Slovenská Technická Univerzita

Stavebná fakulta

Matematika I.

Zbierka úloh ku cvičeniam

Jozef Kollár

Bratislava 2014

Slovenská Technická Univerzita

Stavebná fakulta

Matematika I.

Zbierka úloh ku cvičeniam

Jozef Kollár

Bratislava 2014

Recenzenti: Doc. RNDr. Michal Šabo, Csc.
Doc. RNDr. Oľga Nánásiová, PhD.

ISBN 978-80-227-4244-3

Mgr. Jozef Kollár

Matematika I. – Zbierka úloh ku cvičeniam

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave v Nakladateľstve STU, Bratislava, Vazovova 5, v roku 2014

Edícia skrípt

Rozsah 163 strán, 43 obrázkov, 1. vydanie,
vydané v elektronickej forme;
umiestnenie na `http://www.svf.stuba.sk`

ISBN 978-80-227-4244-3

Obsah

Úvod

Tieto skriptá vznikly ako pomôcka predovšetkým pre študentov, ale aj pre cvičiacich predmetu **Matematika 1**. Po dlhoročných skúsenostiach s výučbou tohto predmetu a skúsenostiach s úpadkom výučby matematiky na základných a stredných školách som dospel k názoru, že našim študentom chýba predovšetkým prax v riešení úloh. Pasívne počúvanie prednášok túto prax nahradiť nemôže a venovanie sa úloham len počas cvičení je nepostačujúce. Preto bolo mojou snahou zostaviť ku každému cvičeniu čo najväčší počet úloh aj s výsledkami, aby si študenti mohli sami precvičiť riešenie úloh a overiť si do akej miery zvládli teóriu. Skriptá v žiadnom prípade nemajú za cieľ slúžiť ako učebnica spomenutého predmetu a náhrada prednášok. Ich cieľom je slúžiť ako zbierka príkladov s výsledkami ku cvičeniam. Preto jednotlivé kapitoly skrípt neobsahujú buď žiadnu teóriu, alebo len jej minimum bezprostredne potrebné pri riešení úloh príslušnej kapitoly. Na zvládnutie teoretickej časti učiva je potrebná návšteva prednášok a okrem toho existuje viacero učebníc, z ktorých najdôležitejšie sú uvedené v zozname literatúry. Skriptá [1] a [2] sú dokonca pre záujemcov voľne a legálne dostupné na webe našej katedry. Dajú sa nájsť napríklad na adrese: `http://www.math.sk/jmkollar/literatura/literatura.html`.

Skriptá sú rozdelené na kapitoly takmer presne kopírujúce aktuálne platný sylabus predmetu, takže každá kapitola zodpovedá jednému cvičeniu. Jediné odchýlky od sylabu sú v kapitolách 7. a 8. Do 7. kapitoly, t.j. aj 7. cvičenia semestra, som spolu s limitami postupností zahrnul aj limity funkcií. Túto zmenu som vykonal z toho dôvodu, že pre uvedené funkcie sa ich limity počítajú v podstate rovnakým spôsobom ako limity uvedených postupností. Nemá preto zmysel rozdeľovať to na dve samostatné cvičenia. Vďaka tejto zmene je potom možné 8. cvičenie venovať hľadaniu asymptot ku grafom funkcií, čo je v tomto predmete najdôležitejšia aplikácia limít.

Príklady uvedené v skriptách som dával dokopy v priebehu zimného semestra 2013/14. Menšia časť príkladov je moja vlastná, väčšiu časť príkladov som, čiastočne s drobnými zmenami, prevzal z iných zbierok a učebníc. Všetky výsledky k príkladom sú moje vlastné. Preto ak sa v skriptách nachádzajú nejaké chyby alebo preklepy, tak tieto idú na moje konto.

Aktuálne príklady k jednotlivým cvičeniam sa dajú nájsť na mojej domovskej stránke: `http://www.math.sk/jmkollar/`. V týchto príkladoch sú opravené všetky mne známe chyby a postupne tam budú pridávané aj ďalšie príklady. Rovnako sa na mojej webovej stránke sa nachádza aj kompletná PDF verzia týchto skrípt. Táto kompletná verzia nie je aktualizovaná priebežne, ale bude aktualizovaná až keď sa nazbiera väčší počet opráv a pridaných úloh.

V Bratislave, 16. 1. 2014 Jozef Kollár

Sylabus predmetu Matematika 1 pre odbory APS a TMS

Predmet **Matematika 1** sa vyučuje počas zimného semestra, v 1. semestri štúdia, a tu uvedený sylabus je platný v školskom roku 2013/14. Výuka je rozvrhnutá na 13 týždňov, pričom na prvom cvičení sa opakuje stredoškolské učivo a na poslednom cvičení sa opakuje učivo z celého semestra. Okrem toho je semester rozdelený na dve časti: prvá časť semestra je venovaná lineárnej algebre a druhá časť semestra matematickej analýze.

Lineárna algebra

1. týždeň: LINEÁRNA ALGEBRA A OPAKOVANIE ANALYTICKEJ GEOMETRIE V ROVINE

- **Vektory:** dĺžka vektora, skalárny násobok vektora, jednotkový vektor, súčet a rozdiel dvoch vektorov, skalárny súčin vektorov, uhol dvoch vektorov.
- **Rovnice priamky v rovine a ich vzájomná poloha:** rovnica priamky v smernicovom tvare, rovnica priamky vo všeobecnom tvare, rovnica priamky v úsekovom tvare, rovnica priamky v parametrickom tvare.
- **Smerové a normálové vektory priamky:** uhol dvoch priamok, podmienky rovnobežnosti a kolmosti dvoch priamok, vzdialenosť bodu od priamky.

2. týždeň: GAUSSOVA ELIMINAČNÁ METÓDA

- **Sústavy lineárnych rovníc a matice.**
- **Zápis a riešenie sústavy m-lineárnych rovníc o n-neznámych pomocou matíc:** matica a rozšírená matica sústavy, elementárne riadkové operácie, ekvivalentné matice, Gaussova eliminačná metóda, trojuholníkova matica, Gaussov tvar matice, hodnosť matice.
- **Frobeniova veta.**

3. týždeň: OPERÁCIE S MATICAMI

- **Matice:** typ matice, súčet a rozdiel dvoch matíc, štvorcová matica, jednotková matica, skalárny násobok matice, súčin dvoch matíc, definícia inverznej matice, výpočet inverznej matice pomocou elementárnych riadkových úprav.
- **Riešenie sústav lineárnych rovníc pomocou inverznej matice.**
- **Maticové rovnice.**

4. týždeň: DETERMINANTY

- **Determinant štvorcovej matice:** Determinant matice typu 2x2 a 3x3, Sarusovo pravidlo, rozvoj determinantu podľa riadka alebo stĺpca, determinant a elementárne riadkové operácie, determinant súčinu matíc, determinant inverznej matice.
- **Použitie determinantov na riešenie sústav lineárnych rovníc:** Cramerovo pravidlo.

5. týždeň: LINEÁRNA ZÁVISLOSŤ A NEZÁVISLOSŤ VEKTOROV

- **Definícia lineárnej závislosti vektorov.**
- **Hodnosť matice.**
- **Regulárne a singulárne matice a hodnosť matice.**
- **Riešenie sústav lineárnych rovníc s parametrom.**

Matematická analýza

6. týždeň: Pojem funkcie a jej základné vlastnosti

– **Definícia a základné vlastnosti funkcie:** Definícia funcie, definičný obor, obor hodnôt, zhora ohraničená funkcia, zdola ohraničená funkcia, ohraničená funkcia, párna funkcia, nepárna funkcia, rastúca funkcia, klesajúca funkcia, periodická funkcia.

– **Elementárne funkcie a ich grafy:**

$$y = ax + b, \quad y = ax^2 + bx + c, \quad y = \frac{1}{x}, \quad y = \sin x, \quad y = \cos x,$$

$$y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{cotg} x, \quad y = e^x, \quad y = a^x \ (0 < a < 1, a > 1)$$

$$y = \ln x, \quad y = \log_a x \ (0 < a < 1, a > 1), \quad \ldots$$

– **Základné operácie s funkciami:** súčet, rozdiel, súčin, podiel dvoch funkcií, násobenie funkcie číslom, zložená funkcia – skladanie funkcií, prostá funkcia, inverzná funkcia.

7. týždeň: Postupnosti a limity postupností

– **Rozšírenie reálnej osi o symboly $-\infty$ a ∞ a počítanie na rozšírenej reálnej osi.**

– **Definícia okolia bodu.**

– **Definícia postupnosti.**

– **Definícia limity postupnosti.**

– **Základné vlastnosti limít postupnosti a ich počítanie:** limita súčtu, rozdielu, súčinu, podielu dvoch postupností, špeciálne limity tvaru:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n$$

8. týždeň: Limita funkcie a spojitosť

- **Definícia limity funkcie.**
- **Základné vlastnosti limity funkcie a ich počítanie:** limita súčtu, rozdielu, súčinu, podielu dvoch funkcií, limita zloženej funkcie.
- **Spojitosť funkcie.**
- **Vlastnosti spojitej funkcie na uzavretom intervale.**

9. týždeň: Definícia derivácie funkcie

- **Definícia derivácie a jej geometrický a fyzikálny význam:**
- **Rovnica dotyčnice a normály ku grafu funkcie v bode.**
- **Základné pravidlá počítania derivácií:** derivácia násobku funkcie konštantou, derivácia súčtu, rozdielu, sučinu, podielu dvoch funkcií, derivácia zloženej funkcie.
- **L'Hospitalovo pravidlo.**
- **Asymptoty grafu funkcie:** Asymptoty bez smernice, asymptoty so smernicou.

