

Martin Balažovjech

FYZIKÁLNE PRINCÍPY V POČÍTAČOVOM MODELOVANÍ 1

Martin Balažovjech

FYZIKÁLNE PRINCÍPY V POČÍTAČOVOM MODELOVANÍ 1

Všetky práva vyhradené. Nijaká časť textu nesmie byť použitá na ďalšie šírenie akoukoľvek formou bez predchádzajúceho súhlasu autorov alebo vydavateľstva.

© Mgr. Martin Balažovjeh, PhD.

Recenzenti: doc. Mgr. Peter Guba
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.

Mgr. Martin Balažovjeh, PhD.

FYZIKÁLNE PRINCÍPY V POČÍTAČOVOM MODELOVANÍ 1

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave vo Vydavateľstve SPEKTRUM STU, Bratislava, Vazovova 5, v roku 2017.

Edícia skrípt

Rozsah 72 strán, 44 obrázkov, 4,812 AH, 4,949 VH, 1. vydanie,
edičné číslo 5951, vydané v elektronickej forme;
umiestnenie na <http://www.svf.stuba.sk>

Schválila Edičná rada Stavebnej fakulty STU v Bratislave.

85 – 222 – 2017

ISBN 978-80-227-4721-9

Obsah

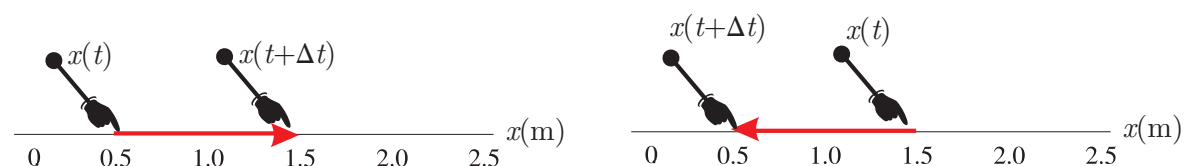
1	Kinematika v jednorozmernom prípade	5
1.1	Okamžitá a priemerná rýchlosť	5
1.2	Vzdialenosť	8
1.3	Zrýchlenie	10
1.4	Vzťažná sústava	11
2	Kinematika v dvojrozmernom prípade	13
2.1	Rýchlosť a zrýchlenie v dvojrozmernom prípade	13
2.2	Vzdialenosť a dráha v dvojrozmernom prípade	16
2.3	Pohyb po kružnici	18
2.4	Simulácie v systéme MATHEMATICA	21
3	Newtonove pohybové zákony	22
3.1	Zákon zotrvačnosti	22
3.2	Hybnosť a hmotnosť	22
3.3	Zákon sily	23
3.4	Impulz sily	24
3.5	Zákon akcie a reakcie	25
3.6	Zachovanie hybnosti	26
3.7	Nepružná a pružná zrážka	28
4	Gravitačné pole	30
4.1	Gravitačná sila	31
4.2	Intenzita gravitačného poľa	31
4.3	Gravitačné zrýchlenie	33
4.4	Voľný pád	34
4.5	Pohyb planét a odstredivá sila	36
4.6	Inerciálna a neinerciálna vzťažná sústava	37
5	Mechanická práca	38
5.1	Kladná a záporná práca	39
5.2	Práca v silovom poli	39
5.3	Práca ako skalárny súčin	41
5.4	Práca sily, ľubovoľného smeru a veľkosti	41
5.5	Výkon	42
6	Energia	42
6.1	Kinetická energia	43
6.2	Potenciálna energia telesa v tiažovom poli Zeme	45
6.3	Zákon zachovania energie	47
7	Mechanika tuhého telesa	49
7.1	Ťažisko telesa	49
7.2	Energia rotujúceho telesa	51
7.3	Moment zotrvačnosti	54

7.4	Moment sily	56
7.5	Moment hybnosti	58
7.6	Zákon zachovania momentu hybnosti	59
7.7	Coriolisova sila	61
8	Typy spojitého materiálu	61
8.1	Kvapaliny	63
8.2	Plyny	68
8.3	Tuhé látky	70
8.4	Pohyb spojitého materiálu	70
8.5	Deformácia ťahom	70
8.6	Deformácia šmykom	72

Kinematika je matematický opis pohybu, ktorý neberie do úvahy jeho príčinu.

1 Kinematika v jednorozmernom prípade

Predmetom kinematiky v jednorozmernom prípade je priamočiary pohyb pozdĺž osi x . Poloha objektu, ktorého pohyb skúmame, je daná x -ovou súradnicou. Keď budeme skúmať pohyb telesa, tak budeme skúmať ako sa mení jeho x -ová súradnica (poloha) v čase t . Zmena polohy v čase je daná posunutím $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$, teda rozdielom konečnej polohy $x(t + \Delta t)$ v čase $t + \Delta t$ a počiatočnej polohy $x(t)$ v čase t . Δt je celkový časový interval pohybu objektu.

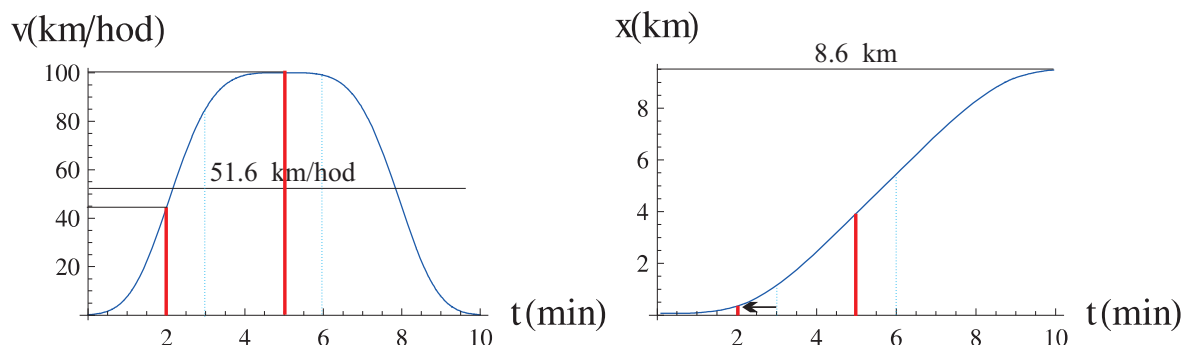


Obr. 1.0.1. Na ľavom obrázku je posunutie $\Delta x = 1,5 - 0,5 = +1$ m a na pravom obrázku je posunutie $\Delta x = 0,5 - 1,5 = -1$ m.

Kým Δt je vždy kladné, pretože čas plynie iba jedným smerom tak, že stále pribúda, Δx môže nadobúdať kladné hodnoty v prípade, že sa objekt pohybuje zľava doprava, ale aj záporné hodnoty v prípade, že sa objekt pohybuje v opačnom smere.

1.1 Okamžitá a priemerná rýchlosť

Budeme rozoberať pohyb auta. Auto najskôr stálo, potom sa rozbíhalo, potom išlo istý čas rovnomernou rýchlosťou a napokon brzdilo, až zastavilo. Celý tento proces je znázornený na Obr. 1.1.1.



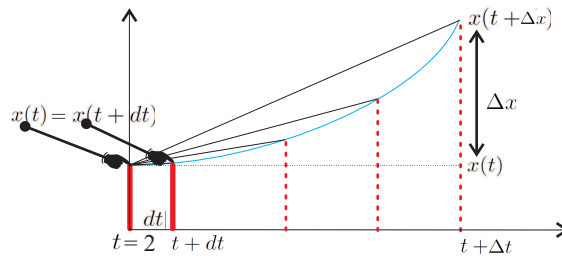
Obr. 1.1.1. Obrázok vľavo znázorňuje závislosť rýchlosti od času a obrázok vpravo znázorňuje závislosť dráhy od času.

V každom časovom okamihu mala rýchlosť nejakú hodnotu. Túto hodnotu budeme nazývať **okamžitá rýchlosť**. Táto okamžitá rýchlosť sa pri rozbíhaní a brzdení auta menila a istý čas medzi tým bola konštantná. Napríklad určíme okamžitú rýchlosť auta v čase t po štarte. Tieto rýchlosti odmeriame. Meriame tak, že stlačíme stopky v čase t v mieste $x(t)$. Potom stlačíme stopky trochu neskôr v čase $t + \Delta t$ v mieste $x(t + \Delta t)$. Rýchlosť vypočítame ako zmenu polohy (súradnice) auta Δx za čas Δt .

$$v \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad (1.1.1)$$

Predpokladajme, že meriame dráhu v priebehu jednej minúty, teda $\Delta t = 1$ min. Kedy dostaneme presnejšiu hodnotu rýchlosti v 2. alebo v 5. minúte? Ak začneme merať rýchlosť v piatej minúte, dostaneme správnu hodnotu okamžitej rýchlosti $v = 100$ km/hod. Je to preto, lebo v tomto časovom intervale sa auto pohybovalo rovnomernou rýchlosťou, teda rýchlosť sa od 5. do 6. minúty nemenila. (Na Obr. 1.1.1 vľavo je grafom pre tento úsek vodorovná čiara, lebo rýchlosť sa nemení, a vpravo šikmá rovná čiara, lebo ak sa nemení rýchlosť, dráha s časom rovnomerne (lineárne) narastá.)

Ak začneme merať rýchlosť v druhej minúte, dostaneme nesprávnu hodnotu okamžitej rýchlosti. Je to preto, lebo v tomto časovom intervale sa auto rozbiehalo. Pohybovalo sa nerovnomernou rýchlosťou. Rýchlosť na tomto časovom intervale stále narastala, a teda v každom okamihu tohto intervalu bola väčšia ako v druhej minúte. (Pozri Obr. 1.1.1.)



Obr. 1.1.2. Závislosť dráhy od času

Ak chceme získať presnejšiu rýchlosť, musíme merať dráhu na kratšom časovom intervale. Čím kratší je čas, kedy meriame dráhu, tým menej sa stihne zmeniť rýchlosť auta, a tým presnejšie zmeriame okamžitú rýchlosť. Aby sme boli pri meraní rýchlosti dostatočne presní, musíme merať v priebehu veľmi krátkeho času blízkeho nule (*v okamihu*), čo matematicky zapíšeme takto:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + dt) - x(t)}{dt} = \frac{dx}{dt} \quad (1.1.2)$$

- Δ – zmena veličiny
- d – nekonečne malá zmena veličiny

Okamžitá rýchlosť auta je daná deriváciou vzdialenosti podľa času.

Poznámka 1 Čím kratší je časový interval Δt , kedy meriame dráhu, tým lepšie aproximuje čierna úsečka na tomto intervale funkciu závislosti dráhy od času. (Pozri Obr. 1.1.2)

Príklad 1 Závislosť dráhy od času je daná funkciou $x(t) = t^2$ treba nájsť rýchlosti v čase $t = 1, 2, 3 \dots$

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = \frac{x(t + dt) - x(t)}{dt} = \frac{(t + dt)^2 - t^2}{dt} \\ &= \frac{t^2 + 2tdt + (dt)^2 - t^2}{dt} = 2t + dt \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Rýchlosti v čase $t = 1, 2, 3, \dots$ sú $v = 2 + dt, 4 + dt, 6 + dt, \dots$. Keďže dt je veľmi krátky časový interval blízky nule, môžeme ho zanedbať a rýchlosti sú potom dané funkciou $v(t) = 2t$, čo je derivácia dráhy podľa času.

Vrátime sa opäť k pohybu auta a určíme **priemernú rýchlosť** ako aritmetický priemer všetkých rýchlostí, ktoré auto nadobudlo počas rovnakých časových intervalov

$$\bar{v} = \frac{\sum_{i=0}^n v_i}{n}$$

Jednotlivé rýchlosti v_i vyjadríme ako podiel n veľmi malých vzdialeností Δx_i veľmi krátkymi **rovnako dlhými** časovými intervalmi Δt . Pre priemernú rýchlosť potom dostaneme:

$$\bar{v} = \frac{\sum_{i=0}^n \frac{\Delta x_i}{\Delta t}}{n} = \frac{\sum_{i=0}^n \Delta x_i}{n \Delta t} = \frac{x}{t},$$

kde $\sum_{i=0}^n \Delta x_i = x$ predstavuje celkovú dráhu a $n \Delta t = t$ celkový čas. Toto je definícia priemernej rýchlosti.

Poznámka 2 Auto prešlo celkovú vzdialenosť $x = 8,6$ km za celkový čas $t = 10$ min, teda priemerná rýchlosť akou išlo auto je:

$$v = \frac{x}{t} = \frac{8,6 \text{ km}}{10 \text{ min}} = \frac{8,6 \text{ km}}{0,66 \text{ h}} = 51,6 \frac{\text{km}}{\text{hod}}. \quad (1.1.4)$$

Keby išlo auto 10 min rýchlosťou $51,6 \text{ km.h}^{-1}$ prešlo by $8,6$ km.

Poznámka 3 Celková priemerná rýchlosť predmetu môže byť nulová, aj napriek tomu, že sa daný predmet pohyboval. Stačí ak sa vráti na to isté miesto odkiaľ vyštartoval.

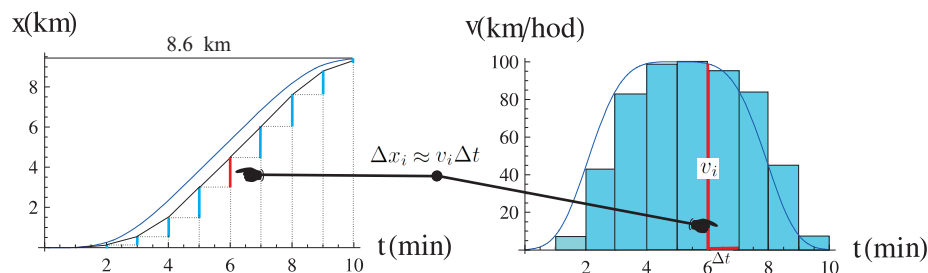
Príklad 2 Cyklista sa pohybuje smerom do kopca rýchlosťou $v_1 = 10 \text{ km.h}^{-1}$. Keď dosiahne vrchol kopca, obráti sa a absolvuje tú istú trasu z kopca dolu rýchlosťou $v_2 = 40 \text{ km.h}^{-1}$. Aká bola priemerná rýchlosť cyklistu?

Priemernú rýchlosť cyklistu vypočítame ako celkovú dráhu za celkový čas:

$$\bar{v} = \frac{x}{t} \quad (1.1.5)$$

Keďže sa cyklista vrátil naspäť na to isté miesto, jeho celková dráha je $x = 0$ a teda aj priemerná rýchlosť je nulová. Na to, aby sme posúdili výkonnosť cyklistu, je lepšie určiť priemernú veľkosť rýchlosti

$$|\bar{v}| = \frac{2x}{t} = \frac{2x}{t_1 + t_2} = \frac{2x}{\frac{x}{v_1} + \frac{x}{v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} = 16 \text{ km/hod} \quad (1.1.6)$$



Obr. 1.2.1. Jednotlivé úseky vzdialeností Δx_i na diagrame vľavo predstavujú číselnú hodnotu plochy obdĺžnikov $v_i \Delta t$ na diagrame vpravo.

1.2 Vzdialenosť

Predpokladajme, že poznáme závislosť rýchlosti na čase (Obr.1.2.1 vpravo), teda ako sa menila rýchlosť auta v priebehu celej jazdy, ktorá trvala $t = 10$ min. Budeme počítat celkovú vzdialenosť x , ktorú auto prešlo. Vzdialenosť budeme počítat tak, že sčítame (integrujeme pospájame) vzdialenosti Δx_i , ktoré auto prešlo v priebehu každej minúty:

$$x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_{10}$$

Tieto úseky nepoznáme, preto si ich približne určíme tak, že známu hodnotu rýchlosti na začiatku každého časového intervalu násobíme časovým intervalom: $\Delta x_i \approx v_i \Delta t$. Teda pozrieme sa, aká je rýchlosť na začiatku pohybu a budeme predpokladať, že takouto rýchlosťou sa bude auto pohybovať v priebehu celej minúty a vypočítame dráhu $\Delta x_1 \approx v_1 \Delta t$. Potom sa pozrieme aká je rýchlosť v prvej minúte a budeme predpokladať, že takouto rýchlosťou sa bude auto pohybovať v priebehu celej ďalšej minúty, vypočítame dráhu $\Delta x_2 \approx v_2 \Delta t$ a oba úseky spočítame. Ak takto budeme postupovať ďalej, celková vzdialenosť bude:

$$x \approx v_1 \Delta t + v_2 \Delta t + \dots + v_{10} \Delta t = (v_1 + v_2 + \dots + v_{10}) \Delta t,$$

teda

$$x \approx \sum_{i=1}^{10} v_i \Delta t \quad (1.2.1)$$

Pri takomto priblížení sme sa dopustili chyby. Najskôr sa auto rozbiehalo, teda rýchlosť v priebehu každého úseku stúpala, a my sme predpokladali, že počas každého úseku sa auto pohybuje rovnomernou počiatočnou rýchlosťou, čo má za následok, že nami vypočítaná dráha je kratšia ako skutočná. Na Obr. 1.2.1 vľavo vidíme, ako sa naša krivka odkláňa od skutočnej krivky (v modrej farbe) smerom nadol a na obrázku vpravo vidíme, že plocha obdĺžnikov z výškou v_i a podstavou Δt je menšia ako plocha pod krivkou závislosti rýchlosti od času. Naopak, v druhej polovici jazdy auto spomaľovalo a nami vypočítané úseky boli dlhšie ako skutočné. Naša krivka sa prikláňa ku skutočnej a plocha obdĺžnikov je zas väčšia ako plocha pod krivkou. Keďže rýchlosť sa v priebehu časového intervalu mení, takýto výpočet je nepresný. Ak chceme získať presnejší výpočet, musíme časové intervaly skrátiť, a teda celkovú vzdialenosť poskladať z viacerých úsekov. Presnú dráhu získame, ak máme nekonečne veľa úsekov:

$$x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} v_i \Delta t \quad (1.2.2)$$

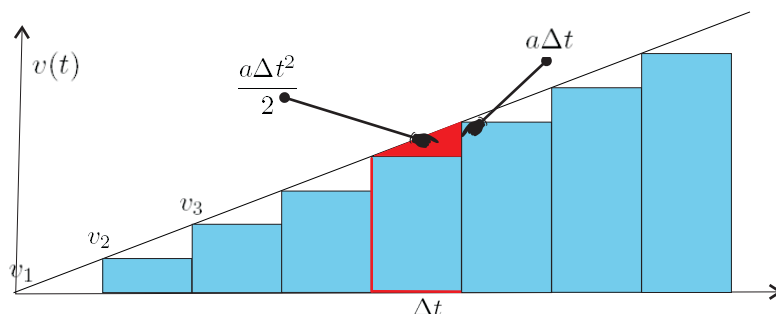
Vzťah (1.2.2) je určitý integrál z funkcie $v(t)$ podľa diferenciálu dt a hranice sú $t_1 = 0$ a $t_2 = 10$, teda:

$$x = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt \quad (1.2.3)$$

Teraz si ukážeme výpočet vzdialenosti na konkrétnom príklade:

Príklad 3 Auto sa rozbieha z pokoja a závislosť rýchlosti od času je daná lineárnou funkciou $v(t) = at$. Treba zistiť, akú dráhu prejde za čas t .

Celkovú dráhu určíme tak, že ju pospájame a zintegrujeme z veľa malých úsekov



Obr. 1.2.2.

$$x = \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n v_i \Delta t$$

Za jednotlivé rýchlosti dosadíme funkčné hodnoty funkcie $v(t) = at$. (Funkčné hodnoty uvažujeme vždy na začiatku časového intervalu).

$$x = (0 + a\Delta t + a2\Delta t + \dots + a(n-1)\Delta t) \Delta t \quad (1.2.4)$$

$$\begin{aligned} &= a(0 + 1 + 2 + \dots + (n-1)) \Delta t^2 \\ &= \frac{a(0 + (n-1))n}{2} \Delta t^2 \\ &= \frac{a(n^2 - n)}{2} \Delta t^2 \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Ak uvažíme že $t = n\Delta t$ dostaneme:

$$x = \frac{at^2}{2} - \frac{na\Delta t^2}{2} \quad (1.2.6)$$

kde

$$Err = -\frac{na\Delta t^2}{2} \quad (1.2.7)$$

je chyba výpočtu (pozri Obr. 1.2.2). Aby sme sa chyby zbavili, musíme zvoliť $n \rightarrow \infty$ potom sa časový interval blíži nule $\Delta t \rightarrow 0$ a dostaneme

$$x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{at^2}{2} - \frac{na\Delta t^2}{2} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{at^2}{2} - \frac{at\Delta t}{2} = \frac{at^2}{2} = \int_0^t at dt \quad (1.2.8)$$

1.3 Zrýchlenie

Počas jazdy auto zrýchľovalo a spomaľovalo, teda jeho rýchlosť sa s časom menila. Miera toho, ako veľmi sa menila jeho rýchlosť, je zrýchlenie a . Ak chceme zrýchlenie presne určiť, musíme sa pýtať, ako veľmi sa menila rýchlosť v v priebehu veľmi krátkeho časového intervalu Δt , teda:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t + dt) - v(t)}{dt} = \frac{dv}{dt} \quad (1.3.1)$$

Ak uvážime, že rýchlosť je deriváciou dráhy podľa času, tak zrýchlenie môžeme vyjadriť ako druhú deriváciu dráhy podľa času:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d\frac{dx}{dt}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (1.3.2)$$

Pokus 1 Meranie reakčného času pomocou pravítka: jeden študent pustí 30 cm pravítko na zem a druhý sa ho snaží čo najrýchlejšie chytiť. Pravítko medzi pustením a chytením prejde dráhu s , z ktorej vypočítame reakčný čas:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}} \quad (1.3.3)$$

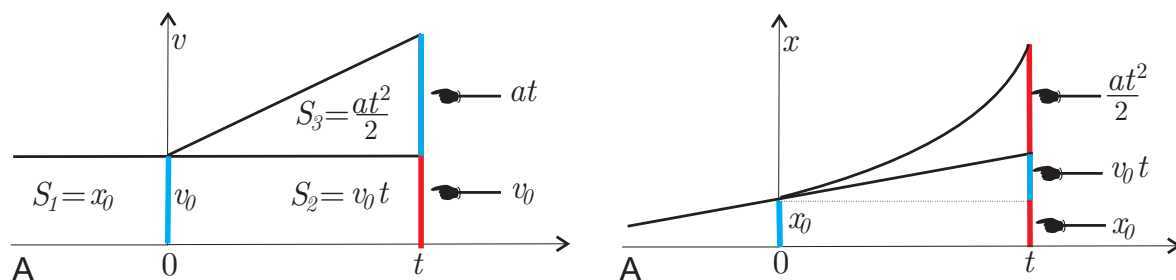
Pokus 2 Železné matice pripevníme na špagát. Postavíme sa na stôl a špagát necháme visieť. Aké majú byť vzdialenosti medzi maticami, aby po uvoľnení špagátu dopadli na zem v rovnakých časových intervaloch?

Matice sa budú pohybovať rovnomerným zrýchlením a . Prvá bude padať z výšky h a dopadne na zem za čas t . Aby matice dopadli na zem v rovnakých časových intervaloch, pád druhej matice bude trvať $2t$ a n -tej matice nt . Keďže vzťah medzi výškou a dobou pádu je

$$h = \frac{at^2}{2}, \quad (1.3.4)$$

tak druhá matica musí padať z výšky $4h$ a n -tá matica z výšky n^2h .

Príklad 4 Dopravná loď bola unášaná riekou do vzdialenosti x_0 od mesta A . Rieka má rýchlosť v_0 . V čase $t = 0$ sa začala pohybovať s rovnomerným zrýchlením a po prúde. Ako sa menila s časom jej rýchlosť? Ako ďaleko od mesta A sa dostala v čase t ?



Obr. 1.3.1.

Predstavme si, že loď unášal prúd rýchlosťou v_0 a vo vzdialenosti x_0 začala zrýchľovať smerom po prúde. Jej výsledná rýchlosť teda bude rýchlosť rieky plus rýchlosť vzhľadom na riek:

$$v = v_0 + at \quad (1.3.5)$$

Výsledná vzdialenosť v čase t bude x_0 plus vzdialenosť, ktorú prešla loď "meniacou sa" rýchlosťou v vzhľadom na breh, teda:

$$x = x_0 + \int_0^t v dt = x_0 + \int_0^t (v_0 + at) dt = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \quad (1.3.6)$$

Poznámka 4 Príklad môžeme vyriešiť aj použitím neurčitého integrálu, kde x_0 je integračná konštanta:

$$x = \int v dt = \int (v_0 + at) dt = v_0 t + \frac{at^2}{2} + x_0, \quad (1.3.7)$$

alebo graficky z Obr. 1.3.1 vľavo ako súčet integračných plôch: $x_0 = S_1 + S_2 + S_3$

1.4 Vzťažná sústava

Vzťažná sústava je prostredie, v ktorom pozorujeme pohyb (Zem, vlak, lietadlo, rieka, vesmír). V ďalšom texte sa budeme zaoberať vzťažnou sústavou, ktorá je v pokoji, alebo v rovnomernom priamočiari pohybe. Takáto sústava sa nazýva inerciálna vzťažná sústava. V inerciálnych sústavách platí **princíp relativity**:

Zvnútra takejto sústavy nevieme nijakým spôsobom určiť, či sa sústava pohybuje, alebo je v pokoji. Teda rovnomerný priamočiary pohyb je relatívny a všetky fyzikálne deje v pohybujúcej sa sústave prebiehajú tak isto ako v stojatej. Napríklad rovnako nám padne guľôčka kolmo na podlahu vlaku bez ohľadu na to, akou rýchlosťou sa vlak pohybuje. Samozrejme pokiaľ nemení svoju rýchlosť. Vzťažná sústava býva matematicky reprezentovaná súradnicovou sústavou $[x, y, z]$, ktorá je spojená s daným prostredím, napríklad s riekou z predchádzajúceho príkladu, ktorá sa pohybuje rovnomernou rýchlosťou. Medzi dvomi navzájom sa pohybujúcimi inerciálnymi sústavami rýchlosťou v platia Galileiho transformácie:

$$x' = x \pm vt \quad y' = y \quad z' = z \quad (1.4.1)$$

Ak sa udeje nejaká udalosť vo vzťažnej sústave spojenej s riekou pohybujúcou sa rýchlosťou v , ktorá je reprezentovaná súradnicovou sústavou $[x, y, z]$, napríklad loď sa začne rozbiehať so zrýchlením a , poloha je daná súradnicami:

$$x = \frac{at^2}{2} \quad y = 0 \quad z = 0. \quad (1.4.2)$$

Pozorovateľ na brehu, ktorý sa nachádza v sústave $[x', y', z']$ spojenej s brehom, vidí tiež zrýchľujúcu loď, ktorej poloha je daná súradnicami:

$$x' = vt + \frac{at^2}{2} \quad y' = y \quad z' = z \quad (1.4.3)$$

Samozrejme takéto transformácie sú správne iba pri malých (rádovo $0 \text{ m.s}^{-1} - 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$) rýchlostiach.

