrémy, intervaly konvexnosti, resp. konkávnosti, inflexné body a asymptoty nasledujúcich funkcií a na základe týchto informácií načrtnite čo najpresnejšie ich graf.

(a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 4$ na intervale $\langle -1, 4\rangle$

Výsledok:

- Nulový bod: $f(0) = -4$.
- Asymptoty bez smernice neexistujú. Asymptoty so smernicou neexistujú.
- Monotónnosť: Funkcia rastie na $(-1, 1)$ a $(\frac{5}{3}, 4)$, klesá na $(1, 1/3)$.
- Globálne minimum v bode $[-1, -14]$, Globálne maximum v bode $[4, 16]$.
- Inflexný bod: $x = \frac{4}{3}$.
- Funkcia je konkávna $(-1, \frac{4}{3})$, a konvexná $(\frac{4}{3}, 4)$.



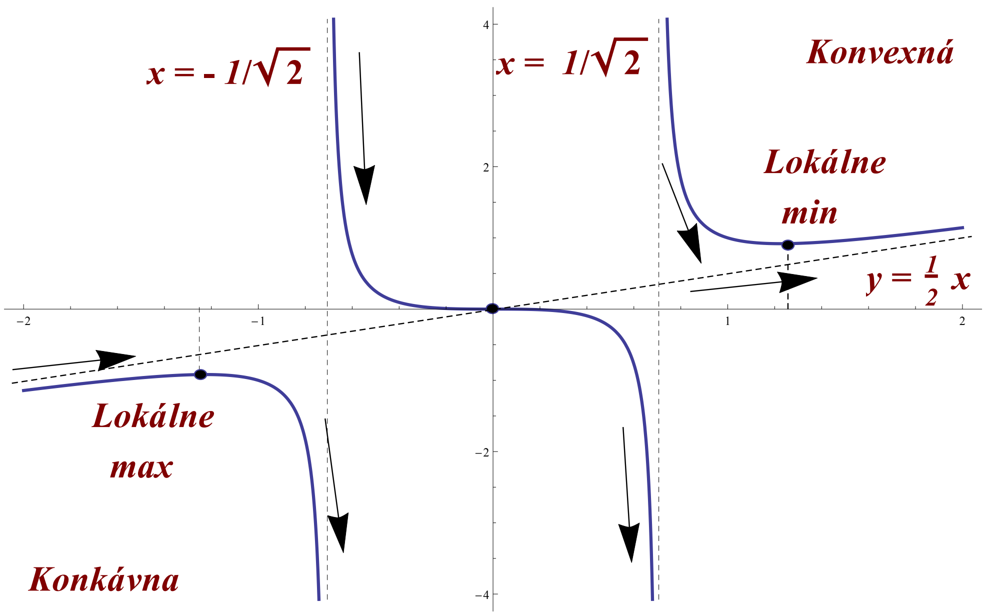
(b) $f(x) = \frac{x^3}{2x^2-1}$

Výsledok:

- $D(f) = (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$.
- Nulový bod: $x = 0$.
- Asymptoty bez smernice: $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, Asymptoty so smernicou: $y = \frac{1}{2}x$.
- Monotónnosť:

Funkcia rastie na $(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}})$ a $(\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty)$, klesá na $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ a $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}})$.

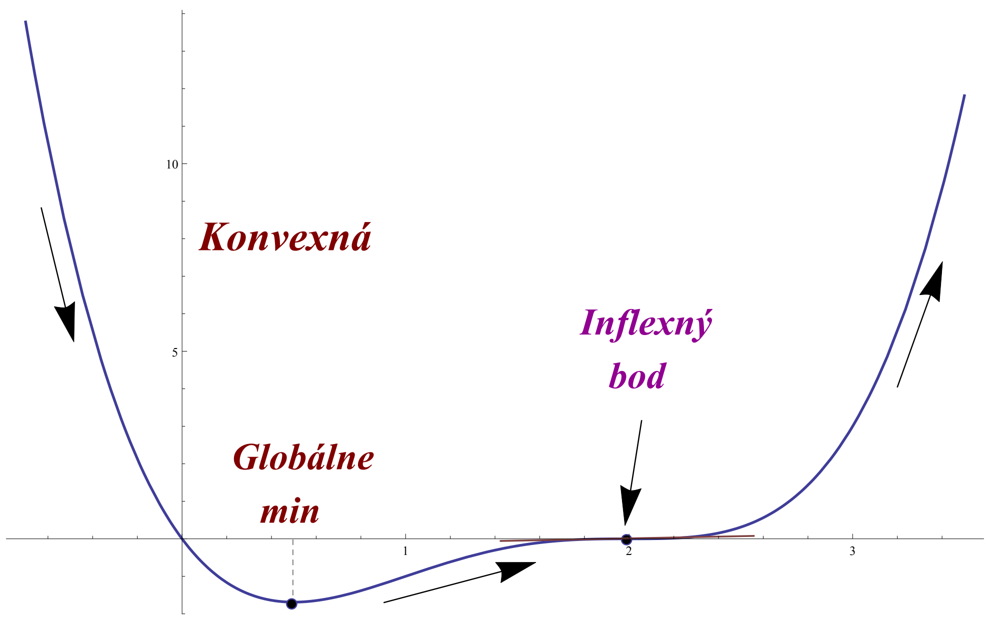
- Lokálne minimum v bode $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$, Lokálne maximum v bode $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$.
- Inflexný bod nie je.
- Funkcia je konkávna $(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}})$, a konvexná $(\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty)$.



(c) $f(x) = x(x-2)^3$

Výsledok:

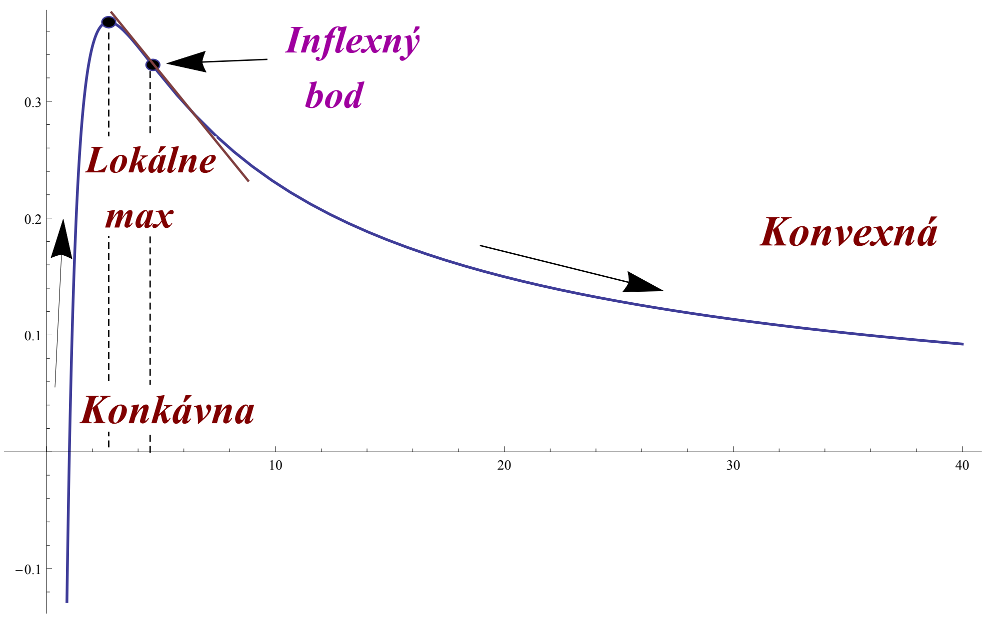
- $D(f) = (-\infty, \infty)$.
- Nulový bod: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.
- Asymptoty bez smernice neexistujú. Asymptoty so smernicou neexistujú.
- Monotónnosť: Funkcia rastie na $(1/2, \infty)$, klesá na $(-\infty, 1/2)$.
- Globálne minimum v bode $[1/2, -27/16]$.
- Inflexný bod: $[2, 0]$.
- Funkcia je konvexná na $(-\infty, 2)$, konkávna na $(2, \infty)$.