10. týždeň: Diferenciál funkcie

- **Približný výpočet pomocou diferenciálu.**
- **Derivácie vyšších rádov.**
- **Taylorov polynóm a Maclaurinov polynóm.**
- **Rozvoj funkcií:** $y = e^x,\ y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \ln(x+1)$.

11. týždeň: Využitie derivácií

- **Vyšetrovanie monotónnosti pomocou derivácií:** definícia rastúcej a klesajúcej funkcie, súvis medzi rastúcou a klesajúcou funkciou a prvou deriváciou.
- **Lokálne extrémy:** definícia lokálneho maxima a minima, nutná podmienka existencie lokálneho extrému, hľadanie lokálnych extrémov pomocou prvej derivácie, hľadanie lokálnych extrémov pomocou druhej derivácie.

- **Globálne extrémy spojitej funkcie na uzavretom intervale:** hľadanie globálnych extrémov spojitej funkcie na uzavretom intervale pomocou prvej derivácie.
- **Vyšetrovanie konvexnosti a konkávnosti pomocou derivácií:** definícia konvexnej a konkávnej funkcie, súvis medzi konkávnou a konvexnou funkciou a druhou deriváciou.

12. týždeň: VYŠETROVANIE PRIEBEHU FUNKCIE

- **Využitie všetkých vlastností funkcie a jej asymptôt na načrtnutie jej grafu.**

13. týždeň: OPAKOVANIE UČIVA

1

Opakovanie stredoškolského učiva

Na tomto cvičení sa bude opakovať učivo strednej školy. Pôjde o riešenie sústav lineárnych rovníc o dvoch neznámych a o základy analytickej geometrie, t.j. rôzne analytické vyjadrenia priamky v rovine (všeobecné, smernicové, parametrické, úsekové).

Sústavy lineárnych rovníc o dvoch neznámych

I. Riešte sústavy rovníc o dvoch neznámych

Nasledovné sústavy môžte riešiť akýmkoľkovek spôsobom, čiže aj vyjadrením premennej z jednej rovnice a dosadením do druhej. Samozrejme môžte použiť aj sofistikovanejšie metódy, ale musíte ich vedieť zdôvodniť a vysvetliť.

1.
$$\begin{array}{rcrcr} 5x_1 & - & 4x_2 & = & 8 \\ 3x_1 & + & x_2 & = & 15 \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & - & 4x_2 & = & 6 \\ x_1 & - & x_2 & = & 5 \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & -3 \\ 2x_1 & - & x_2 & = & 0 \\ 4x_1 & - & 5x_2 & = & -6 \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & = & 9 \\ -12x_1 & + & 6x_2 & = & -30 \end{array}$$

5.
$$\begin{array}{rcrcr} 40x_1 & + & 21x_2 & = & -17 \\ 5x_1 & + & 3x_2 & = & -1 \end{array}$$

6.
$$\begin{array}{rcrcr} 40x_1 & + & 54x_2 & = & 2 \\ 10x_1 & + & 18x_2 & = & -1 \end{array}$$

7.

$$\begin{array}{rcrcr} 35x_1 & + & 30x_2 & = & 11 \\ 14x_1 & + & 15x_2 & = & 5 \end{array}$$

8.

$$\begin{array}{rcrcr} 8x_1 & - & 3x_2 + 6 & = & 0 \\ 4x_1 & + & x_2 - 1 & = & 0 \end{array}$$

9.

$$\begin{array}{rcrcr} 7x_1 & - & 11x_2 & = & -1 \\ 17x_1 & + & 19x_2 & = & 1 \end{array}$$

10.

$$\begin{array}{rcrcr} 5x_1 & + & 4x_2 & = & 2 \\ x_1 & - & 3x_2 & = & 7 \end{array}$$

11.

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 2x_2 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & = & 8 \end{array}$$

12.

$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & - & 6x_2 & = & 9 \\ x_1 & - & 2x_2 & = & 3 \end{array}$$

13.

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 3x_2 & = & -2 \\ -2x_1 & - & 6x_2 & = & 4 \end{array}$$

14.

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & 5 \\ -3x_1 & + & 6x_2 & = & -15 \end{array}$$

15.

$$\begin{array}{rcrcr} -2x_1 & + & 3x_2 & = & 7 \\ 6x_1 & - & 9x_2 & = & -21 \end{array}$$

16.

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & x_2 & = & 5 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & = & 9 \end{array}$$

17.

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & 3 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & = & 2 \end{array}$$

18.

$$\begin{array}{rcrcr} -x_1 & + & 7x_2 & = & 5 \\ 2x_1 & - & 14x_2 & = & 7 \end{array}$$

19.

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & 5x_2 & = & 11 \\ 6x_1 & - & 15x_2 & = & 10 \end{array}$$

20.

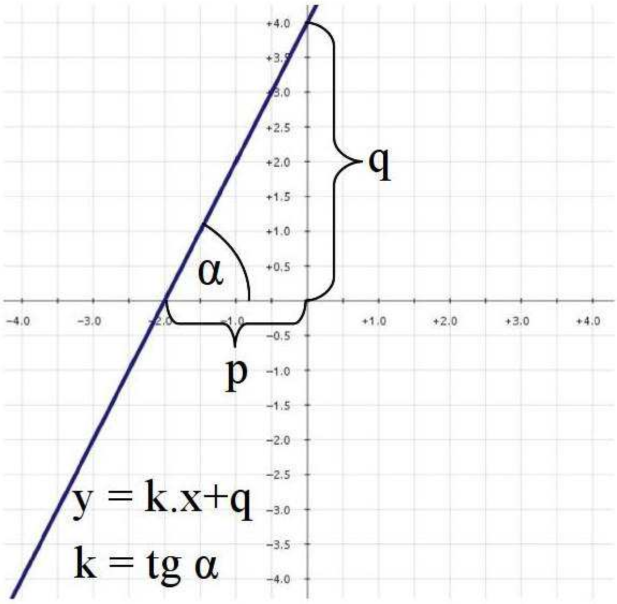
$$\begin{array}{rcrcr} -2x_1 & + & x_2 & = & -1 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 8 \\ -6x_1 & + & 3x_2 & = & 3 \end{array}$$

Priamka v rovine

Priamku v rovine možno analyticky vyjadriť viacerými spôsobmi:

1. **Všeobecný tvar** priamky v rovine:

$$ax + by + c = 0 \ , \quad \text{kde } a, b, c \in \mathbb{R}$$



Obr. 1.1: Priamka $y = 2x + 4$

Zo všeobecného tvaru priamky v rovine ihneď vidíme normálový vektor priamky $\vec{n} = (a, b)$ a z toho aj jej smerový vektor $\vec{s} = (-b, a)$ alebo $\vec{s'} = (b, -a)$.
V prípade, že $b = 0$, dostávame rovnicu priamky v tvare $x = c$, kde $c \in \mathbb{R}$. Takáto priamka sa nazýva **priamka bez smernice**.

2. **Smernicový tvar** priamky v rovine:

$$y = kx + q \ , \quad \text{kde } k, q \in \mathbb{R}$$

Smernicový tvar môžme zo všeobecneho tvaru priamky dostať jednoducho, vyjadrením premennej y zo všeobecnej rovnice priamky. Číslo k sa nazýva smernica a je určené uhlom, ktorý zviera priamka s osou o_x. Platí $k = \operatorname{tg} \alpha$ (viď obrázok na strane 13). Číslo q je „posunutie“ priamky na osi o_y, čiže úsek, ktorý priamka vytína na tejto osi.

3. **Úsekový tvar** priamky v rovine:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \ , \quad \text{kde } p, q \in \mathbb{R}$$

Úsekový tvar rovnice priamky dostaneme zo všeobecného alebo smernicového tvaru jednoduchou úpravou tak, že na pravej strane rovnice bude 1 a na ľavej strane dva zlomky, ktoré majú v čitateľoch x, resp. y. Čísla p a q sa nazývajú „úseky“. Predstavujú dĺžku úsekov, ktoré priamka vytína na osiach. Pokiaľ sú tieto úseky vľavo, alebo pod počiatkom súradníc, tak príslušné čísla budú záporné. Napríklad na obrázku na strane 13 je $p = -2$ a $q = 4$.

4. **Parametrický tvar** priamky:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + u_1.t \\ y &= y_0 + u_2.t \ , \end{aligned}$$

kde $A = [x_0, y_0]$ je bod, ktorým priamka prechádza, $\vec{u} = (u_1, u_2)$ je smerový vektor priamky a $t \in \mathbb{R}$.