Príklad 5 Dvaja rovnako rýchli veslári idú súťažiť. Pôjdu 1 km vzhľadom na breh proti prúdu a naspäť. Jeden ide tesne pri brehu, kde rýchlosť rieky je 0 m.s^{-1} . Druhý v prúde, kde rýchlosť rieky je 1 m.s^{-1} . Rýchlosť oboch veslárov 10 m.s^{-1} vzhľadom na riek. Ktorý bude rýchlejší a prečo? Aké budú mať časy v cieľi?

Prvý nemá prúd, takže prejde dvakrát tú istú vzdialenosť rovnakou rýchlosťou, a teda celkový čas jeho pohybu je

$$t = \frac{2x}{v} = 200 \text{ s} \quad (1.4.4)$$

Druhý ide proti prúdu pomalšou rýchlosťou $v_1 = v - v_p$ ako po prúde: $v_1 = v + v_p$, takže prúd ho dlhší čas brzdí, ako mu pomáha, a teda celkový čas jeho pohybu je

$$t = \frac{x}{v - v_p} + \frac{x}{v + v_p} = 202 \text{ s} \quad (1.4.5)$$

***Príklad 1** Odlieпам lepiacu pásku zo stola rýchlosťou v_0 , akou rýchlosťou sa pohybuje:



1. tá časť pásky, ktorá sa práve odliepa?
2. stred odlepanej pásky?

Na začiatku odliepania je koniec pásky, ktorý držím v ruke na tom istom mieste, kde je miesto odliepania. Na konci sa páska preklopí. Moja ruka prejde dva krát takú dráhu, ako je dĺžka pásky. Keďže predpokladám, že som odliepal rovnomernou rýchlosťou v_0 , bola rýchlosť pohybu miesta odliepania polovičná ako v_0 . Stred odlepanej časti sa posunul do $\frac{3}{4}$ dráhy mojej ruky, teda stred odlepanej pásky pohyboval rýchlosťou $\frac{3v_0}{4}$.

***Príklad 2** Raketa vypustená kolmo nahor sa pohybovala so zrýchlením $2g$ po dobu $t_1 = 10 \text{ s}$, kým boli zapnuté motory. Do akej výšky nad Zemou raketa vystúpi? (Odpor vzduchu zanedbáme.)

Raketa preletí po dobu t_1 s rovnomerným zrýchlením $2g$ prvú časť svojej dráhy

$$h_1 = \frac{2gt_1^2}{2} = gt_1^2 \quad (1.4.6)$$

Na konci prvej dráhy dosiahne svoju maximálnu rýchlosť $v_{max} = 2gt_1$. Od tejto doby sa bude pohybovať s rovnomerným spomalením $-g$ až kým nezastaví. Vtedy nadobudne nulovú rýchlosť $0 = v_{max} - gt_2$, odkiaľ môžeme zistiť dobu brzdenia $t_2 = v_{max}/g$. Za tento čas prejde raketa druhú časť svojej dráhy

$$h_2 = v_{max}t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = \frac{v_{max}^2}{g} - \frac{v_{max}^2}{2g} = \frac{v_{max}^2}{2g} = \frac{4g^2t_1^2}{2g} = 2gt_1^2 \quad (1.4.7)$$

Celková dráha ktorú preletí raketa, bude $h = h_1 + h_2 = 3gt_1^2 = 3000$ m.

***Príklad 3** Vlak sa môže rozbiehať s maximálnym zrýchlením $0,5 \text{ m.s}^{-2}$ a brzdiť s maximálnym spomalením 1 m.s^{-2} . Za aký najkratší čas prejde vlak 600 m? (Predpokladáme, že vlak sa rozbieha z kludového stavu a po 600 m zastaví.)

Aby prešiel vlak dráhu x za najkratší čas, tak najskôr sa bude rozbiehať s maximálnym zrýchlením a_1 za čas t_1 dosiahne maximálnu rýchlosť $v_{max} = a_1t_1$ a prejde prvú časť dráhy $x_1 = a_1t_1^2/2$. Potom bude vlak spomaľovať s maximálnym spomalením a_2 za čas t_2 , až dosiahne nulovú rýchlosť $0 = v_{max} - a_2t_2$ a prejde druhú časť dráhy $x_2 = v_{max}t_2 - a_2t_2^2/2 = a_2t_2^2 - a_2t_2^2/2 = a_2t_2^2/2$. Pre celkovú dráhu teda platí:

$$x = x_1 + x_2 = \frac{a_1t_1^2}{2} + \frac{a_2t_2^2}{2} \quad (1.4.8)$$

Keďže veľkosť zrýchlenia bola polovičná ako veľkosť spomalenia, tak $t_1 = 2t_2$ (pomer časov dostaneme zo vzťahov pre maximálnu rýchlosť $v_{max} = a_1t_1 = a_2t_2$). Celkovú dráhu môžeme teraz vyjadriť takto:

$$x = \frac{a_1t_2^2}{2} + \frac{a_2t_2^2}{2} = \frac{3t_2^2}{2} \quad (1.4.9)$$

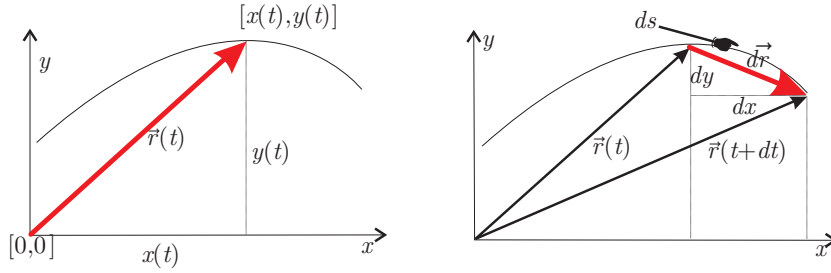
Po dosadení za $x = 600$ m zistíme, že vlak brzdil 20 s a rozbiehal sa 40 s. Najkratší čas, za ktorý prejde vlak 600 m, je minúta.

2 Kinematika v dvojrozmernom prípade

Doteraz sme sa zaoberali priamočiarym pohybom, teda pohybom v smere osi x . Teraz budeme skúmať pohyb krivočiary (pohyb v rovine), teda pohyb v smere osi x aj y . Poloha objektu ktorého pohyb skúmame je daná polohovým vektorom $\vec{r} = [x, y]$. Polohový vektor je šípka, ktorá ukazuje z bodu $[0, 0]$ na bod $[x, y]$ v rovine. Keď budeme skúmať pohyb telesa, tak budeme skúmať, ako sa mení jeho polohový vektor (poloha) v čase. Inými slovami budeme skúmať, ako sa menia jeho súradnice.

2.1 Rýchlosť a zrýchlenie v dvojrozmernom prípade

Okamžitá rýchlosť je daná zmenou polohového vektora v čase, teda zmenou (deriváciou) jeho oboch súradníc:



Obr. 2.1.1. Pohyb po krivke - obrázok vľavo predstavuje polohový vektor a obrázok vpravo predstavuje rýchlosť ako zmenu polohového vektora v čase.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + dt) - \vec{r}(t)}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \left[\frac{x(t + dt) - x(t)}{dt}, \frac{y(t + dt) - y(t)}{dt} \right] = \left[\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right] = [v_x, v_y]$$

Poznámka 5 Zmenu polohového vektora $d\vec{r}$ samozrejme uvažujeme na veľmi krátkom časovom intervale $dt \mapsto 0$, a teda má vždy smer dotyčnice ku krivke (dráhe pohybu telesa), potom aj rýchlosť $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ má rovnaký smer. Ak by tak nebolo, teleso by vybočilo z krivky.

Keďže $d\vec{r}$ je malé, dobre kopíruje dráhu. Potom vzdialenosť ds , ktorú prejde teleso za čas dt , možno vyjadriť ako veľkosť zmeny polohového vektora $|d\vec{r}| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Teda pre veľkosť okamžitej rýchlosti platí:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = |\vec{v}(t)|$$

Analogicky pre zrýchlenie platí:

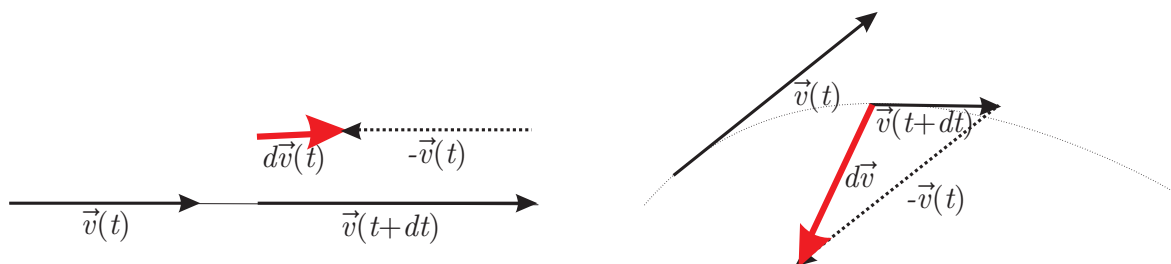
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \left[\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt} \right] = [a_x, a_y]$$

a pre veľkosť zrýchlenia

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{|d\vec{v}|}{dt} = \frac{\sqrt{dv_x^2 + dv_y^2}}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = |\vec{a}(t)|$$

Poznámka 6 Zrýchlenie $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ nemusí mať vo všeobecnosti rovnaký smer ako dotyčnica ku dráhe.

Zmena vektora rýchlosti v čase $d\vec{v} = \vec{v}(t + dt) - \vec{v}(t)$ má rovnaký smer ako dotyčnica ku dráhe iba vtedy, ak sa teleso pohybuje po priamke. (Pozri Obr. 2.1.2 vľavo.) Vtedy sa mení iba veľkosť rýchlosti (dva vektory $\vec{v}(t)$ a $\vec{v}(t + dt)$, ktoré treba na výpočet zrýchlenia odpočítať majú rovnaký smer) a teleso nezatáča. V prípade, že sa teleso pohybuje po zakrivenej dráhe, mení sa nielen veľkosť rýchlosti, ale aj smer vektora $\vec{v}(t)$ (Pozri Obr. 2.1.2 vpravo.)



Obr. 2.1.2.

Ukážka 1 Na okraj stola položíme dve guľôčky vedľa seba a obe naraz postrčíme knihou tak, aby mali rovnaké rýchlosti a súčasne začali padať zo stola. V okamihu, keď obe guľôčky opustia stôl, postavíme jednej z nich do cesty prekážku (napr. druhú knihu) tak, aby sme zabrzdili jej vodorovnú zložku pohybu. Nezabrzdená guľôčka sa bude pohybovať po krivke a zabrzdená bude padať priamo k zemi, pričom bude reprezentovať vertikálnu zložku nezabrzdenej guľôčky. Obe guľôčky budeme počuť súčasne padnúť na zem. Celý proces môžeme nafilmovať a spustiť v spomalenom zázname.

Príklad 6 Po akej krivke sa bude pohybovať nezabrzdená guľôčka?

Nezabrzdená guľôčka sa bude pohybovať v horizontálnom smere osi x konštantnou rýchlosťou v a vo vertikálnom smere osi y konštantným zrýchlením a . Potom x -ová a y -ová súradnica sa bude meniť v čase podľa

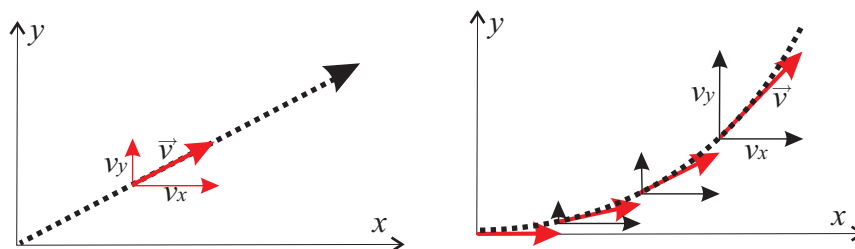
$$x = vt \quad y = h - \frac{at^2}{2}, \quad (2.1.1)$$

kde h je výška stola. Ak dosadíme jednu rovnicu do druhej tak, že eliminujeme čas t , dostaneme rovnicu paraboly $y = h - \frac{a}{2v^2}x^2$ s vrcholom na okraji stola, odkiaľ guľôčka začala padať.

Ukážka 2 Parabolu dostaneme, ak rozbehneme guľôčku po naklonenom stole vodorovným smerom.

Príklad 7 Potrebujeme sa čo najrýchlejšie preplaviť od brehu do stredu Dunaja. Rýchlosť loďky vzhľadom na vodu je 10 m.s^{-1} . Vypočítame maximálnu rýchlosť loďky vzhľadom na breh (Dunaj je široký 100 m). Určíte polohu veslára vzhľadom na breh.

1. Predpokladáme, že rýchlosť Dunaja je 5 m.s^{-1} a je všade rovnaká.
2. Predpokladáme, že rýchlosť Dunaja je v strede 10 m.s^{-1} pri kraji 0 m.s^{-1} a lineárne sa mení.



Obr. 2.1.3.

Pohyb loďky budeme sledovať z brehu, teda vzťažnú sústavu spojenú s brehom budeme reprezentovať súradnicovým systémom nakresleným na obrázku 2.1.3. Štartovať budeme z bodu $[0, 0]$. K tomu, aby sa veslár čo najrýchlejšie preplavil do stredu, musí plávať tak, aby bola x -ová zložka pohybu maximálna, teda $v_x = 10 \text{ m.s}^{-1}$. Y -ovú zložku pohybu bude tvoriť prúd rieky. V prvom prípade je veslár unášaný prúdom s konštantnou rýchlosťou $v_y = 5 \text{ m.s}^{-1}$. Jeho výsledná rýchlosť je vektor.

$$\vec{v} = [v_x, v_y] = [10, 5] \text{ m.s}^{-1} \quad (2.1.2)$$

Veľkosť rýchlosti je veľkosť tohoto vektora:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \approx 11,2 \text{ m.s}^{-1} \quad (2.1.3)$$

Veľkosť rýchlosti v_x je nezávislá od rýchlosti prúdu v_y . Veslár pláva do stredu rieky rýchlosťou v_x v smere x , čím sa jeho x -ová súradnica sa mení s časom: $x = v_x t$. Súčasne je unášaný prúdom rýchlosťou v_y v smere y a jeho y -ová súradnica sa mení s časom: $y = v_y t$. Polohu veslára teda určuje polohový vektor:

$$\vec{r}(t) = [x, y] = [v_x t, v_y t] \quad (2.1.4)$$

V druhom prípade sa zase veslár pohybuje vzhľadom na vodu rýchlosťou $v_x = 10 \text{ m.s}^{-1}$. Súčasne je unášaný prúdom rýchlosťou, ktorá sa rovnomerne rastie od brehu po stred z $v_y = 0 \text{ m.s}^{-1}$ na $v_y = 10 \text{ m.s}^{-1}$. Najskôr musíme určiť ako sa mení rýchlosť v_y v čase. Čas za ktorý sa veslár prepraví do stredu, je $t = \frac{0.5x}{v_x} = \frac{50 \text{ m}}{10 \text{ m.s}^{-1}} = 5 \text{ s}$. Počas prvých piatich sekúnd bude rýchlosť rovnomerne narastať so zrýchlením $a_y = \frac{v_y}{t} = 10/5 = 2 \text{ m.s}^{-2}$. Jeho výsledná maximálna rýchlosť je:

$$\vec{v} = [v_x, v_y] = [10, a_y t] = [10, 10] \text{ m.s}^{-1} \quad (2.1.5)$$

Veľkosť maximálnej rýchlosti je:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \approx 10\sqrt{2} \text{ m.s}^{-1} \quad (2.1.6)$$

Za čas t sa veslár vzdáľuje od brehu rýchlosťou v_x teda jeho x -ová súradnica sa mení s časom: $x = v_x t$. Prúd ho súčasne odnáša popri brehu s rýchlosťou v_y a teda jeho y -ová súradnica sa mení s časom: $y = \frac{1}{2} a_y t^2$. Poznáme ako sa menia obe súradnice, teda jeho poloha je daná polohovým vektorom:

$$\vec{r}(t) = [x, y] = [v_x t, \frac{1}{2} a_y t^2] \quad (2.1.7)$$

2.2 Vzdialenosť a dráha v dvojrozmernom prípade

Predpokladajme, že poznáme závislosť rýchlosti telesa $\vec{v}(t) = [v_x, v_y]$ od času. Polohu telesa $\vec{r}(t)$ v čase t určíme tak, že ku počiatočnej polohe $\vec{r}_0 = \vec{r}(0)$, teda polohe, kde

sa teleso nachádzalo v čase $t = 0$, pripočítame vektor posunutia $\vec{d}$ (displacement – zmenu polohy telesa v čase t , pozri Obr. 2.2.1). Zmenu polohy $\vec{d}$ určíme ako časový integrál vektora rýchlosti $\vec{v}(t)$, teda jeho zložiek $[v_x, v_y]$:

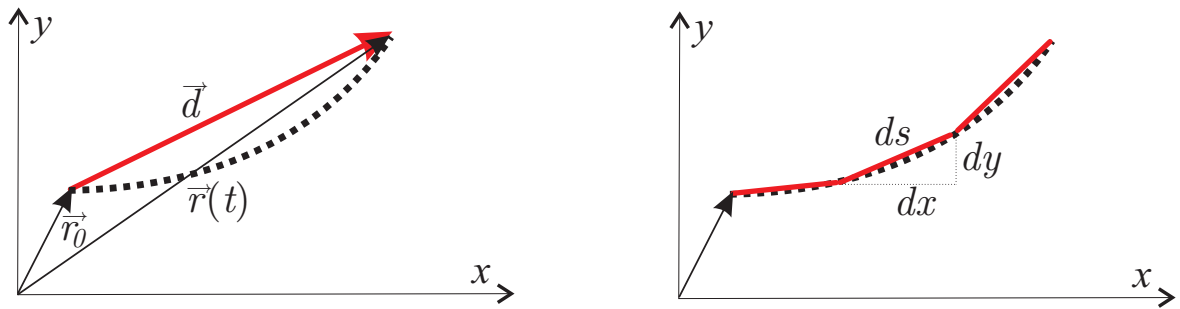
$$\vec{r}(t) = [x, y] = \vec{r}_0 + \vec{d} = [x_0, y_0] + [d_x, d_y] = [x_0, y_0] + \int_0^t [v_x, v_y] dt$$

Poznámka 7 V predchádzajúcom príklade sme určili polohu veslára $\vec{r}(t) = [x, y] = [v_x t, v_y t]$ pre prípad, že rýchlosť Dunaja je všade rovnaká a polohu $\vec{r}(t) = [x, y] = [v_x t, \frac{1}{2} a_y t^2]$ pre prípad, že rýchlosť Dunaja sa od kraja po stred rieky lineárne mení.

Vzdialenosť d , ktorú teleso prešlo v priebehu času t , je veľkosť posunutia a je to najkratšia možná dráha, ako sa dostať z polohy $\vec{r}_0$ do polohy $\vec{r}(t)$.

$$d = |\vec{d}(t)| = \sqrt{d_x^2 + d_y^2}$$

Teleso však mohlo zmeniť svoju polohu aj iným spôsobom. Nemuselo nutne ísť naj-



Obr. 2.2.1.

kratšou dráhou. Ak poznáme závislosť rýchlosti telesa $\vec{v}(t)$ od času, môžeme určiť aj celkovú dráhu, ktorú prešlo, ako súčet malých dĺžok $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ pozdĺž krivky. Teda pre celkovú dráhu platí:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^t ds = \int_0^t \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^t \sqrt{v_x^2 + v_y^2} dt = \int_0^t |\vec{v}(t)| dt \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

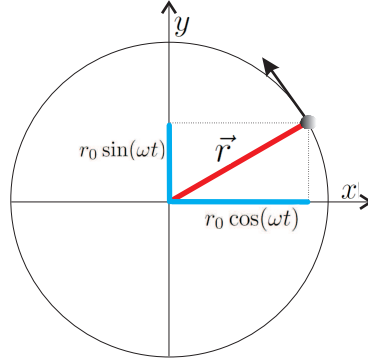
Dostali sme veľkosť dráhy, ako dráhový integrál.

Poznámka 8

- **Priemernú rýchlosť** určíme ako celkovú zmenu polohy (posunutie) telesa za daný časový interval.
- **Priemernú veľkosť rýchlosti** určíme ako celkovú dráhu, ktorú prešlo teleso za daný časový interval.

2.3 Pohyb po kružnici

Na popísanie pohybu po kružnici je rozumné vyjadriť polohový vektor pomocou dĺžky r_0 a uhla φ od osi x . Predstavme si teleso zavesené na špagáte dlhom r_0 , ktoré sa točí okolo pevného bodu. Uhol je daný ako podiel dĺžky oblúka l a polomeru r_0 , teda $\varphi = \frac{l}{r_0}$ [rad]. Pri rovnomernom pohybe po kružnici uhol lineárne rastie s časom: $\varphi = \omega t$,



Obr. 2.3.1.

kde ω je uhlová rýchlosť. Poloha telesa na kružnici je daná polohovým vektorom takto:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0 \cos(\varphi) \\ r_0 \sin(\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0 \cos(\omega t) \\ r_0 \sin(\omega t) \end{bmatrix} \quad (2.3.1)$$

Ak chceme získať rýchlosť v ľubovoľnom čase, musíme vzťah (2.3.1) zderivovať podľa času:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_0 \omega \sin(\omega t) \\ r_0 \omega \cos(\omega t) \end{bmatrix} \quad (2.3.2)$$

Dostali sme zložky vektora rýchlosti. Teraz vypočítame veľkosť rýchlosti ako absolútnu hodnotu vektora rýchlosti:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = r_0 \omega \sqrt{(-\sin(\omega t))^2 + \cos^2(\omega t)} = r_0 \omega \quad (2.3.3)$$

Pretože $|\vec{v}|$ nezávisí od času, veľkosť rýchlosti sa nemení. Mení sa iba smer pohybu. Zrýchlenie vypočítame ako deriváciu vektora rýchlosti podľa času:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_0 \omega^2 \cos(\omega t) \\ -r_0 \omega^2 \sin(\omega t) \end{bmatrix} \quad (2.3.4)$$

Zo vzorca (2.3.4) vidno, že zrýchlenie má opačný smer ako polohový vektor, teda smeruje do stredu kružnice, preto ho voláme dostredivé. Pre veľkosť dostredivého zrýchlenia platí:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r_0 \omega^2 \sqrt{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)} = r_0 \omega^2 \quad (2.3.5)$$

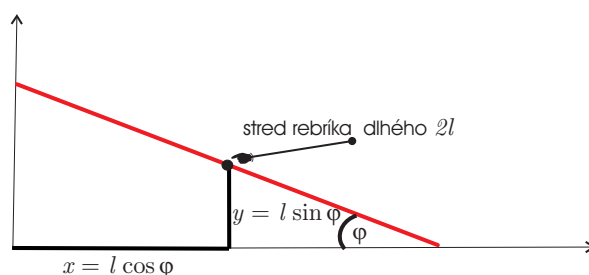
Ďalej budeme uvažovať, že **veľkosť rýchlosti sa s časom mení**. Potom uhlová rýchlosť je funkciou času a jej deriváciou dostaneme uhlové zrýchlenie:

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{r_0} \frac{dv}{dt} = \frac{a_t}{r_0} \quad (2.3.6)$$

Zrýchlenie a_t vyjadruje, ako veľmi sa mení veľkosť rýchlosti v pozdĺž kružnice a má tangenciálny smer. Preto sa nazýva tangenciálne.

***Príklad 4** Rebríkom pohybujeme takým spôsobom, že jeden jeho koniec sa stále opiera o stenu a druhý o podlahu.

1. Po akej dráhe sa pohybuje stred rebríka?
2. Akými rýchlosťami sa musia pohybovať jeho konce, aby veľkosť rýchlosti stredu rebríka bola konštantná?



Obr. 2.3.2.

Z podobnosti trojuholníkov na obrázku vyplýva, že súradnice stredu rebríka sú:

$$x = l \cos \varphi \quad y = l \sin \varphi \quad (2.3.7)$$

To znamená, že stred rebríka sa nachádza na kružnici s polomerom l . Aby sa stred rebríka pohyboval rovnomernou rýchlosťou, musí byť uhol φ lineárne závislý od času, teda $\varphi = \omega t$. Poloha ľavého konca rebríka, ktorý sa pohybuje po osi y sa bude meniť s časom ako $y = 2l \sin(\omega t)$ a analogicky poloha pravého konca rebríka sa bude meniť ako $x = 2l \cos(\omega t)$. Rýchlosti oboch koncov dostaneme ako časové derivácie polôh oboch koncov

$$v_x = -2l\omega \sin \omega t \quad v_y = 2l\omega \cos \omega t \quad (2.3.8)$$

Príklad 8 Určite veľkosť obvodovej rýchlosti Zeme na rovníku.

***Príklad 5** Na koleso od bicykla sa nalepila žuvačka. Určite a nakreslite, ako sa žuvačka pohybuje vzhľadom na povrch Zeme. Zistite, ako sa mení rýchlosť žuvačky v čase. (Overte pokusom s kolesom.)

Poloha žuvačky vzhľadom na stred kolesa v čase $t = 0$, teda vtedy, keď sa žuvačka nalepila, je daná polohovým vektorom:

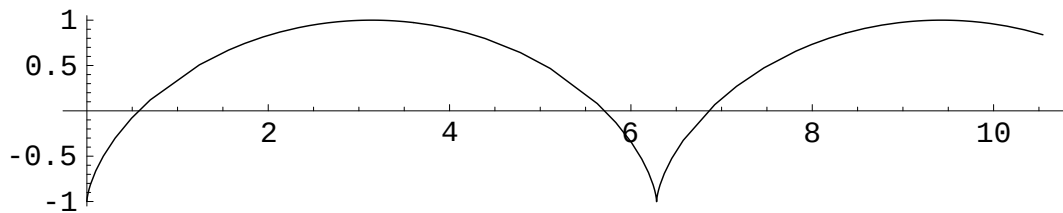
$$\vec{r}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos(\frac{3\pi}{2}) \\ r \sin(\frac{3\pi}{2}) \end{bmatrix}, \quad (2.3.9)$$

kde r je polomer kolesa. Keďže sa stred kolesa pohybuje v smere osi x rýchlosťou v , a teda koleso sa otáča uhlovou rýchlosťou $\omega = \frac{v}{r}$, tak poloha žuvačky v čase t bude daná polohovým vektorom:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} vt + r \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{v}{r}t\right) \\ r \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{v}{r}t\right) \end{bmatrix} \quad (2.3.10)$$

`In[20] :=`

```
v = 1; r = 1; x = v t + r Cos[ $\frac{3 \pi}{2} - \frac{v}{r} t$ ]; y = r Sin[ $\frac{3 \pi}{2} - \frac{v}{r} t$ ];  
ParametricPlot[{x, y}, {t, 0, 10}, AspectRatio -> Automatic];
```



Obr. 2.3.3.