(d) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

Výsledok:

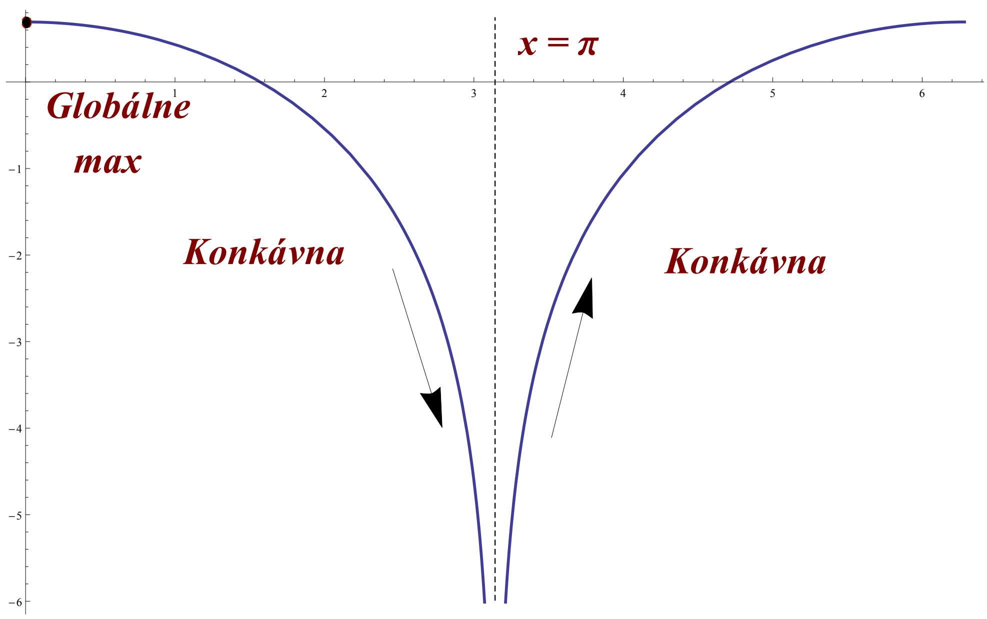
- $D(f) = (0, \infty)$.
- Nulový bod: $x = 1$.
- Asymptoty bez smernice: $x = 0$, Asymptoty so smernicou: $y = 0$.
- Monotónnosť: Funkcia rastie na $(0, e)$, klesá na (e, ∞).
- Lokálne maximum v bode $[e, 1/e]$.
- Inflexný bod: $[e^{3/2}, \frac{3}{2}e^{-3/2}]$.
- Funkcia je konkávna na $(0, e^{3/2})$, konvexná na $(e^{3/2}, \infty)$.



(e) $f(x) = \ln(1 + \cos(x))$ na intervale $\langle 0, 2\pi\rangle$

Výsledok:

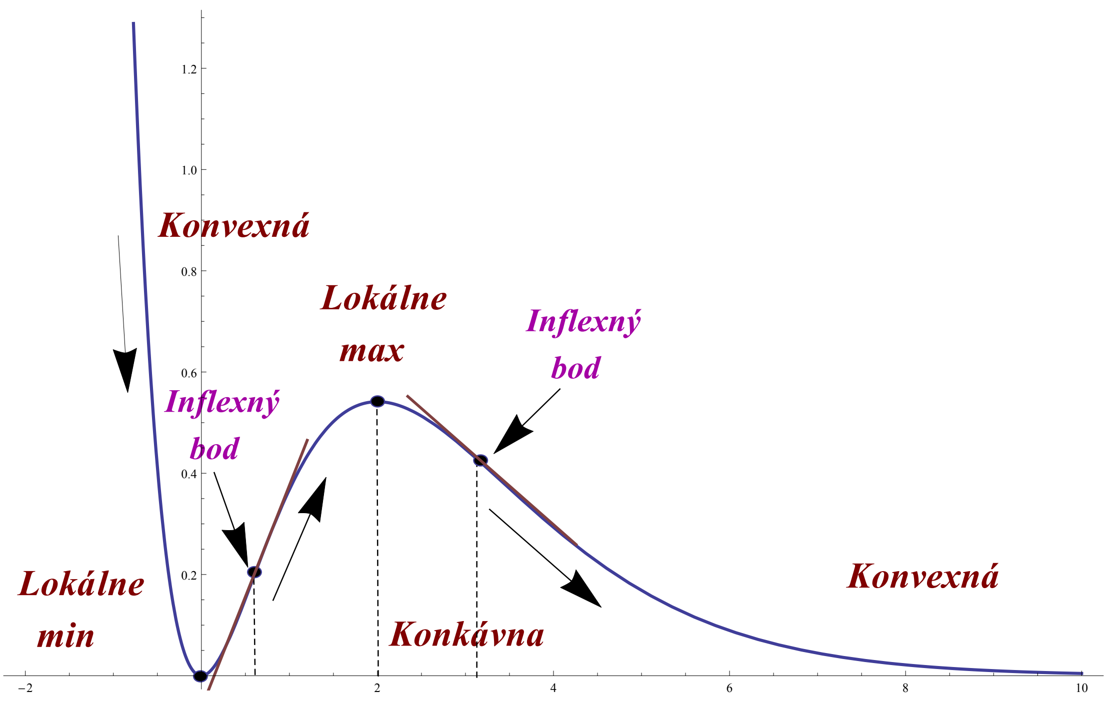
- Stačí nám uvažovať $D(f) = \langle 0, \pi) \cup (\pi, 2\pi\rangle$.
- Nulové body: $[\pi/2, 0], [(3/2)\pi, 0]$.
- Asymptoty bez smernice: $x = \pi$. Asymptoty so smernicou neexistujú.
- Monotónnosť: Funkcia rastie na $(\pi, 2\pi)$, klesá na $(0, \pi)$.
- Lokálne a globálne maximum v bodoch $x = 0$, $x = 2\pi$.
- Inflexný bod nemá.
- Funkcia je konkávna na $(0, \pi)$ a aj na $(\pi, 2\pi)$.



(f) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

Výsledok:

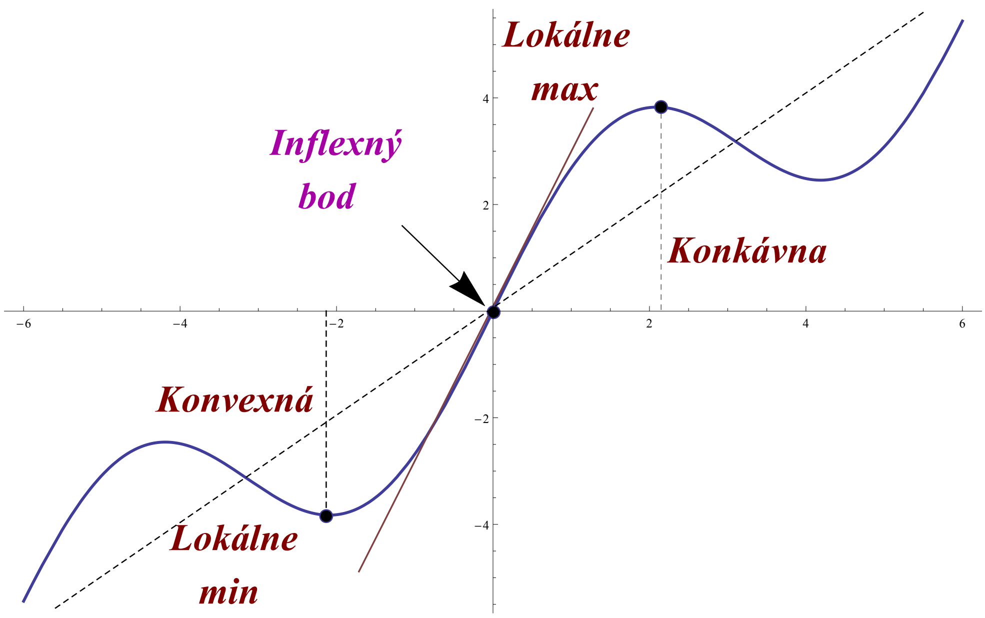
- $D(f) = (-\infty, \infty)$.
- Nulový bod: $[0, 0]$.
- Asymptoty bez smernice neexistujú. Asymptoty so smernicou: $y = 0$.
- Monotónnosť: Funkcia rastie na $(0, 2)$, klesá na $(-\infty, 0)$ a $(2, \infty)$.
- Lokálne minimum v bode $[0, 0]$, lokálne maximum v bode $[2, 4e^{-2}]$.
- Inflexné body $x_1 = 2 + \sqrt{2}$, $x_2 = 2 - \sqrt{2}$.
- Funkcia je konkávna $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$, konvexná $(-\infty, 2 - \sqrt{2})$ a $(2 + \sqrt{2}, \infty)$.



(g) $f(x) = x + 2\sin(x)$

Výsledok:

- $D(f) = (-\infty, \infty)$.
- Nulový bod: $[0, 0]$.
- Asymptoty bez smernice neexistujú. Asymptoty so smernicou neexistujú.
- Monotónnosť: Funkcia rastie na $(-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \frac{2}{3}\pi + 2k\pi)$, klesá na $(\frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \frac{4}{3}\pi + 2k\pi)$.
- Lokálne minimá v bodoch $x = (-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi)$, lokálne maximá v bodoch $x = (\frac{2}{3}\pi + 2k\pi)$.
- Inflexné body sú tie, kde $\sin(x) = 0$, čiže budú to (náhodou) priesečníky grafu našej funkcie s priamkou $y = x$.
- Funkcia je konkávna na $(0 + 2k\pi, \pi + k\pi)$, konvexná na $(-\pi + 2k\pi, 0 + 2k\pi)$.