II. Zapíšte priamku prechádzajúcu bodmi A a B vo všeobecnom, smernicovom, parametrickom a úsekovom tvare:

1. $A = [1, -3]$ a $B = [-1, 2]$
2. $A = [2, 7]$ a $B = [5, 3]$
3. $A = [1, 2]$ a $B = [7, 9]$
4. $A = [3, 5]$ a $B = [-1, -2]$
5. $A = [2, 3]$ a $B = [1, 4]$
6. $A = [-2, 0]$ a $B = [0, 4]$
7. $A = [3, 7]$ a $B = [-2, 6]$
8. $A = [-1, 5]$ a $B = [-3, 3]$
9. $A = [-2, 1]$ a $B = [2, -5]$
10. $A = [3, -2]$ a $B = [5, -7]$
11. $A = [3, 1]$ a $B = [4, 2]$
12. $A = [2, 5]$ a $B = [6, 4]$

III. Daný je bod A a priamka q. Napíšte rovnice priamok p a p' tak, aby obe prechádzali bodom A, priamka p bola rovnobežná s priamkou q a priamka p' bola kolmá na priamku q:

1. $A = [3, 7]$
   $q : 2x - y + 3 = 0$
2. $A = [1, 3]$
   $q : x - 5y + 2 = 0$
3. $A = [-2, 5]$
   $q : 3x + 2y - 7 = 0$
4. $A = [-5, 1]$
   $q : 2x + 5y - 1 = 0$
5. $A = [5, 2]$
   $q : y = 5x + 6$
6. $A = [-3, 0]$
   $q : 3x - y - 5 = 0$
7. $A = [1, 4]$
   $q : [x, y] = [5 + t, 3 - 2t]$
8. $A = [-1, 2]$
   $q : y = 2x + 5$
9. $A = [2, -3,]$
   $q : y = -3x - 4$
10. $A = [-3, -5]$
    $q : y = 5x - 1$

11. $A = [5, 6]$
$q : y = -2x + 3$

12. $A = [4, 2]$
$q : 3x + 5y + 4 = 0$

13. $A = [1, 4]$
$q : 2x + 3y - 3 = 0$

14. $A = [3, 2]$
$q : [x, y] = [4 - 2t, -1 + t]$

IV. Nájdite parameter p tak, aby priamky u a v boli
a) rovnobežné,
b) kolmé:

1. $u : x + p\,y + 5 = 0$
$v : 2x - y + 3 = 0$

2. $u : p\,x - 3y + 1 = 0$
$v : 3x + 7y - 5 = 0$

3. $u : 3x + py - 3 = 0$
$v : 4x - 2y + 5 = 0$

4. $u : 2x - py + 7 = 0$
$v : 5x + 2y - 3 = 0$

5. $u : p\,x + 2y - 7 = 0$
$v : 4x + 7y - 6 = 0$

6. $u : 2x - p\,y - 2 = 0$
$v : 5x - 4y + 2 = 0$

7. $u : px - 4y + 9 = 0$
$v : x + 3y - 4 = 0$

8. $u : px + 5y - 11 = 0$
$v : 2x - 5y + 4 = 0$

V. Priamka p vytína na osi o_y úsek v. Akú musí mať táto priamka smernicu, aby prechádzala bodom C?

1. $v = -\frac{1}{2}$ a $C = [-1, 2]$
2. $v = \frac{29}{3}$ a $C = [2, 7]$
3. $v = \frac{5}{6}$ a $C = [1, 2]$
4. $v = -\frac{1}{4}$ a $C = [3, 5]$
5. $v = 5$ a $C = [4, 1]$
6. $v = 4$ a $C = [3, 10]$
7. $v = \frac{32}{5}$ a $C = [13, 9]$
8. $v = 6$ a $C = [-2, 4]$
9. $v = -2$ a $C = [6, -11]$
10. $v = \frac{11}{2}$ a $C = [-3, 13]$
11. $v = -2$ a $C = [1, -1]$
12. $v = \frac{11}{2}$ a $C = [10, 6]$

VI. Daný je bod A a číslo k. Zapíšte rovnice priamky p, ktorá prechádza bodom A a má smernicu k a priamky q, ktorá prechádza bodom A a je kolmá na priamku p:

1. $A = [7, 1]$ a $k = 3$
2. $A = [-5, 3]$ a $k = -1$
3. $A = [9, 2]$ a $k = 5$
4. $A = [1, -7]$ a $k = 2$
5. $A = [-1, 2]$ a $k = 3$
6. $A = [3, 5]$ a $k = 1$

7. $A = [-2, -3]$ a $k = 7$
8. $A = [1, 5]$ a $k = -6$
9. $A = [-3, 1]$ a $k = 4$
10. $A = [5, 1]$ a $k = -9$
11. $A = [0, 5]$ a $k = 4$
12. $A = [3, 0]$ a $k = -2$

VII. Daný je bod A a priamka q. Napíšte rovnice priamok p a p' tak, aby obe prechádzali bodom A, priamka p bola rovnobežná s priamkou q a priamka p' bola kolmá na priamku q:

1. $A = [6, 4]$
   $q : y = 2x - 1$
2. $A = [4, 3]$
   $q : y = x + 2$
3. $A = [-3, 2]$
   $q : y = -3x + 5$
4. $A = [-1, -3]$
   $q : y = -5x - 6$
5. $A = [2, 1]$
   $q : y = 3x - 3$
6. $A = [0, 7]$
   $q : y = x + 2$
7. $A = [-2, 4]$
   $q : y = 4x + 2$
8. $A = [-3, -2]$
   $q : y = -5x - 3$
9. $A = [1, 6]$
   $q : y = 2x - 7$
10. $A = [4, -5]$
    $q : y = -x + 3$
11. $A = [-1, 2]$
    $q : y = -2x + 3$
12. $A = [3, 4]$
    $q : y = 4x + 7$

VIII. Dané sú čísla u a v. Zapíšte priamku p, ktorá na osi x vytína úsek u a na osi y vytína úsek v vo všeobecnom, smernicovom, parametrickom a úsekovom tvare:

1. $u = 5$ a $v = -1$
2. $u = -2$ a $v = 3$
3. $u = -3$ a $v = -1$
4. $u = 4$ a $v = 7$
5. $u = 5$ a $v = 1$
6. $u = 1$ a $v = 3$
7. $u = 2$ a $v = -5$
8. $u = -3$ a $v = -7$
9. $u = -5$ a $v = 11$
10. $u = 3$ a $v = 4$
11. $u = 2$ a $v = 5$
12. $u = 2$ a $v = -7$
13. $u = -5$ a $v = -7$
14. $u = 1$ a $v = 7$
15. $u = 7$ a $v = -9$
16. $u = -3$ a $v = 9$

IX. Dané sú bod A a priamka q. Priamka q vytína na osi x úsek u a na osi y úsek v. Nájdite rovnice priamok p a p' tak, aby obe prechádzali bodom A, priamka p bola rovnobežná s priamkou q a priamka p' bola kolmá na priamku q:

1. $A = [1, 3]$, $u = 3$, $v = 5$
2. $A = [5, -3]$, $u = -2$, $v = 4$
3. $A = [-2, -5]$, $u = 1$, $v = -8$
4. $A = [-4, 2]$, $u = -4$, $v = -3$
5. $A = [1, 2]$, $u = 1$, $v = -3$
6. $A = [2, 3]$, $u = -2$, $v = 5$
7. $A = [2, 5]$, $u = 2$, $v = -7$
8. $A = [-1, 3]$, $u = 3$, $v = 5$
9. $A = [-2, -3]$, $u = 3$, $v = -7$
10. $A = [1, -1]$, $u = -2$, $v = 3$

X. Napíšte všeobecnú rovnicu a parametrický tvar aspoň jednej priamky p, ktorá sa nedá vyjadriť v smernicovom ani úsekovom tvare.

1. cvičenie – Výsledky

Sústavy lineárnych rovníc o dvoch neznámych

I.
(1) $(x, y) = (4, 3)$
(2) $(x, y) = (14, 9)$
(3) $(x, y) = (1, 2)$
(4) $(x, y) = (1, -3)$
(5) $(x, y) = (-2, 3)$
(6) $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$
(7) $(x, y) = \left(\frac{1}{7}, \frac{1}{5}\right)$
(8) $(x, y) = \left(-\frac{3}{20}, \frac{8}{5}\right)$
(9) $(x, y) = \left(-\frac{1}{40}, \frac{3}{40}\right)$
(10) $(x, y) = \left(\frac{34}{19}, -\frac{33}{19}\right)$
(11) $(x, y) = (4 - 2t, t)$
(12) $(x, y) = (3 + 2t, t)$
(13) $(x, y) = (-2 - 3t, t)$
(14) $(x, y) = (5 + 2t, t)$
(15) $(x, y) = \left(\frac{3}{2}t - \frac{7}{2}, t\right)$
(16) nemá riešenie
(17) nemá riešenie
(18) nemá riešenie
(19) nemá riešenie
(20) nemá riešenie

Priamka v rovine

II.
(1) $p: 5x + 2y + 1 = 0$
$p: y = -\frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$
$p: \frac{x}{-\frac{1}{5}} + \frac{y}{-\frac{1}{2}} = 1$
$p: \begin{array}{rcl} x &=& 1 - 2t \\ y &=& -3 + 5t \end{array}$

(2) $p: 4x + 3y - 29 = 0$
$p: y = -\frac{4}{3}x + \frac{29}{3}$
$p: \frac{x}{\frac{29}{4}} + \frac{y}{\frac{29}{3}} = 1$
$p: \begin{array}{rcl} x &=& 2 + 3t \\ y &=& 7 - 4t \end{array}$

(3) $p: -7x + 6y - 5 = 0$
$p: y = \frac{7}{6}x + \frac{5}{6}$
$p: \frac{x}{-\frac{5}{7}} + \frac{y}{\frac{5}{6}} = 1$
$p: \begin{array}{rcl} x &=& 1 + 6t \\ y &=& 2 + 7t \end{array}$

(4) $p: 7x - 4y - 1 = 0$
$p: y = \frac{7}{4}x - \frac{1}{4}$
$p: \frac{x}{\frac{1}{7}} + \frac{y}{-\frac{1}{4}} = 1$
$p: \begin{array}{rcl} x &=& 3 - 4t \\ y &=& 5 - 7t \end{array}$