(znamienko mínus je preto, lebo ak je rýchlosť kladná, bicykel sa pohybuje zľava doprava, a teda koleso sa musí točiť v smere hodinových ručičiek) a pre rýchlosť žuvačky platí:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v + v \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{v}{r}t\right) \\ -v \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{v}{r}t\right) \end{bmatrix} \quad (2.3.11)$$

Dostali sme zložky vektora rýchlosti. Teraz vypočítame veľkosť rýchlosti ako absolútnu hodnotu vektora rýchlosti:

$$\begin{aligned} |\vec{v}| &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(v + v \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{v}{r}t\right)\right)^2 + (-v)^2 \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{v}{r}t\right)} \\ &= v \sqrt{2 + 2 \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{v}{r}t\right)} \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

2.4 Simulácie v systéme MATHEMATICA

Obr. 2.4.1. Vodorovný vrh

```
v = 2; a = 2; h = 1; Do[ plocha = ParametricPlot [{u, 0.5}, {u, 0, 2}]; gulka[t] =  
Graphics[{PointSize[0.01], Point[{v * t, h - 0.5 * a * t * t}]}];, {t, 0, 1, 0.01}]  
Do[ b[t] = Show[{plocha, gulka[t]}, ImageSize -> {1000, 1000}];, {t, 0, 1, 0.01}]  
Manipulate[b[t], {t, 0, 1, 0.01}]
```

Obr. 2.4.2. Pohyb po kružnici

```
Do[dd = ParametricPlot [{Cos[u], Sin[u]}, {u, 0, 2 Pi}];  
b[t] = Graphics[{PointSize[0.025], Point[{Cos[2 t], Sin[2 t]}]}];  
, {t, 0, 10, 0.01}] Do[db[t] = Show[{dd, b[t]}, ImageSize -> {500, 500}];,  
{t, 0, 10, 0.01}] Manipulate[db[t], {t, 0, 10, 0.01}]
```

Obr. 2.4.3. Špirála

```
Do[dd = ParametricPlot [{Cos[u], Sin[u]}, {u, 0, 2 Pi}];  
b[t] = Graphics[{PointSize[0.025], Point[{0.1 t Cos[2 t], 0.1 t Sin[2 t]}]}];  
, {t, 0, 10, 0.01}]  
Do[db[t] = Show[{dd, b[t]}, ImageSize -> {500, 500}];, {t, 0, 10, 0.01}]  
Manipulate[db[t], {t, 0, 10, 0.01}]
```

3 Newtonove pohybové zákony

Dynamika je matematický opis pohybu, ktorý zahrňuje jeho príčinu. Príčinou pohybu, alebo presnejšie zmeny pohybového stavu, je pôsobenie sily. **Silu** označujeme písmenom $\vec{f}$ od slova force. Sila je vektorová veličina, teda má svoj smer a veľkosť. Veľkosť sily je mierou toho, ako na seba navzájom pôsobia rôzne objekty. Jednotka sily je Newton - $N = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$. O tom, ako súvisí pohyb s pôsobením síl, hovoria **Newtonove pohybové zákony**:

1. Zákon zotrvačnosti,
2. Zákon sily,
3. Zákon akcie a reakcie.

Newtonove pohybové zákony budeme podrobne rozoberať v nasledujúcich sekciách.

3.1 Zákon zotrvačnosti

Pokiaľ výsledná sila pôsobiaca na objekt je nulová, tak sa jeho pohybový stav nemení. (Objekt zostáva v pokoji, alebo v rovnomernom priamočiariom pohybe.)

Ukážka 3 *Na stôl položíme teleso a postrčíme. Teleso sa bude pohybovať až kým nezastaví.*

Pokiaľ teleso stojí, všetky sily, ktoré na neho pôsobia, sú v rovnováhe, t. j. výsledná sila (tiažová + reakcia podložky) je nulová a zákon zotrvačnosti je splnený. Pokiaľ sa teleso šmýka, pôsobí na neho odpor vzduchu a sila trenia, ktorá mení jeho pohybový stav až kým nezastaví. V ideálnom prípade bez odporu vzduchu a trenia by sa šmýkalo teleso do nekonečna. Situácia bez odporu vzduchu a bez trenia môže nastať napríklad v pohybujúcom sa aute rovnomernou rýchlosťou. Teleso, napr. guľôčka, je na podlahe. Odpor vzduchu eliminuje karoséria a trenie je nulové, lebo vzhľadom na podlahu teleso stojí. Výsledná sila, ktorá pôsobí na guľku v aute, je nulová a guľka zotrváva v rovnomernom pohybe. Guľka nemení svoj pohybový stav, a teda zákon zotrvačnosti je splnený. Keby bola guľka napr. vo vesmíre v beztiažovom stave a bez odporu prostredia, nepôsobila by na ňu žiadna sila, a teda by nemenila svoj pohybový stav.

Poznámka 9 *Bez existencie trecích síl by sa automobil rozbehnúť nemohol.*

3.2 Hybnosť a hmotnosť

Pohybový stav telesa v dynamike vyjadruje vektorová veličina (má svoj smer aj veľkosť), ktorá sa nazýva **hybnosť**. Označujeme ju písmenom $\vec{p}$ a je daná súčinom hmotnosti m (hmotnosť je skalár, lebo nemá smer iba veľkosť) a rýchlosti $\vec{v}$ telesa:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (3.2.1)$$

Pohybový stav telesa neurčuje iba jeho rýchlosť, ale aj schopnosť si svoju rýchlosť udržať, čiže hmotnosť. Hmotnosť možno nazvať aj **zotrvačnosťou**, lebo vyjadruje schopnosť telesa zotrvať v svojom pohybovom stave. Jednotka hmotnosti je kilogram

– kg. **Hmotnosť** je teda miera toho, ako ťažko teleso rozbehneme, alebo zabrzdíme, čiže akou veľkou silou musíme na teleso pôsobiť, aby sme zmenili jeho rýchlosť. To, ako vplýva pôsobenie sily na zmenu hybnosti (pohybového stavu) telesa, je obsahom druhého Newtonovho zákona, zákonu sily.

3.3 Zákon sily

Sila, ktorá pôsobí na objekt, je rovná časovej zmene jeho hybnosti:

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (3.3.1)$$

V prípade, ak hmotnosť objektu je počas pôsobenia sily konštantná, môžeme vzťah (3.3.1) upraviť nasledovne:

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \quad (3.3.2)$$

To znamená, že sila pôsobiaca na objekt, je rovná súčinu jeho hmotnosti a zrýchlenia.

Ukážka 4

1. *Plechový vozík rozbiehame pomocou natiahnutej gumy. Najprv vozík samotný, potom pri rovnakom natiahnutí gumy rozbiehame dva vozíky, druhý položíme na prvý. V druhom prípade bude zrýchlenie menšie.*
2. *Plechový vozík rozbiehame pomocou natiahnutej gumy podobne ako v predchádzajúcom pokuse. Potom pri rovnakom natiahnutí dvoch gúm rozbiehame ten istý vozík. V druhom prípade bude zrýchlenie väčšie.*

Prvá ukážka demonštruje, že zrýchlenie telesa je priamo úmerné sile, ktorá na teleso pôsobí. Druhá ukážka demonštruje, že hmotnosť vystupuje ako konštanta úmernosti medzi zrýchlením telesa a silou, ktorá na teleso pôsobí.

Hybnosť telesa môžeme meniť aj iným spôsobom.

Ukážka 5 *Z hadice, napríklad napojenej k umývadlu, necháme vodorovne vytekať konštantnou rýchlosťou vodu, ktorej do cesty postavíme prekážku. Voda, ktorá dopadá na prekážku mení, (konkrétne stráca) svoju hybnosť, a preto na ňu pôsobí silou*

$$f = \frac{dp}{dt} = v \frac{dm}{dt} = v \frac{M}{T}, \quad (3.3.3)$$

kde M je hmotnosť vytečenej vody za čas T .

Poznámka 10 *Ak chceme overiť experiment, tak použijeme ako prekážku kuchynskú váhu, kde môžeme zmerať veľkosť sily f . Veličinu prietok $\frac{dm}{dt}$, teda koľko vody vytečie hadicou za jednotku času, určíme tak, že zmeriame čas, za koľko sa naplní litrová fľaša 1 (kg). Rýchlosť vody v zistíme tak, že objemový prietok vydelíme prierezom hadice.*

Vo všeobecnosti sa môže v priebehu pôsobenia sily meniť hmotnosť aj rýchlosť telesa súčasne. Napríklad roztláčame deravý vozík naplnený pieskom. Ak pôsobíme na vozík konštantnou silou, zrýchlenie vozíka bude postupne narastať, pretože piesok sa cez dieru sype von a hmotnosť vozíka ubúda.

3.4 Impulz sily

Časový účinok sily na teleso je impulz sily

Ukážka 6

- Na hrdlo fľaše upevníme niť. Fľašu položíme na roh stola a pomaly ju ťaháme za niť. Fľaša sa preklápa. Keď trhneme prudko, fľaša sa nepreklopí a niť sa pretrhne.
- Impulz sily pomocou rovnoramenných váh: ak na misku rovnoramennej váhy položíme pingpongovú loptičku, misky sa začnú pohybovať. Ak loptičku hodíme a ona sa odrazí, misky sa nepohnú.

Ak ťaháme pomaly, udeľujeme telesu len malé zrýchlenie. V tomto prípade pôsobíme malou silou na to, aby sa niť pretrhla. Pôsobíme ale dlho a teleso sa pomaly rozbíha. Ak trhneme pôsobíme veľkou silou a udeľujeme telesu veľké zrýchlenie, ale len krátku chvíľu. Sila je tak veľká, že sa niť pretrhne skôr ako sa teleso stihne rozbehnúť. Účinok sily na teleso (impulz sily), ktorý vyvolá zmenu pohybového stavu teda závisí nielen od veľkosti pôsobiacej sily, ale aj od toho ako dlho sila pôsobí.

Príklad 9 Za aký čas odtlačíme 800 tonovú riečnu loď 10 centimetrov od pontónu, ak budeme tlačiť silou 400 N? Akú bude mať loď rýchlosť?

Zo zákona sily platí, že loď sa bude pohybovať s konštantným zrýchlením

$$a = \frac{f}{m} = \frac{400 \text{ N}}{800000 \text{ kg}} = 0,0005 \text{ m.s}^{-2} \quad (3.4.1)$$

teda dráhu $s = 10$ centimetrov prejde za

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,1 \text{ m}}{0,0005 \text{ m.s}^{-2}}} = 20 \text{ s} \quad (3.4.2)$$

za tento čas nadobudne loď rýchlosť $v = at = 0,01 \text{ m.s}^{-1}$, čo je veľmi malá rýchlosť, pri ktorej je odpor vody zanedbateľný. Pôsobíme síce malou silou ale dostatočne dlho, aby sme zmenili pohybový stav lode a loď nadobudla hybnosť $p = mv = 0,01 \cdot 800000 = 8000 \text{ kg.m.s}^{-1}$. Teda časový účinok (impulz) sily je rovný nadobudnutej hybnosti:

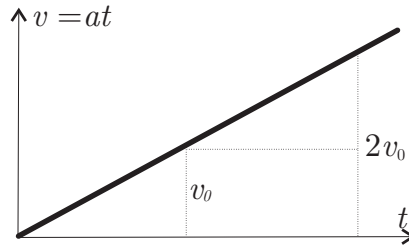
$$ft = mat = mv \quad (3.4.3)$$

Poznámka 11 Pre predstavu hybnosť lode je rovnaká hybnosť auta o hmotnosti $m = 1 \text{ t}$, ktoré sa pohybuje rýchlosťou $v = 8 \text{ m.s}^{-1} \approx 30 \text{ km.h}^{-1}$.

Sila, ktorou pôsobíme na teleso, nemusí byť konštantná. Preto impulz sily možno všeobecne vyjadriť ako časový integrál zo sily:

$$\int_{t_0}^t f dt = \int_{t_0}^t madt = \int_{t_0}^t m \frac{dv}{dt} dt = mv(t) - mv(t_0) \quad (3.4.4)$$

Pravá strana rovnice vyjadruje zmenu hybnosti, teda zmenu pohybového stavu telesa. Ľavá strana rovnice je časový účinok sily na teleso (impulz) a vyjadruje, ako sa menila hybnosť (pohybový stav telesa) v priebehu času.



Obr. 3.4.1.

Príklad 10 Konštantná sila f pôsobí na teleso s hmotnosťou m . Za aký čas sa zdvojnásobí jeho rýchlosť?

Teleso zmení rýchlosť o $\Delta v = 2v_0 - v_0 = v_0$, a tým aj svoj pohybový stav o $\Delta p = 2p_0 - p_0 = p_0 = mv_0$ ako dôsledok pôsobenia konštantnej sily f po dobu Δt . Sila f teda udelila telesu impulz $f\Delta t = mv_0$. Čas, potrebný na zdvojnásobenie rýchlosti, je

$$\Delta t = \frac{mv_0}{f}. \quad (3.4.5)$$

V takomto prípade sa teleso pohybuje so zrýchlením $a = f/m = v_0/\Delta t$.

Ukážka 7 *Kde sa niť pretrhne?* Zavesíme hranol na niť napríklad na tabuľu, zospodu visí viac rovnakých nití, napríklad 3. Ak spodnými prudko trháme, pretrhnú sa. Ak začneme opatrne ťahať, pretrhne sa horná niť.

”Pri prudkom trhnutí pôsobíme na teleso veľmi krátky čas. Telesu preto udelíme veľmi malý impulz sily a dané teleso nestihne vďaka svojej hmotnosti (zotrvačnosti) zareagovať.”

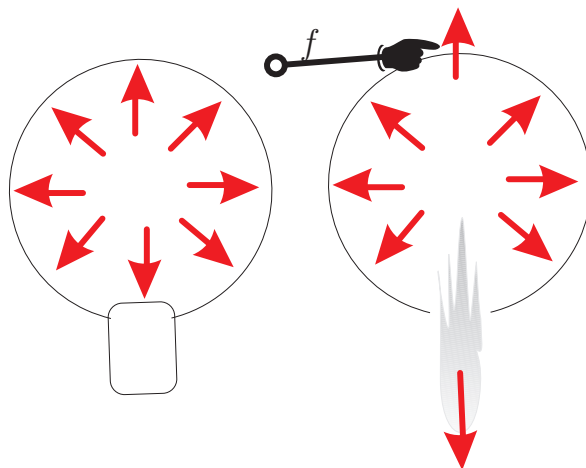
3.5 Zákon akcie a reakcie

Ku každej sile (akcii) existuje rovnako veľká sila (reakcia), ktorá pôsobí v opačnom smere. Na demonštráciu tohoto zákona uvedieme niekoľko príkladov:

- Pri strieľaní z pušky akcia rozbieha náboj a reakcia pušku. Ak náboj narazí napr. do vozíka, tak akcia rozbieha vozík a reakcia brzdí náboj.
- Pri sprchovaní akcia vytláča vodu zo sprchy a reakcia tlačí sprchu opačným smerom.
- Dvaja študenti napínajú špagát. Ak jeden ťahá silou 100 N za jeden koniec, tak druhý rovnako veľkou silou, ale opačného smeru. Aj keď má špagát nosnosť iba 150 N nepretrhne sa.

Ukážka 8 *Princíp raketového motora.*

- **Raketa:** Fľašu naplníme do 1/3 vodou a uzavrieme korkovým štupeľom, ktorý je prepichnutý ihlou na nafúkanie lopty. Pomocou bicyklovej pumpy fúkame vzduch do fľaše, kým štupeľ nevystrelí. Pozor na bezpečnosť, raketa môže zraniť je schopná vyletieť aj viac ako 100 m.
- **Balón:** Balón nafúkneme a pustíme.



Obr. 3.5.1. f je výsledná hnacia sila, ktorá je na ľavom obrázku kompenzovaná silou pôsobiace na štupeľ. Na pravom obrázku už kompenzačná sila nepôsobí na štupeľ, ale rozbíha vzduch v opačnom smere, ako sila f rozbíha balón.

V uzavrenom balóne pôsobí vzduch na jeho steny tlakom tak, že výsledná sila je nulová a balón sa sám od seba nehýbe. Keď vznikne v balóne otvor, tak tam, kde bol pôvodne štupeľ, tlak už nepôsobí (tam fučí vzduch z balóna von), a teda sila, ktorá pôvodne pôsobila na štupeľ, ktorý bol súčasťou balónu už naňho nepôsobí, ale rozbíha vzduch. Preto sila, ktorá pôsobí na balón v opačnom smere, je väčšia a rozbíha balón. Akcia rozbíha balón a reakcia zasa vzduch v opačnom smere. Raketa je poháňaná podobne. Palivo, ktoré je jej súčasťou, postupne vybuchuje a vybuchnuté splodiny pôsobia tlakom na spodok rakety, čo ju rozbíha. V pokuse s fľašou je situácia analogická, akurát z fľaše uniká voda.

Príklad 11 *Prečo dosiahne fľaša väčšiu rýchlosť, keď je v nej voda, ako keby tam bol iba vzduch?*

Dôvod je taký, že voda je ťažšia ako vzduch a tlakovej sile vo fľaši dlhšie trvá, kým dostane vodu z fľaše. Akcia udelí väčší impulz vode ako vzduchu, a preto reakcia môže dlhšie urýchľovať fľašu. Ďalšiu odpoveď nájdeme v zákone zachovania hybnosti, ktorý možno považovať za jeden z dôsledkov Newtonových zákonov.

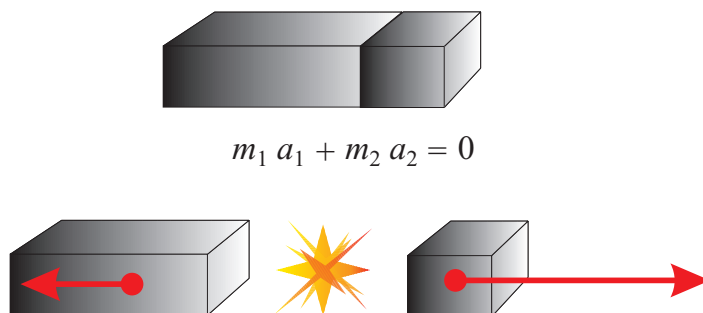
3.6 Zachovanie hybnosti

Medzi dvomi telesami s hmotnosťami m_1 a m_2 je výbušná nálož. Ak nálož vybuchne, na obe telesá začne pôsobiť rovnaká sila, ale opačného smeru (*zákon akcie reakcie*), a obe telesá sa začnú rozbíhať v dôsledku pôsobenia týchto síl so zrýchleniami

$$a_1 = \frac{f}{m_1} \quad a_2 = -\frac{f}{m_2} \quad (3.6.1)$$

Najskôr budeme predpokladať, že sily f a $-f$ budú konštantné a budú rozbíhať telesá po dobu Δt . Na konci ich pôsobenia nadobudnú telesá rýchlosti

$$v_1 = a_1 \Delta t = \frac{f}{m_1} \Delta t \quad v_2 = a_2 \Delta t = -\frac{f}{m_2} \Delta t \quad (3.6.2)$$



Obr. 3.6.1.

Ak obe rovnice vynásobíme hmotnosťami dostaneme ich hybnosti:

$$v_1 m_1 = f \Delta t \quad v_2 m_2 = -f \Delta t \quad (3.6.3)$$

Ak rovnice (3.6.3) sčítame, dostaneme

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0 \quad (3.6.4)$$

Rovnica (3.6.4) predstavuje zákon zachovania hybnosti.

Zákon zachovania hybnosti hovorí, že *celková hybnosť izolovanej sústavy sa nemení*: pred výbuchom bola celková hybnosť sústavy nulová, lebo telesá sa nepohybovali. Po výbuchu je tiež celková hybnosť nulová aj keď sa telesá pohybujú, pretože súčet ich hybností je nula.

V skutočnosti sa sila v priebehu výbuchu menila a výsledné hybnosti dostaneme takto:

$$m_1 v_1 = \int f dt \quad m_2 v_2 = \int -f dt \quad (3.6.5)$$

Po sčítaní rovníc dostaneme opäť zákon zachovania hybnosti (3.6.4).

Teraz si predstavme, že výbuch prebehol v lietadle alebo vo vlaku. Cestujúci vo vlaku, ktorý sa pohybuje rovnomernou rýchlosťou, budú pozorovať výbuch rovnako, ako keby vlak stál, lebo vzhľadom na nich sa telesá pred výbuchom nepohybovali, teda mali nulovú hybnosť. My, čo sedíme na stanici, budeme vidieť, že obe telesá sa budú spolu s vlakom pohybovať rýchlosťou v , a teda sústava telies bude mať pred výbuchom hybnosť $p = (m_1 + m_2)v$. Aby sme zistili, akú hybnosť budú mať telesá po výbuchu vo vlaku, musíme zistiť rýchlosti oboch telies po výbuchu rovnakou úvahou ako v predchádzajúcom prípade, akurát namiesto nulovej počiatočnej rýchlosti zahrnieme do výpočtu rýchlosť vlaku:

$$\begin{aligned} v_1 &= v + a_1 \Delta t = v + \frac{1}{m_1} \int f dt \\ v_2 &= v + a_2 \Delta t = v - \frac{1}{m_2} \int f dt \end{aligned} \quad (3.6.6)$$

ak eliminujeme z rovníc $\int f dt$ dostaneme

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v \quad (3.6.7)$$

čo znamená, že hybnosť po výbuchu sa nezmenila. Hybnosť po výbuchu sa rovná hybnosti pred výbuchom.

Príklad 12 Akou rýchlosťou sa dá do pohybu strelec s puškou stojací na ľade? Strelec s puškou váži $M = 70$ kg, strela $m = 10$ g a rýchlosť strely je $v = 700$ m.s⁻¹.

Zo zákona zachovania hybnosti (3.6.4) dostaneme pre rýchlosť strelca

$$V = \frac{mv}{M} = \frac{700 \cdot 0,01}{70} = 0,1 \text{ m.s}^{-1} \quad (3.6.8)$$

Pokus 3 Meranie rýchlosti diabolky: na vodorovnú lavicu umiestnime vozíček, na ktorý pripevníme valček z plastelíny. Určíme hmotnosti diabolky a vozíka s plastelínou. Do plastelíny strelíme diabolku zo vzduchovky. Vozíček sa pohne vďaka malému odporu takmer rovnomerným pohybom. Z dráhy a času určíme rýchlosť vozíka. Pomocou zákona zachovania hybnosti určíme rýchlosť diabolky, ktorú mala pred vniknutím do plastelíny (môžeme strieľať aj z praku).

Ak rýchlosť vozíka s hmotnosťou m_v s nábojom s hmotnosťou m_d po zrážke je v , tak pre rýchlosť diabolky pred zrážkou platí:

$$v_d = \frac{(m_v + m_d)v}{m_d} \quad (3.6.9)$$

3.7 Nepružná a pružná zrážka

Budeme uvažovať dve telesá s hmotnosťami m_1 a m_2 , ktoré letia oproti sebe rýchlosťami v_1 a v_2 . Čo sa stane, ak narazia? Na obe telesá začnú pôsobiť rovnaké sily, ale opačného smeru, ktoré vzniknú dôsledkom ich deformácie a budú ich brzdiť, až kým sa prestanú deformovať, a teda vzájomne približovať. V tomto okamihu sa budú pohybovať výslednou rýchlosťou

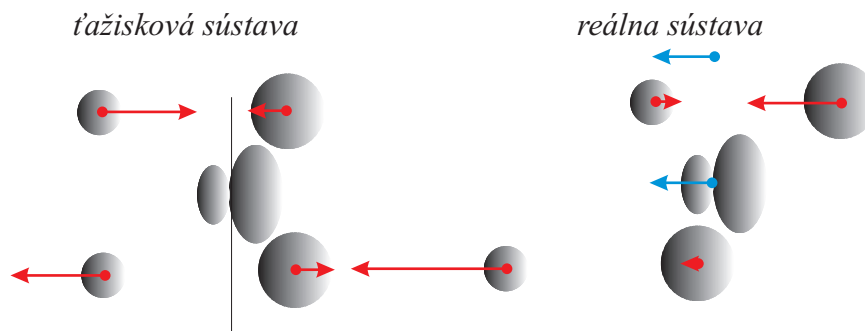
$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (3.7.1)$$

ktorú dostaneme zo zákona zachovania hybnosti. Ak po zrážke zostanú telesá spojené, hovoríme, že ide o **nepružnú zrážku**. Ak sa od tohto okamihu telesá vracajú do pôvodnej podoby práve obráteným spôsobom, ide o **pružnú zrážku**.

Aby sme zistili, aké rýchlosti budú mať telesá po zrážke, je rozumné spýtať sa, ako vyzerá zrážka v sústave, ktorá sa pohybuje rýchlosťou v , ktorá je daná vzťahom (3.7.1), teda rýchlosťou akou sa pohybujú telesá v okamihu ich maximálnej deformácie, keď sa vzájomne nepribližujú ani nevzdďaľujú (v takejto sústave je celková hybnosť nulová). V pohybujúcej sa sústave vidíme, že sa telesá k sebe približujú rýchlosťami:

$$\begin{aligned} v_{1s} &= v_1 - v \\ v_{2s} &= v_2 - v \end{aligned} \quad (3.7.2)$$

Pri zrážke v sústave telesá zastanú, a potom sa rozbehnú rovnakými rýchlosťami ako mali pred zrážkou, akurát opačnými smermi, čo má za následok zmenu znamienok:



Obr. 3.7.1. V ťažiskovej sústave je celková hybnosť nulová

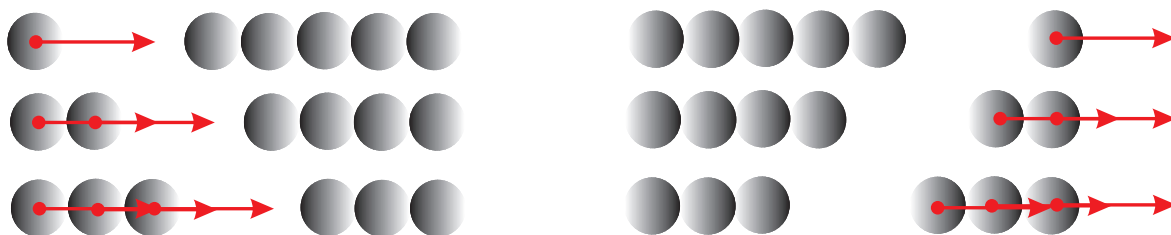
$$\begin{aligned} v'_{1s} &= -v_{1s} = -v_1 + v \\ v'_{2s} &= -v_{1s} = -v_2 + v \end{aligned} \quad (3.7.3)$$

Teraz sa pozrieme, ako vyzerajú rýchlosti po zrážke namerané zo zeme. Musíme k rýchlostiam nameraným v pohybujúcej sústave zasa pripočítať rýchlosť sústavy:

$$\begin{aligned} v'_1 &= v'_{1s} + v = -v_1 + 2v \\ v'_2 &= v'_{2s} + v = -v_2 + 2v \end{aligned} \quad (3.7.4)$$

Ukážka 9 Do radu za sebou na rovnú koľajnici postavíme pružné, rovnaké guľky tak, aby sa dotýkali.