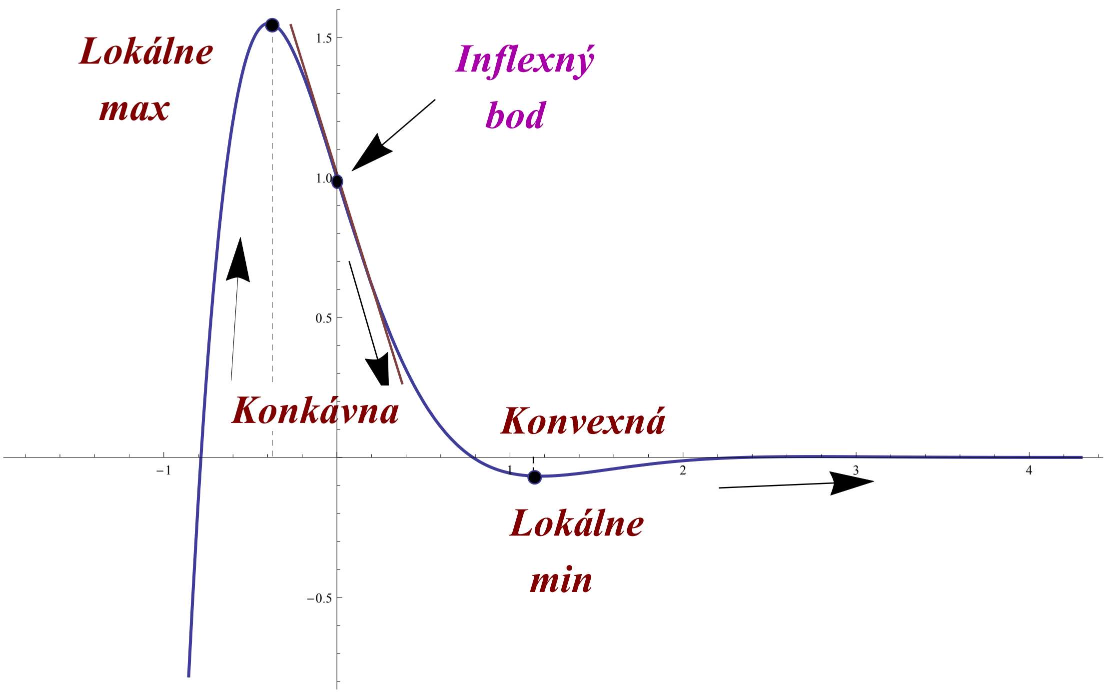


(h) $f(x) = e^{-2x} \cdot \cos(2x)$

Výsledok:

- $D(f) = (-\infty, \infty)$.
- Nulové body: $x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.
- Asymptoty bez smernice neexistujú. Asymptota so smernicou je $y = 0$ pre $x \to +\infty$.

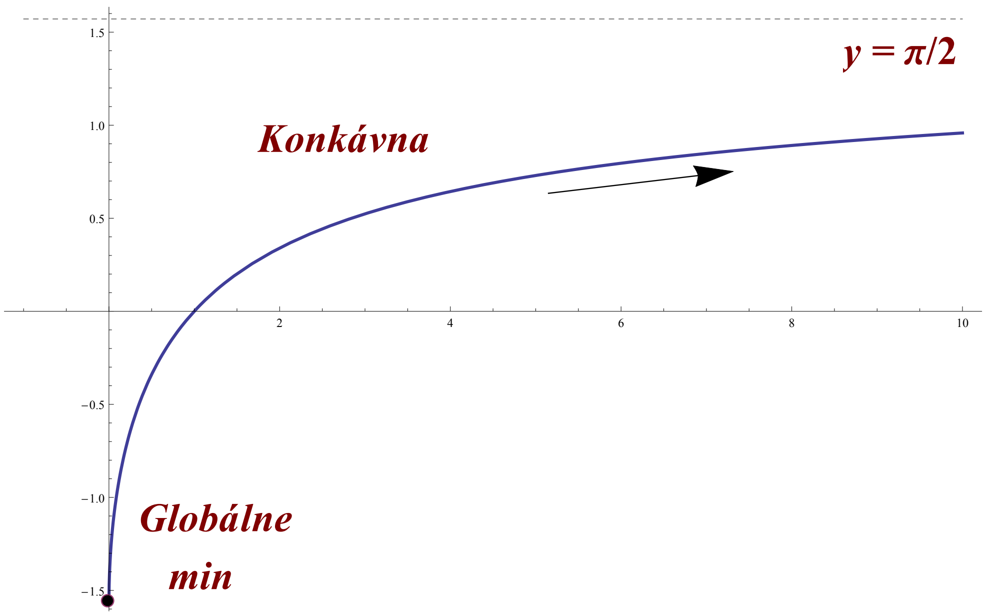
- Monotónnosť: Funkcia klesá na $(-\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, \frac{3}{8}\pi + k\frac{\pi}{2})$, rastie na $(\frac{3}{8}\pi + k\frac{\pi}{2}, \frac{7}{8}\pi + k\frac{\pi}{2})$.
- Lokálne maximá v bode $x = \frac{3}{8}\pi + k\frac{\pi}{2}$, Lokálne minimá v bode $x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$.
- Inflexné body: $k.\frac{\pi}{2}$.
- Funkcia je konvexná na $(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, konkávna na $(\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi)$.



(i) $f(x) = \arcsin(\frac{x-1}{x+1})$

Výsledok:

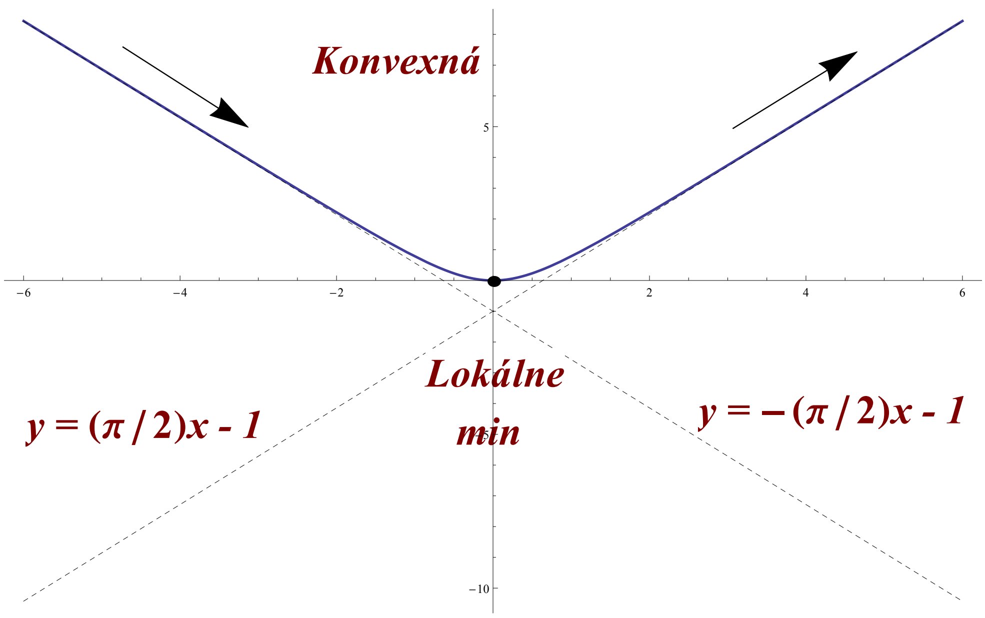
- $D(f) = \langle 0, \infty)$.
- Nulový bod: $(1, 0)$.
- Asymptoty bez smernice neexistujú. Asymptoty so smernicou: $y = \frac{\pi}{2}$ pre $x \to +\infty$.
- Monotónnosť: rastie na $(0, \infty)$.
- Globálne minimum v bode $(0, -\pi/2)$.
- Inflexný bod nie je.
- Funkcia je konkávna na $\langle 0, \infty)$.