(5) $p: x+y-5=0$
$p: y=-x+5$
$p: \frac{x}{5}+\frac{y}{5}=1$
$p: \begin{array}{rcl} x & = & 2-t \\ y & = & 3+t \end{array}$

(6) $p: 2x-y+4=0$
$p: y=2x+4$
$p: \frac{x}{-2}+\frac{y}{4}=1$
$p: \begin{array}{rcr} x & = & -2+2t \\ y & = & 0+4t \end{array}$

(7) $p: x-5y+32=0$
$p: y=\frac{x}{5}+\frac{32}{5}$
$p: \frac{x}{-32}+\frac{y}{\frac{32}{5}}=1$
$p: \begin{array}{rcr} x & = & 3-5t \\ y & = & 7-t \end{array}$

(8) $p: x-y+6=0$
$p: y=x+6$
$p: \frac{x}{-6}+\frac{y}{6}=1$
$p: \begin{array}{rcr} x & = & -1-2t \\ y & = & 5-2t \end{array}$

(9) $p: 3x+2y+4=0$
$p: y=-\frac{3}{2}x-2$
$p: \frac{x}{-\frac{4}{3}}+\frac{y}{-2}=1$
$p: \begin{array}{rcr} x & = & -2+4t \\ y & = & 1-6t \end{array}$

(10) $p: 5x+2y-11=0$
$p: y=-\frac{5}{2}+\frac{11}{2}$
$p: \frac{x}{\frac{11}{5}}+\frac{y}{\frac{11}{2}}=1$
$p: \begin{array}{rcr} x & = & 3+2t \\ y & = & -2-5t \end{array}$

(11) $p: -x+y+2=0$
$p: y=x-2$
$p: \frac{x}{2}+\frac{y}{-2}=1$
$p: \begin{array}{rcl} x & = & 3+t \\ y & = & 1+t \end{array}$

(12) $p: x+4y-22=0$
$p: y=-\frac{x}{4}+\frac{11}{2}$
$p: \frac{x}{22}+\frac{y}{\frac{11}{2}}=1$
$p: \begin{array}{rcr} x & = & 2+4t \\ y & = & 5-t \end{array}$

III. (1) $p: y=2x+1$
$p': y=-\frac{1}{2}x+\frac{17}{2}$

(2) $p: y=\frac{1}{5}x+\frac{14}{5}$
$p': y=-5x+8$

(3) $p: y=-\frac{3}{2}x+2$
$p': y=\frac{2}{3}x+\frac{19}{3}$

(4) $p: y=-\frac{2}{5}x-1$
$p': y=\frac{5}{2}x+\frac{27}{2}$

(5) $p: y=5x-23$
$p': y=-\frac{1}{5}x+3$

(6) $p: y=3x+9$
$p': y=-\frac{1}{3}x-1$

(7) $p: \begin{array}{rr} x= & 1+t \\ y= & 4-2t \end{array}$
$p': \begin{array}{rr} x= & 1+2t \\ y= & 4+t \end{array}$

(8) $p: y=y=2x+4$
$p': y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

(9) $p: y=-3x+3$
$p': y=\frac{1}{3}x-\frac{11}{3}$

(10) $p: y=5x+10$
$p': y=-\frac{1}{5}x-\frac{28}{5}$

(11) $p: y=-2x+16$
$p': y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$

(12) $p: y = -\frac{3}{5}x + \frac{22}{5}$
$p': y = \frac{5}{3}x - \frac{14}{3}$

(13) $p: y = -\frac{2}{3}x + \frac{14}{3}$
$p': y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$

(14) $p: \begin{array}{rr} x = & 3-2t \\ y = & 2+t \end{array}$
$p': \begin{array}{rr} x = & 3+t \\ y = & 2+2t \end{array}$

IV.
(1) $\|: p = -\frac{1}{2} \quad \perp: p = 2$
(2) $\|: p = -\frac{9}{7} \quad \perp: p = 7$
(3) $\|: p = -\frac{3}{2} \quad \perp: p = 6$
(4) $\|: p = -\frac{4}{5} \quad \perp: p = 5$
(5) $\|: p = \frac{8}{7} \quad \perp: p = -\frac{7}{2}$
(6) $\|: p = \frac{8}{5} \quad \perp: p = -\frac{2}{5}$
(7) $\|: p = -\frac{4}{3} \quad \perp: p = 12$
(8) $\|: p = -2 \quad \perp: p = \frac{25}{2}$

V.
(1) $k = -\frac{5}{2}$, $p: y = -\frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$
(2) $k = -\frac{4}{3}$, $p: y = -\frac{4}{3}x + \frac{29}{3}$
(3) $k = \frac{7}{6}$, $p: y = \frac{7}{6}x + \frac{5}{6}$
(4) $k = \frac{7}{4}$, $p: y = \frac{7}{4}x - \frac{1}{4}$
(5) $k = -1$, $p: y = -x + 5$
(6) $k = 2$, $p: y = 2x + 4$
(7) $k = \frac{1}{5}$, $p: y = \frac{1}{5}x + \frac{32}{5}$
(8) $k = 1$, $p: y = x + 6$
(9) $k = -\frac{3}{2}$, $p: y = -\frac{3}{2}x - 2$
(10) $k = -\frac{5}{2}$, $p: y = -\frac{5}{2}x + \frac{11}{2}$
(11) $k = 1$, $p: y = x - 2$
(12) $k = -\frac{1}{4}$, $p: y = -\frac{1}{4}x + \frac{11}{2}$

VI.
(1) $p: y = 3x - 20$
$q: y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$

(2) $p: y = -x - 2$
$q: y = x + 8$

(3) $p: y = 5x - 43$
$q: y = -\frac{1}{5}x + \frac{19}{5}$

(4) $p: y = 2x - 9$
$q: y = -\frac{1}{2}x - \frac{13}{2}$

(5) $p: y = 3x + 5$
$q: y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

(6) $p: y = x + 2$
$q: y = -x + 8$

(7) $p: y = 7x + 11$
$q: y = -\frac{1}{7}x - \frac{23}{7}$

(8) $p: y = -6x + 11$
$q: y = \frac{1}{6}x + \frac{29}{6}$

(9) $p: y = 4x + 13$
$q: y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$

(10) $p: y = -9x + 46$
$q: y = \frac{1}{9}x + \frac{4}{9}$

(11) $p: y = 4x + 5$
$q: y = -\frac{1}{4}x + 5$

(12) $p: y = -2x + 6$
$q: y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

VII.

(1) $p: y = 2x - 8$
$p': y = -\frac{1}{2}x + 7$

(2) $p: y = x - 1$
$p': y = -x + 7$

(3) $p: y = -3x - 7$
$p': y = \frac{1}{3}x + 3$

(4) $p: y = -5x - 8$
$p': y = \frac{1}{5}x - \frac{14}{5}$

(5) $p: y = 3x - 5$
$p': y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

(6) $p: y = x + 7$
$p': y = -x + 7$

(7) $p: y = 4x + 12$
$p': y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$

(8) $p: y = -5x - 17$
$p': y = \frac{1}{5}x - \frac{7}{5}$

(9) $p: y = 2x + 4$
$p': y = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2}$

(10) $p: y = -x - 1$
$p': y = x - 9$

(11) $p: y = -2x$
$p': y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

(12) $p: y = 4x - 8$
$p': y = -\frac{1}{4}x + \frac{19}{4}$

VIII.

(1) $p: \frac{x}{5} - \frac{y}{1} = 1$
$p: x - 5y - 5 = 0$
$p: y = \frac{1}{5}x - 1$
$p: \begin{array}{rr} x = & 5 + 5t \\ y = & t \end{array}$

(2) $p: \frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1$
$p: 3x - 2y + 6 = 0$
$p: y = \frac{3}{2}x + 3$
$p: \begin{array}{rr} x = & -2 + 2t \\ y = & 3t \end{array}$

(3) $p: \frac{x}{-3} - \frac{y}{1} = 1$
$p: x + 3y + 3 = 0$
$p: y = -\frac{1}{3}x - 1$
$p: \begin{array}{rr} x = & -3 - 3t \\ y = & t \end{array}$

(4) $p: \frac{x}{4} + \frac{y}{7} = 1$
$p: 7x + 4y - 28 = 0$
$p: y = -\frac{7}{4}x + 7$
$p: \begin{array}{rr} x = & 4 - 4t \\ y = & 7t \end{array}$

(5) $p: \frac{x}{5} + \frac{y}{1} = 1$
$p: x + 5y - 5 = 0$
$p: y = -\frac{1}{5}x + 1$
$p: \begin{array}{rr} x = & 5 - 5t \\ y = & t \end{array}$

(6) $p: \frac{x}{1} + \frac{y}{3} = 1$
$p: 3x + y - 3 = 0$
$p: y - 3x + 3$
$p: \begin{array}{rr} x = & 1 - t \\ y = & 3t \end{array}$

(7) $p: \frac{x}{2} - \frac{y}{5} = 1$
$p: 5x - 2y - 10 = 0$
$p: y = \frac{5}{2}x - 5$
$p: \begin{array}{rr} x = & 2 + 2t \\ y = & 5t \end{array}$

(8) $p: \frac{x}{-3} + \frac{y}{-7} = 1$
$p: 7x + 3y + 21 = 0$
$p: y = -\frac{7}{3}x - 7$
$p: \begin{array}{rr} x = & -3 - 3t \\ y = & 7t \end{array}$

(9) $p: \frac{x}{-5} + \frac{y}{11} = 1$
$p: 11x - 5y + 55 = 0$
$p: y = \frac{11}{5}x + 11$
$p: \begin{array}{rr} x = & -5 + 5t \\ y = & 11t \end{array}$