- Ak do nich narazí jedna guľka z jednej strany, tak sa zastaví. Všetky ostatné guľky ostanú tiež stáť, okrem poslednej, ktorá sa dá do pohybu rovnakou rýchlosťou, akú mala prvá guľka pred tým ako narazila.
- Ak do nich narazí n guľiek z jednej strany, tak sa zastavia. Všetky ostatné guľky ostanú tiež stáť, okrem posledných n , ktoré sa dajú do pohybu rovnakou rýchlosťou, akú mali guľky pred tým ako narazili.



Obr. 3.7.2.

Ide o reťazovú pružnú zrážku. Keď guľôčka narazí, zabrzdí sa a odovzdá svoju hybnosť susednej atď... Vysvetlenie, prečo zastaví a odovzdá celú svoju hybnosť susednej, nájdeme, ak sa na proces budeme pozerať zo sústavy, ktorá sa pohybuje polovičnou rýchlosťou. V tejto sústave sa guľôčky navzájom približujú rovnakými rýchlosťami v okamihu nárazu stoja a potom sa zasa vzdávajú rovnakými rýchlosťami.

Príklad 13 O koľko sa na vode posunie loďka, ak sa na nej pohnem o 1 meter a hmotnosť loďky m_L je dvojnásobná ako moja hmotnosť m ?

Na začiatku bola hybnosť sústavy nulová. Tým, že sa rozbieham vzhľadom na loďku, pôsobím na ňu silou a dávam ju do pohybu až kým nezastanem a loďka sa nezabrzdí. Po celý tento čas musí byť splnený zákon akcie a reakcie. Teda sila f , ktorá dáva do pohybu loďku, musí byť v každom okamihu rovnako veľká ako sila $-f$, ktorá dáva do pohybu mňa. To znamená, že pre rýchlosti v ľubovoľnom čase platí:

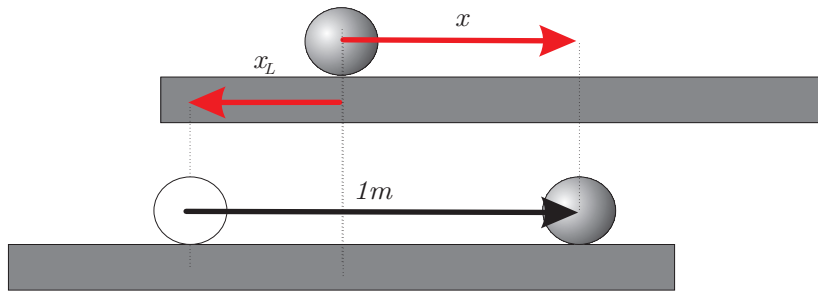
$$v_L = \frac{1}{m_L} \int f dt \quad v = \frac{-1}{m} \int f dt$$

a vzdialenosti dostaneme ako časový integrál rýchlosti:

$$\begin{aligned} x_L &= \int v_L dt = \frac{1}{m_L} \iint f dt^2 \\ x &= \int v dt = \frac{-1}{m} \iint f dt^2 \end{aligned} \quad (3.7.5)$$

Zo sústavy eliminujeme $\iint f dt^2$ a dostaneme

$$m_L x_L + m x = 0 \quad (3.7.6)$$



Obr. 3.7.3.

Keďže loďka sa pohla na opačnú stranu ako ja, x_L má opačné znamienko (záporné) ako x . Pre veľkosť posunutia potom platí

$$m_L |x_L| = m |x| \quad (3.7.7)$$

keďže hmotnosť lode je dvojnásobná ako moja, tak loď sa posunie o

$$|x_L| = 0,5 |x| \quad (3.7.8)$$

Súčet nášho posunutia a posunutia lode je vzdialenosť, ktorú som prešiel po lodi:

$$1 = |x_L| + |x| = |x_L| + 2 |x_L| = 3 |x_L| \quad (3.7.9)$$

4 Gravitačné pole

Gravitačné pole (v klasickej mechanike) je priestor, kde pôsobí na hmotné objekty gravitačná sila. Toto pole je generované samotnými hmotnými objektmi.

4.1 Gravitačná sila

Gravitačná sila je príťažlivá sila, ktorou na seba navzájom pôsobia hmotné telesá.

Poznámka 12 *Doposiaľ bolo navrhnutých mnoho mechanizmov, ktoré by vysvetlili pôsobenie gravitačnej sily, ale zatiaľ všetky zlyhali. Spomeniem jeden mechanizmus, ktorý uvádza R. Feynmann vo svojom základnom kurze fyziky: Predstavme si, že vesmírom letí obrovské množstvo častíc rôznymi smermi. Tým, že častice dopadajú na Zem, pôsobia na ňu zo všetkých strán rovnakým tlakom. Ak sa k Zemi priblíži mesiac, zamedzí časticiam dopadať na Zem zo strany Mesiaca a Zem zamedzí časticiam dopadať na Mesiac zo strany Zeme. Preto tlak na privrátené strany je menší ako na odvrátené a planéty sú priťahované.*

Experimentálne sa zistilo, že veľkosť sily, ktorou na seba navzájom pôsobia dve hmotné telesá je úmerná ich hmotnostiam m_1, m_2 a klesá so štvorcom ich vzdialenosti r^2 . Pokiaľ rozmery oboch telies sú zanedbateľné vzhľadom na ich vzdialenosť, platí

$$f = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (4.1.1)$$

kde $\kappa = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$ je konštanta úmernosti.

Poznámka 13 *Dve kilové telesá vzdialené od seba jeden meter sa priťahujú silou veľkosti tejto konštanty ($f = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N}$).*

Sila, ktorou pôsobí teleso s hmotnosťou m_1 na teleso s hmotnosťou m_2 , sa dá vyjadriť ako vektor

$$\vec{f} = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}, \quad (4.1.2)$$

kde $\vec{r}$ smeruje od prvého telesa k druhému. Rovnica (4.1.2) predstavuje Newtonov gravitačný zákon.

Príklad 14 *Predstavme si, že letíme zo Zeme priamo na Mesiac rovnomernou rýchlosťou. V ktorom mieste od Zeme už musíte začať brzdiť, aby ste si svoju rýchlosť udržali? (Hmotnosť Zeme je 81-krát väčšia ako hmotnosť Mesiaca).*

Brzdiť treba začať tam, kde má gravitačná sila Mesiaca rovnakú veľkosť ako gravitačná sila Zeme. Ak hmotnosť Mesiaca je M a hmotnosť rakety m , vzdialenosť Zeme od mesiaca je d , pre miesto bezťažového stavu vzdialeného zo Zeme o x platí:

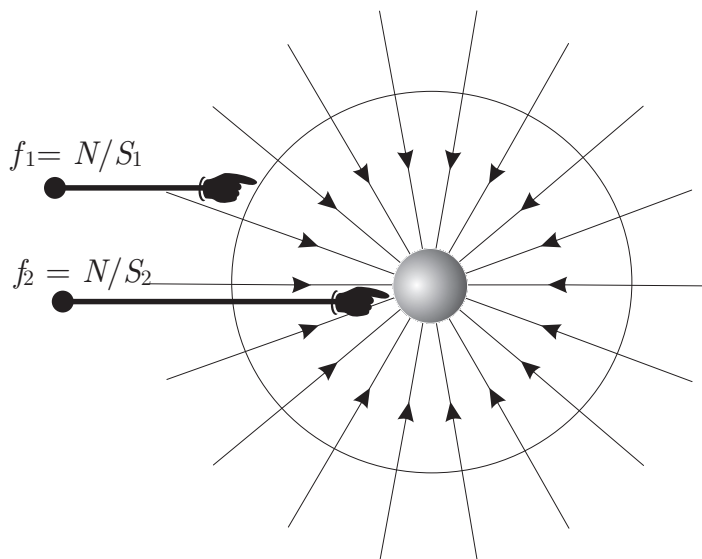
$$\kappa \frac{81mM}{x^2} = \kappa \frac{mM}{(d-x)^2}$$

$$81(d-x)^2 = x^2 \Rightarrow 9(d-x) = x$$

odkiaľ $x = 0,9d$.

4.2 Intenzita gravitačného poľa

Intenzita gravitačného poľa je vektorová veličina (presnejšie vektorové pole), ktorá vyjadruje schopnosť poľa pôsobiť na hmotné objekty. Intenzita je veličina, ktorá charakterizuje iba vlastnosti poľa nezávisle od toho, na ktoré objekty pôsobí. Preto je



Obr. 4.2.1.

definovaná ako podiel gravitačnej sily $\vec{f}$ a hmotnosti telesa m , na ktoré v danom bode pole pôsobí:

$$\vec{E} = \frac{\vec{f}}{m} \quad (4.2.1)$$

Napríklad veľkosť intenzity poľa hmotného bodu s hmotnosťou M vo vzdialenosti r je

$$E = \kappa \frac{M}{r^2} \quad (4.2.2)$$

Ak rovnicu (4.2.2) prepíšeme nasledujúcim spôsobom

$$E = \kappa \frac{M}{r^2} = \frac{\kappa 4\pi M}{4\pi r^2} = \frac{N}{S} \quad (4.2.3)$$

dostaneme podiel čísla $N = \kappa 4\pi M$ a guľovej plochy $S = 4\pi r^2$. Teda veľkosť intenzity môžeme interpretovať ako plošnú hustotu niečoho, čo závisí iba od hmotnosti. Vhodnou reprezentáciou pre intenzitu sú teda myslené čiary (siločiary), kde hustota siločiar N/S reprezentuje veľkosť pôsobenia poľa. Siločiary ďalej ukazujú smer, akým pole na hmotné objekty pôsobí. Pokiaľ je hmotnosť rovnomerne rozložená vo vnútri sústrednej guľe s polomerom r , tak siločiary pretínajú povrch guľe symetricky, a teda intenzita na povrchu tejto guľe musí byť rovnaká, ako keby bola celá hmotnosť sústredená v jej strede.

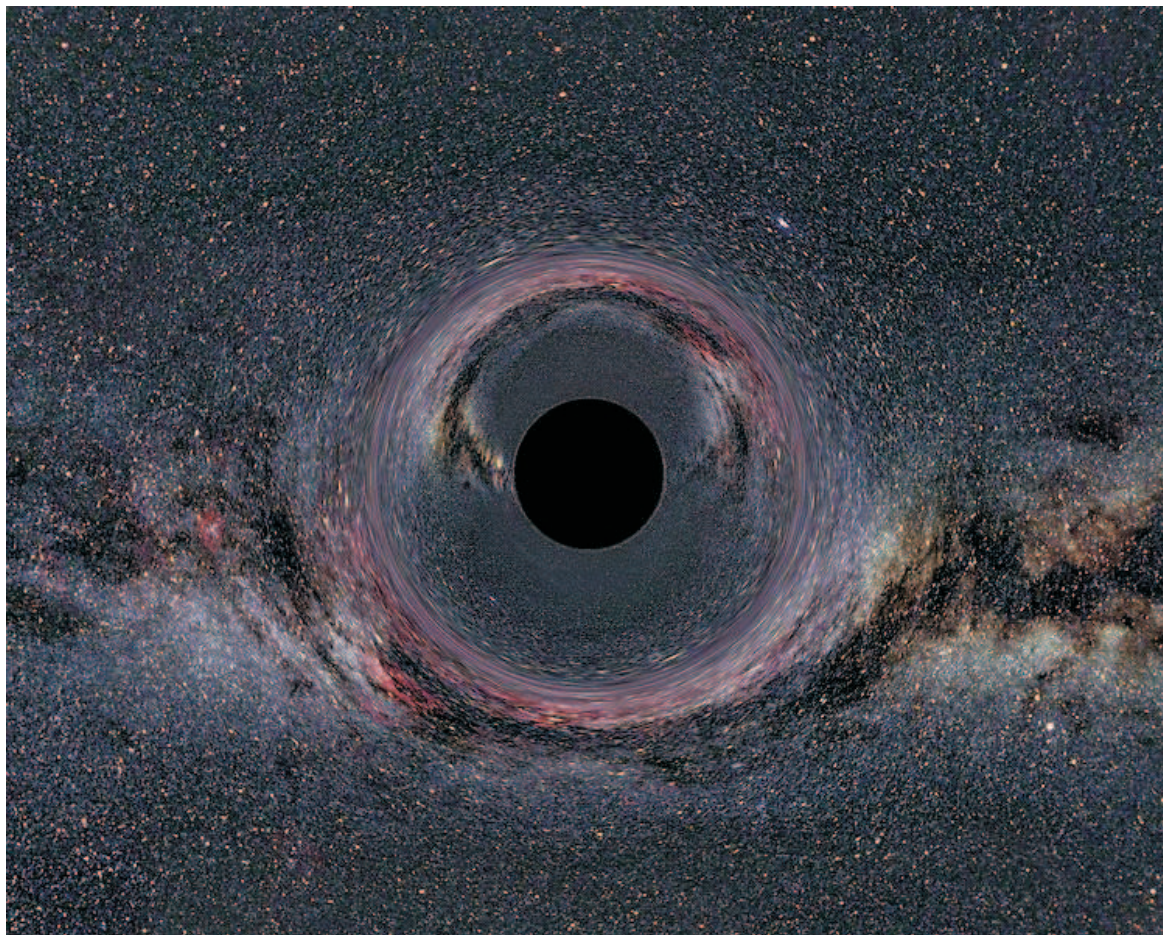
Ukážka 10 Na papier nasypeme železné piliny a zospodu papiera prikladáme rôzne magnety. Piliny vytvoria siločiary v okolí magnetov.

Príklad 15 Predstavme si, že naša Zem sa pod obrovským tlakom zmrští do guľôčky (mini čiernej diery) s polomerom 1m. Aká sila by na mňa pôsobila na jej povrchu podľa Newtonovho zákona?

Hmotnosť Zeme je $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg Ak dosadíme do Newtonovho zákona moju hmotnosť 100 kg hmotnosť Zeme a polomer Zeme dostaneme, že na mňa by pôsobila sila

$$f = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{6 \cdot 10^{26}}{1} \approx 4 \cdot 10^{16} \text{ N} \quad (4.2.4)$$

Poznámka 14 Čierne diery môžu vznikať samovoľne (gravitačným kolapsom) hviezd, ktoré sú niekoľko krát ťažšie ako Slnko. Gravitačná sila v jej blízkosti je taká veľká, že zabráňuje úniku akýchkoľvek častíc, teda ani svetla. To znamená, že ju nemôžeme nijako pozorovať. V okolí čiernej diery v dôsledku obrovskej gravitácie už neplatia ani rovnice klasickej fyziky.



Obr. 4.2.2. Čierna diera (počítačová simulácia zdroj Wikipédia)

Zaujímavá je ešte otázka, aká sila pôsobí medzi dvomi telesami, pokiaľ sa jedno nachádza v druhom (napr. v hlbkej bani). Je samozrejmé, že v strede Zeme je gravitačná sila nulová. Je to preto, lebo tam sme zo všetkých strán obklopení rovnakým množstvom hmoty, ktorá nás rovnako priťahuje do všetkých strán. Ak sa šplháme zo stredu Zeme na jej povrch, gravitačná sila rastie, lebo pod sebou budeme mať stále viac hmoty ako nad sebou.

Príklad 16 Skúste vysvetliť, že pri ceste zo stredu Zeme na jej povrch bude gravitačná sila stúpať lineárne so vzdialenosťou od stredu.

4.3 Gravitačné zrýchlenie

Predstavme si, že sme vo vesmíre, v kozmickej lodi, kde je beztliažový stav a loď začne zrýchľovať. My pociťujeme, že sme pritláčaní k podlahe silou, ktorá je úmerná

zrýchleniu a a našej hmotnosti m_1 . Teda platí: $f = m_1 a$. Teraz kozmická loď pristála na povrchu Zeme a je v pokoji. My sme pritláčaní k podlahe gravitačnou silou danou (4.2.4). Vzdialenosť nás od stredu Zeme sa rovná polomeru Zeme $r = 638000$ m, hmotnosť Zeme je $m_2 = 6 \times 10^{24}$. Ak tieto hodnoty dosadíme do (4.2.4) zistíme, že sme pritláčaní ku podlahe silou

$$f = 9,8 m_1. \quad (4.3.1)$$

Akým zrýchlením by sa mala pohybovať kozmická loď vo vesmíre, aby sme z vnútra lode nezistili, či sme vo vesmíre alebo v pokoji na povrchu Zeme? Zrýchlením $9,8 \text{ m.s}^{-2}$. Nazveme ho gravitačné zrýchlenie a budeme ho označovať $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.

Otázka úzko súvisí s princípom ekvivalencie, ktorý je známy zo všeobecnej teórie relativity: Zvnútra kozmickej lode nie je možné určiť, či je loď v pokoji a pôsobí na ňu gravitačná sila so zrýchlením g , alebo sa pohybuje s gravitačným zrýchlením.

Poznámka 15 *Na teleso na povrchu Zeme pôsobia aj iné sily, ktoré budeme zatiaľ zanedbávať. Napríklad odstredivá sila Zeme. Preto výsledná príťažlivá sila, ktorú na Zemi nameráme, sa málo líši od gravitačnej a má aj inú veľkosť na rovníku ako na pólach.*

Pokus 4 *Postavím sa na váhu vo výťahu. Keď je výťah v pokoji, váha ukazuje vašu hmotnosť m kg. Akú hmotnosť bude váha ukazovať, keď sa bude výťah pohybovať smerom nahor zrýchlením a , potom konštantnou rýchlosťou v , a nakoniec spomalením a ? Akú hmotnosť bude váha ukazovať, keď sa bude výťah s rovnakými zrýchleniami vracáť? Skúste určiť zrýchlenie výťahu. Ako sa má výťah pohybovať, aby bol vo výťahu bezťažový stav?*

Pri zrýchľovaní smerom nahor bude na vás pôsobiť sila $f = mg + ma$ a váha bude ukazovať $\dot{m} = \frac{f}{g} = m + m\frac{a}{g}$. Pri konštantnej rýchlosti bude $\dot{m} = m$ a pri brzdení bude $\dot{m} = \frac{f}{g} = m - m\frac{a}{g}$.

Pri zrýchľovaní smerom nadol bude na vás pôsobiť sila $f = mg - ma$ a váha bude ukazovať $\dot{m} = \frac{f}{g} = m - m\frac{a}{g}$. Pri konštantnej rýchlosti bude $\dot{m} = m$ a pri brzdení bude $\dot{m} = \frac{f}{g} = m + m\frac{a}{g}$.

Stav bez tiaže vznikne vo výťahu, keď brzdí smerom nahor spomalením $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ alebo zrýchľuje smerom nadol zrýchlením $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.

Ukážka 11 *V lietadle sa dá vytvoriť bezťažový stav tak, že brzdí smerom nahor spomalením $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ a potom zrýchľuje nadol zrýchlením $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$. Tento experiment bol reálne urobený pre študentov letectva na Harvarde na Boeingu 707 a možno ho vidieť na youtube.*

4.4 Voľný pád

Pod voľným pádom rozumieme pohyb telesa, ktoré sa pohybuje ako dôsledok pôsobenia gravitačnej sily Zeme. Rozoberieme dva prípady voľného pádu pre "malé" a pre "veľké" vzdialenosti. Pod malými vzdialenosťami rozumieme tak malé vzdialenosti, že tiažovú silu g môžeme považovať za konštantnú, teda

$$f_g = mg \quad (4.4.1)$$

a teleso sa bude rozbiehať rovnomerne zrýchleným pohybom so zrýchlením g . Tento fakt vyplýva z druhého Newtonovho zákona: Sila, ktorá pôsobí na teleso, je tiažová sila $f_g = mg$ a táto sila sa rovná súčinu jeho hmotnosti m a zrýchlenia a . Teda $a = g$. To znamená, že železná guľa bude padať na Zem s rovnakým zrýchlením ako kúsok polystyrénu. A keby nebolo odporu vzduchu, bola by to pravda. V reálnej situácii však na teleso pôsobí sila od odporu vzduchu proti smeru tiažovej sily:

$$f = mg - \frac{\mu S \rho v^2}{2}, \quad (4.4.2)$$

kde μ je koeficient odporu vzduchu, ktorý závisí od tvaru telesa, ρ je hustota vzduchu, S je maximálny prierez telesa kolmý na smer pohybu a v je rýchlosť telesa. V prípade gule je $\mu \approx 0,2$. Sila odporu vzduchu narastá so zväčšujúcou sa rýchlosťou. Rýchlosť telesa sa bude zväčšovať, ale zrýchlenie sa bude znižovať dovtedy, kým sa obe sily nevyrovnajú.

V prípade veľkých vzdialeností treba do úvahy zahrnúť aj fakt, že tiažová sila sa so vzdialenosťou mení, a teda teleso je rozbiehané v dôsledku pôsobenia sily

$$f_g = \kappa \frac{m M_z}{r^2} \quad (4.4.3)$$

ak zahrnieme odpor vzduchu, tak platí:

$$f = \kappa \frac{m M_z}{r^2} - \frac{\mu S \rho v^2}{2} \quad (4.4.4)$$

Príklad 17 Akou rýchlosťou dopadne na zem ľadovec s polomerom $0,01$ m? (Predpokladáme, že ľadovec sa nad povrchom zeme už pohybuje rovnomernou rýchlosťou. Hustota ľadu je $\rho_l = 900 \text{ kg.m}^3$. Hustota vzduchu pri teplote 20° je $\rho_v = 1,2 \text{ kg.m}^3$)

Pri rovnomernej rýchlosti je výsledná sila pôsobiaca na ľadovec nulová a teda platí:

$$mg = \frac{\mu S \rho_v v^2}{2} \quad (4.4.5)$$

vyjadríme si hmotnosť a prierez pomocou hustoty ľadu

$$\frac{4}{3} \rho_l \pi r^3 g = \frac{\mu 4 \pi r^2 \rho_v v^2}{2} \quad (4.4.6)$$

Zo vzťahu (4.4.6) si vyjadríme rýchlosť

$$v = \sqrt{\frac{2 \rho_l r g}{3 \rho_v \mu}} = \frac{2 \ 900 \ 0,01 \ 10}{3 \ 1,2 \ 0,2} = 25 \text{ m.s}^{-1} = 90 \text{ km.h}^{-1} \quad (4.4.7)$$

Príklad 18 Do studne hodím kameň a počujem ho dopadnúť za 2 s. Aká je hĺboká studňa? (Odpor vzduchu zanedbáme.)

4.5 Pohyb planét a odstredivá sila

Príklad 19 Z lietadla, ktoré sa pohybuje rýchlosťou v_x vo konštantnej výške h nad zemským povrchom spustíme bombu. Ako sa bude meniť polohový vektor bomby v čase, ak odpor vzduchu zanedbáme?

V smere osi x pôjde bomba rýchlosťou lietadla v_x a súčasne bude padať voľným pádom v smere osi y rýchlosťou $v_y = gt$. Súradnice bomby v čase t budú teda dané polohovým vektorom

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x t \\ \frac{1}{2}gt^2 \end{bmatrix} \quad (4.5.1)$$

Toto riešenie je správne iba za predpokladu, že neuvažujeme zakrivenie Zeme. Ak by bola rýchlosť lietadla veľmi veľká, mohlo by sa stať, že bomba na Zem nestihne dopadnúť a poletí ďalej do vesmíru a zemská príťažlivosť iba zmení rýchlosť jej pohybu. Pokúsime sa zistiť, aká najmenšia rýchlosť stačí nato, aby bomba na zem nedopadla. V okamihu, keď bombu vypustíme, začne meniť rýchlosť bomby gravitačná sila. Bomba sa bude približovať k Zemi práve vtedy, keď sa jej rýchlosť bude zväčšovať. Naopak, keď sa bude vzdďľovať, gravitačná sila bude bombu brzdiť a jej rýchlosť bude znižovať. Hraničná rýchlosť, keď sa bomba nebude približovať, je taká, keď sa jej veľkosť nemení. Vtedy gravitačná sila mení iba smer pohybu a je kolmá na rýchlosť a bomba sa bude pohybovať po kruhovej dráhe. Je to vtedy, keď dostredivé zrýchlenie je spôsobené práve zemskou príťažlivosťou, teda dostredivé zrýchlenie je rovné tiažovému:

$$\frac{v^2}{r} = \kappa \frac{M_z}{r^2} \quad (4.5.2)$$

Inými slovami, ak dostredivá sila je rovná tiažovej

$$m \frac{v^2}{r} = \kappa \frac{m M_z}{r^2} \quad (4.5.3)$$

Práve toto je princíp pohybu Mesiaca okolo Zeme., alebo planét okolo Slnka. Planéty sa však všeobecne pohybujú po elipsách a kružnica je len jeden špeciálny prípad, keď počiatočná rýchlosť je rovnobežná s povrchom Zeme. Ak by bola bomba vrhnutá šikmo k Zemi dostatočne veľkou rýchlosťou aby na Zem nedopadla, rýchlosť by narastala, lebo Zem by ju priťahovala. V mieste, kde je k Zemi najbližšie, bude rýchlosť maximálna, tam sa otočí a keď sa bude vzdďľovať, príťažlivosť ju bude brzdiť až do chvíle, keď sa znova otočí. O tomto hovoria Keplerove zákony, ktoré tu bližšie rozoberať nebudeme.

Ukážka 12 Teleso priviazané na špagáte roztočíme a pustíme. Ktorým smerom poletí v okamihu, keď ho pustíme?

Pokiaľ sa teleso točí na špagáte, meníme jeho pohybový stav dostredivou silou (reakciou na odstredivú) tým, že ťaháme špagát. V okamihu, keď teleso pustíme, prestaneme naň pôsobiť silou, a teda prestaneme meniť jeho pohybový stav. Teleso teda ďalej poletí tým smerom a tou rýchlosťou, akú malo v okamihu pretrhnutia.

Príklad 20 Ako dlho by trval jeden deň keby bol na rovníku beztiažový stav?

Zem by sa musela točiť okolo svojej osi takou rýchlosťou, aby odstredivá sila $f_o = mr\omega^2$ na rovníku kompenzovala gravitačnú silu $f_g = \kappa \frac{mM_z}{r^2} = mg$. Teda

$$mr\omega^2 = mg. \quad (4.5.4)$$

Ak vyjadríme uhlovú frekvenciu

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{r}}. \quad (4.5.5)$$

dostaneme vzťah pre periódu rotácie Zeme

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}} = 4800 \text{ s} = 80 \text{ min}. \quad (4.5.6)$$

Príklad 21 *Určite veľkosť odstredivej sily Zeme na rovníku.*

Príklad 22 *Prečo sa na bicykli ľahšie udrží rovnováha, keď je v pohybe, ako v pokoji?*

Keď je cyklista v pohybe, tak má roztočené kolesá. Po obvode kolesa pôsobí odstredivá sila, ktorá cez špajdle pôsobí symetricky na osku, čím ju fixuje.