(j) $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg}(x)$

Výsledok:

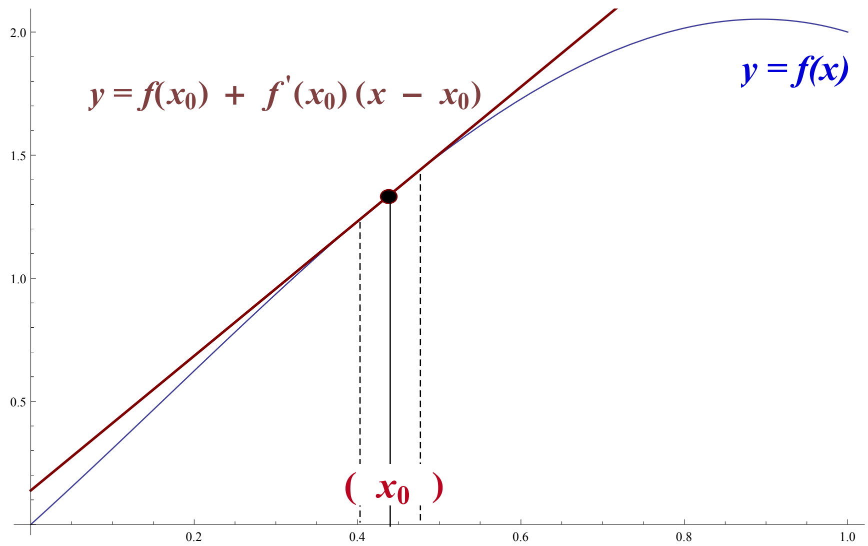
- $D(f) = (-\infty, \infty)$.
- Nulový bod nie je.
- Asymptoty bez smernice neexistujú. Asymptoty so smernicou: $y = \frac{\pi}{2}x - 1$, $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$.
- Monotónnosť: rastie na $(0, \infty)$, klesá na $(-\infty, 0)$.
- Lokálne minimum v bode $(0, 0)$.
- Inflexný bod nie je.
- Funkcia je konvexná na $(-\infty, \infty)$.



Kapitola 6

Diferenciál funkcie

Nech funkcia f má deriváciu na otvorenom intervale I a nech $x_0 \in I$. V dostatočne malom okolí bodu x_0 možno hodnoty na grafe funkcie $y = f(x)$ nahradiť hodnotami na dotyčnici $y = f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0)$ ku grafu funkcie f (viď Obr.6.1).



Obr. 6.1: Diferenciál funkcie.

V dostatočne malom okolí bodu x_0 teda môžme napísať približnú rovnosť

$$f(x) \approx f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0) \tag{6.1}$$

alebo

$$f(x) - f(x_0) \approx f^{'}(x_0)(x - x_0)\ . \tag{6.2}$$

Výraz $f^{'}(x_0)(x - x_0)$ na pravej strane (6.2) sa nazýva diferenciál funkcie f v bode x a označuje sa symbolom $df(x, x_0)$.

Význam vzťahu (6.2) je ten, že pre x dostatočne blízke ku x_0 možno diferenciu $f(x) - f(x_0)$ nahradiť diferenciálom $df(x, x_0) = f^{'}(x_0)(x - x_0)$.

Používaním vzťahov (6.1) alebo (6.2) sa dopúšťame nepresnosti. V tejto chvíli nemáme matematické prostriedky na odhad tejto nepresnosti, dozviete sa ich neskôr v kurzoch vyššej matematiky. Napriek tomu možno vzťahy (6.1), (6.2) úspešne používať pri výpočtoch približných hodnôt funkcií.

Ak totiž poznáme hodnotu funkcie f v bode x_0 a získanie hodnôt f v bodoch x blízkych x_0 by viedlo k ťažkostiam, môžme hodnoty $f(x)$ približne počítať pomocou vzťahu (6.1), pretože na pravej strane (6.1) je len lineárna funkcia premennej x.

Príklad č. 1. Vypočítajte približnú hodnotu výrazu $2^{3,2}$.

Riešenie: Vychádzame z faktu, že hodnotu výrazu 2^3 vieme triviálne vypočítať. Preto položíme $x_0 = 3$ a $x = 3,2$. To nás zároveň navádza na to, že naša funkcia f, na ktorú použijeme vzťah $f(x) \approx f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0)$, má mať tvar $f(x) = 2^x$.

Vypočítame deriváciu funkcie $f(x) = 2^x$ v bode $x_0 = 3$:

$$f^{'}(x) = 2^x \cdot \ln 2 \ ,$$

$$f^{'}(x_0) = f^{'}(3) = 8 \cdot \ln 2 \ .$$

Dosadením do $f(x) \approx f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0)$ dostávame pre x blízke x_0:

$$2^x \approx 2^3 + 8 \ln 2.(x - 3) \ .$$

Po dosadení $x = 3,2$ napokon máme

$$2^{3,2} \approx 8 + 8 \ln 2 \cdot (3,2 - 3) \ ,$$

$$2^{3,2} \approx 9,1 \ .$$

Záver: Približná hodnota výrazu $2^{3,2}$ je $9,1$.

Pre zaujímavosť, hodnota výrazu $2^{3,2}$ zaokrúhlená na dve desatinné miesta je $9,19$.

Príklad č. 2. Vypočítajte približnú hodnotu výrazu $2,05^4$.

Riešenie: Najbližšiu hodnotu, ktorú vieme vypočítať, je 2^4. Preto položíme $x_0 = 2$ a $x = 2,05$. Naša funkcia f bude mať tvar $f(x) = x^4$. Na približný výpočet hodnoty výrazu $2,05^4$ použijeme vzťah $f(x) \approx f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0)$.

Vypočítame deriváciu funkcie $f(x) = x^4$ v bode $x_0 = 2$:

$$f'(x) = 4x^3 \ ,$$

$$f'(x_0) = f'(2) = 4 \cdot 2^3 = 32 \ .$$

Dosadením do $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ dostávame pre x blízke x_0:

$$x^4 \approx 2^4 + 32 \cdot (x - 2) \ ,$$

po dosadení $x = 2,05$ napokon máme

$$2,05^4 \approx 2^4 + 32 \cdot (2,05 - 2)$$

$$2,05^4 \approx 17,6 \ .$$

Záver: Približná hodnota výrazu $2,05^4$ je $17,6$.

Hodnota výrazu $2,05^4$ zaokrúhlená na dve desatinné miesta je $17,66$.

Príklad č. 3. Vypočítajte približnú hodnotu výrazu $\arcsin(0,49)$.

Riešenie: Najbližšiu hodnotu, ktorú vieme vypočítať, je $\arcsin(0,5)$. Postupujeme rovnako, ako v predchádzajúcich príkladoch, teda položíme $x_0 = 0,5$ a $x = 0,49$. Naša funkcia f bude mať tvar $f(x) = \arcsin(x)$. Na približný výpočet hodnoty výrazu $\arcsin(0,49)$ použijeme vzťah $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Vypočítame deriváciu funkcie $f(x) = \arcsin(x)$ v bode $x_0 = 0,5$:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \ ,$$

$$f'(x_0) = f'(0,5) = \frac{1}{\sqrt{1 - (0,5)^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \ .$$

Dosadením do $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ dostávame pre x blízke x_0:

$$\arcsin(x) \approx \arcsin(0,5) + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (x - 0,5) \ ,$$

po dosadení $x = 0,49$ napokon máme

$$\arcsin(0,49) \approx \pi/6 + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (0,49 - 0,5)$$

$$\arcsin(0,49) \approx 0,5 \ .$$

Záver: Približná hodnota výrazu $\arcsin(0,49)$ je $0,5$.

Hodnota výrazu $\arcsin(0,49)$ zaokrúhlená na dve desatinné miesta je $0,51$.

Príklad č. 4. Vypočítajte približnú hodnotu výrazu $\sin(31^\circ)$.

Riešenie: Najbližšiu hodnotu, ktorú poznáme, je $\sin(30^\circ)$. Uhly zameníme na radiány, potom $x_0 = \frac{30\pi}{180}$ rad a $x = \frac{31\pi}{180}$ rad. Naša funkcia f bude mať tvar $f(x) = \sin(x)$. Na približný výpočet hodnoty výrazu $\sin(31^\circ)$ použijeme vzťah $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Vypočítame deriváciu funkcie $f(x) = \sin(x)$ v bode $x_0 = \frac{30\pi}{180}$:

$$f'(x) = \cos(x) ,$$

$$f'(x_0) = f'\left(\frac{30\pi}{180}\right) = \cos\left(\frac{30\pi}{180}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

Dosadením do $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ dostávame pre x blízke x_0:

$$\sin(x) \approx \sin\left(\frac{30\pi}{180}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(x - \frac{31\pi}{180}\right) ,$$

po dosadení $x = \frac{31\pi}{180}$ rad napokon máme

$$\sin\left(\frac{31\pi}{180}\right) \approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{31\pi}{180} - \frac{30\pi}{180}\right)$$

$$\sin\left(\frac{31\pi}{180}\right) \approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$\sin\left(\frac{31\pi}{180}\right) \approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{360} .$$

Záver: Približná hodnota výrazu $\sin(31^\circ)$ je $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{360}$.

Hodnota výrazu $\sin(31^\circ)$ zaokrúhlená na dve desatinné miesta je $0,52$.