(10) $p: \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$
$p: 4x + 3y - 12 = 0$
$p: y = -\frac{4}{3}x + 4$
$p: \begin{array}{rr} x = & 3 - 3t \\ y = & 4t \end{array}$

(11) $p: \frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$
$p: 5x + 2y - 10 = 0$
$p: y = -\frac{5}{2}x + 5$
$p: \begin{array}{rr} x = & 2 - 2t \\ y = & 5t \end{array}$

(12) $p: \frac{x}{2} + \frac{y}{-7} = 1$
$p: 7x - 2y - 14 = 0$
$p: y = \frac{7}{2}x - 7$
$p: \begin{array}{rr} x = & 2 + 2t \\ y = & 7t \end{array}$

(13) $p: \frac{x}{-5} + \frac{y}{-7} = 1$
$p: 7x + 5y + 35 = 0$
$p: y = -\frac{7}{5}x - 7$
$p: \begin{array}{rr} x = & -5 - 5t \\ y = & 7t \end{array}$

(14) $p: \frac{x}{1} + \frac{y}{7} = 1$
$p: 7x + y - 7 = 0$
$p: y = -7x + 7$
$p: \begin{array}{rr} x = & 1 - t \\ y = & 7t \end{array}$

(15) $p: \frac{x}{7} + \frac{y}{-9} = 1$
$p: 9x - 7y - 63 = 0$
$p: y = \frac{9}{7}x - 9$
$p: \begin{array}{rr} x = & 7 + 7t \\ y = & 9t \end{array}$

(16) $p: \frac{x}{-3} + \frac{y}{9} = 1$
$p: 3x - y + 9 = 0$
$p: y = 3x + 9$
$p: \begin{array}{rr} x = & -3 + t \\ y = & 3t \end{array}$

IX. (1) $p: y = -\frac{5}{3}x + \frac{14}{3}$
$p': y = \frac{3}{5}x + \frac{12}{5}$

(2) $p: y = 2x - 13$
$p': y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

(3) $p: y = 8x + 11$
$p': y = -\frac{1}{8}x - \frac{21}{4}$

(4) $p: y = -\frac{3}{4}x - 1$
$p': y = \frac{4}{3}x + \frac{22}{3}$

(5) $p: y = 3x - 1$
$p': y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

(6) $p: y = \frac{5}{2}x - 2$
$p': y = -\frac{2}{5}x + \frac{19}{5}$

(7) $p: y = \frac{7}{2}x - 2$
$p': y = -\frac{2}{7}x + \frac{39}{7}$

(8) $p: y = -\frac{5}{3}x + \frac{4}{3}$
$p': y = \frac{3}{5}x + \frac{18}{5}$

(9) $p: y = \frac{7}{3}x - \frac{7}{3}$
$p': y = -\frac{3}{7}x - \frac{27}{7}$

(10) $p: y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$
$p': y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

X. Napríklad:

$p: x = 3, \qquad p: \begin{array}{rr} x = & 3 \\ y = & t \end{array}$

2

Gaussova eliminačná metóda

Všetky sústavy z tohto cvičenia treba riešiť len s použitím Gaussovej eliminačnej metódy. Rozšírenú maticu sústavy treba eliminovať kompletne (samozrejme pokiaľ sa to dá) t.j. tak, aby na ľavej strane zostala jednotková matica. V prípade rovníc s nekonečným počtom riešení ich treba všetky napísať s použitím potrebného počtu parametrov.

I. Sústavy s jediným riešením

1.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 9 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 7 \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 7 \\ 3x_1 & & & + & 3x_3 & = & -3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 11 \\ x_1 & - & 5x_2 & - & 2x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \end{array}$$

4.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \end{array}$$

5.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

6.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 12 \end{array}$$

7.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 8 \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & -4 \end{array}$$

8.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 7 \\ x_1 & & & - & x_3 & = & -2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 7 \end{array}$$

9.

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & x_2 & + & 2x_3 & = & -6 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 9 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & & & = & 9 \end{array}$$

10.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 8 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 10 \end{array}$$

11.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 7x_2 & + & 5x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 6x_2 & + & 10x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 0 \end{array}$$

12.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

13.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

14.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 18x_2 & + & 9x_3 & = & -9 \\ 2x_1 & + & 15x_2 & + & 7x_3 & = & -7 \\ 4x_1 & + & 24x_2 & + & 10x_3 & = & -8 \end{array}$$

15.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & -1 \\ -5x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 4 \end{array}$$

16.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

17.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 3 \\ & & 3x_2 & - & x_3 & = & -3 \\ 9x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 6 \end{array}$$

18.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & = & 8 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & = & 8 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & -2 \end{array}$$

19.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 8 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 19 \\ 4x_1 & + & 7x_2 & - & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 38 \\ 6x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 35 \end{array}$$

20.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & -2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 8 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 4 \end{array}$$

21.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 &+& x_2 &-& x_3 &+& 2x_4 &=& 0 \\ x_1 &+& 2x_2 &+& x_3 &-& x_4 &=& 0 \\ 2x_1 &-& x_2 &+& 2x_3 &+& x_4 &=& 0 \\ x_1 &+& 3x_2 &+& x_3 &+& 3x_4 &=& 0 \end{array}$$

22.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 && &-& 2x_3 &+& x_4 &=& 3 \\ -x_1 &+& x_2 &+& 3x_3 &-& x_4 &=& 5 \\ 2x_1 &-& 2x_2 && &+& 3x_4 &=& 5 \\ 3x_1 &+& 4x_2 && &+& x_4 &=& -3 \end{array}$$

23.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 5x_1 &+& 3x_2 &+& 3x_3 &+& x_4 &=& 11 \\ x_1 &-& x_2 &+& x_3 && &=& -2 \\ 3x_1 &+& 3x_2 &+& 2x_3 &+& x_4 &=& 10 \\ x_1 &-& 3x_2 &+& 2x_3 && &=& -7 \\ 4x_1 &+& x_2 &+& 3x_3 &+& x_4 &=& 8 \end{array}$$

24.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 &+& 7x_2 &+& 5x_3 &+& 3x_4 &=& 4 \\ x_1 &-& 2x_2 &-& x_3 &-& x_4 &=& 5 \\ 3x_1 &-& 2x_2 &+& x_3 &-& x_4 &=& 13 \\ 2x_1 &+& 9x_2 &+& 8x_3 &+& 3x_4 &=& 7 \\ x_1 &+& 5x_2 &+& 3x_3 &+& x_4 &=& 5 \end{array}$$

25.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 &-& x_2 && &-& 3x_4 &=& -1 \\ 7x_1 &-& 2x_2 &-& 2x_3 &-& 10x_4 &=& -2 \\ 7x_1 &-& x_2 &+& x_3 &-& 9x_4 &=& -4 \\ 2x_1 && &-& 2x_3 &-& 4x_4 &=& -6 \\ 6x_1 &-& x_2 &+& 2x_3 &-& 7x_4 &=& -1 \end{array}$$

26.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 &+& 2x_2 &+& 7x_3 &+& 2x_4 &=& 6 \\ 6x_1 &+& 4x_2 &+& x_3 &+& x_4 &=& 6 \\ x_1 &-& 2x_2 &+& 6x_3 &-& x_4 &=& 0 \\ 3x_1 &-& 8x_2 &+& 3x_3 &-& x_4 &=& -2 \end{array}$$

27.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 &-& x_2 &+& 2x_3 &-& x_4 &=& 0 \\ x_1 &-& 10x_2 &+& x_3 &+& x_4 &=& 1 \\ 2x_1 &+& 4x_2 &+& 4x_3 &+& 2x_4 &=& 3 \\ -x_1 &-& 4x_2 &+& 4x_3 &+& 5x_4 &=& 5 \end{array}$$

28.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & - & 6x_4 & = & 0 \\ 7x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & 13x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 13x_2 & + & 40x_3 & - & 16x_4 & = & 13 \end{array}$$

29.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 4 \end{array}$$

30.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & + & 5x_5 & = & 12 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & + & 5x_5 & = & 14 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & + & 5x_5 & = & 8 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & + & 5x_5 & = & 20 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & + & x_5 & = & 0 \end{array}$$

II. Sústavy s nekonečným počtom riešení

1.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 7x_1 & + & 14x_2 & - & 21x_3 & = & 7 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \\ 5x_1 & + & 10x_2 & + & 15x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & 9x_3 & = & 3 \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & + & 2x_2 & - & 18x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 8x_3 & = & 0 \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 7x_1 & + & 14x_2 & - & 21x_3 & = & 7 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \\ 5x_1 & + & 10x_2 & + & 15x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & 9x_3 & = & 3 \end{array}$$

4.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 8x_3 & = & 9 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 7x_3 & = & 6 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 9x_3 & = & 7 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -2 \end{array}$$

5.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -9 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & = & 10 \\ 5x_1 & + & 12x_2 & + & 6x_3 & = & 29 \end{array}$$

6.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 0 \end{array}$$

7.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -4 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & = & -2 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 15x_3 & = & 4 \end{array}$$

8.
$$\begin{array}{rcrcrcr} \frac{1}{2}x_1 & + & x_2 & + & \frac{3}{2}x_3 & = & 2 \\ \frac{1}{3}x_1 & + & \frac{2}{3}x_2 & + & x_3 & = & \frac{4}{3} \\ \frac{3}{5}x_1 & + & \frac{6}{5}x_2 & + & \frac{9}{5}x_3 & = & \frac{12}{5} \end{array}$$