Ukážka 13 *Koleso z bicykla postavíme na osku a roztočíme rovnobežne so stolom a koleso sa točí a nepadne. Keď sa snažíme vychýliť osku, cítiť odpor. Keď koleso zastaví, tak padne.*

Ukážka 14 *Bicykel postavíme na cyklistické valce a začneme bicyklovať bez toho, aby sme sa hýbali dopredu. Keď sa točia kolesá, nie je problém s rovnováhou. Keď zastanú, padneme.*

Ukážka 15 *Na hojdačku postavím pohár vody a rozhojdám skoro do vodorovnej polohy. Voda sa nevyleje a hladina vody zostane rovnobežná s dnom pohára.*

Aby sa voda vyliala, musela by pri hojdaní vzniknúť tangenciálna zložka sily. Odstredivá sila vždy pôsobí v smere normály a gravitačná sila, ktorá spôsobuje tangenciálne spomalenie (zrýchlenie) hojdačky, je kompenzovaná zotrvačnou silou. (Je to podobné, ako keď sme simulovali v lietadle bezťažový stav.)

4.6 Inerciálna a neinerciálna vzťažná sústava

V kinematike sme definovali vzťažnú sústavu ako prostredie reprezentované súradnicovou sústavou odkiaľ pozorujeme pohyb. (Zem, vlak, lietadlo, rieka, vesmír.) Vzťažná sústava môže byť:

- inerciálna
- neinerciálna

Inerciálna vzťažná sústava je taká, ktorá sa z kinematického hľadiska pohybuje rovnomerným priamočiarym pohybom, alebo je v pokoji a z dynamického hľadiska v nej platia Newtonove pohybové zákony. V rozbehnutom lietadle prebieha všetko tak ako v stojacom. Ak sedíme v lietadle alebo vo vlaku a máme zastreté okná, tak nevieme

rozoznať, či lietadlo alebo vlak stojí, alebo sa pohybuje rovnomerným priamočiarym pohybom.

Neinerciálna vzťažná sústava je taká, že z kinematického hľadiska sa pohybuje zrýchleným pohybom, alebo rotuje a z dynamického hľadiska v nej neplatia Newtonove pohybové zákony (*v brzdiacom lietadle predmety zrýchľujú bez toho, aby sme na ne pôsobili silou*).

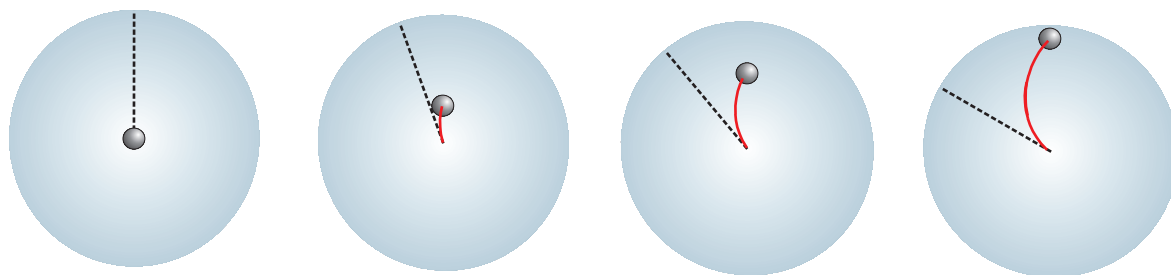
Príklad 23 Aká veľká sila pôsobí na predmet (1 kg) vo vlaku, ktorý brzdí so spomalením $a = -2 \text{ m.s}^{-2}$ a s akým zrýchlením sa bude tento predmet vo vlaku pohybovať?

Pokiaľ sa vlak pohyboval rovnomernou rýchlosťou, bol inerciálnou vzťažnou sústavou. Akonáhle začína vlak brzdiť, stáva sa neinerciálnou vzťažnou sústavou a pôsobí v ňom na predmet okrem tiaže aj zotrvačná sila

$$f = -ma = 20 \text{ N}, \quad (4.6.1)$$

ktorá má opačný smer ako zrýchlenie vlaku a rozbíha predmet v smere pohybu vlaku so zrýchlením $a = \text{m.s}^{-2}$.

Ukážka 16 Na stred rotujúcej veľmi šmykľavej platne (trenie je takmer nulové), ktorá sa pohybuje konštantnou uhlovou rýchlosťou položíme predmet namočený do atramentu a postrčíme smerom od stredu. Akú dráhu nakreslí predmet na platni?



Obr. 4.6.1.

Predmet sa dôsledkom trenia začne roztáčať, pričom vzniká odstredivá sila. Tá ho začne posúvať v radiálnom smere. Dôsledkom radiálneho pohybu sa zväčšuje tangenciálna rýchlosť platne, čím vzniká tangenciálna sila, ktorá pôsobí proti smeru pohybu platne.

Poznámka 16 Tangenciálnu silu odvodíme neskôr.

5 Mechanická práca

Mechanickú prácu vo fyzike definujeme ako **účinnok sily, ktorý spôsobuje zmenu polohy telesa v prostredí**. Ak pôsobíme na teleso silou f po dráhe Δx , konáme prácu

$$W = f\Delta x \quad (5.0.2)$$

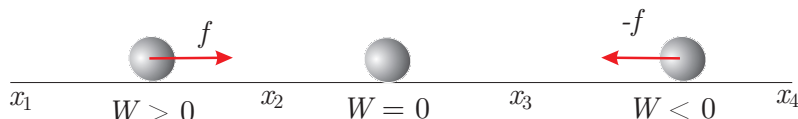
Teda čím väčšou silou pôsobím po čím dlhšej dráhe, tým väčšiu prácu vykonám. Jednotkou práce je Joule – $\text{J} = \text{N} \cdot \text{m}$. V nasledujúcom texte budeme postupne rozoberať mechanickú prácu na jednotlivých príkladoch.

5.1 Kladná a záporná práca

Budeme rozoberať pohyb telesa zľava doprava tak, ako je to graficky znázornené na obrázku 5.1.1. Na vozík najskôr pôsobíme konštantnou silou $f > 0$ (zľava doprava), po dráhe $\Delta x = x_2 - x_1 > 0$. Teleso sa rozbieha a my konáme prácu

$$W = f\Delta x \quad (5.1.1)$$

Zo zákona akcie a reakcie vyplýva, že vozík na nás pôsobí zotrvačnou silou $-f$



Obr. 5.1.1. Keď sa teleso rozbieha, pôsobí sila v smere pohybu a práca je kladná. Keď ide teleso rovnomernou rýchlosťou, sila nepôsobí a práca je nulová. Keď vozík brzďím, pôsobí sila v protismere pohybu a práca je záporná.

samozrejme po tej istej dráhe, len proti smeru pohybu. Teleso koná zápornú prácu

$$W = -f\Delta x. \quad (5.1.2)$$

Na dráhe $\Delta x = x_3 - x_2$ silou nepôsobíme, teleso sa pohybuje rovnomerným priamočiarym pohybom a prácu nikto nekoná:

$$W = 0 \quad \Delta x = 0. \quad (5.1.3)$$

Nakoniec po dráhe $\Delta x = x_4 - x_3$ brzďíme teleso silou $-f$ a konáme prácu $W = -f\Delta x$. Konáme zápornú prácu, lebo pôsobíme proti smeru pohybu (sila aj dráha majú opačné znamienka). Zotrvačná sila telesa je f a teleso koná kladnú prácu $W = f\Delta x$.

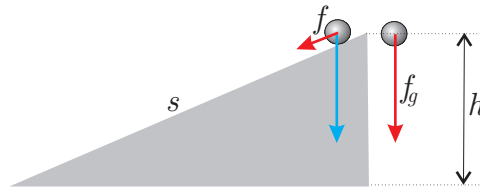
Poznámka 17 Keby sme teleso rozbiehali v opačnom smere (sprava doľava) pôsobili by sme silou $-f$ po dráhe $-\Delta x$ a konali by sme kladnú prácu, naopak teleso by konalo zotrvačnou silou zápornú prácu.

Kladnú prácu koná ten, kto pôsobí silou v smere pohybu a zápornú zase ten, kto pôsobí v protismere. Ak teleso rozbieham premenlivou silou prácu vypočítame ako integrál zo sily po dráhe $\Delta x = x_2 - x_1$.

$$W = \int_{x_1}^{x_2} f dx \quad (5.1.4)$$

5.2 Práca v silovom poli

Najskôr budeme spúšťať teleso z výšky h kolmo nadol. Prácu $W = mgh$ koná tiažová sila $f_g = mg$ po dráhe h . Potom spustíme teleso z výšky h bez trenia po naklonenej rovine, ktorá zvierá so Zemou uhol φ . Prácu na telese nekoná celá tiažová sila, ale iba jej zložka rovnobežná s podložkou $f = mg \sin(\varphi)$. Je to preto, že podložka kompenzuje tú časť tiažovej sily $f_{\perp} = mg \cos(\varphi)$, ktorá pôsobí kolmo na podložku. Sila f pôsobí po dráhe $s = \frac{h}{\sin(\varphi)}$ čím koná prácu



Obr. 5.2.1.

$$W = mg \sin(\varphi) \frac{h}{\sin(\varphi)} = fh \quad (5.2.1)$$

Vidíme, že výsledná práca nezávisí od toho, ako je doska strmá. Teda **práca v tiažovom poli nezávisí od dráhy, po akej teleso spúšťame, ale iba od výškového rozdielu**.

Hocijakú dráhu môžeme poskladať z viacerých rôzne strmých dosťičiek rovnakej dĺžky $\Delta s_i = \frac{\Delta h_i}{\sin(\varphi_i)}$, na každej z nich sila $f_i = mg \sin(\varphi_i)$ vykoná prácu

$$W_i = f_i \Delta s_i = mg \sin(\varphi_i) \frac{\Delta h_i}{\sin(\varphi_i)} = mg \Delta h_i. \quad (5.2.2)$$

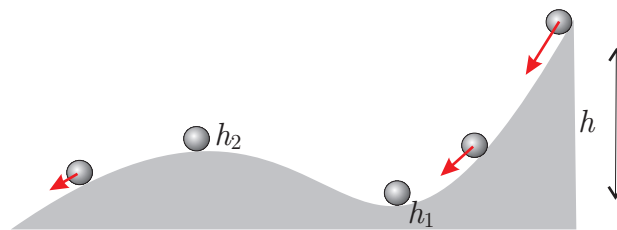
Výsledná práca potom bude súčtom všetkých prác

$$W = \sum_{i=1}^n f_i \Delta s_i = \sum_{i=1}^n mg \Delta h_i = mgh. \quad (5.2.3)$$

Pokiaľ sa dráha mení spojitě, inak povedané $n \mapsto \infty$, dostaneme:

$$W = \int_{s_1}^{s_2} f ds = mgh. \quad (5.2.4)$$

Príklad 24 Teleso spustíme po dráhe tak, ako je to nakreslené na obrázku. Akú prácu pritom vykoná tiažová sila?



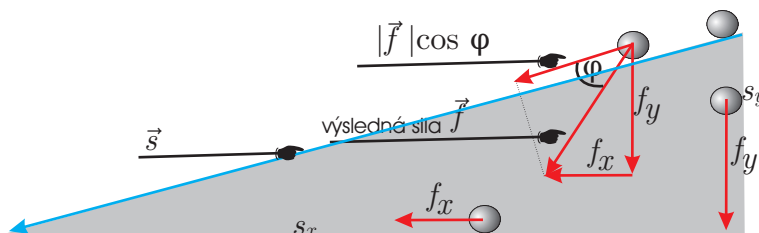
Obr. 5.2.2.

Kým bude teleso klesať, zložka tiažovej sily rovnobežná s podložkou a pôsobiaca v smere pohybu bude konať kladnú prácu $W_1 = mg(h - h_1)$. Pri stúpaní bude zložka tiažovej sily rovnobežná s podložkou a pôsobiaca proti smeru pohybu konať zápornú prácu $W_2 = mg(h_1 - h_2)$. Pri poslednom úseku z h_2 na nulovú hladinu sa vykoná práca $W_3 = mgh_2$. Celková práca bude

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = mg(h - h_1 + h_1 - h_2 + h_2) = mgh \quad (5.2.5)$$

5.3 Práca ako skalárny súčin

Znovu budeme spúšťať guľôčku po naklonenej rovine, ale teraz okrem tiažovej sily f_y pôsobí na vozík aj iná sila, napr. magnetická sila f_x kolmo na tiažovú. Teda výslednú silu môžeme zapísať ako vektor $\vec{f} = [f_x, f_y]$. Dráhu vyjadríme tiež ako vektor $\vec{s} = [s_x, s_y]$.



Obr. 5.3.1.

Prácu na telese koná iba tá zložka výslednej sily, ktorá je rovnobežná s podložkou $|\vec{f}| \cos(\varphi)$ po dráhe $|\vec{s}|$:

$$W = |\vec{f}| |\vec{s}| \cos(\psi) \quad (5.3.1)$$

čo je skalárny súčin vektorov

$$W = \vec{f} \cdot \vec{s}. \quad (5.3.2)$$

Teraz vykonáme prácu tak, že najskôr budeme spúšťať teleso kolmo nadol po zvislej stene hranola s_y , a pretože tiažová sila f_x je na dráhu s_y kolmá, pohyb telesa neovplyvňuje, tak prácu bude konať iba tiažová sila f_y po dráhe s_y teda $W_1 = f_y s_y$. Potom bude priťahovať teleso iba magnetická sila f_x po dráhe s_x a práca bude $W_2 = f_x s_x$. Výsledná práca bude

$$W = W_1 + W_2 = f_x s_x + f_y s_y \quad (5.3.3)$$

5.4 Práca sily, ľubovoľného smeru a veľkosti

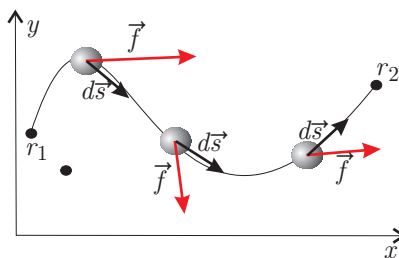
Predstavme si, že pohyb telesa je viazaný na určitú krivku (napríklad pohyb vlaku je viazaný na koľajnice). My konáme prácu tak, že posúvame teleso po koľajnici silou $\vec{f}$, ktorá v priebehu konania práce mení svoju veľkosť aj smer tak, že zvierá s koľajnicou uhol φ , ktorý sa tiež mení. Situácia je nakreslená na Obr. 5.4.1 Rozdeľme si dráhu na malé úseky $d\vec{s}$. Na každom úseku koná prácu dW iba tá zložka sily $\vec{f}$, ktorá pôsobí v smere pohybu, teda

$$dW = |\vec{f}| |d\vec{s}| \cos \varphi = \vec{f} \cdot d\vec{s} = f_x dx + f_y dy \quad (5.4.1)$$

Celková práca vykonaná premenlivou silou po krivke potom bude

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{x_1}^{x_2} f_x dx + \int_{y_1}^{y_2} f_y dy, \quad (5.4.2)$$

kde $r_1 = [x_1, y_1]$ je počiatočná poloha telesa a $r_2 = [x_2, y_2]$ konečná poloha.



Obr. 5.4.1.

5.5 Výkon

Výkon je fyzikálna veličina, ktorá vyjadruje rýchlosť konanej práce. Napríklad pri premiestnení skrine je môj **priemerný výkon** daný podielom vykonanej práce a času:

$$P = \frac{W}{t} \quad (5.5.1)$$

Teda čím väčšiu prácu vykonám za čím kratší čas, tým dosiahnem väčší výkon. Jednotkou výkonu je Watt – $W = \text{J.s}^{-1} = \text{N.m.s}^{-1}$. Ak by som na skriňu pôsobil premenlivou silou, menila by sa rýchlosť konanej práce a môj **okamžitý výkon** by bol

$$P = \frac{dW}{dt}. \quad (5.5.2)$$

Príklad 25 Vypočítajte okamžitý výkon motora osobného auta o hmotnosti $m = 1000 \text{ kg}$, ktoré sa pohybuje so zrýchlením $a = 1 \text{ m.s}^{-2}$.

1. V okamihu, keď sa začalo rozbiehať
2. V okamihu, keď išlo rýchlosťou $v = 2 \text{ m.s}^{-1}$
3. V okamihu, keď išlo rýchlosťou $v = 10 \text{ m.s}^{-1}$

1. V okamihu, keď sa auto začalo rozbiehať, ešte sa nepohybovalo, teda práca bola nulová a výkon motora bol nulový napriek tomu, že motor už pôsobil na auto silou.
 2. V okamihu, keď išlo rýchlosťou $= 2 \text{ m.s}^{-1}$ pôsobil na auto motor silou $f = ma = 1000 \text{ N}$ po malej dráhe $ds = v dt$ Motor vykonal prácu $dW = f ds = f v dt$ a pre okamžitý výkon dostaneme

$$P = \frac{dW}{dt} = f \frac{ds}{dt} = f v = 2000 \text{ W}. \quad (5.5.3)$$

6 Energia

Energia je schopnosť konať prácu a má rovnakú fyzikálnu jednotku ako práca. Pri mechanickom deji v izolovanej sústave vyjadruje práca predávanie energie medzi telesami.

$$W = \Delta E, \quad (6.0.4)$$

kde ΔE je zmena energie pri konaní práce. **Objekt, ktorý koná prácu, stráca energiu a naopak, objekt, na ktorom je práca vykonávaná energiu získava.**

Například při tlačení skrine konám práci na sústave skriňa – koberec a strácam energiu chemickými reakciami vo svaloch. Naopak sústava skriňa – koberec energiu získava vo forme tepla, ktoré sa vytvára v dôsledku trenia.

V reálnej situácii sa správame energeticky neefektívne. Nie všetka energia, ktorú strácam pri konaní práce sa na prácu premení. Pri tlačení skrine sa veľká časť energie premení na zvýšenie tepla organizmu, rozprúdenie krvi, a ďalšie iné formy. Pomer medzi vykonanou prácou a dodanou energiou sa nazýva účinnosť:

$$\eta = \frac{W}{\Delta E} \quad (6.0.5)$$

To ale neznamená, že energia sa niekde stráca, iba sa premieňa na iné formy. **Celková energia v izolovanej sústave sa nemení.** Posledná veta je **zákon zachovania energie**.

6.1 Kinetická energia

Budeme rozoberať pohyb telesa z obrázku 6.1.1. Na teleso s hmotnosťou m najskôr pôsobíme konštantnou silou $f > 0$, po dráhe $\Delta x = x_2 - x_1 > 0$, čím konáme kladnú prácu $W = f\Delta x$. V dôsledku pôsobenia sily sa teleso rozbieha s rovnomerným zrýchlením a . Ako náhle prestaneme pôsobiť silou, teleso nadobudne rýchlosť $v = at$. Keďže pre dráhu rovnomerne zrýchleného pohybu platí $\Delta x = at^2/2 = \frac{v^2}{2a}$, môžeme vyjadriť prácu nasledujúcim spôsobom:

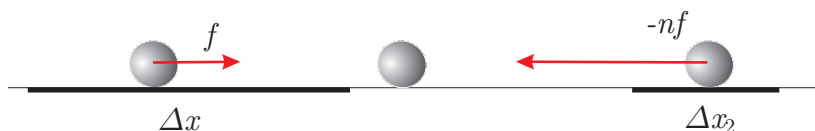
$$W = f\Delta x = ma\Delta x = \frac{1}{2}mv^2 \quad (6.1.1)$$

Výraz na pravej strane rovnosti sa nazýva **kinetická** (pohybová) energia telesa

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \quad (6.1.2)$$

ktorú pri konaní práce teleso získalo. Fakt, že sa teleso pohybuje, umožňuje zotrvačnej sile konať prácu. Na to, aby sme teleso zabrzдили, musíme pôsobiť silou proti smeru pohybu, a teda konáme zápornú prácu. Reakciou na našu silu je zotrvačná sila telesa, ktorá pôsobí v smere pohybu a prostredníctvom nej koná teleso kladnú prácu.

Ak brzdíme teleso napr. n -násobnou silou opačného smeru $f_2 = -nf = -nam$, zastavíme ho na dráhe $\Delta x_2 = \frac{1}{2}nat^2 = \frac{v^2}{2na}$, ktorá je n -krát kratšia ako Δx . To



Obr. 6.1.1.

znamená, že sme vykonali zápornú prácu

$$W = f_2\Delta x_2 = -nf\frac{1}{2}nat^2 = -nam\frac{v^2}{2na} = -m\frac{v^2}{2}. \quad (6.1.3)$$

a zotrvačná sila telesa vykonala prácu kladnú $W = m\frac{v^2}{2}$, ktorá je rovná strate kinetickej energie telesa.

Vo všeobecnosti budeme predpokladať, že sila f , ktorá na vozík pôsobí nemusí byť konštantná. Ak mal vozík v bode x_1 rýchlosť v_1 , tak pôsobením sily po dráhe Δx sa zvýšila jeho rýchlosť a v bode x_2 nadobudol rýchlosť v_2 . Vozík sa pohyboval s nerovnomerným zrýchlením $a = \frac{dv}{dt}$ a prácu danú vzťahom (5.1.4) vyjadríme pomocou tohoto zrýchlenia:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} f dx = \int_{x_1}^{x_2} m a dx = m \int_{x_1}^{x_2} \frac{dv}{dt} dx = m \int_{v_1}^{v_2} \frac{dx}{dt} dv \quad (6.1.4)$$

Keďže pre okamžitú rýchlosť platí $v = \frac{dx}{dt}$ môžeme prácu vyjadriť takto:

$$W = m \int_{v_1}^{v_2} v dv = \left[\frac{1}{2} m v^2 \right]_{v_1}^{v_2} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = E_{k2} - E_{k1} \quad (6.1.5)$$

Rovnica (6.1.5) vyjadruje fakt, že práca, ktorú vykonala sila pôsobením na teleso po dráhe Δx , je rovná zmene kinetickej energie:

$$W = E_{k2} - E_{k1} \quad (6.1.6)$$

Poznámka 18 $E_{k2} > E_{k1}$, teda práca bola vykonaná na vozíku (vozík konal zápornú prácu) a vozík získal energiu. Naopak, ja som konal prácu a energiu som stratil.

Ako náhle prestanem pôsobiť silou, vozík sa pohybuje rovnomernou rýchlosťou, prácu nekonám a kinetická energia sa nemení.

Keď začnem vozík brzdiť takže vozík opäť spomalí na pôvodnú rýchlosť v_1 (obrázok 5.1.1 v pravo), pôsobím silou $-f$ proti smeru pohybu a konám zápornú prácu:

$$W = \int_{x_4}^{x_3} -f dx = m \int_{v_2}^{v_1} v dv = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_2^2 \quad (6.1.7)$$

Príklad 26 Vozík konal kladnú prácu a stratil energiu. Naopak, ja som konal zápornú prácu a mal by som energiu získať. Pravda je taká, že keď vozík brzdim, namáham sa, a tým energiu strácam. Ako je to možné?

To, že sa pri brzdení vozíka namáham, znamená, že sa správam energeticky neefektívne a mímam zbytočne energiou. Rovnako môžem zbytočne energiu strácať aj keď sa nehýbem a zatínam svaly. Ak by som sa mal správať energeticky efektívne, postavil by som vozíku do cesty pružný nárazník, napr. veľkú pružinu. Vozík by pružinu stláčal, a sila, ktorou pôsobí pružina na vozík by vozík brzdila. Výsledok je, že kladnú prácu koná vozík, svojou zotrvačnou silou stláča pružinu a stráca kinetickú energiu. Naopak na pružine je konaná práca, alebo inak povedané pružina koná zápornú prácu a získava elastickejšiu potenciálnu energiu. Takto získanú energiu môže stlačená pružina využiť a opäť rozbehnúť vozík opačným smerom.

Príklad 27 Akú prácu vykoná zotrvačná sila letiacej gule, ktorá narazí na pružinu a pritom ju stlačí o Δx ? Akú prácu vykoná zotrvačná sila pri rozpínaní pružiny Δx ? Platí, že sila $f = kx$, ktorou stláčame pružinu, je úmerná stlačeniu x .

Pri stláčaní pružiny koná zotrvačná sila kladnú prácu (sila má rovnaký smer ako posunutie)

$$W = \int_0^{\Delta x} f dx = \int_0^{\Delta x} kx dx = \left[\frac{1}{2} kx^2 \right]_0^{\Delta x} = \frac{1}{2} k \Delta x^2 \quad (6.1.8)$$

teleso stratí svoju kinetickú energiu a zastaví. Naopak pružina pôsobí silou $-f$, má opačný smer ako posunutie a koná zápornú prácu. Pružina získava elastickú potenciálnu energiu. Je schopná konať prácu napríklad vystreliť závažie. Pri rozpínaní pružiny, koná zotrvačná sila zápornú prácu

$$W = \int_{\Delta x}^0 f dx = -\frac{1}{2} k \Delta x^2 \quad (6.1.9)$$

(posunutie má opačný smer ako sila) a teleso opäť nadobudne svoju pôvodnú kinetickú energiu. Pružina koná kladnú prácu a stráca svoju elastickú potenciálnu energiu.

6.2 Potenciálna energia telesa v tiažovom poli Zeme

Pôsobením konštantnej sily $f = mg$ (ktorá je reakciou na tiažovú silu $f_g = -mg$) zdvíhame zo zeme náklad do výšky h . Práca, ktorú sme vykonali je:

$$W = fs = mgh \quad (6.2.1)$$

Keďže konám prácu, strácam energiu. Naopak, teleso v tiažovom poli, alebo presnejšie sústava teleso - tiažové pole energiu získava. (Sústava teleso - tiažové pole je schopná konať prácu tak, že ho pri voľnom páde rozbíha.) Vykonaná práca je rovná získanej energii. Teda výsledná energia sa zvýši o

$$\Delta E_p = mgh \quad (6.2.2)$$

Táto zmena energie je zmena **potenciálnej energie telesa v tiažovom poli Zeme**.

Poznámka 19 *Pokiaľ držím náklad vo výške, prácu nekonám aj napriek tomu, že pôsobím silou a strácam pritom energiu. Nič sa za ten čas nedeje, teleso sa nehýbe, dráha je nulová, teda aj práca je nulová. (Rovnaký efekt dosiahnem, ak teleso za ten čas čo ho držím, niečím podopriem.)*

Poznámka 20 *V reálnej situácii nie je možné uskutočniť experiment tak, aby sme pôsobili konštantnou silou. Na začiatku pohybu sme teleso museli rozbehnúť, a teda sme pôsobili väčšou silou f_1 po dráhe h_1 a na konci zase muselo teleso zastaviť, takže nám stačilo pôsobiť menšou silou f_3 po dráhe h_3 . Celková práca potom bude súčet týchto prác:*

$$W = f_1 h_1 + f(h - h_1 - h_3) + f_3 h_3 = fh \quad (6.2.3)$$

Ak výsledok porovnáme s predchádzajúcim, tak zistíme, že sú rovnaké. Je to preto, že na rozbehnutie telesa potrebujeme vykonať rovnako veľkú prácu ako na jeho zastavenie. Pri rozbíhaní ju pripočítame a pri brzdení zasa odpočítame.