6.1 Taylorov rozvoj

Aproximáciu vo vzťahu (6.1) je možné ďalekosiahlo zovšeobecniť. Majme funkciu f, ktorá má na otvorenom intervale I n-tú deriváciu pre nejaké $n \geq 1$. Potom pre každé $x \in I$, ktoré je dostatočne blízke k bodu $x_0 \in I$, platí aproximácia

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f^{'}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \ . \tag{6.3}$$

Na odhad chyby tejto aproximácie existujú matematické prostriedky, ktoré prevyšujú rámec tohoto skripta. Pre väčšinu funkcií, s ktorými sa stretnete, však platí, že čím väčšie je n, tým je aproximácia (6.3) presnejšia.

Polynóm na pravej strane (6.3) sa nazýva Taylorov polynóm n-tého stupňa funkcie f v bode x_0 a označujeme ho $T_n(f, x, x_0)$. Aproximáciu (6.3) možno potom napísať v tvare $f(x) \approx T_n(f, x, x_0)$ pre x dostatočne blízke x_0.

Taylorove polynómy (a ich analógie a zovšeobecnenia) sú základom pre približný výpočet hodnôt mnohých funkcií (exponenciálnych, logaritmických, goniometrických, cyklometrických a ďalších) v elektronických kalkulačkách a matematických programových balíkoch.

Pri výpočte Taylorovho polynómu n-tého stupňa postupujeme nasledovne:

1. Vypočítame si postupne derivácie $f^{'}(x), f^{''}(x),\ \ldots\ , f^{(n)}(x)$.
2. Do získaných vzťahov dosadíme hodnotu x_0, čím získame čísla
$$f(x_0), f^{'}(x_0), f^{''}(x_0),\ \ldots\ , f^{(n)}(x_0)\ .$$
3. Zostavíme polynóm $T_n(f, x, x_0)$ premennej x a zapíšeme aproximáciu (6.3).

Príklad č. 1. Vypočítame Taylorov polynóm stupňa $n = 5$ pre funkciu $y = \sin^2(x)$ v bode $x_0 = \pi/2$.

Riešenie:

Krok č. 1: Na začiatok vypočítame derivácie funkcie až do 5.rádu:

1. derivácia: $y^{'} = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) = \sin(2x)$.

2. derivácia: $y^{''} = 2 \cdot \cos(2x)$.

3. derivácia: $y^{'''} = -2 \cdot \sin(2x) \cdot 2 = -4 \sin(2x)$.

4. derivácia: $y^{IV} = -4 \cdot \cos(2x) \cdot 2 = -8 \cdot \cos(2x)$.

5. derivácia: $y^V = 16 \cdot \cos(2x) \cdot 2 = 32\cos(2x)$.

Krok č. 2: Do jednotlivých derivácií dosadíme $x_0 = \pi/2$ a vyčíslime ich hodnotu.

0. derivácia v bode $x_0 = \pi/2$: $y(\pi/2) = \sin^2(\pi/2) = 1$.

1. derivácia v bode $x_0 = \pi/2$: $y^{'}(\pi/2) = 2\sin(\pi/2) \cdot \cos(\pi/2) = 2 \cdot 1 \cdot 0 = 0$.

2. derivácia v bode $x_0 = \pi/2$: $y^{''}(\pi/2) = \cos(2 \cdot \pi/2) \cdot 2 = 2 \cdot (-1) = -2$.

3. derivácia v bode $x_0 = \pi/2$: $y^{'''}(\pi/2) = -4 \cdot \sin(2 \cdot \pi/2) = -4 \cdot 0 = 0$.

4. derivácia v bode $x_0 = \pi/2$: $y^{IV}(\pi/2) = -8 \cdot \cos(2 \cdot \pi/2) = -8 \cdot (-1) = 8$.

5. derivácia v bode $x_0 = \pi/2$: $y^{V}(\pi/2) = 32 \cdot \cos(2 \cdot \pi/2) = 32 \cdot (-1) = -32$.

Krok č. 3: Na zostavenie Taylorovho polynómu použijeme vzťah:

$$T_n(f, x, x_0) = f(x_0) + \frac{f^{'}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

a dosadíme jednotlivé hodnoty

$$T_5(\sin^2(x), x, \pi/2) = 1 + \frac{0}{1!}(x - \pi/2) - \frac{2}{2!}(x - \pi/2)^2 + \frac{0}{3!}(x - \pi/2)^3 + \frac{8}{4!}(x - \pi/2)^4 - \frac{32}{5!}(x - \pi/2)^5 \ .$$

Po zjednodušení dostávame

$$T_5(\sin^2(x), x, \pi/2) = 1 - (x - \pi/2)^2 + \frac{1}{3}(x - \pi/2)^4 - \frac{4}{15}(x - \pi/2)^5 \ .$$

Príklad č. 2. Vypočítame Taylorov polynóm stupňa $n = 4$ pre funkciu $y = (2x^3 - 1) \cdot \ln(x)$ v bode $x_0 = 1$.

Riešenie:

Krok č. 1: Vypočítame derivácie funkcie až do 4.rádu:

1. derivácia:

$$y^{'} = 6x^2 \cdot \ln(x) + (2x^3 - 1) \cdot \frac{1}{x} \ .$$

2. derivácia:

$$y^{''} = 12x \cdot \ln(x) + 6x^2 \cdot \frac{1}{x} + 6x^2 \cdot \frac{1}{x} + (2x^3-1) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 12x \cdot \ln(x) + 12x - \frac{(2x^3-1)}{x^2} \ .$$

3. derivácia:

$$y^{'''} = 12\ln(x) + 12 - \left(\frac{6x^2 \cdot x^2 - (2x^3-1) \cdot 2x}{x^4}\right) = 12\ln(x) - \frac{2}{x^3} + 10 \ .$$

4. derivácia:

$$y^{IV} = \frac{12}{x} + \frac{2 \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{12}{x} + \frac{6}{x^4} \ .$$

Krok č. 2: Do jednotlivých derivácií dosadíme $x_0 = 1$ a vyčíslime ich hodnotu.

0. derivácia v bode $x_0 = 1$: $y(1) = (2 \cdot 1^3 - 1) \cdot \ln(1) = 0.$

1. derivácia v bode $x_0 = 1$: $y^{'}(1) = 6 \cdot 1^2 \cdot \ln(1) + (2 \cdot 1^3 - 1) \cdot \frac{1}{1} = 1.$

2. derivácia v bode $x_0 = 1$: $y^{''}(1) = 12 \cdot 1 \cdot \ln(1) + 12 \cdot 1 - \frac{(2 \cdot 1^3 - 1)}{1^2} = 11.$

3. derivácia v bode $x_0 = 1$: $y^{'''}(1) = 12\ln(1) - \frac{2}{1^3} + 10 = 8.$

4. derivácia v bode $x_0 = 1$: $y^{IV}(1) = \frac{12}{1} + \frac{6}{1^4} = 18.$

Krok č. 3: Na zostavenie Taylorovho polynómu použijeme vzťah:

$$T_n(f, x, x_0) = f(x_0) + \frac{f^{'}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \ ,$$

a dosadíme jednotlivé hodnoty

$$T_4((2x^3-1)\ln(x), x, 1) = 0 + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{11}{2!}(x-1)^2 + \frac{8}{3!}(x-1)^3 + \frac{18}{4!}(x-1)^4 \ .$$

Po zjednodušení dostávame

$$T_4((2x^3-1)\ln(x), x, 1) = x - 1 + \frac{11}{2}(x-1)^2 + \frac{4}{3}(x-1)^3 + \frac{3}{4}(x-1)^4 \ .$$

Príklady na cvičenia:

1. Pomocou diferenciálu vypočítajte nasledujúce približné hodnoty:

(a) $\sqrt{83}$

Výsledok: $\sqrt{83} \approx 9,111.$

(b) $\sqrt[3]{350}$

Výsledok: $\sqrt[3]{350} \approx 7,047619.$

(c) $\ln 0.89$

Výsledok: $\ln 0.89 \approx -0,11.$

(d) $3,02^2$

Výsledok: $3,02^2 \approx 9,12.$

(e) $4^{2,05}$

Výsledok: $4^{2,05} \approx 17,109.$

(f) $\cos(28^o)$

Výsledok: $\cos(28^o) \approx 0,88346.$

2. Vypočítajte Taylorov polynóm stupňa n pre funkciu $y = f(x)$ v bode x_0 pre:

(a) $y = x^3 - 4x + 8, \quad n = 3, \quad x_0 = 3$

Výsledok: Pre x blízke $x_0 = 3$ platí aproximácia

$$x^3 - 4x + 8 \approx -46 + 3x + 9(x-3)^2 + (x-3)^3 \ .$$

(b) $y = \frac{x^2-2x}{x+1}, \quad n = 3, \quad x_0 = 1$

Výsledok: Pre x blízke $x_0 = 1$ platí aproximácia

$$\frac{x^2 - 2x}{x+1} \approx -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{3}{16}(x-1)^3 \ .$$