9.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 6x_1 & - & 6x_2 & + & 7x_3 & + & 10x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & - & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 13x_3 & + & 18x_4 & = & 1 \end{array}$$

10.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & -2 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & -5 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & + & 2x_4 & = & -1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 6x_4 & = & -10 \end{array}$$

11.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & -2 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 7 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & & & + & 3x_4 & = & 4 \end{array}$$

12.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & -1 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & 2x_4 & = & -2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & & & & & - & 3x_4 & = & -3 \end{array}$$

13.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} & & x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ -4x_1 & - & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 4x_4 & = & 0 \end{array}$$

14.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 4x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & - & 11x_2 & + & 5x_3 & + & 9x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 12x_2 & - & 6x_3 & - & 10x_4 & = & 1 \end{array}$$

15.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & & & - & 2x_4 & = & 0 \\ 6x_1 & + & 6x_2 & - & 8x_3 & + & 8x_4 & = & 0 \end{array}$$

16.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 6x_1 & - & 9x_2 & + & 7x_3 & + & 10x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & - & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 13x_3 & + & 18x_4 & = & 1 \end{array}$$

17.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & + & 3x_5 & = & 5 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & + & x_5 & = & 4 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & & & + & 2x_5 & = & 5 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & + & 3x_5 & = & 7 \end{array}$$

18.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 3x_1 & & & - & x_3 & - & 2x_4 & - & 4x_5 & = & 0 \\ 4x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & - & 5x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & + & 6x_4 & & & = & 0 \\ 6x_1 & - & 3x_2 & & & - & 9x_4 & - & 3x_5 & = & 0 \\ 10x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & - & 5x_4 & - & 13x_5 & = & 0 \end{array}$$

III. Sústavy bez riešenia

1.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & & & = & 5 \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 11 \\ x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 7 \\ 11x_1 & - & 4x_2 & - & 3x_3 & = & 10 \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & - & 7x_2 & - & 2x_3 & = & -1 \\ -2x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 7 \\ 11x_1 & - & 4x_2 & - & 3x_3 & = & 10 \end{array}$$

5.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 8 \\ 7x_1 & + & 4x_2 & - & 4x_3 & = & 13 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 6 \end{array}$$

6.
$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \\ x_1 & + & x_2 & + & 9x_3 & = & 9 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 7 \end{array}$$

7.
$$\begin{array}{rcrcrcr} \frac{3}{2}x_1 & - & \frac{3}{2}x_2 & - & \frac{3}{2}x_3 & = & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3}x_1 & - & \frac{2}{3}x_2 & - & \frac{2}{3}x_3 & = & \frac{3}{2} \end{array}$$

8.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & -2 \\ 2x_1 & - & 8x_2 & - & 6x_3 & = & -1 \end{array}$$

9.
$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & & & - & 3x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 8x_3 & = & 8 \\ 4x_1 & - & 3x_2 & - & 6x_3 & = & 1 \\ 5x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & = & 6 \end{array}$$

10.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -15 \\ 5x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 11 \\ 6x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 30 \end{array}$$

11.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 8x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & -3 \\ 3x_1 & + & 10x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & -2 \\ 2x_1 & & & & & - & x_4 & = & 1 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & & & & & = & -6 \end{array}$$

12.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 6x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -2 \\ 9x_1 & - & x_2 & + & 15x_3 & - & 5x_4 & = & 1 \end{array}$$

13.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & 4 \\ 5x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -1 \end{array}$$

14.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 5 \\ -2x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & + & 4x_4 & = & -1 \\ 7x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \\ 4x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & - & 5x_4 & = & 3 \end{array}$$

15.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 5 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 7 \\ 3x_1 & - & 7x_2 & + & 6x_3 & - & 6x_4 & = & -3 \end{array}$$

16.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & - & 3x_4 & = & -1 \\ 5x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 2 \end{array}$$

17.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & 4x_2 & + & 9x_3 & - & x_4 & = & 9 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 8x_3 & + & 3x_4 & = & 7 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 7x_3 & + & 7x_4 & = & 7 \end{array}$$

18.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 3x_1 & & & - & x_3 & - & 2x_4 & - & 4x_5 & = & 3 \\ 4x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & - & 5x_5 & = & 1 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & + & 6x_4 & & & = & 0 \\ 6x_1 & - & 3x_2 & & & - & 9x_4 & - & 3x_5 & = & -3 \\ 10x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & - & 5x_4 & - & 13x_5 & = & 2 \end{array}$$

IV. Špeciálne úlohy

1. Napíšte sústavu lineárnych rovníc, ktorá má všetky koeficienty nenulové a jej jediné riešenie je $(x_1, x_2, x_3) = (-4, 5, 13)$.

2. Napíšte sústavu lineárnych rovníc, ktorá má všetky koeficienty nenulové a jej jediné riešenie je $(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{6}{7}, \frac{3}{14}\right)$.

3. Napíšte sústavu troch LR, ktorá má všetky koeficienty nenulové a má nekonečne veľa riešení v tvare $(x_1, x_2, x_3) = (1+4t, 2-5t, t)$, kde $t \in \mathbb{R}$.

4. Napíšte sústavu štyroch lineárnych rovníc o štyroch neznámych, ktorá má všetky koeficienty nenulové a nemá riešenie.

2. cvičenie – Výsledky

I. Sústavy s jediným riešením

1. $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 2, 3)$
2. $(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, -3)$
3. $(x_1, x_2, x_3) = (1, -2, 3)$
4. $(x_1, x_2, x_3) = (4, 1, -3)$
5. $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$
6. $(x_1, x_2, x_3) = (2, 3, 5)$
7. $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, -1)$
8. $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3)$
9. $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, -4)$
10. $(x_1, x_2, x_3) = (3, 1, 2)$
11. $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$
12. $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$
13. $(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{4}{3}, -3, \frac{4}{3}\right)$
14. $(x_1, x_2, x_3) = \left(1, \frac{1}{3}, -2\right)$
15. $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{16}{61}, \frac{59}{61}, \frac{21}{61}\right)$
16. $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{17}{19}, \frac{11}{19}, \frac{1}{19}\right)$
17. $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{2}{5}, -\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right)$
18. $(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{6}{5}, 2, -\frac{2}{5}\right)$
19. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 3, 2, 1)$
20. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 2, 1, 3)$
21. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$
22. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-20, 9, -1, 21)$
23. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, 0, -5, 11)$
24. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{31}{6}, \frac{2}{3}, -\frac{7}{6}, 0\right)$
25. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(2, -\frac{9}{2}, 0, \frac{5}{2}\right)$
26. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$
27. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{11}{100}, \frac{1}{50}, \frac{13}{50}, \frac{83}{100}\right)$
28. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{35}{117}, \frac{53}{9}, \frac{263}{117}, \frac{7}{117}\right)$
29. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{67}{92}, \frac{7}{23}, \frac{169}{92}, \frac{4}{23}\right)$
30. $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, -1, 2, -2, 3)$

II. Sústavy s nekonečným počtom riešení

1. $(x_1, x_2, x_3) = (1 - 2t, t, 0)$
2. $(x_1, x_2, x_3) = (2t, 4t, t)$

3. $(x_1, x_2, x_3) = (1 - 2t, t, 0)$
4. $(x_1, x_2, x_3) = (1 - 2t, 4 - 3t, t)$
5. $(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{18}{11}t - \frac{25}{11}, \frac{2}{11}t + \frac{37}{11}, t\right)$
6. $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{13}{7}t, \frac{2}{7}t, t\right)$
7. $(x_1, x_2, x_3) = (3t, 6t + 2, t)$
8. $(x_1, x_2, x_3) = (4 - 2u - 3v, u, v)$
9. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{16}, 0, -\frac{11}{8}t, t\right)$
10. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (t - 3, t - 2, t - 1, t)$
11. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-13 - 5t, 2t + 3, t, 5)$
12. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (v - 1, 2u, u, v)$
13. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{7}{2}u - \frac{5}{2}v, 2v - 3u, u, v\right)$
14. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{3}{23}u + \frac{1}{23}v + \frac{35}{46}, \frac{11}{23}u + \frac{19}{23}v - \frac{1}{23}, u, v\right)$
15. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{2}{3}u + \frac{1}{3}v, \frac{2}{3}u - \frac{5}{3}v, u, v\right)$
16. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{3}{2}u - \frac{1}{16}v + \frac{1}{2}, u, -\frac{11}{8}v, v\right)$
17. $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1 + t, -1 - 2t, 0, t, 2)$
18. $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(\frac{1}{3}u + \frac{2}{3}v, \frac{2}{3}u - \frac{5}{3}v, u, v, 0\right)$

III. Sústavy bez riešenia

1. nemá riešenie
2. nemá riešenie
3. nemá riešenie
4. nemá riešenie
5. nemá riešenie
6. nemá riešenie
7. nemá riešenie
8. nemá riešenie
9. nemá riešenie
10. nemá riešenie
11. nemá riešenie
12. nemá riešenie
13. nemá riešenie
14. nemá riešenie
15. nemá riešenie
16. nemá riešenie
17. nemá riešenie
18. nemá riešenie

IV. Špeciálne úlohy

1. Napríklad:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 9 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & -6 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & = & 119 \end{array}$$

2. Napríklad:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 7x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & -\frac{11}{7} \\ 3x_1 & + & 14x_2 & + & 2x_3 & = & \frac{153}{14} \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & \frac{13}{7} \end{array}$$

3. Napríklad:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 11 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & 17x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & - & 9x_3 & = & -1 \end{array}$$

4. Napríklad:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & = & -1 \\ 5x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 2 \\ 7x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & + & 7x_4 & = & -4 \end{array}$$

3

Násobenie matíc, inverzné matice

Na tomto cvičení sa budú riešiť úlohy na násobenie matíc, hľadanie inverzných matíc a riešenie maticových rovníc. Inverzné matice sa na tomto cvičení budú hľadať výlučne Gauss-Jordanovou metódou, t.j. pomocou elementárnych riadkových úprav.