Ďalej uvažujme, že pri zdvíhaní telesa z výšky h_1 do výšky h_2 silu spojite meníme, teda teleso bude počas stúpania spomaľovať a zrýchľovať zrýchlením a . Sila, ktorou teleso dvíhame, bude $f = mg + ma$ a práca, ktorú vykonáme, je

$$\begin{aligned} W &= \int_{h_1}^{h_2} f dh = \int_{h_1}^{h_2} (mg + ma) dh \\ &= \int_{h_1}^{h_2} (mg) dh + \int_{h_1}^{h_2} (ma) dh = W_1 + W_2 \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

Dostali sme súčet dvoch integrálov $W_1 + W_2$. Prvý integrál je práca, ktorú koná reakcia na tiažovú silu:

$$W_1 = \int_{h_1}^{h_2} (mg) dh = [mgh]_{h_1}^{h_2} = (mgh_2 - mgh_1) = \Delta E_p \quad (6.2.5)$$

a je rovná prírastku potenciálnej energie. Druhý integrál je práca, ktorú koná sila, ktorá rozbíha a brzdí teleso.

$$W_2 = \int_{h_1}^{h_2} madh = \int_{h_1}^{h_2} m \frac{dv}{dt} dh = \int_{v_1}^{v_2} m \frac{dh}{dt} dv = \int_{v_1}^{v_2} mv dv = \left[\frac{1}{2} mv^2 \right]_{v_1}^{v_2} \quad (6.2.6)$$

a je rovná prírastku kinetickej energie. Keďže na začiatku aj na konci pohybu malo teleso nulovú kinetickú energiu tak aj $\Delta E_k = 0$ a výsledná práca, ktorú vykonáme je rovná prírastku iba potenciálnej energie, teda potenciálna energia telesa v tiažovom poli zeme nezávisí od toho, akým spôsobom sa sila v priebehu práce menila, ale iba od výškového rozdielu.

Nakoniec vo všeobecnom prípade budeme teleso dvíhať veľmi komplikovaným spôsobom z polohy r_1 do polohy r_2 , pričom budeme predpokladať, že teleso má v polohe r_1 nulovú rýchlosť a v polohe r_2 rýchlosť v . Pri dvíhaní telesa budeme meniť nielen veľkosť, ale aj smer sily nahor, nadol, doľava, doprava. Sila teda bude funkciou polohového vektora $\vec{r} = [x, y]$. Celková práca potom bude integrál z polohy danej vektorom $r_1 = [x_1, y_1]$ do polohy $r_2 = [x_2, y_2]$:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{x_1}^{x_2} f_x dx + \int_0^{y_x} f_y dy \quad (6.2.7)$$

Prvý integrál bude

$$\int_{x_1}^{x_2} f_x dx = \int_{x_1}^{x_2} ma_x dx = \int_{v_2}^{v_1} m \frac{dh}{dt} dv = \left[\frac{1}{2} mv_x^2 \right]_0^{v_x} \quad (6.2.8)$$

Druhý integrál bude

$$\int_{y_1}^{y_2} f_y dy = \int_{y_1}^{y_2} (mg + ma_x) dy = \left[\frac{1}{2} mgy \right]_{y_1}^{y_2} + \left[\frac{1}{2} mv_y^2 \right]_0^{v_y} \quad (6.2.9)$$

výsledná práca potom bude ich súčtom

$$\begin{aligned} W &= \int_{r_1}^{r_2} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \left[\frac{1}{2} mv_x^2 \right]_0^{v_x} + [mgy]_{y_1}^{y_2} + \left[\frac{1}{2} mv_y^2 \right]_0^{v_y} \\ &= mg(y_2 - y_1) + \frac{1}{2} m(v_x^2 + v_y^2) = mg(y_2 - y_1) + \frac{1}{2} mv^2 \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

To znamená, že výsledná práca je prírastok kinetickej a potenciálnej energie telesa. Keby sa teleso ďalej nepohybovalo, výsledná práca by bola rovná len zmene potenciálnej energie.

Príklad 28 Určte potenciálnu energiu telesa vo veľkej vzdialenosti od Zeme.

Ak uvažujeme, že potenciálna energia na povrchu Zeme je nulová, tak potenciálna energia telesa vo veľkej vzdialenosti od povrchu Zeme ΔE_p je rovná práci, ktorú je potrebné vykonať na premiestnenie telesa z povrchu Zeme do vzdialenosti r . Prácu vypočítame ako integrál z gravitačnej sily od povrchu Zeme s polomerom R_z po r :

$$E_p = W = \int_{R_z}^r \kappa \frac{M_z m}{r^2} dr = \left[-\kappa \frac{M_z m}{r} \right]_{R_z}^r = \kappa M_z m \left(\frac{1}{R_z} - \frac{1}{r} \right) \quad (6.2.11)$$

Poznámka 21 V reálnej situácii však potenciálna energia telesa v rôznych miestach, ale rovnako vzdialených od stredu Zeme, nemá rovnakú hodnotu. Je to spôsobené tým, že jednak Zem nie je úplná guľa, ale zdeformovaná v dôsledku dlhodobého pôsobiacich odstredivých síl vyvolaných jej rotáciou a nehomogénnym rozložením hmotnosti.

6.3 Zákon zachovania energie

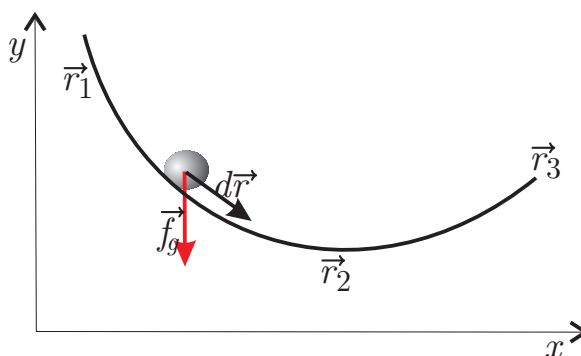
Teleso nachádzajúce sa v polohe r_1 v tiažovom poli Zeme má potenciálnu energiu E_{p1} a kinetickú energiu E_{k1} . Celková energia v mechanickej sústave teleso v tiažovom poli je

$$E = E_{k1} + E_{p1} \quad (6.3.1)$$

pri prechode do nižšej polohy r_2 koná tiažové pole Zeme kladnú prácu W_{12} , teda stratí časť svojej potenciálnej energie. Potenciálna energia v bode r_2 bude $E_{p2} = E_{p1} - W_{12}$. Naopak teleso koná zápornú prácu $-W_{12}$ svojou zotrvačnou silou, ktorá je reakciou na tiažovú, čím sa zvýši jeho kinetická energia $E_{k2} = E_{k1} + W_{12}$. Celková energia v mechanickej sústave v polohe r_2 je

$$E = E_{k2} + E_{p2} = E_{p1} - W_{12} + E_{k1} + W_{12} = E_{k1} + E_{p1} \quad (6.3.2)$$

a je rovnaká ako v polohe r_1 . Pri pohybe z polohy r_2 do vyššej polohy r_3 koná tiažové



Obr. 6.3.1.

pole Zeme zápornú prácu $-W_{23}$ teda získa časť potenciálnej energie. Potenciálna

energia v bode r_3 bude $E_{p3} = E_{p2} + W_{23}$. Naopak teleso koná kladnú prácu W_{23} svojou zotrvačnou silou a stratí časť svojej kinetickej energie. Kinetická energia v bode r_3 bude $E_{p3} = E_{p2} - W_{23}$. Po sčítaní kinetickej a potenciálnej energie je celková energia v mechanickej sústave v polohe r_3 rovnaká ako v polohe r_2 a r_1 . Inými slovami, v každom bode je splnený **zákon zachovania energie**, ktorý hovorí, že **celková energia v izolovanej sústave sa nemení**. *Izolovaná sústava je taká, že medzi ňou a jej okolím nedochádza k výmene energie.*

Poznámka 22 *Olovenú guľu spustíme na zem. Tesne pred dopadom má guľa kinetickú energiu a nulovú potenciálnu. V okamihu dopadu má kinetickú aj potenciálnu nulovú. V okamihu dopadu sa kinetická energia gule premení na prírastok kinetickej energie jej molekúl, čím sa zvýši jej teplota.*

Ukážka 17 *Pokus prof. Lewina s kyvadlom: Na jeden koniec lana zavesíme závažie a druhý upevníme na plafón. Závažie na napnutom lane si oprieme o bradu a pustíme. Môžeme porozmýšľať nad tým, čo sa stane, ak sa závažie pretrhne.*

Príklad 29 *Akou silou som pritláčaný do sedačky, ak skáčem z mosta Lafranconi na lane do kyvadla?*

Sila, akou som pritláčaný do sedačky, je odstredivá + tiažová:

$$F = m \frac{v^2}{l} + mg,$$

kde l je dĺžka lana. Potenciálna energia sa premení na kinetickú:

$$E_p = mgl = \frac{1}{2}mv^2$$

odkiaľ

$$mv^2 = 2mgl$$

Výsledná sila potom bude:

$$F = 3mg$$

Príklad 30 *Akú minimálnu rýchlosť musíme udeliť telesu zavesenému na lane dĺžky l , aby prešlo po kružnici s polomerom $r = l$ vo zvislej rovine?*

Dostredivá sila na vrchole musí byť rovná tiažovej.

$$m \frac{v^2}{l} = mg \Rightarrow v^2 = gl$$

Zo zákona zachovania energie platí:

$$mg2l + \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}mv_0^2$$

minimálna rýchlosť, ktorú telesu udelíme, bude

$$v_0 = \sqrt{5gl}$$

Príklad 31 Akou rýchlosťou by dopadol na Zem meteorit, keby nebolo atmosféry?

Potenciálna energia v nekonečnej vzdialenosti sa premení na kinetickú: (pozri vzťah (6.2.11))

$$E_p = \lim_{r \rightarrow \infty} = \kappa M_z m \left(\frac{1}{R_z} - \frac{1}{r} \right) = \kappa M_z m \frac{1}{R_z} = \frac{mv^2}{2}$$

po úprave dostaneme

$$\kappa M_z m \frac{1}{R_z} = \kappa \frac{M_z m}{R_z^2} R_z = mg R_z = \frac{mv^2}{2}$$

Odkiaľ pre rýchlosť dopadu dostaneme:

$$v = \sqrt{2gR_z} \approx 11000 \text{ m.s}^{-1}$$

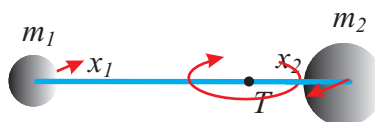
7 Mechanika tuhého telesa

Doteraz sme sa zaoberali pohybom telesa, pričom sme zanedbávali jeho rozmery, alebo sme neuvažovali o jeho rotácii. Teleso však pri svojom pohybe môže aj rotovať. Preto ak budeme skúmať pohyb tuhého telesa, budeme sa zaoberať aj jeho rotáciou.

7.1 Ťažisko telesa

Predstavme si molekulu plynu, ktorá sa skladá z dvoch atómov s hmotnosťami $m_1 > m_2$. Pokiaľ na molekulu nepôsobí žiadna sila zvonka, bude sa pohybovať rovnomerným priamočiarym pohybom, prípadne môže rotovať konštantnou uhlovou rýchlosťou. Pre bod okolo ktorého môže rotovať platí, že odstredivá sila atómu 1 musí byť rovnako veľká ako odstredivá sila atómu 2:

$$m_1 \omega^2 x_1 = m_2 \omega^2 x_2 \quad (7.1.1)$$

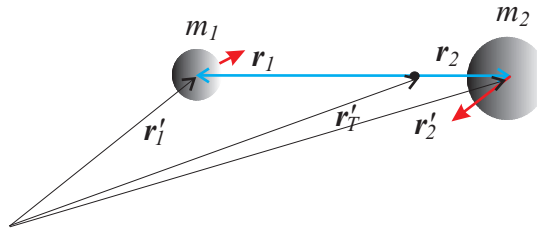


Obr. 7.1.1.

Ak by tak nebolo, odstredivá sila jedného atómu by bola väčšia a molekula by zrýchľovala v smere väčšej sily. Keď z rovnice (7.1.1) odstránime uhlovú rýchlosť, dostaneme túto rovnicu:

$$m_1 x_1 = m_2 x_2 \quad (7.1.2)$$

Za predpokladu, že atómy sú vzdialené od seba o x , môžeme vyjadriť vzdialenosť atómu 1 od bodu, okolo ktorého molekula rotuje



Obr. 7.1.2.

$$x_1 = \frac{x}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \quad (7.1.3)$$

Tento bod sa nazýva **ťažisko**. Rovnicu (7.1.2) môžeme vyjadriť aj pomocou vektorov $\vec{r}_1, \vec{r}_2$

$$m_1 \omega^2 \vec{r}_1 + m_2 \omega^2 \vec{r}_2 = \vec{0}. \quad (7.1.4)$$

Ďalej budeme predpokladať, že poloha atómov je daná polohovými vektormi $\vec{r}'_1, \vec{r}'_2$. $\vec{r}'_T$ je hľadaný polohový vektor ťažiska. Vektory, ktoré vedú z ťažiska k jednotlivým atómom, môžeme vyjadriť nasledovne $\vec{r}_1 = \vec{r}'_1 - \vec{r}'_T$ a $\vec{r}_2 = \vec{r}'_2 - \vec{r}'_T$ a dosadiť do rovnice (7.1.4):

$$m_1 \omega^2 (\vec{r}'_1 - \vec{r}'_T) + m_2 \omega^2 (\vec{r}'_2 - \vec{r}'_T) = \vec{0}. \quad (7.1.5)$$

Rovnicu vydelením štvorcom uhlovej rýchlosti a dostaneme

$$m_1 (\vec{r}'_1 - \vec{r}'_T) + m_2 (\vec{r}'_2 - \vec{r}'_T) = \vec{0}. \quad (7.1.6)$$

odtiaľ získame polohu ťažiska:

$$\vec{r}'_T = \frac{m_1 \vec{r}'_1 + m_2 \vec{r}'_2}{m_1 + m_2} \quad (7.1.7)$$

Analogicky dostaneme rovnováhu odstredivých síl pre n bodov v priestore

$$\sum_{i=0}^n m_i \omega^2 (\vec{r}'_i - \vec{r}'_T) = \vec{0} \quad (7.1.8)$$

po vydelení štvorcom uhlovej rýchlosti môžeme vyjadriť polohu ťažiska n bodov

$$\vec{r}'_T = \frac{\sum_{i=0}^n m_i \vec{r}'_i}{\sum_{i=0}^n m_i} \quad (7.1.9)$$

Pokiaľ je bodov veľmi veľa, hovoríme o tuhom telese a suma prejde na integrál:

$$\vec{r}'_T = \frac{\int \vec{r}' dm}{M}, \quad (7.1.10)$$

kde M je celková hmotnosť telesa.

Príklad 32 Nájdite ťažisko homogénnej kruhovej dosky o polomere r , v ktorej je vyrezaný otvor o polomere $r/2$, takže okraj vyrezaného kruhu prechádza stredom dosky.

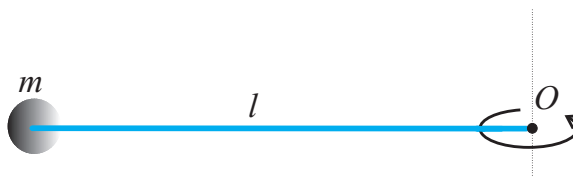
Príklad 33 Do akej výšky treba naliať vodu do pohára, aby bol najstabilnejší?

7.2 Energia rotujúceho telesa

Budeme rozoberať pohyb hmotného bodu po kružnici tak, ako je to na Obr. 7.2.1. Napríklad malé ťažšie teleso s hmotnosťou m upevnené na nehmotnej tyči dĺžky l , ktoré sa točí vo vodorovnej rovine okolo zvislej osi tak, že veľkosť jeho rýchlosti sa nemení. Kinetická energia takéhoto telesa bude

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2. \quad (7.2.1)$$

Veľkosť rýchlosti môžeme vyjadriť pomocou uhlovej rýchlosti a kinetickú energiu mô-



Obr. 7.2.1.

žeme vyjadriť takto

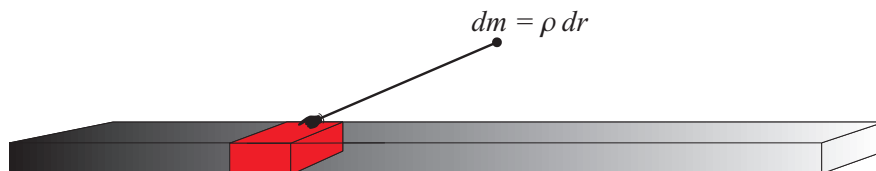
$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\omega l)^2 = \frac{1}{2}ml^2\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2, \quad (7.2.2)$$

kde

$$I = ml^2 \quad (7.2.3)$$

sa nazýva moment zotrvačnosti. **Moment zotrvačnosti je mierou toho, ako ťažko teleso roztočíme.** Má rovnakú úlohu ako hmotnosť pri posuvnom pohybe. To, ako ťažko teleso roztočíme, nezávisí iba od toho, ako je teleso ťažké, ale aj od toho, ako ďaleko sa teleso nachádza od osi otáčania. (Vo všeobecnom prípade od rozloženia hmoty vzhľadom na os otáčania.) Čím je teleso ďalej od osi, tým väčšiu námahu musíme vynaložiť na to, aby sme ho roztočili.

Predstavme si tenkú tyč rovnakej dĺžky l ako v predchádzajúcom príklade a rovnakej hmotnosti m , ktorá je rovnomerne rozmiestnená po celej dĺžke. Nech tyč rotuje okolo jedného konca a chceme vypočítať jej kinetickú energiu. Pretože každá časť tyče je v



Obr. 7.2.2.

inej vzdialenosti od osi otáčania, mali by sme vypočítať kinetickú energiu pre každú časť s hmotnosťou dm osobitne. Ich súčet bude výsledná kinetická energia rotujúcej tyče.

$$E_k = \sum_{i=1}^n E_{kn} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} dm v_i^2 \quad (7.2.4)$$

Ak teraz veľkosť rýchlosti v_i každého elementu dm vzdialeného o r_i vyjadríme pomocou uhlovej rýchlosti ω , ktorá je pre každý element rovnaká, tak pre kinetickú energiu dostaneme

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} dm v_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} dm r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 dm \sum_{i=1}^n r_i^2 \quad (7.2.5)$$

Pre presný výpočet nahradíme sumu integrálom a dostaneme

$$E_k = \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^l r^2 dm \quad (7.2.6)$$

Keďže hmotnosť elementu dm môžeme vypočítať pomocou hustoty $\rho = m/V$, kde $V = Sl$. (S je prierez tyče a dr je dĺžka elementu), tak integrál môžeme nasledovne vyriešiť:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^l r^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^l r^2 \rho S dr = \frac{1}{2} \rho S \omega^2 \int_0^l r^2 dr \\ &= \frac{1}{2} \rho S \omega^2 \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^l = \frac{1}{2} \rho S \omega^2 \frac{l^3}{3} = \frac{1}{2} \rho S l \omega^2 \frac{l^2}{3} = \frac{1}{2} \frac{m l^2}{3} \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 \end{aligned} \quad (7.2.7)$$

V tomto prípade je moment zotrvačnosti

$$I = \frac{m l^2}{3} \quad (7.2.8)$$

menší, ako v prípade telesa na nehmotnej tyči. Je to preto, lebo v prípade telesa na špagáte je všetka hmotnosť sústredená vo vzdialenosti l od osi otáčania. V prípade homogénnej tyče je hmotnosť rovnomerne rozložená po celej dĺžke, teda hmotnosť je sústredená bližšie k tyči. Vidíme tiež, že ak je hmotnosť m rovnomerne rozložená po celej dĺžke tyče, takáto tyč má menšiu kinetickú energiu, ako keď je všetka jej hmotnosť sústredená čo najďalej od osi otáčania. Teda homogénnu tyč ľahšie roztočíme.

Každé teleso má svoj moment zotrvačnosti vzhľadom na os, okolo ktorej rotuje a všeobecne ho možno vyjadriť takto:

$$I = k m l^2, \quad (7.2.9)$$

kde l je rozmer (väčšinou vzdialenosť okraju telesa od osi otáčania) a k je konštanta, ktorá vyjadruje, ako je sústredená hmotnosť vzhľadom na os otáčania. Napríklad pre guľu je $k = 2/5$, ak l je polomer gule a os otáčania prechádza stredom. Pre valec je $k = 1/2$, ak l je polomer valca a os otáčania je totožná s osou valca. Pre kruhový prstenec je moment zotrvačnosti vzhľadom na os, ktorá prechádza jeho stredom, rovnaký ako pre teleso na nehmotnej tyči. Je to preto, lebo všetka jeho hmotnosť je tiež rozmiestnená vo vzdialenosti l od osi otáčania.

Príklad 34 Po naklonenej rovine dĺžky s , ktorá zviera s vodorovnou rovinou uhol α spustíme súčasne homogénny valec a kus ľadu. Zistíme, ktoré z telies bude rýchlejšie a aký bude medzi nimi časový rozdiel. Trenie medzi ľadom a podložkou považujeme za nulové.

V oboch prípadoch koná prácu tiažové pole silou $f = mg \sin \alpha$. Teda potenciálna energia telesa v tiažovom poli $E_p = mgs \sin \alpha$ sa premení na kinetickú. V prípade ľadu bude

$$E_p = mgs \sin \alpha = \frac{mv^2}{2} \quad (7.2.10)$$

odkiaľ rýchlosť na konci dráhy s je

$$v = \sqrt{2gs \sin \alpha} \quad (7.2.11)$$

Vzhľadom na to, že uvažujeme nulové trenie, zrýchlenie telesa $a = g \sin \alpha$ a čas, za ktorý sa zošmykne ľad, bude

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g \sin \alpha}} \quad (7.2.12)$$

Zatiaľ čo ľad stačí iba roztlačiť, valec treba aj roztočiť. To znamená, že výsledná kinetická energia valca bude súčtom rotačnej a posuvnej, teda

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

kde $I = \frac{mr^2}{2}$ je moment zotrvačnosti valca a $\omega = v/r$ je uhlová rýchlosť valca. Rovnica pre valec teda bude:

$$mgs \sin \alpha = \frac{mv^2}{2} + \frac{\frac{mr^2}{2}\omega^2}{2} \quad (7.2.13)$$

Vzhľadom na fakt, že obvodová rýchlosť valca pri kotúľaní je rovnako veľká ako rýchlosť ťažiska, môžeme uhlovú rýchlosť vyjadriť pomocou obvodovej a dostaneme:

$$gs \sin \alpha = \frac{3v^2}{4} \quad (7.2.14)$$

odkiaľ rýchlosť na konci dráhy s je

$$v = \sqrt{\frac{4gs \sin \alpha}{3}} \quad (7.2.15)$$

a je menšia ako rýchlosť ľadu. Zo vzťahu (7.2.15) vyplýva, že dráha je úmerná štvorcu rýchlosti

$$s = \frac{3v^2}{4g \sin \alpha} = \frac{3}{2g \sin \alpha} \frac{v^2}{2} = \frac{v^2}{2a} \quad (7.2.16)$$

ide teda o rovnomerne zrýchlený pohyb so zrýchlením

$$a = \frac{2g \sin \alpha}{3} \quad (7.2.17)$$

Odtiaľ môžeme určiť celkový čas pohybu valca po dráhe s

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{3s}{g \sin \alpha}} \quad (7.2.18)$$

Ukážka 18 *Súťaž plechoviek s plastelínou: Do prázdnych plechoviek od diaboliek dáme rovnaké množstvo plastelíny, do jednej umiestnime plastelínu do stredu, do druhej po obvode. Obe naraz pustíme z tej istej naklonenej roviny. Jedna z nich sa bude rozbiehať pomalšie.*

Príklad 35 *Na papier položíme guľôčku s hmotnosťou m . Papier ťaháme po zemi so zrýchlením a_p . S akým zrýchlením sa bude pohybovať guľôčka? Prečo guľôčka po zastavení papiera zastane?*

Vzťažná sústava spojená s papierom je neinerciálna, kde na guľôčku pôsobí sila ma_p . Riešenie príkladu je analogické ako v príklade (34).