(c) $y = \ln(1/x)$, $n = 4$, $x_0 = 1$

Výsledok: Pre x blízke $x_0 = 1$ platí aproximácia

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) \approx -x + 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{3}(x-1)^3 + \frac{1}{4}(x-1)^4 \ .$$

(d) $y = \cos(2x)$, $n = 4$, $x_0 = 0$

Výsledok: Pre x blízke $x_0 = 0$ platí aproximácia

$$\cos(2x) \approx 1 - 2x^2 - \frac{2}{3}x^4 \ .$$

(e) $y = \operatorname{cotg}(3x)$, $n = 4$, $x_0 = \pi/2$

Výsledok: Pre x blízke $x_0 = \pi/2$ platí aproximácia

$$\operatorname{cotg}(3x) \approx -3x + \frac{3}{2}\pi - 9 \cdot (x - \pi/2)^3 \ .$$

(f) $y = e^{2x} + 3x^4$, $n = 4$, $x_0 = 1$

Výsledok: Pre x blízke $x_0 = 1$ platí aproximácia

$$e^{2x} + 3x^4 \approx e^2 + 3 + 2(e^2+6)(x-1) + 2(e^2+6)(x-1)^2 + \frac{4}{3}(e^2+9)(x-1)^3 + \frac{(2e^2+9)}{3}(x-1)^4 \ .$$

(g) $y = (x^3 - 2) \cdot \sin(x)$, $n = 3$, $x_0 = \pi$

Výsledok: Pre x blízke $x_0 = \pi$ platí aproximácia

$$(x^3 - 2) \cdot \sin(x) \approx (2 - \pi^3)(x - \pi) - 3\pi^2(x-\pi)^2 + \frac{\pi^3 - 18\pi - 2}{6}(x-\pi)^3 \ .$$

(h) $y = \log_{10}(x)$, $n = 4$, $x_0 = 1$

Výsledok: Pre x blízke $x_0 = 1$ platí aproximácia

$$\log_{10}(x) \approx \frac{1}{\ln 10}(x-1) - \frac{1}{2\ln 10}(x-1)^2 + \frac{1}{3\ln 10}(x-1)^3 - \frac{1}{4\ln 10}(x-1)^4 \ .$$

(i) $y = (x^2+3)(e^x+4), \ n = 5, \quad x_0 = 0$

Výsledok: Pre x blízke $x_0 = 0$ platí aproximácia

$$(x^2+3)(e^x+4) \approx 15 + 3x + \frac{13}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{11}{24}x^4 + \frac{1}{8}x^5 \ .$$

(j) $y = \ln^2(2x), \ n = 3, \quad x_0 = 1/2$

Výsledok: Pre x blízke $x_0 = 1/2$ platí aproximácia

$$\ln^2(2x) \approx 4(x-1/2)^2 - 8(x-1/2)^3 \ .$$

Kapitola 7

Parametrické vyjadrenie kriviek

Grafy funkcií, s ktorými sme sa doteraz stretávali, boli veľmi špeciálne krivky v tom zmysle, že ľubovoľná rovnobežka s osou y ich pretína v najviac jednom bode. Komplikovanejšie krivky (napr. kružnice, elipsy, rôzne špirály a pod.) nie je možné reprezentovať ako graf jednej funkcie. Pre prácu s takýmito krivkami v matematike používame tzv. **parametrické vyjadrenie**.

Nech φ a ψ sú spojité funkcie na intervale I, ktoré majú v každom vnútornom bode intervalu I deriváciu. Rovnicami

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in I, \tag{7.1}$$

je v súradnicovej sústave (x, y) určená krivka. Vyjadrenie (7.1) nazývame **parametrickým vyjadrením** tejto krivky. Premennú t nazývame **parameter**.

Nech t_0 je vnútorný bod intervalu I a nech $x_0 = \varphi(t_0)$, $y_0 = \psi(t_0)$, čiže (x_0, y_0) je bod na našej krivke prislúchajúci parametru t_0. Smernica k_0 dotyčnice ku tejto krivke v bode $T = (x_0, y_0)$ je určená vzťahom

$$k_0 = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)} \tag{7.2}$$

za predpokladu, že $\varphi'(t_0) \neq 0$.

Rovnica dotyčnice k takejto krivke v bode (x_0, y_0) potom je

$$y - y_0 = k_0(x - x_0) \ ,$$

alebo

$$y = y_0 + k_0(x - x_0) \ ,$$

kde smernica k_0 je daná vzťahom (7.2).

Ak $k_0 \neq 0$, tak rovnica normály v bode (x_0, y_0) má tvar

$$y = y_0 - \frac{1}{k_0}(x - x_0) \; .$$

Príklad č. 1. Vypočítajme rovnice dotyčnice a normály krivky

$$x = \varphi(t) = \frac{2t-1}{t}$$
$$y = \psi(t) = \frac{t}{4-t}$$

v bode prislúchajúcemu parametru $t_0 = 1$.

Riešenie: Vypočítame pravouhlé súradnice dotykového bodu $T = (x_0, y_0)$ tak, že $t_0 = 1$ dosadíme do výrazov pre x a y, čím dostaneme

$$x_0 = \frac{2t-1}{t} = \frac{2\cdot 1 - 1}{1} = 1 \; ,$$

$$y_0 = \frac{t}{4-t} = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3} \; .$$

Smernicu dotyčnice k v ľubovoľnom bode vypočítame podľa vzorca (7.2)

$$k = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\left(\frac{t}{4-t}\right)'}{\left(\frac{2t-1}{t}\right)'} = \frac{\frac{1.(4-t)-t.(-1)}{(4-t)^2}}{\frac{2t-1.(2t-1)}{t^2}} \; ,$$

čo po úprave dá

$$k = \frac{4t^2}{(4-t)^2} \; .$$

Smernica dotyčnice k_0 v bode prislúchajúcemu parametru $t_0 = 1$ bude:

$$k_0 = k(t_0) = k(1) = \frac{4\cdot 1^2}{(4-1)^2} = \frac{4}{9} \; .$$

Rovnica dotyčnice má tvar $y = k_0(x - x_0) + y_0$. Po dosadení $T = (x_0, y_0) = (1, \frac{1}{3})$, $k_0 = \frac{4}{9}$ dostávame rovnicu dotyčnice v tvare

$$y = \frac{4}{9}(x-1) + \frac{1}{3} \; .$$

Rovnica normály má tvar $y = -\frac{1}{k}(x - x_0) + y_0$ a líši sa od rovnice dotyčnice len smernicou. Po dosadení $T = (1, \frac{1}{3})$ a $k_0 = \frac{4}{9}$ dostávame

$$y = -\frac{9}{4}(x-1) + \frac{1}{3} \; .$$

□

Príklad č. 2. Vypočítajme rovnice dotyčnice a normály krivky

$$x = \varphi(t) = \cos^2(t) - 2t$$

$$y = \psi(t) = 2t^3 + \sin(t)$$

v bode prislúchajúcemu parametru $t_0 = 0$.

Riešenie: Postup je rovnaký ako v predošlom príklade, čiže vypočítame pravouhlé súradnice dotykového bodu $T = (x_0, y_0)$ dosadením $t_0 = 0$ do $x = \cos^2(t) - 2t$ a $y = 2t^3 + \sin(t)$ a dostaneme

$$x_0 = \cos^2(0) - 2 \cdot 0 = 1 \ ,$$

$$y_0 = 2 \cdot 0^3 + \sin(0) = 0 \ .$$

Smernicu dotyčnice k v ľubovoľnom bode vypočítame opäť podľa vzťahu (7.2)

$$k = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{(2t^3 + \sin(t))'}{(\cos^2(t) - 2t)'} = \frac{6t^2 + \cos(t)}{-2\cos(t) \cdot \sin(t) - 2} \ .$$

Smernica dotyčnice k_0 v bode prislúchajúcemu parametru $t_0 = 0$ po dosadení bude

$$k_0 = k(t_0) = k(0) = \frac{6 \cdot 0^2 + \cos(0)}{-2\cos(0) \cdot \sin(0) - 2} = -\frac{1}{2} \ .$$

Rovnica dotyčnice má tvar $y = k_0(x - x_0) + y_0$. Po dosadení $T = (x_0, y_0) = (1, 0)$, $k_0 = -\frac{1}{2}$ dostávame rovnicu dotyčnice

$$y = -\frac{1}{2}(x - 1) \ .$$

Rovnica normály má tvar $y = -\frac{1}{k_0}(x - x_0) + y_0$, zmení sa len smernica k_0. Po dosadení $T = (1, 0)$ a $k_0 = -\frac{1}{2}$ dostávame

$$y = 2(x - 1) \ .$$

□

Príklad č. 3. Vypočítajme rovnice dotyčnice a normály krivky

$$x = \varphi(t) = \frac{t^2 - 2t^3}{t}$$

$$y = \psi(t) = \frac{2t}{t^2 - 1}$$

v bode prislúchajúcemu parametru $t_0 = 2$.