Násobenie matíc

Majme dve matice: maticu $\mathbb{A}$ typu $m \times n$ a maticu $\mathbb{B}$ typu $k \times l$. Potom existuje matica $\mathbb{C} = \mathbb{A}.\mathbb{B}$, ktorá je ich súčinom práve vtedy, ak platí $n = k$. To znamená, ak matica $\mathbb{A}$ má práve toľko stĺpcov ako má matica $\mathbb{B}$ riadkov. Typ matice $\mathbb{C}$ je potom $m \times l$.

I. Dané sú dve matice $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$. Zistite, či existujú súčiny $\mathbb{A}.\mathbb{B}$, resp. $\mathbb{B}.\mathbb{A}$ a ak existujú, tak ich vypočítajte:

1. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

2. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

3. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

4. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

5. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

6. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

7. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

8. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

II. Nájdite reálne čísla a, b, c, d tak, aby platil súčin:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & b & 1 \\ a & 9 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ c & 1 & 3 \\ -1 & 4 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 24 & 2 \\ 7 & 5 & 7 \\ 31 & 35 & 31 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & d \\ 1 & 4 & 2 \\ c & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 8 \\ -4 & 2 & -8 \\ 4 & -2 & 8 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 2 & b & 3 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -2 & c & 4 \\ 6 & 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 10 & 0 \\ 14 & -2 & 24 \\ 4 & -25 & 24 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ a & 3 & 3 \\ 5 & b & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & -5 & 2 \\ -3 & 2 & d \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -13 & -2 \\ 15 & -6 & 15 \\ 9 & -11 & 44 \end{pmatrix}$

III. Rovnako ako pri mocninách čísel, mocnina matice je súčin matice samej so sebou (ak existuje). Čiže napr. $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}.\mathbb{A}$ alebo $\mathbb{A}^3 = \mathbb{A}.\mathbb{A}.\mathbb{A}$. Vypočítajte mocniny matíc:

1. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$ $\qquad$ 2. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^3$

3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^4$

4. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$, kde $n \in \mathbb{N}$

5. $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n$, kde $n \in \mathbb{N}$

6. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}^n$, kde $n \in \mathbb{N}$

Hľadanie inverznej matice

Na tomto cvičení budeme inverzné matice hľadať výlučne pomocou Gauss-Jordanovej metódy. Je to postup analogický riešeniu sústav lineárnych rovníc Gaussovou eliminačnou metódou. Rozdiel je len v tom, že na pravej strane úprav nebudú na začiatku pravé strany rovníc, ale jednotková matica rovnakého typu ako je matica na ľavej strane. Pomocou elementárnych riadkových úprav potom upravujeme ľavú stranu na jednotkovú maticu a rovnaké úpravy vykonávame aj na pravej strane. Keď na ľavej strane dostaneme jednotkovú maticu, tak matica, ktorá je na pravej strane, je inverzná matica ku pôvodnej matici.

IV. V nasledovných úlohach nájdite inverznú maticu ku matici $\mathbb{A}$ pomocou Gauss-Jordanovej metódy.

1. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

3. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

4. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

5. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

6. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

7. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 40 & 21 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

8. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 35 & 30 \\ 14 & 15 \end{pmatrix}$

9. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

10. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

11. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

12. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

13. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

14. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

15. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & 18 & -7 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

16. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

17. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

18. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

19. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

20. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

21. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$

22. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

23. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

24. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$

25. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

26. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

V. Vyriešte maticovú rovnicu:

1. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

6. $\mathbb{X} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$

7. $\mathbb{X}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

8. $\mathbb{X}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$

9. $\mathbb{X}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

10. $\mathbb{X}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\mathbb{X}\cdot\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\cdot\mathbb{X}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 3\mathbb{X}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{X}$

14. $\begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -13 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\cdot\mathbb{X} = \mathbb{X}$

15. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 6 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

17. $\mathbb{X}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$

18. $\mathbb{X}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. cvičenie – Výsledky

Násobenie matíc

I.

1. $\mathbb{A}.\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathbb{B}.\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

2. $\mathbb{A}.\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 16 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathbb{B}.\mathbb{A} \longrightarrow$ neexistuje

3. $\mathbb{A}.\mathbb{B} \longrightarrow$ neexistuje $\qquad \mathbb{B}.\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & -10 & 13 \\ 7 & 9 & -4 \end{pmatrix}$

4. $\mathbb{A}.\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 0 & 8 & 6 \\ -5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathbb{B}.\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -4 & 9 & 5 \\ -9 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

5. $\mathbb{A}.\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathbb{B}.\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

6. $\mathbb{A}.\mathbb{B} \longrightarrow$ neexistuje $\qquad \mathbb{B}.\mathbb{A} \longrightarrow$ neexistuje

7. $\mathbb{A}.\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathbb{B}.\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 \\ -4 & 4 & -4 & 4 \\ -5 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

8. $\mathbb{A}.\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 21 \\ 2 & 9 & -1 \\ -1 & 0 & 13 \\ 7 & 13 & 19 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathbb{B}.\mathbb{A} \longrightarrow$ neexistuje

II.

1. $a = 7, \quad b = 3, \quad c = 3, \quad d = -1$

2. $a = 1, \quad b = 1, \quad c = 3, \quad d = 5$

3. $a = -1, \quad b = 4, \quad c = -3, \quad d = 2$

4. $a = 3, \quad b = 8, \quad c = 7, \quad d = 4$

III.

1. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 37 & 9 \\ 18 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{, pre } n = 2k \text{ (párne)} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} & \text{, pre } n = 2k+1 \text{ (nepárne)} \end{cases}$

5. $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{, pre } n = 2k \\ \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} & \text{, pre } n = 2k+1 \end{cases}$

Hľadanie inverznej matice

IV.

1. $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

3. $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

4. $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

5. $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

6. $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$

7. $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} \\ -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$

8. $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{2}{15} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

9. $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

10. $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

11. $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$

12. $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{3} & -3 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ -1 & -\frac{7}{3} & 3 \end{pmatrix}$

13. $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & \frac{7}{12} \end{pmatrix}$

14. $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{2}{7} & \frac{1}{14} \\ 0 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{14} \end{pmatrix}$

15. $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 & 5 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

16. $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

17. $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

18. $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

19. $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 & -\frac{4}{3} & -1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

20. $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{14} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{7} & \frac{1}{14} \\ 3 & 2 & \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$

21. $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{40}{3} & -6 & -\frac{26}{3} & \frac{25}{3} \\ -\frac{31}{3} & 5 & \frac{20}{3} & -\frac{19}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} & -1 & -\frac{5}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

22. $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{2}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{12} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{5}{6} \\ \frac{13}{12} & \frac{1}{3} & -\frac{7}{12} & -\frac{5}{6} \\ \frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

23. Matica otočenia o uhol α:

$$\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

24. Matica osovej súmernosti:

$$\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

25. $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

26. $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

V.

1. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

   $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 0 & -11 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

   $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

   $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

   $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

   $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

   $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

   $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

   $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} -11 & 21 \\ -21 & 38 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

   $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

   $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ -10 & 14 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{23}\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$

$\mathbb{X} = \frac{1}{23}\begin{pmatrix} 14 & -15 \\ -10 & 14 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & -\frac{7}{8} \\ -\frac{5}{2} & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$

$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{32} & \frac{1}{32} \\ -\frac{1}{16} & \frac{3}{16} \end{pmatrix}$

$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 6 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$

$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

17. $$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

18. $$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} -\frac{19}{3} & 4 & \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4
Determinanty a ich aplikácie

Na tomto cvičení budeme počítať determinanty štvorcových matíc a ukážeme si ako sa tieto používajú pri riešení sústav lineárnych rovníc a pri výpočte inverzných matíc.

Determinant matice

Determinanty sa počítajú len zo štvorcových matíc, t.j. matíc typu $n \times n$. Pre malé matice 2×2 a 3×3 existujú jednoduché pravidlá na výpočet ich determinantov. Pre matice 2×2 je to rozdiel súčinov hlavnej a vedľajšej diagonály a pre matice 3×3 je to *Sarusovo pravidlo* (viď prednášky a skriptá). Pre väčšie matice, čiže matice 4×4 a viac, sa ich determinanty počítajú pomocou:

- rozvoja determinantu podľa riadku alebo stĺpca,
- úpravy matice v determinante,
- kombináciou predošlých dvoch metód, čo je najefektívnejší postup.

Pri úprave matice v determinante sa používajú rovnaké elementárne riadkové operácie ako pri Gaussovej eliminačnej metóde. Vykonávanie týchto operácii je ale viazané na isté podmienky (viď prednášky a skriptá). Na rozdiel od úprav matice pri Gaussovej eliminačnej metóde je tieto operácie pri úprave determinantu možné použiť aj ako stĺpcové!