Príklad 36 *Na homogénnom valci s hmotnosťou m , ktorý sa môže otáčať okolo svojej osi bez trenia je namotané lano dĺžky l s nulovou hmotnosťou. Na voľný koniec lana upevníme závažie rovnakej hmotnosti m . Závažie sa v dôsledku pôsobenia vlastnej tiaže dá do pohybu. Určite rýchlosť pohybu závažia tesne pred odmotaním.*

$$mgl = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (7.2.19)$$

Ak do (7.2.19) dosadíme za moment zotrvačnosti valca $I = \frac{1}{2}mr^2$ a za uhlovú rýchlosť $\omega = \frac{v}{r}$, tak rýchlosť závažia bude

$$v = \sqrt{\frac{4gl}{3}} \quad (7.2.20)$$

7.3 Moment zotrvačnosti

Predstavme si, že chceme roztočiť dve malé ťažké gule rôznej hmotnosti m_1 a m_2 spojené nehmotnou tyčou dĺžky l okolo osi, ktorá je kolmá na tyč. Situácia je nakreslená na obrázku 7.3.1. Možností je veľa a my hľadáme takú os, aby sme gule roztočili s



Obr. 7.3.1.

najmenšou námahou. Čiže hľadáme takú os, vzhľadom na ktorú budú mať gule najmenší moment zotrvačnosti. Teda pre os hľadáme takú vzdialenosť x_1 od telesa 1, aby moment zotrvačnosti

$$I = m_1x_1^2 + m_2(l - x_1)^2 = \min \quad (7.3.1)$$

bol minimálny. Moment zotrvačnosti predstavuje kvadratickú funkciu s premennou x_1 , ktorá má minimum v takom bode, kde

$$\frac{dI}{dx_1} = 2m_1x_1 + 2m_2(x_1 - l) = 0 \quad (7.3.2)$$

ak vzdialenosť $l - x_1$ od telesa 2 označíme ako x_2 , dostaneme rovnicu (7.1.2)

$$m_1x_1 = m_2x_2 \quad (7.3.3)$$

čo je rovnica pre polohu ťažiska. **Teleso má najmenší moment zotrvačnosti okolo osi, ktorá prechádza ťažiskom.**

Toto platí pre ľubovoľné teleso, ak vyberáme spomedzi navzájom rovnobežných osí. Majme teda nejakú os O , ktorá neprechádza ťažiskom a okolo nej rotuje nejaké teleso konštantnou uhlovou rýchlosťou ω . Teleso má kinetickú energiu rovnú

$$E = \frac{I\omega^2}{2}, \quad (7.3.4)$$

kde I je moment zotrvačnosti vzhľadom na os O . Teraz si musíme uvedomiť, že ak chceme otočiť teleso okolo O o nejaký uhol, môžeme to urobiť tak, že najskôr ho otočíme okolo ťažiska o ten istý uhol a potom posunieme teleso tak, aby sa ťažisko pohybovalo po kružnici s polomerom a okolo O . Najlepšie bude, ak si to vyskúšame s perom na stole. Rotácia okolo osi O sa teda skladá z dvoch pohybov: ťažisko sa otáča okolo osi O po kružnici s polomerom a v takomto prípade má teleso kinetickú energiu

$$E = \frac{ml^2\omega^2}{2}, \quad (7.3.5)$$

kde m je hmotnosť telesa. Druhý pohyb je čistá rotácia okolo ťažiska. Vtedy má teleso kinetickú energiu

$$E = \frac{I_T\omega^2}{2}, \quad (7.3.6)$$

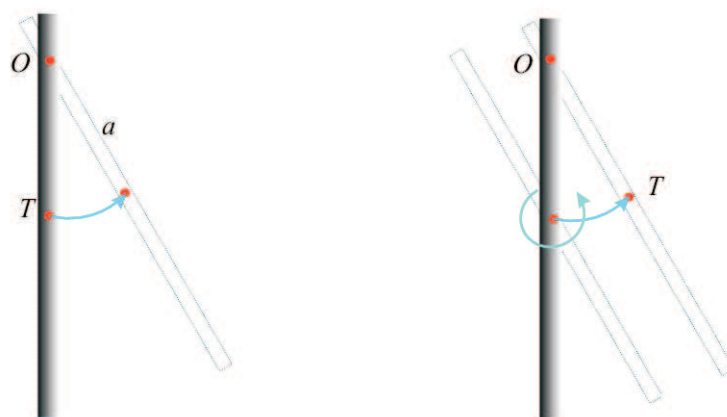
kde I_T je moment zotrvačnosti telesa okolo ťažiska. Pre celkovú energiu rotácie potom platí

$$E = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{I_T\omega^2}{2} + \frac{ml^2\omega^2}{2} \quad (7.3.7)$$

ak teraz rovnicu zjednodušíme dostaneme **Steinerovu vetu**:

$$I = I_T + ml^2 \quad (7.3.8)$$

Teda moment zotrvačnosti vzhľadom na ľubovoľnú os O je rovný momentu zotrvačnosti vzhľadom na rovnobežnú os T prechádzajúcu ťažiskom, plus hmotnosť telesa násobená štvorcom vzdialeností medzi oboma osami, čo predstavuje moment zotrvačnosti hmotného bodu s hmotnosťou telesa umiestneného v ťažisku vzhľadom na os O . Keďže ml^2 je vždy kladné, tak každý moment zotrvačnosti vzhľadom na ľubovoľnú os O je väčší ako moment zotrvačnosti vzhľadom na rovnobežnú os T prechádzajúcu ťažiskom.



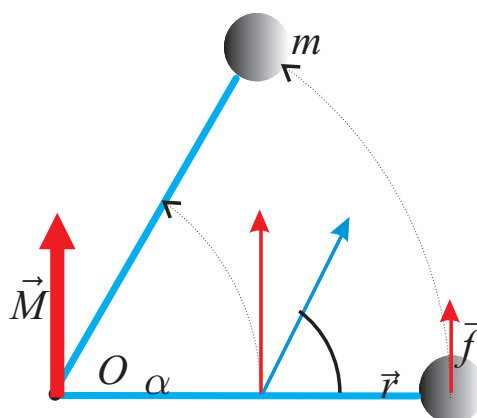
Obr. 7.3.2. Ak chceme otočiť teleso okolo O o nejaký uhol, môžeme to urobiť aj tak, že najskôr ho otočíme okolo ťažiska o ten istý uhol a potom posunieme ťažisko okolo O po kružnici s polomerom a

7.4 Moment sily

Doteraz sme sa zaoberali rotáciou telesa, ale nepísali sme o príčine takéhoto pohybu. Rotácia je určitý druh pohybu. Aby vznikol pohyb, musíme pôsobiť silou. Rotácia je tiež dôsledok pôsobenia sily. Pri vzniku rotácie však nezáleží len na veľkosti a smere sily, ale aj na mieste, v ktorom sila pôsobí. Ak pôsobíme silou na teleso v ťažisku, tak rotácia nevznikne a teleso sa bude iba rozbiehať podľa 2. Newtonovho zákona: $f = ma$. Ak pôsobíme na teleso mimo ťažiska, tak sa teleso začne aj otáčať. Čím ďalej od ťažiska budeme pôsobiť, tým viac prispeje pôsobenie sily k rotácii a menej k posuvnému pohybu.

Ukážka 19 Na hladký stôl položíme tyč a udeľujeme jej kolmo na ňu krátke impulzy v rôznych vzdialenostiach od ťažiska.

Na zjednodušenie úvah budeme najskôr uvažovať o otáčaní telesa okolo pevnej osi. Predstavme si napríklad malé teleso s hmotnosťou m upevnené na nehmotnej tyči



Obr. 7.4.1.

dĺžky r , ktoré sa môže otáčať vo vodorovnej rovine okolo zvislej osi O tak, ako je to na Obr. 7.4.1. Teleso budeme rozbiehať pôsobením sily, ktorá má konštantnú veľkosť f

a mení iba smer tak, že je kolmá na tyč. Takáto sila pôsobí na teleso po dráhe s , čím ho otočíme o uhol φ . Pretože teleso je vo vzdialenosti r od osi otáčania, dĺžka dráhy bude $s = r\varphi$. Pri rozbiehaní telesa sme vykonali prácu

$$W = fs = fr\varphi \quad (7.4.1)$$

čím sme telesu udelili kinetickú energiu. Rovnakú energiu môžeme telesu udeliť pri otočení o rovnaký uhol φ aj inak. Budeme rozbiehať teleso tak, že pôsobíme silou f_i vo vzdialenosti r_i bližšie ku osi O . V tomto prípade pôsobíme silou f_i po kratšej dráhe $s_i = r_i\varphi$. Aby sme vykonali rovnakú prácu, musí byť sila f_i väčšia ako f a platí:

$$W = fr\varphi = f_i r_i \varphi = M\varphi \quad (7.4.2)$$

Veličinu $M = f_i r_i = fr$ nazývame veľkosť krútiaceho momentu, alebo momentu sily. V prípade, že sila zvierá s ramenom uhol α , tak pre veľkosť momentu sily platí $M = fr \sin \alpha$. Ak rameno je dané polohovým vektorom vedúcim z bodu O do miesta, kde sila pôsobí, tak moment sily je daný vektorovým súčinom

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{f}. \quad (7.4.3)$$

Poznámka 23 Ak položíme pravú ruku na teleso tak, že polohový vektor mieri do dlane a prsty ukazujú smer sily, tak vystretý palec ukazuje, kam smeruje moment sily.

Poznámka 24 Tak ako moment sily, aj uhlová rýchlosť a uhlové zrýchlenie sú vektorové veličiny.

Príklad 37 Akou silou pôsobia na teleso čeluste zveráka, ktorý teleso deformuje tak, že pri doťahovaní pôsobíme konštantným momentom sily M ? Závity sú vyrezané tak, že ak otočíme doťahovák o uhol φ , priblížia sa čeluste o x .

Pri otočení φ vykonáme prácu $W = M\varphi$. Naopak deformované teleso koná zápornú prácu $W = fx$. Ak neuvažujeme energetické straty spôsobené trením, tak obe práce sa čo do veľkosti rovnajú. Pre silu potom platí:

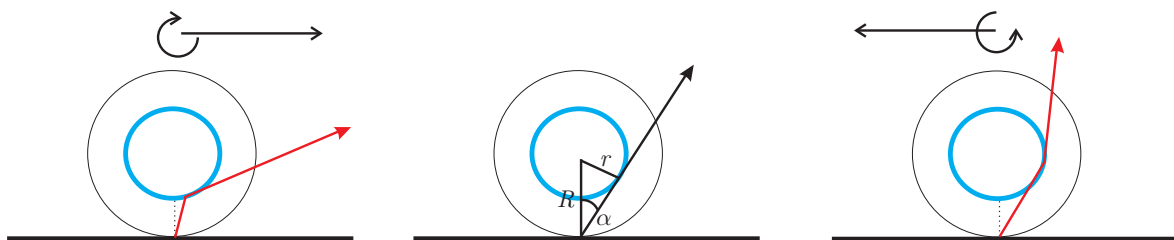
$$f = \frac{M\varphi}{x}.$$

Ukážka 20 Majme dve kolesá s polomerom R spojené oskou s polomerom $r < R$. Na oske je navinutý špagát. Ak budeme špagát ťahať, tak pri určitom uhle pôjdu kolesá k nám, v smere ťahu. Pri inom uhle pôjdu od nás. (Pokus môžeme urobiť zo špulkou a niťou.)

Pôsobisko sily je v mieste, kde sa špagát odmotáva od osky a smer sily je rovnobežný z odmotaným špagátom. Ak uvažujeme, že os otáčania je v mieste, kde sa kolesá dotýkajú zeme (je to jediný bod, susedné body z oboch strán sú vyššie), tak rameno vedie od osi otáčania po pôsobisko. Ak je smer sily rovnobežný s ramenom (Obr. 7.4.2 v strede), tak moment sily je nulový a kolesá sa neroztáčajú. Toto je splnené, ak

$$\sin \alpha = \frac{r}{R} \quad (7.4.4)$$

kde α je uhol medzi špagátom a zvislou čiarou. Ak je α väčšie (Obr. 7.4.2 vľavo), tak špagát sa navíja a kolesá idú zľava doprava. Ak je α menšie (obrázok 7.4.2 vpravo), tak špagát sa odvíja a kolesá idú v opačnom smere.



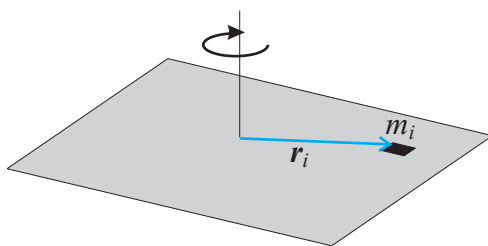
Obr. 7.4.2.

7.5 Moment hybnosti

Pri posuvnom pohybe stačí na určenie pohybového stavu telesa jeho hybnosť. Ak chceme pohybový stav pri posuvnom pohybe meniť, musíme na teleso pôsobiť silou, kde sila je rovná rýchlosti, akou sa mení hybnosť:

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (7.5.1)$$

V nasledujúcom texte budeme rozoberať pohybový stav rotujúceho telesa. Predstavme si rotujúce teleso, napríklad dosku z obrázka 7.5.1, ktorá sa skladá z molekúl, kde každá má hmotnosť m_i a je určená polohovým vektorom $\vec{r}_i$.



Obr. 7.5.1.

Ak chceme zmeniť pohybový stav jej rotácie, musíme na teleso pôsobiť momentom sily

$$\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{f}_i, \quad (7.5.2)$$

kde $\vec{f}_i$ je sila pôsobiaca na i -tu molekulu. Ak silu $\vec{f}_i$ vyjadríme ako zmenu hybnosti $\vec{p}_i$ v čase, môžeme moment sily vyjadriť takto:

$$\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d(\sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i)}{dt} \quad (7.5.3)$$

Veličina, ktorá sa v čase mení v dôsledku pôsobenia momentu sily, sa nazýva **moment hybnosti**

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \quad (7.5.4)$$

a určuje pohybový stav telesa pri rotácii. Vzhľadom na fakt, že všetky vektorové súčiny majú rovnaký smer (sú kolmé na rovinu dosky), pre veľkosť momentu hybnosti platí:

$$L = \sum_i r_i p_i = \sum_i r_i m_i v_i = \sum_i r_i^2 m_i \omega = I \omega \quad (7.5.5)$$

Teda pohybový stav pri rotácii je daný súčinom momentu zotrvačnosti a uhlovej rýchlosti a pre veľkosť momentu sily platí:

$$M = \frac{dL}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} \quad (7.5.6)$$

V prípade, že uvažujeme konštantný moment zotrvačnosti, teda že teleso nemení svoj tvar, môžeme písať:

$$M = I \frac{d\omega}{dt} = I\epsilon \quad (7.5.7)$$

Poznámka 25 Všímnime si analógiu so zákonom sily.

Príklad 38 Po obvode kruhovej dosky, ktorá sa môže otáčať okolo stredy, sa rozbieha vozík s hmotnosťou m konštantným zrýchlením a . Určte, aký moment hybnosti bude mať doska po dobe T , ak poznáme polomer.

Aby sa vozík mohol rozbiehať, musí na neho pôsobiť sila $f = ma$ zo zákona akcie a reakcie. Vozík sa zapiera o dosku, teda pôsobí na dosku rovnako veľká sila, ale opačného smeru, ktorá vytvára moment sily

$$M = mar = -\frac{L}{T}$$

odkiaľ dostaneme moment hybnosti dosky:

$$L = -mraT$$

Poznámka 26 $L = -mraT = -mrv = -pr$ je moment hybnosti dosky a pr je moment hybnosti vozíka. Rovnica vyjadruje fakt, že celkový moment hybnosti sa nezmenil.

7.6 Zákon zachovania momentu hybnosti

Zákon zachovania momentu hybnosti môžeme vysloviť v analógii so zákonom zachovania hybnosti: **ak na systém telies nepôsobia vonkajšie momenty síl, tak moment hybnosti tohoto systému zostáva konštantný.**

Ukážka 21 Postavíme sa na otáčavú stoličku a pred sebou roztočíme bicyklové koleso vo vodorovnej rovine.

Stolička sa s nami začne otáčať na opačnú stranu. Na začiatku bol moment hybnosti sústavy nulový. Pretože moment sily pôsobiaci na koleso nebol vonkajší, ale bol vytvorený v rámci sústavy, bude moment hybnosti sústavy nulový aj po roztočení kolesa a platí:

$$I\omega + I_k\omega_k = 0, \quad (7.6.1)$$

kde $I_k\omega_k$ je moment hybnosti kolesa a $I\omega$ je moment hybnosti zvyšku sústavy.

Ukážka 22 Postavíme sa na otáčavú stoličku a necháme sa roztočiť tak, že máme rozpažené ruky a držíme v nich približne 5 kg činky. Keď ruky pripažíme, zvýši sa naša uhlová frekvencia.

Na začiatku bol moment hybnosti sústavy $L_1 = I_1\omega_1$. Tým, že pripažíme ruky, sústreďujeme hmotnosť bližšie k osi otáčania, čím zmenšíme moment zotrvačnosti na $I_2 < I_1$. Pretože sústava nebola ovplyvňovaná vonkajším momentom sily, moment hybnosti sa nemení, a teda musí sa zvýšiť uhlová frekvencia a platí:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \quad (7.6.2)$$

Poznámka 27 Pripažovaním rúk prekonávame odstredivú silu, čím konáme na sústave prácu, čo má za následok, že kinetická energia sústavy sa zvýši.

Poznámka 28 Ak pripažujeme ruky a činky sa približujú k osi otáčania, tak prechádzajú z miesta, kde sa pôvodne pohybovali väčšou obvodovou rýchlosťou do miesta, ktoré sa otáčalo menšou obvodovou rýchlosťou. Takže sú brzdené a reakcie na brzdné sily roztáčajú môj trup.

Príklad 39 Predstavme si teleso s hmotnosťou m , ktoré rotuje na špagáte dĺžky r_1 a zanedbateľnej hmotnosti. Teleso rotuje okolo pevnej osi tangenciálnou rýchlosťou v_1 . Ako sa zmení tangenciálna rýchlosť telesa, ak špagát rovnomerne skracujeme až na dĺžku r_2 ?

Zo zákona zachovania momentu hybnosti platí:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

Teleso na špagáte má moment zotrvačnosti $I = mr^2$, ak ho dosadíme do poslednej rovnice, dostaneme

$$mr_1^2\omega_1 = mr_2^2\omega_2$$

odkiaľ získame vzťah pre rýchlosť

$$v_2 = \frac{v_1 r_1}{r_2}$$

Príklad 40 Vypočítajte veľkosť mechanickej práce, ktorú sme vykonali pri skracovaní špagátu v predchádzajúcom príklade.

$$W = \int_{r_1}^{r_2} f dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{mv^2}{r} dr$$

Zo zákona zachovania momentu hybnosti a z predchádzajúceho príkladu platí, že $v_1 r_1 = v r = v_2 r_2$. Využitím tejto rovnosti môžeme prácu vyjadriť nasledovne:

$$W = m \int_{r_1}^{r_2} \frac{v_1^2 r_1^2}{r^3} dr = mv_1^2 r_1^2 \left[\frac{-1}{r^2} \right]_{r_1}^{r_2} dr = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2}$$

Poznámka 29 Veľkosť práce môžeme zistiť aj so zákona zachovania energie:

$$\frac{1}{2}I_1\omega_1^2 - \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2}$$

7.7 Coriolisova sila

Predpokladajme, že sa nachádzame v strede rotujúcej platne a nevidíme okolie. Teda sme v neinerciálnej vzťažnej sústave spojenej s platňou. Začneme sa poháňať rovnomernou rýchlosťou v_n smerom k jej okraju po rovnej čiare nakreslenej na platni od stredu po jej okraj. Pretože platňa rotuje konštantnou rýchlosťou ω , s rastúcim polomerom $r(t)$ sa zväčšuje aj naša tangenciálna rýchlosť v_t , a teda aj moment hybnosti $L = mv_t r = m\omega r^2$. To znamená, že na nás pôsobí moment sily

$$M = \frac{dL}{dt} = \frac{dm\omega r^2}{dt} = m\omega \frac{dr^2}{dt} = m\omega 2r \frac{dr}{dt} = 2m\omega r v_n \quad (7.7.1)$$

Veľkosť sily, ktorá na nás pôsobí v danom okamihu, je

$$F_c = 2m\omega v_n \quad (7.7.2)$$

Silu, ako vektorovú veličinu, môžeme zapísať:

$$\vec{F}_c = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_n \quad (7.7.3)$$

a nazýva sa Coriolisova sila. V dôsledku tejto sily sa na severnej pologuli točí vzduch okolo tlakovej níže proti smeru hodinových ručičiek. Je to preto, že vzduch v dôsledku vyrovnania tlakov prúdi smerom do miesta tlakovej níže. Vzduch, ktorý prúdi zo severu sa vzdaluje od osi otáčania, Coriolisova sila ho stáča na západ. Naopak vzduch, ktorý prúdi z juhu, sa približuje k osi otáčania, Coriolisova sila ho stáča v opačnom smere, čo spôsobuje vír nakreslený na Obr. 7.7.1.

Poznámka 30 Coriolisovu silu nemožno počítať iba zo zmeny tangenciálnej rýchlosti, pretože pri Coriolisovej sile sa nemení iba tangenciálna rýchlosť, ale aj polomer.

Príklad 41 Na rotujúcej platni je nakreslená rovná čiara, ktorá pretína os otáčania. Aká celková sila pôsobí na človeka, ktorý sa pohybuje po tejto čiare?

Celková sila, ktorá na nás pôsobí bude súčtom troch síl: odstredivá + Coriolisova + tiažová. Keďže sú sily na seba kolmé, musíme ich sčítať ako vektory. Pre výslednú veľkosť sily platí:

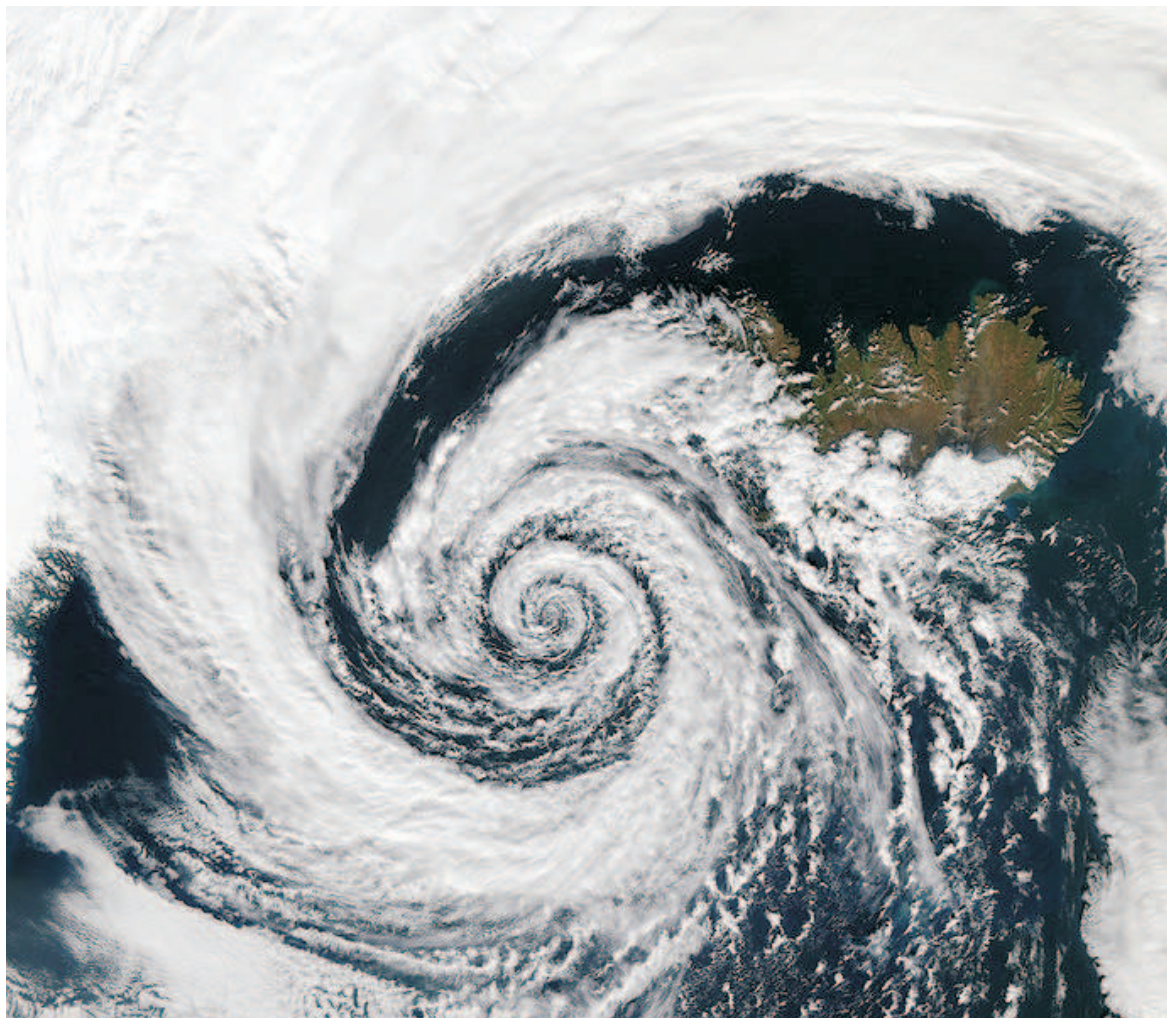
$$f = \sqrt{f_o^2 + f_c^2 + f_g^2} = m\sqrt{(\omega^2 r)^2 + (\omega v_n^2)^2 + g^2} \quad (7.7.4)$$

Príklad 42 Predpokladajme, že sa nachádzam na rotujúcej platni vo vzdialenosti r od jej stredu. Rotácia platne sa mení s konštantným uhlovým zrýchlením ϵ . Aká celková sila na mňa pôsobí?

Okrem odstredivej a tiažovej sily na nás pôsobí aj tangenciálna sila $f_t = ma_t = m\epsilon r$. Celkovú silu dostaneme ako vektorový súčet všetkých troch navzájom kolmých síl.

8 Typy spojitého materiálu

Fyzikálne látky sa skladajú z molekúl, ktorých rozmery sú rádovo 10^{-10} m a hmotnosti 10^{-25} kg. Napríklad hmotnosť molekuly kyslíka je $m(O_2) = 5,31 \cdot 10^{-26}$ kg. Fyzikálne látky sa môžu vyskytovať v štyroch skupenstvách: **kvapalina, plyn, tuhá látka, plazma**.



Obr. 7.7.1. Tlaková níž nad Islandom (Zdroj: Wikipedia)

8.1 Kvapaliny

Kvapaliny sa vyznačujú voľným pohybom molekúl, ktorých vzájomné vzdialenosti sú porovnateľné s rozmermi ich molekúl. Sú ľahko tvarovateľné, ale takmer nestlačiteľné.

Ak máme kvapalinu uzavretú v nádobe s piestom (napr. injekčná striekačka) a začneme piestom tlačiť na kvapalinu, tak čím väčšou silou tlačíme piest, tým viac kvapalina tlačí na všetky steny nádoby. Mierou toho, ako veľmi kvapalina tlačí na steny nádoby, je tlak kvapaliny. **Tlak kvapaliny** je skalárna veličina a je definovaný ako veľkosť sily f pôsobiacej kolmo na plochu S :

$$p = \frac{f}{S} \quad (8.1.1)$$

z čoho vyplýva, že pre jednotku tlaku Pascal platí: $Pa = N \cdot m^{-2}$.

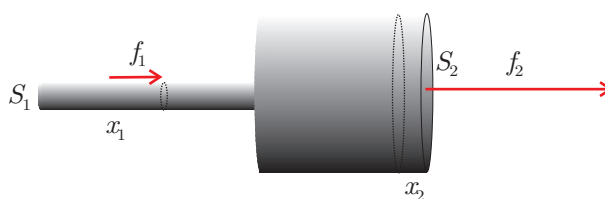
Ak pôsobíme externou silou na povrch kvapaliny, zmena tlaku v kvapaline je vo všetkých jej miestach a smeroch rovnaká a je úmerná tomu, ako silno pôsobíme.

Ukážka 23 V sklenenej nádobe s piestom (môžeme použiť plastovú fľašu, do ktorej fúkame vzduch pomocou pumpy na loptu cez štupel) máme uzavretú sódovú vodu s bublinami. Pomocou piestu zvyšujeme tlak v kvapaline.

Pozorujeme, že bubliny sa vo všetkých miestach zmenšujú rovnako, pretože tlak kvapaliny je vo všetkých miestach rovnaký, zachovávajú si tvar gule, pretože tlak kvapaliny je vo všetkých smeroch rovnaký a sú tým menšie, čím väčšou silou pôsobíme na piest.

Poznámka 31 Opačný jav pri klesaní tlaku možno pozorovať, ak si otvoríme fľašu piva.