Riešenie: Dosadíme $t_0 = 2$ do $x = \frac{t^2-2t^3}{t}$, $y = \frac{2t}{t^2-1}$ a dostávame pravouhlé súradnice dotykového bodu $T = (x_0, y_0)$

$$x_0 = \frac{2^2 - 2 \cdot 2^3}{2} = -6 \ ,$$

$$y_0 = \frac{2 \cdot 2}{4 - 1} = \frac{4}{3} \ .$$

Smernicu dotyčnice k v ľubovoľnom bode počítame ako podiel derivácií $\psi^{'}(t)$ a $\varphi^{'}(t)$.

$$k = \frac{\psi^{'}(t)}{\varphi^{'}(t)} = \frac{\frac{2(t^2-1)-2t.2t}{(t^2-1)^2}}{\frac{(2t-6t^2)t-(t^2-2t^3)}{t^2}} = \frac{t^2(-2t^2)}{(t^2-1)^2(-4t^3+t^2)} \ .$$

Hodnota smernice dotyčnice k_0 v bode prislúchajúcemu parametru $t_0 = 2$ bude

$$k_0 = k(t_0) = k(2) = \frac{2^2(-2 \cdot 2^2)}{(2^2-1)^2(-4 \cdot 2^3 + 2^2)} = \frac{1}{9} \ .$$

Rovnica dotyčnice má tvar $y = k_0(x - x_0) + y_0$. Po dosadení $T = (-6, \frac{4}{3})$ a $k_0 = \frac{1}{9}$ dostávame rovnicu dotyčnice

$$y - \frac{4}{3} = \frac{1}{9}(x + 6) \ ,$$

po úprave máme

$$y = \frac{4}{3} + \frac{1}{9}(x + 6) \ .$$

Rovnica normály má tvar $y = -\frac{1}{k_0}(x - x_0) + y_0$. Dosadíme $T = (-6, \frac{4}{3})$, $k_0 = \frac{1}{9}$ a dostávame

$$y = \frac{4}{3} - 9(x + 6) \ .$$

□

Príklad č. 4. Vypočítajme rovnice dotyčnice a normály krivky

$$x = \varphi(t) = 2t - \cos(t - \pi)$$

$$y = \psi(t) = \frac{t^2}{\sin^2(t)}$$

v bode prislúchajúcemu parametru $t_0 = \frac{\pi}{2}$.

Riešenie: Dosadíme $t_0 = \frac{\pi}{2}$ do $x = 2t - \cos(t - \pi)$ a $y = \frac{t^2}{\sin^2(t)}$ a dostávame pravouhlé súradnice dotykového bodu $T = (x_0, y_0)$

$$x_0 = 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right) = \pi \ ,$$

$$y_0 = \frac{(\pi/2)^2}{\sin^2(\pi/2)} = \frac{\pi^2}{4} \ .$$

Smernicu dotyčnice k v ľubovoľnom bode vypočítame podľa vzťahu (7.2)

$$k = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{2t \cdot \sin^2(t) - t^2 \cdot 2 \cdot \sin(t) \cdot \cos(t)}{\sin^4(t)}}{2 + \sin(t - \pi)} = \frac{2t \cdot (\sin(t) - t \cdot \cos(t))}{(2 + \sin(t - \pi)) \cdot \sin^3(t)} \ .$$

Smernica dotyčnice k_0 v bode prislúchajúcemu parametru $t_0 = \frac{\pi}{2}$ po vyčíslení bude

$$k_0 = k\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2(\frac{\pi}{2})(\sin(\frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{2} \cdot \cos(\frac{\pi}{2}))}{(2 + \sin(\frac{\pi}{2} - \pi)) \cdot \sin^3(\frac{\pi}{2})} = \frac{\pi(1 - 0)}{(2 - 1) \cdot 1} = \pi \ .$$

Rovnica dotyčnice má tvar $y = k_0(x - x_0) + y_0$. Po dosadení $T = (\pi, \frac{\pi^2}{4})$ a $k_0 = \pi$ dostávame rovnicu dotyčnice

$$y - \frac{\pi^2}{4} = \pi(x - \pi) \ ,$$

po úprave

$$y = \frac{\pi^2}{4} + \pi(x - \pi) \ .$$

Rovnica normály má tvar $y = -\frac{1}{k_0}(x - x_0) + y_0$. Dosadíme $T = (\pi, \frac{\pi^2}{4})$, $k_0 = \pi$ a dostávame

$$n = \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{\pi}(x - \pi) \ .$$

□

Príklad č. 5. Vypočítajme rovnice dotyčníc a normál v pravouhlom súradnicovom systéme ku grafu funkcie danej pomocou polárnych súradníc

$$\rho = 3\phi^2$$

v bode $\phi_0 = \pi/4$.

Riešenie: Transformácia pravouhlých súradníc do polárnych má tvar

$$x = \rho \cos \phi \ ,$$

$$y = \rho \sin \phi \ .$$

Keďže krivka je v polárnych súradniciach daná rovnicou $\rho = 3\phi^2$, dosadením tohoto výrazu do predchádzajúcich dvoch rovníc dostávame

$$x = 3\phi^2 \cos \phi \ ,$$

$$y = 3\phi^2 \sin \phi.$$

Aby sme používali symboly ako pri parametrickom vyjadrení, použijeme substitúciu $\phi = t$ a dostávame

$$x = \phi(t) = 3t^2 \cdot \cos(t) \ ,$$

$$y = \psi(t) = 3t^2 \cdot \sin(t) \ .$$

Vypočítame súradnice dotykového bodu v pravouhlých súradniciach tak, že dosadíme $t_0 = \pi/4$ do $x = 3t^2 \cdot \cos(t)$ a $y = 3t^2 \cdot \sin(t)$

$$x_0 = 3\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{32}\pi^2$$

$$y_0 = 3\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{32}\pi^2 \ .$$

Súradnice dotykového bodu v pravouhlom súradnicovom systéme sú teda

$$T = (x_0, y_0) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{32}\pi^2, \frac{3\sqrt{2}}{32}\pi^2\right) \ .$$

Smernicu dotyčnice v ľubovoľnom bode vypočítame pomocou vzťahu

$$k = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)} \ .$$

Po derivácii dostávame

$$k = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)} = \frac{6t \cdot \sin(t) + 3t^2 \cdot \cos(t)}{6t \cdot \cos(t) - 3t^2 \cdot \sin(t)} = \frac{2t \cdot \mathrm{tg}(t) + t^2}{2t - t^2 \cdot \mathrm{tg}(t)} = \frac{2 \cdot \mathrm{tg}(t) + t}{2 - t \cdot \mathrm{tg}(t)} \ .$$

Smernica dotyčnice k_0 v bode $t_0 = \pi/4$ je

$$k_0 = \frac{2 \cdot \mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}) + \frac{\pi}{4}}{2 - \frac{\pi}{4} \cdot \mathrm{tg}(\frac{\pi}{4})} \ ,$$

a po zjednodušení dostávame

$$k_0 = \frac{8+\pi}{8-\pi} \ .$$

Rovnica dotyčnice má tvar $y - y_0 = k_0(x - x_0)$. Po dosadení súradníc dotykového bodu $T = (\frac{3\sqrt{2}}{32}\pi, \frac{3\sqrt{2}}{32}\pi)$ a smernice dotyčnice $k_0 = \frac{8+\pi}{8-\pi}$ dostávame rovnicu

$$t: \ y - \frac{3\sqrt{2}}{32}\pi = \frac{8+\pi}{8-\pi}\left(x - \frac{3\sqrt{2}}{32}\pi\right) \ .$$

Rovnica normály má tvar $y - y_0 = -\frac{1}{k_0}(x - x_0)$. Po dosadení súradníc dotykového bodu $T = (\frac{3\sqrt{2}}{32}\pi, \frac{3\sqrt{2}}{32}\pi)$ a smernice dotyčnice $k_0 = \frac{8+\pi}{8-\pi}$ dostávame rovnicu

$$n: \ y - \frac{3\sqrt{2}}{32}\pi = -\frac{8-\pi}{8+\pi}\left(x - \frac{3\sqrt{2}}{32}\pi\right) \ .$$

□

Príklad č. 6. Vypočítajme rovnice dotyčníc a normál v pravouhlom súradnicovom systéme ku grafu funkcie danej pomocou polárnych súradníc.

$$\rho = 2\mathrm{tg}(2\phi)$$

v bode $\phi_0 = \pi/3$.

Riešenie: Transformácia pravouhlých súradníc do polárnych má tvar

$$x = \rho \cos\phi \ ,$$

$$y = \rho \sin\phi \ .$$

Krivka je v polárnych súradniciach daná rovnicou $\rho = 2\mathrm{tg}(2\phi)$, dosadením dostávame

$$x = 2\mathrm{tg}(2\phi) \cdot \cos\phi \ ,$$

$$y = 2\mathrm{tg}(2\phi) \cdot \sin\phi \ .$$

Aby sme používali symboly ako pri parametrickom vyjadrení, použijeme substitúcu $\phi = t$ a dostávame

$$x = 2\mathrm{tg}(2t) \cdot \cos(t) \ ,$$

$$y = 2\mathrm{tg}(2t) \cdot \sin(t) \ .$$

Vypočítame súradnice dotykového bodu $T = (x_0, y_0)$ v pravouhlých súradniciach dosadením $t_0 = \pi/3$ do $x = 2\mathrm{tg}(2t) \cdot \cos(t)$ a $y = 2\mathrm{tg}(2t) \cdot \sin(t)$

$$x_0 = 2\mathrm{tg}\left(2\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \ ,$$

$$y_0 = 2\mathrm{tg}\left(2\frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -3 \ .$$

Súradnice dotykového bodu v praouhlých súradniciach sú $T = (x_0, y_0) = (-\sqrt{3}, -3)$.

Smernicu dotyčnice v ľubovoľnom bode vypočítame pomocou vzťahu

$$k = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)} \ ,$$

po derivácii dostávame

$$k = \frac{\frac{4}{\cos^2(2t)} \cdot \sin(t) + 2\mathrm{tg}(2t) \cdot \cos(t)}{\frac{4}{\cos^2(2t)} \cdot \cos(t) - 2\mathrm{tg}(2t) \cdot \sin(t)} \ .$$

Smernica dotyčnice k_0 v bode $t_0 = \frac{\pi}{3}$

$$k_0 = \frac{\frac{4}{\cos^2(\frac{2}{3}\pi)} \cdot \sin(\frac{\pi}{3}) + 2\mathrm{tg}(\frac{2}{3}\pi) \cdot \cos(\frac{\pi}{3})}{\frac{4}{\cos^2(\frac{2}{3}\pi)} \cdot \cos(\frac{\pi}{3}) - 2\mathrm{tg}(\frac{2}{3}\pi) \cdot \sin(\frac{\pi}{3})} \ ,$$

po zjednodušení dostávame smernicu dotyčnice k_0

$$k_0 = \frac{8\sqrt{3} - \sqrt{3}}{8 + 3} = \frac{7\sqrt{3}}{11} \ .$$

Rovnica dotyčnice má tvar $y - y_0 = k_0(x - x_0)$. Po dosadení súradníc dotykového bodu $T = (-\sqrt{3}, -3)$ a smernice dotyčnice $k_0 = \frac{7\sqrt{3}}{11}$ dostávame rovnicu

$$t: \ y + 3 = \frac{7\sqrt{3}}{11}(x + \sqrt{3}) \ ,$$

po úprave dostávame výsledok

$$t: \; y = \frac{7\sqrt{3}}{11}(x + \sqrt{3}) - 3 \; .$$

Rovnica normály má tvar $y - y_0 = -\frac{1}{k_0}(x - x_0)$. Po dosadení súradníc dotykového bodu $T = (-\sqrt{3}, -3)$ a smernice dotyčnice $k_0 = \frac{7\sqrt{3}}{11}$ dostávame rovnicu normály

$$n: \; y = -\frac{11}{7\sqrt{3}}(x + \sqrt{3}) - 3 \; .$$

$\square$

Príklady na cvičenia:

1. Vypočítajte rovnice dotyčníc a normál nasledujúcich funkcií daných parametricky v daných bodoch:

(a) $x = \frac{1-2t}{1+2t}, \; y = \frac{t}{1-t}$, v bode prislúchajúcemu parametru $t_0 = 2$.

Výsledok: $t: \; y = -\frac{25}{4}(x + \frac{3}{5}) - 2, \quad n: \; y = \frac{4}{25}(x + \frac{3}{5}) - 2.$

(b) $x = 4t \cdot \cos(2t), \; y = 2 - \sin(t)$, v bode prislúchajúcemu parametru $t_0 = 0$.

Výsledok: $t: \; y = -\frac{1}{4}x + 2, \quad n: \; y = 4x + 2.$

(c) $x = t^2 \ln(t+1), \; y = (2-t) \cdot e^{2t}$, v bode prislúchajúcemu parametru $t_0 = 1$.

Výsledok: $t: \; y = \frac{e^2}{2\ln 2 + 1/2}(x - \ln 2) + e^2, \quad n: \; y = -\frac{2\ln 2 + 1/2}{e^2}(x - \ln 2) + e^2.$

(d) $x = e^{-t} \cdot \mathrm{tg}(t), \; y = e^{-t} \cdot \cos^2(t)$, v bode prislúchajúcemu parametru $t_0 = 0$.

Výsledok: $t: \; y = 1 - x, \quad n: \; y = x + 1.$

(e) $x = \mathrm{arctg}(t^2 - 2t), \; y = \mathrm{tg}(2t) - 4t$, v bode prislúchajúcemu parametru $t_0 = 0$.

Výsledok: $t: \; y = \frac{3}{2}x, \quad n: \; y = -\frac{2}{3}x.$

(f) $x = t^3 - 2t^2 + 1, \; y = t^2 + t - 2$, v bode prislúchajúcemu parametru $t_0 = 2$.

Výsledok: $t: y - 4 = \frac{5}{4}(x - 1), \quad n: y - 4 = -\frac{4}{5}(x - 1).$

(g) $x = t^2 . \cos^2(t), \; y = t^2 - \sin^2(t)$, v bode prislúchajúcemu parametru $t_0 = \pi/4$.

Výsledok: $t: y - \frac{\pi^2 - 8}{16} = \frac{8.(\pi - 2)}{4\pi - \pi^2}(x - \frac{\pi^2}{32}), \quad n: y - \frac{\pi^2 - 8}{16} = -\frac{4\pi - \pi^2}{8.(\pi - 2)}(x - \frac{\pi^2}{32}).$

(h) $x = t^2 - e^t, \; y = t + e^{2t}$, v bode prislúchajúcemu parametru $t_0 = 1$.

Výsledok: $t: y - (1 + e^2) = \frac{1+2e^2}{2-e}(x - (1-e)), \quad n: y - (1 + e^2) = -\frac{2-e}{1+2e^2}(x - (1-e)).$

(i) $x = t \cdot \ln^2(2t), \; y = e^t - \ln(2t)$, v bode prislúchajúcemu parametru $t_0 = 1$.

Výsledok: $t: y - (e - \ln 2) = \frac{e-1}{\ln^2 2 + 2\ln 2}(x - \ln^2 2), \quad n: y - (e - \ln 2) = -\frac{\ln^2 2 + 2\ln 2}{e-1}(x - \ln^2 2).$

2. Vypočítajte rovnice dotyčníc a normál v pravouhlom súradnicovom systéme ku grafom funkcií daných pomocou polárnych súradníc:

(a) $\rho = 2\varphi$, v bode $\varphi_0 = \pi/2$

Výsledok: $t: \; y = \frac{2}{\pi}x + \pi, \quad n: \; y = -\frac{\pi}{2}x + \pi.$

(b) $\rho = \sin(\varphi - \pi)$, v bode $\varphi_0 = \pi/3$

Výsledok: $t:\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}(x + \frac{\sqrt{3}}{4}) - \frac{3}{4}$, $n:\ y = -\frac{2}{\sqrt{3}}(x + \frac{\sqrt{3}}{4}) - \frac{3}{4}$.

(c) $\rho = e^{(2\varphi)}$, v bode $\varphi_0 = \pi/6$

Výsledok: $t:\ y = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-1}(x - \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\pi/3}) + \frac{1}{2}e^{\pi/3}$, $n:\ y = -\frac{2\sqrt{3}-1}{2+\sqrt{3}}(x - \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\pi/3}) + \frac{1}{2}e^{\pi/3}$.

(d) $\rho = 3^{\varphi} + \sin(\varphi)$, v bode $\varphi_0 = 0$

Výsledok: $t:\ y = \frac{1}{1+\ln 3}(x-1)$, $n:\ y = -(1+\ln 3)(x-1)$.

(e) $\rho = (e^{-\varphi} + 3^{\varphi})$, v bode $\varphi_0 = 0$

Výsledok: $t:\ y = \frac{2}{\ln 3 - 1}(x-2)$, $n:\ y = -\frac{\ln 3 - 1}{2}(x-2)$.

Literatúra

[1] Eliáš, J., Horváth, J., Kajan, J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky 1.* Alfa, Bratislava, (1985), 6.vydanie, 356 s.

[2] Ivan, J.: *Matematika 1.* Alfa STNL, Bratislava, (1986), 2.vydanie, 704 s.

[3] Handlovičová, A., Mišík, L., Schneider Z., Širáň, J.: *Riešené úlohy z matematiky 1.* Stavebná fakulta STU, Bratislava, (1998), 195 s.