Príklad 43 Uvažujme spojené trubice nakreslené na obrázku 8.1 (hydraulický lis), ktoré majú z oboch strán piesty s plochami S_1 a S_2 . Akou silou musíme pôsobiť na piest zľava, ak na deformáciu telesa pravým piestom potrebujeme vyvinúť silu f_2 ?



Pri deformácii telesa sa pravý piest posunie o vzdialenosť x_2 . To znamená, že z tenkej trubice natečie do hrubej voda s objemom

$$V = S_2 x_2 = S_1 x_1 \quad (8.1.2)$$

Ak posúvame piestom pomaly (kinetická energia a viskozita vody je zanedbateľná), tak práca, ktorú vykonáme posúvaním ľavého piestu, musí byť rovná práci, ktorá deformuje teleso:

$$W = f_1 x_1 = f_2 x_2 = pV \quad (8.1.3)$$

odkiaľ môžeme vyjadriť silu

$$f_1 = \frac{pV}{x_1} = \frac{pS_1x_1}{x_1} = pS_1 \quad (8.1.4)$$

a celkový tlak v kvapaline

$$p = \frac{f_1}{S_1} = \frac{f_2}{S_2} \quad (8.1.5)$$

Príklad 44 Akou silou musíme pôsobiť na piest zľava v predchádzajúcom príklade, ak deformáciu konáme natoľko rýchlo, že nemôžeme zanedbať zmenu kinetickej energie v trubiciach.

Pravý piest s prierezom S_2 sa posunie o vzdialenosť x_2 za čas t . To znamená, že voda v širšej trubici bude mať rýchlosť $v_2 = \frac{x_2}{t}$. Ľavý piest sa posunie o väčšiu vzdialenosť x_1 , teda voda v užšej trubici bude mať rýchlosť $v_1 = \frac{x_1}{t}$. To znamená, že hmotnosť vody m , pri prechode z užšej trubice do širšej stráca rýchlosť, a teda aj kinetickú energiu, kde

$$\Delta E_k = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2} = \frac{\rho V v_1^2}{2} - \frac{\rho V v_2^2}{2} \quad (8.1.6)$$

je strata kinetickej energie objemu vody V ktorá má hustotu ρ . To znamená, že pri rýchlom stláčaní piestu nám stačí konať menšiu prácu, ako pri pomalom:

$$f_1x_1 = f_2x_2 - \frac{\rho V}{2} (v_1^2 - v_2^2) \quad (8.1.7)$$

Na ľavý piest nám stačí menej tlačiť, kým pravý piest deformuje rovnaké teleso, teda v tenšej trubici bude menší tlak ako v hrubšej. Ak sily na piesty vyjadríme pomocou tlakov $f_1 = p_1S_1$, $f_2 = p_2S_2$, dostaneme

$$p_1S_1x_1 = p_2S_2x_2 - \frac{\rho V}{2} (v_1^2 - v_2^2) \quad (8.1.8)$$

a po vydelení objemom získame **Bernoulliho rovnicu**:

$$p_1 = p_2 - \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v_2^2) \quad (8.1.9)$$

Poznámka 32 V reálnej situácii nemôžeme zanedbať vnútorné trenie kvapaliny, ktoré sa nazýva viskozita.

Ukážka 24 Ak fúkneme medzi dva papiere, tak prúdením vzduchu medzi nimi sa zníži tlak a papiere sa priblížia.

Ukážka 25 Pingpongová loptička pri točitom údere zatáča tým smerom, kde rotácia zvyšuje relatívnu rýchlosť obtekania.

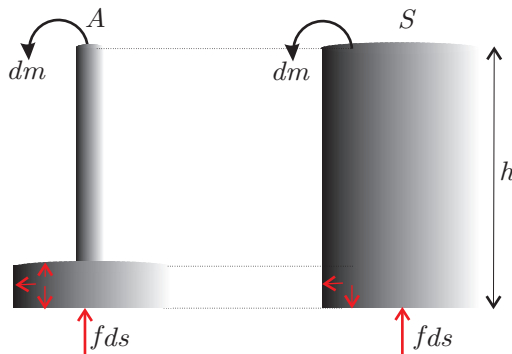
V experimentoch na Zemi musíme brať do úvahy aj **vplyv vonkajších síl**. Napríklad pod vplyvom gravitačnej sily sa tlak kvapaliny v nádobe mení v závislosti od hĺbky. Ak máme v nádobe v tvare valca s plochou podstavy S naliatu vodu s hustotou ρ do výšky h , tak na dno pohára pôsobí tlak vody spôsobený jej tiažou a tiažou stĺpca atmosféry nad povrchom hladiny. Inými slovami **hydrostatický tlak**

$$p_h = \frac{mg}{S} = \frac{\rho Shg}{S} = \rho hg \quad (8.1.10)$$

plus **atmosferický tlak**

$$p_a = 10^5 [Pa] \quad (8.1.11)$$

Príklad 45 Dve trubice po vrch naplnené vodou nakreslené na Obr. 8.1 majú zospodu piesty s rovnakými prierezmi S . Zhora sú otvory s prierezom S a menším prierezom A . Na ktorý piest musíme tlačiť väčšou silou, aby sme vodu udržali v trubiciach?



Na prvý pohľad za zdá, že na piest vpravo treba pôsobiť väčšou silou, pretože trubica vpravo obsahuje viac vody. Ak by sme však pohli oboma piestami veľmi pomaly po malej dráhe ds smerom nahor, tak z vrchu oboch trubíc sa nám vyleje rovnaké množstvo vody

$$dm = \rho S ds \quad (8.1.12)$$

To znamená, že potenciálna energia kvapaliny sa nám zvýši v oboch prípadoch o rovnakú hodnotu:

$$dE_p = \rho S ds gh \quad (8.1.13)$$

V oboch prípadoch konáme rovnakú prácu, čím zdvihneme vodu s hmotnosťou ρSh do výšky ds , a teda musíme zospodu pôsobiť rovnakou silou.

Poznámka 33 Ak postavíme obe trubice na váhu, tak váhy budú ukazovať samozrejme ich hmotnosti, lebo tlaková sila na spodný piest v ľavej trubici je čiastočne kompenzovaná tlakovou silou pôsobiacou na vrch tam, kde sa spája široká časť s úzkou.

Poznámka 34 V mieste, kde sa spája tenká trubica dĺžky l s hrubou, pôsobí hmotnosť vody na plochu A silou $f = \rho A l g$, čím vytvára tlak $p = \rho l g$, ktorý nezávisí od toho, aká je trubica hrubá.

V nasledujúcom texte bližšie rozoberieme, ako závisí tlak kvapaliny od tiažového poľa Zeme: Predstavme si v nádobe s vodou malú myslenú kocku s hranou a a s podstavou rovnobežnou s hladinou. Na kocku pôsobí tiažová sila ktorá má veľkosť

$$f = mg = \rho a^3 g \quad (8.1.14)$$

Aby sa kocka v dôsledku pôsobenia tejto sily nepohybovala, musí na ňu pôsobiť rovnako veľká sila opačného smeru, ktorá je dôsledkom rozdielu tlakov vody na vrch a na spodok kocky:

$$f = \rho a^3 g = \Delta p a^2 \quad (8.1.15)$$

táto sila sa nazýva **hydrostatická vztlaková sila**. V dôsledku tejto sily sú všetky telesá ponorené do kvapaliny nadľahčované.

Pre veľmi malú kocku môžeme aproximovať diferenciu diferenciálom a obe strany rovnice (8.1.15) vydělíme podstavou, získame vzťah závislosti zmeny tlaku Δp od hĺbkového rozdielu $a = \Delta h$:

$$dp = \rho g dh \quad (8.1.16)$$

Potom po integrovaní oboch strán od nulovej hĺbky, kde pôsobí atmosferický tlak p_a

$$\int_{p_a}^p dp = \int_0^h \rho g dh \quad (8.1.17)$$

dostaneme lineárnu závislosť hydrostatického tlaku od hĺbky:

$$p - p_a = \rho gh \quad (8.1.18)$$

Príklad 46 V pohári vo vode pláva kocka ľadu. Ako sa zmení vodná hladina, keď sa ľad roztopí?

Pre kocku ľadu je v rovnováhe tiažová sila s hydrostatickou vztlakovou:

$$mg = \rho ghS \quad (8.1.19)$$

kde h je hĺbka ponoru, S je plocha spodnej steny kocky, na ktorú pôsobí tlak a ρ je hustota vody. Ak obe strany rovnice vydělíme tiažovým zrýchlením, tak zistíme, že pre hmotnosť ľadu platí:

$$m = \rho hS \quad (8.1.20)$$

To znamená, že hmotnosť ľadu musí byť rovná hmotnosti vytlačenej vody s objemom hS . Keďže ľad pri topení hmotnosť nemení, po roztopení získame práve toľko vody. To znamená, že hladina sa po roztopení ľadu nezmení.

Ukážka 26 V plastovej fľaši s vodou je voľne ponorené kvapkátko, v ktorom je vzduchová bublina. Ak stlačíme nádobu, tak zvyšujeme tlak vody a cez dieru v kvapkátku vháňame vodu, čím zmenšujeme bublinu. Kvapkátko je ťažšie a klesá nadol. Naopak ak nádobu držíme zľahka, tlak vody je menší, bublina väčšia a kvapkátko stúpa nahor.

Príklad 47 Akou silou pôsobí voda hlboká $h = 5$ m na priehradný múr dlhý $l = 20$ m?

Na plochu dS v hĺbke y pôsobí sila

$$df = \rho y g dS = \rho y g l dy \quad (8.1.21)$$

Celková sila je

$$f = \int_0^h \rho y g l dy = \frac{\rho h^2 g l}{2} = 2500 \text{ kN} \quad (8.1.22)$$

Príklad 48 Aký maximálny výkon môže dosiahnuť elektrárňa postavená na priehrade z predchádzajúceho príkladu, ak do priehrady priteká potokom každú sekundu 1 m^3 vody?

Ak udržiavame konštantný prietok cez priehradu, tak každú sekundu sa premiestni kubík vody zvrchu naspodok priehrady, čo zodpovedá rýchlosti poklesu potenciálnej energie vody

$$V = \frac{mgh}{t} = \frac{1000 \text{ kg } 10 \text{ m.s}^{-2} 5 \text{ m}}{1 \text{ s}} = 50 \text{ kW} \quad (8.1.23)$$

Teraz záleží od toho, akým spôsobom získavame prácu. Ak máme na spodku priehrady turbíny, tak prácu koná hydrostatická tlaková sila pôsobiaca na lopatky.

Príklad 49 *Aký veľký otvor treba vyrobiť na spodku priehrady, aby sme udržiavali konštantnú hladinu, ak odstavíme elektrárňu?*

Zo spodku bude vytekať voda bez toho, aby konala prácu. To znamená, že celá potenciálna energia vody mgh , ktorá sa premiestni z vrchu na spodok, sa premení na kinetickú $\frac{mv^2}{2}$ a voda bude vytekať konštantnou rýchlosťou

$$v = \sqrt{2hg} = 10 \text{ m.s}^{-1} \quad (8.1.24)$$

Keďže pre konštantný prietok platí $\frac{V}{t} = Sv = 1 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$, tak otvor musí mať plochu

$$S = \sqrt{\frac{1}{2hg}} = 0,1 \text{ m}^2 \quad (8.1.25)$$

Poznámka 35 *Vzťah (8.1.24) pre rýchlosť výtoku môžeme získať aj z Bernoulliho rovnice.*

Príklad 50 *S akým maximálnym zrýchlením sa môže rozbiehať auto, ktoré má v nádobu v tvare kocky do polovice naliatu kvapalinu, aby sa nevyliala? Určte, ako sa zmení maximálny tlak v kvapaline.*

Zrýchľujúce auto predstavuje neinerciálnu vzťažnú sústavu, kde na ľubovoľný predmet pôsobí okrem tiažovej sily aj sila, ktorá vznikla ako dôsledok zrýchlenia auta. Ak sa nachádzame v takomto aute, máme pocit, že sa zvýši tiažová sila a zmení svoj smer. Teda výsledná sila $\vec{f}$ pôsobiaca na každú molekulu vody s hmotnosťou m je

$$\vec{f} = \vec{f}_g + \vec{f}_a = m\vec{g} + m\vec{a} = m(\vec{g} + \vec{a})$$

a má všade rovnaký smer. Situáciu možno chápať tak, že zrýchlenie auta mení smer aj veľkosť celkovej intenzity pôsobiacej na kvapalinu v aute, ktorá spôsobuje hydrostatický tlak. Teda vo vzťahu pre hydrostatický tlak bude namiesto intenzity $\vec{g}$ vystupovať intenzita $\vec{g} + \vec{a}$. Pre tlak vody potom dostaneme:

$$p = \rho h |\vec{g} + \vec{a}| = \rho h \sqrt{g^2 + a^2}$$

Maximálny uhol, ako sa môže nakloniť hladina v dôsledku zrýchlenia auta je $\frac{\pi}{4}$. To znamená maximálne zrýchlenie auta nesmie prekročiť hodnotu tiažového zrýchlenia. Maximálny tlak kvapaliny bude v zadnom spodnom rohu auta. Toto miesto je vzdialené od povrchu kvapaliny o $h = \sqrt{2}b$, kde b je hrana kocky. Pre maximálny tlak v aute potom dostaneme:

$$p = \rho hg = \rho \sqrt{2}b \sqrt{2}g = 2b\rho g$$

čo je dvojnásobný tlak, ako keď je auto v pokoji.

Príklad 51 Ako hlboká môže byť studňa, aby sme z nej mohli čerpať vodu cez hadicu podtlakom?

Minimálny tlak, ktorý sme schopní v hadici vytvoriť je nulový. Potom bude voda do hadice vtlačať atmosferický tlak $P_a = 10^5$ Pa. Aby mohla voda cez hadicu zo studne vytekať, tak musí byť atmosferický tlak väčší ako hydrostatický na spodku hadice:

$$P_a > h\rho g \quad (8.1.26)$$

odkiaľ zistíme, že hĺbka studne musí byť menšia ako 10 m.

8.2 Plyny

Plynné látky sa vyznačujú voľným pohybom molekúl, ktorých vzájomné vzdialenosti sú oveľa väčšie ako ich rozmery. (10 - 100 až viackrát.) Napríklad model jedno atómového plynu si môžeme predstaviť ako množstvo pružných loptičiek, ktoré lietajú rôznymi smermi a do seba pružne narážajú. My sa budeme zaoberať zjednodušeným modelom, tzv. **ideálnym plynom**, kde rozmery loptičiek zanedbáme.

Plyn, respektíve stav plynu, charakterizujú tri stavové veličiny: objem V , tlak p , teplota T .

Ak uzavrieme N molekúl plynu do nádoby s pohyblivým piestom (*môžeme použiť napr. injekčnú striekačku*) môžeme pohybom piestu zmenšovať, prípadne zväčšovať jeho **objem** V . Pretože rozmery molekúl sú malé v porovnaní so vzájomnými vzdialenosťami, má plyn dosť miesta aby sa stlačil, čím sa zmenší jeho objem a zväčší jeho hustota. Naopak fakt, že molekuly plynu sa pohybujú, má za následok, že pri zväčšovaní objemu nádoby sa plyn rozťahne rovnomerne po celej nádobe a jeho hustota sa zmenší.

Pri stláčaní piesta pohybujeme piestom proti narážajúcim molekulám, čím ich urýchľujeme. Zároveň zmenšovaním objemu zväčšujeme hustotu molekúl. Teda v stlačennom plyne narazí viac rýchlejších molekúl na stenu nádoby za sekundu ako v pôvodnom nestlačenom, a tak sa zväčší sila f , ktorá pôsobí na danú stenu plochy S . Tým sa zvýši **tlak plynu**

$$p = \frac{f}{S} \quad (8.2.1)$$

(Opačný proces nastane pri rozpínaní.)

Ďalšia stavová veličina – **teplota plynu** T súvisí s neusporiadaným pohybom molekúl a je úmerná priemernej kinetickej energii jednej jeho molekuly. Teda pri stláčaní plynu, keď piest molekuly rozbíha, sa teplota zvyšuje a pri rozpínaní naopak znižuje. Jednotkou teploty je kelvin K. Keďže teplota súvisí s pohybom molekúl, existuje spodné ohraničenie, keď sú molekuly takmer v kľude. Toto ohraničenie je pri teplote $T = 0K = -273,15^\circ C$.

Poznámka 36 Zmena teploty $\Delta T = 1^\circ C = 1K$

Vzťah medzi stavovými veličinami určuje **stavová rovnica**:

$$pV = NkT, \quad (8.2.2)$$

kde N je počet molekúl v objeme V a $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$ je Boltzmanova konštanta.

Príklad 52 Odhadnite počet molekúl vzduchu, ktoré sa nachádzajú tesne nad zemským povrchom v objeme $V = 1 \text{ m}^3$.

Za normálnych podmienok nad zemským povrchom je atmosferický tlak $p = 10^5 \text{ Pa}$. Zo stavovej rovnice dostaneme počet molekúl

$$N = \frac{pV}{kT} \approx 10^{25}$$

Príklad 53 Odhadnite, ako súvisí atmosferický tlak s nadmorskou výškou. (Pri odhade budeme predpokladať, že teplota a tiažové zrýchlenie sa s výškou nemení. Teda odhad bude realistický pre malé výšky.)

Atmosferický tlak s rastúcou výškou klesá preto, že závisí od hmotnosti všetkého plynu nad miestom, kde ho meriame. Uvažujme malý objem vzduchu vo výške h v tvare kvádra s podstavou S a výškou dh . Zmena tlaku na vrchu kvádra oproti spodku je rovná úbytku tiaži plynu v kvádri, pôsobiacej na plochu S :

$$dp = -\frac{Nmg}{S}$$

kde m je hmotnosť jednej molekuly a N je ich počet v kvádri. Počet molekúl vyjadríme zo stavovej rovnice a dosadíme:

$$dp = -\frac{pdV}{kT} \frac{mg}{S} = -p \frac{mg}{kT} dh$$

Za predpokladu, že v nulovej výške je atmosferický tlak p_a a vo výške h je tlak p , zintegrujeme obe strany rovnice:

$$\int_{p_a}^p \frac{1}{p} dp = -\frac{mgS^2}{kT} \int_0^h dh$$

a dostaneme

$$\lg \frac{p}{p_0} = -\frac{mg}{kT} h$$

odkiaľ získame vzťah, ako súvisí atmosferický tlak s nadmorskou výškou:

$$p = p_0 e^{-\frac{mg}{kT} h}$$

Príklad 54 Izotermický dej: Potápač vypustí bublinu v hĺbke 10 m. Ako sa zmení jej objem, ak bublina vypláva tesne pod hladinu vody? (Predpokladáme, že teplota vody je všade rovnaká.)

Tesne pod povrchom je tlak vody rovný atmosférickému, teda $p_a = 10^5 \text{ Pa}$. V hĺbke 10 m je tlak $p_0 = p_a + h\rho g = 2p_a$. Zo stavovej rovnice

$$p_a V = NkT = p_0 V_0$$

vidno, že objem bubliny bude dvojnásobný.

Poznámka 37 Pri teplote približne 300 K v hĺbke približne okolo 300 m sa už bublina vytvoriť nedá

Príklad 55 Izobarický dej: Valec s piestom (injekčnú striekačku s upchatým vývodom a počiatočným objemom $V_0 = 10^{-5} \text{ m}^3$ a teplotou $T_0 = 300 \text{ K}$) strčíme do vody s teplotou $T = 360 \text{ K}$. Ako sa zmení objem vzduchu vo valci a akú prácu vykoná plyn počas rozpínania?

Ak zanedbáme trenie, tak zo stavovej rovnice vypočítame nový objem

$$V = \frac{V_0 T}{T_0} = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$$

Plyn sa rozpína pri konštantnom atmosférickom tlaku, a teda koná prácu

$$W = f \Delta x = p S \Delta x = p \Delta V = p(V - V_0) = 10^5 \cdot 0,2 \cdot 10^{-5} = 0,2 \text{ J}$$

Príklad 56 Do misky nalejeme vodu a na ňu položíme horiaci kahanec. Zakryjeme skleneným odmerným valcom vysokým 1 m tak, aby sa jemne dotýkal hladiny. O chvíľu kahanec zhasne a vypláva hore približne 0,1 m. Odhadnite maximálnu teplotu vzduchu zakrytého valcom. Teplotu vzduchu uvažujeme 300 K.

Zahrievaním vzduchu sa zvyšovala kinetická energia jeho molekúl, vzduch sa rozpínal a vytekal spod valca, až kým sviečka nezhasla. Toto sa udialo pri konštantnom atmosférickom tlaku. Teda počiatočný stav plynu bol $p_0 = p_a$, $V_0 = S \cdot 1 \text{ m}$, $T_0 = ? \text{ K}$. Po zhasnutí sviečky sa vzduch ochladí skoro na pôvodnú teplotu, čím sa zníži kinetická energia jeho molekúl a atmosférický tlak vytlačí vodu s kahancom. Konečný stav bude: $p = p_a - h \rho g$, $V = S \cdot 0,9 \text{ m}$, $T_0 = 300 \text{ K}$. Keďže $p_a h \rho g = 0,01 p_a$ môžeme zanedbať tlakové rozdiely a zo stavovej dostaneme maximálnu teplotu

$$T_0 = T \frac{V_0}{V} = 333 \text{ K} = 60^\circ \text{ C}$$

8.3 Tuhé látky

Pružné teleso je také teleso, ktoré obnovuje svoj objem a tvar, ak na neho prestanú pôsobiť sily, ktoré ho deformovali, pričom veľkosti deformácie telesa sú úmerné veľkostiam deformujúcich síl.

8.4 Pohyb spojitého materiálu

8.5 Deformácia ťahom

Predstavme si homogénny pružný valec, ktorý má dĺžku l a prierez S . Ak jeho konce ťahujeme silou f , tak valec roztiahneme o Δl , pričom veľkosť natiahnutia telesa je úmerná veľkosti deformujúcej sily:

$$f = k \Delta l \tag{8.5.1}$$

kde konštanta úmernosti k sa nazýva koeficient tuhosti valca. Tento koeficient závisí



od rozmerov a materiálových vlastností valca. Čím je valec dlhší, natiahnutie je väčšie. (Ak natiahneme tou istou silou dvojnásobne dlhý valec, natiahnutie je dvojnásobné.) Na druhej strane, čím je valec hrubší, tým väčšiu silu potrebujem na jeho rozťahnutie. (Na rozťahnutie dvoch rovnakých valcov potrebujem dvojnásobnú silu.) Teda rovnicu (8.5.1) môžeme písať v tvare

$$f = Y \frac{S}{l} \Delta l \quad \text{alebo} \quad \frac{f}{S} = Y \frac{\Delta l}{l}, \quad (8.5.2)$$

kde sila pôsobiaca na plochu predstavuje **napätie v ťahu**

$$\sigma = \frac{f}{S} \quad [\text{Pa} = \text{N/m}^2] \quad (8.5.3)$$

Relatívne natiahnutie predstavuje deformáciu $\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$ a konštanta úmernosti Y sa nazýva Youngov modul pružnosti. (typické hodnoty Y : pre oceľ = 10^{11} Pa, pre gumu = 10^7 Pa) Modul pružnosti predstavuje materiálovú konštantu. Takto sme získali rovnicu

$$\sigma = Y \epsilon \quad (8.5.4)$$

ktorej členy nezávisia od rozmerov.

Poznámka 38 Ak natiahneme valec, tak v smeroch kolmých na smer ťahu valec zmenšuje svoj prierez.

Poznámka 39 Pre deformáciu v tlaku získame rovnicu analogicky.

Príklad 57 Určte výsledný koeficient tuhosti dvoch za sebou napojených valcov, s tuhosťami k_1 a k_2 .

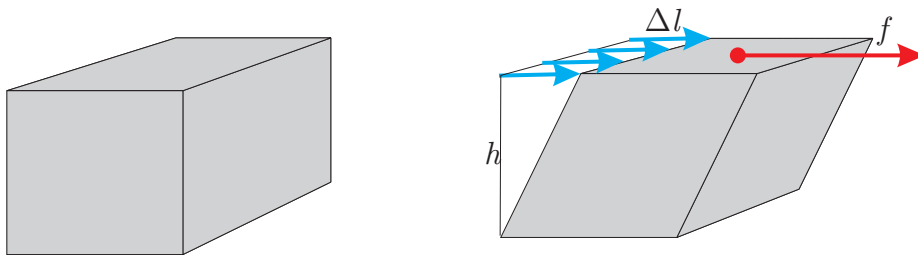
Oba valce sú rozťahované silou f a výsledná výchylka bude súčtom oboch výchýliek:

$$u = u_1 + u_2 = \frac{f}{k_1} + \frac{f}{k_2} = \frac{f}{k} \quad (8.5.5)$$

odkiaľ pre výslednú tuhosť platí:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (8.5.6)$$

Príklad 58 Určte, o koľko sa skráti pružný homogénny valec postavený kolmo na podlahu pod vplyvom vlastnej tiaže, ktorý mal pôvodnú dĺžku l a tuhosť k



8.6 Deformácia šmykom

Predstavme si kocku s hranou h , ktorá má spodnú stenu s plochou S prilepenú ku podložke. Na vrchnú stenu pôsobí sila f , ktorá je rovnobežná s podložkou. V dôsledku pôsobenia tejto sily dôjde k deformácii, tak ako je to znázornené na Obr. 8.6. Pre dostatočne malé výchylky sa jednotlivé vrstvy postupne poposúvajú v rovinách rovnobežných s podložkou. Takáto deformácia sa nazýva deformácia šmykom. Vrchná stena (vrstva) kocky sa posunie o Δl , pričom veľkosť posunutia je úmerná veľkosti deformujúcej sily. Analogicky ako pri deformácii v ťahu aj tu platí, že so zväčšujúcou sa vzdialenosťou od podlahy je posunutie materiálu väčšie a so zväčšujúcim prierezom treba pôsobiť väčšou silou na dosiahnutie rovnakej deformácie.

$$f = \mu \frac{S}{l} \Delta l \quad \text{alebo} \quad \frac{f}{S} = \mu \frac{\Delta l}{l}, \quad (8.6.1)$$

kde sila pôsobiaca na plochu predstavuje **napätie v šmyku** $\tau = \frac{f}{S}$, relatívne natiahnutie predstavuje deformáciu $\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$ a konštanta úmernosti μ sa nazýva modul pružnosti v šmyku. Modul pružnosti predstavuje materiálovú konštantu. Takto sme získali rovnicu

$$\tau = \mu \epsilon \quad (8.6.2)$$

Literatúra

- [1] FEYNMAN, R. P, LEIGHTON, R. B SANDS, M.: *Feynmanove prednášky z fyziky*, Vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, Bratislava, Alfa, 2. vydanie, 1986.
- [2] HAJKO, V: *Fyzika v príkladoch*, Vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, Bratislava, Alfa, 6. vydanie, 1988.
- [3] KREMPASKÝ, J.: *Fyzika*, Vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, Bratislava, Alfa, 3. vydanie, 1992.