I. Vypočítajte determinant matice:

1. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$
2. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

3. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 8 & -1 \end{vmatrix}$

4. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}$

5. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$

6. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix}$

7. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \\ -4 & -5 & -19 \end{vmatrix}$

8. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$

9. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

10. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

11. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

12. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

13. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$

14. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 3 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

15. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

16. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & -7 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

17. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

18. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

19. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

20. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

21. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

22. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & -1 & 3 \\ -5 & 10 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

23. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

24. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$

25. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

26. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

27. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$

28. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

29. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

30. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

31. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

32. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$

33. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 7 & 2 \\ 6 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 6 & -1 \\ 3 & -8 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

34. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

35. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 & 4 \\ 7 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & -5 & -5 \end{vmatrix}$

36. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -10 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ -1 & -4 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

37. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

38. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

39. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & -2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -3 & 6 & 0 \\ 6 & -3 & 0 & -9 & -3 \\ 10 & 1 & -4 & -5 & -13 \end{vmatrix}$

40. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

41. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

42. $|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

Cramerovo pravidlo – sústavy lineárnych rovníc

Cramerovo pravidlo je metóda riešenia sústav lineárnych rovníc pomocou determinantov. Dá sa použiť len na také sústavy, ktorých matica sústavy je štvorcová, t.j. ktoré majú rovnaký počet rovníc ako neznámych. A aj pri takýchto sústavach riešenie dostaneme pomocou Cramerovho pravidla len vtedy, ak sústava má práve jedno riešenie. Detaily boli uvedené na prednáške a nájdete ich aj v skriptách.

II. Pomocou Cramerovho pravidla vyriešte sústavu rovníc:

1.
$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & 5x_2 & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & = & -7 \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{rcrcr} -3x_1 & + & 6x_2 & = & 5 \\ 2x_1 & - & 8x_2 & = & 7 \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{rcrcr} x_1 \cos\alpha & + & x_2 \sin\alpha & = & 2 \\ -x_1 \sin\alpha & + & x_2 \cos\alpha & = & -3 \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{rcrcr} x_1 \cos\alpha & + & x_2 \sin\alpha & = & 2 \\ x_1 \sin\alpha & - & x_2 \cos\alpha & = & 7 \end{array}$$

5.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 9x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\ 5x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \end{array}$$

6.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 5x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & & & = & 5 \end{array}$$

7.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & -1 \\ 5x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & & & - & 11x_3 & = & -3 \end{array}$$

8.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ 6x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\ & & 3x_2 & - & x_3 & = & -3 \end{array}$$

9.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 12x_2 & + & 8x_3 & + & 4x_4 & = & 9 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & & & = & 10 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & & & = & 18 \\ 3x_1 & + & 14x_2 & + & 11x_3 & + & 4x_4 & = & 12 \end{array}$$

10.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & & & + & 13x_3 & + & x_4 & = & 6 \\ 7x_1 & + & 2x_2 & + & 7x_3 & & & = & 6 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & - & 10x_2 & + & 9x_3 & - & 2x_4 & = & -2 \end{array}$$

11.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 10x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 10x_4 & = & 1 \\ 5x_1 & + & 3x_2 & - & 8x_3 & - & 3x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & - & 6x_4 & = & 0 \\ 5x_1 & - & 15x_2 & + & 45x_3 & - & 22x_4 & = & 13 \end{array}$$

12.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 3 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_4 & = & 4 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & & & = & 8 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 7 \end{array}$$

Výpočet inverznej matice pomocou determinantu

Výpočet inverznej matice pomocou determinantov je vhodný najmä pre malé matice typu 2×2 a 3×3 a pre špeciálne matice. Vo všeobecnosti je pre väčšie matice táto metóda pracnejšia než Gauss-Jordanova metóda. Ak máme maticu $\mathbb{A}$ typu $n \times n$ a jej determinant je rôzny od nuly ($|\mathbb{A}| \neq 0$), tak potom jej inverzná matica bude mať tvar:

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbb{A}|} \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} & \dots & d_{n1} \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} & \dots & d_{n2} \\ & & \dots & & \\ d_{1n} & d_{2n} & d_{3n} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{kde} \quad d_{ij} = (-1)^{i+j} |\mathbb{A}_{ij}|$$

Maticu $\mathbb{A}_{ij}$ dostaneme z pôvodnej matice $\mathbb{A}$ vynechaním i-teho riadku a j-teho stĺpca.

III. Pomocou determinantov vypočítajte inverznú máticu $\mathbb{A}^{-1}$:

1. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 14 & 15 \\ 35 & 30 \end{pmatrix}$

3. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

4. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$

5. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

6. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

7. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & -7 & 4 \end{pmatrix}$

8. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 18 & 9 \\ 2 & 15 & 7 \\ 4 & 24 & 10 \end{pmatrix}$

9. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

10. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

11. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

12. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

13. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

14. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & -11 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

15. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

16. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 9 & 8 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

17. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -1 & -4 \\ 6 & -1 & 2 & -7 \\ 7 & -1 & 1 & -9 \end{pmatrix}$

18. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. cvičenie – Výsledky

Determinant matice

I.

1. $|\mathbb{A}| = -2$
2. $|\mathbb{A}| = 3$
3. $|\mathbb{A}| = -58$
4. $|\mathbb{A}| = 0$
5. $|\mathbb{A}| = 1$
6. $|\mathbb{A}| = -1$
7. $|\mathbb{A}| = 0$
8. $|\mathbb{A}| = -54$
9. $|\mathbb{A}| = 33$
10. $|\mathbb{A}| = -5$
11. $|\mathbb{A}| = -13$
12. $|\mathbb{A}| = -3$
13. $|\mathbb{A}| = -12$
14. $|\mathbb{A}| = 59$
15. $|\mathbb{A}| = -63$
16. $|\mathbb{A}| = 52$
17. $|\mathbb{A}| = -1$
18. $|\mathbb{A}| = -1$
19. $|\mathbb{A}| = 10$
20. $|\mathbb{A}| = 60$
21. $|\mathbb{A}| = 1$
22. $|\mathbb{A}| = -216$
23. $|\mathbb{A}| = 48$
24. $|\mathbb{A}| = 16$
25. $|\mathbb{A}| = -3$
26. $|\mathbb{A}| = -16$
27. $|\mathbb{A}| = 0$
28. $|\mathbb{A}| = 92$
29. $|\mathbb{A}| = -48$
30. $|\mathbb{A}| = 6$
31. $|\mathbb{A}| = -9$
32. $|\mathbb{A}| = 0$
33. $|\mathbb{A}| = -800$
34. $|\mathbb{A}| = 4$
35. $|\mathbb{A}| = 0$
36. $|\mathbb{A}| = 100$
37. $|\mathbb{A}| = 394$
38. $|\mathbb{A}| = 665$
39. $|\mathbb{A}| = 0$
40. $|\mathbb{A}| = 360$
41. $|\mathbb{A}| = -1$
42. $|\mathbb{A}| = -1$

Cramerovo pravidlo – sústavy lineárnych rovníc

II.

1. $(x_1, x_2) = \frac{1}{11}(-29, -16)$
2. $(x_1, x_2) = \frac{1}{12}(-82, -31)$
3. $(x_1, x_2) = (2\cos\alpha + 3\sin\alpha, 2\sin\alpha - 3\cos\alpha)$
4. $(x_1, x_2) = (2\cos\alpha + 7\sin\alpha, 2\sin\alpha - 7\cos\alpha)$
5. $(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{4}{3}, -3, \frac{4}{3}\right)$
6. $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{17}{19}, \frac{11}{19}, \frac{1}{19}\right)$

7. $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{16}{61}, \frac{59}{61}, \frac{21}{61}\right)$

8. $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{2}{5}, -\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

9. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{31}{6}, \frac{2}{3}, -\frac{7}{6}, 0\right)$

10. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$

11. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{35}{117}, \frac{53}{9}, \frac{263}{117}, \frac{7}{117}\right)$

12. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{67}{92}, \frac{7}{23}, \frac{169}{92}, \frac{4}{23}\right)$

Výpočet inverznej matice pomocou determinantu

III.

1. $\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

2. $\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{105}\begin{pmatrix} -30 & 15 \\ 35 & -14 \end{pmatrix}$

3. $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

4. $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$

5. $\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 \\ -5 & 1 & 1 \\ -1 & -5 & 8 \end{pmatrix}$

6. $\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{59}\begin{pmatrix} 19 & -8 & 18 \\ 9 & -10 & -7 \\ -13 & 21 & -3 \end{pmatrix}$

7. $\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{52}\begin{pmatrix} 13 & -18 & 7 \\ 13 & -2 & -5 \\ 13 & 10 & -1 \end{pmatrix}$

8. $\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 18 & -36 & 9 \\ -8 & 6 & 3 \\ 12 & 0 & -9 \end{pmatrix}$

9. $\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{63}\begin{pmatrix} 14 & 7 & -7 \\ 8 & -5 & 14 \\ -5 & 11 & 7 \end{pmatrix}$

10. $\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \\ -12 & -2 & 9 \end{pmatrix}$

11. $\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} 7 & -6 & 11 \\ 0 & 10 & 5 \\ 7 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

12. $\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -19 & 21 & -10 \\ 10 & -10 & 5 \\ 7 & -8 & 5 \end{pmatrix}$

13. $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{11}{20} & \frac{13}{60} & \frac{2}{15} \\ \frac{1}{5} & -\frac{9}{20} & \frac{13}{60} & \frac{2}{15} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{20} & -\frac{17}{60} & \frac{2}{15} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$

14. $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{47}{50} & \frac{127}{100} & -\frac{54}{25} & 1 \\ -\frac{2}{25} & \frac{7}{50} & -\frac{3}{25} & 0 \\ \frac{24}{25} & -\frac{59}{50} & \frac{61}{25} & -1 \\ -\frac{41}{50} & \frac{131}{100} & -\frac{62}{25} & 1 \end{pmatrix}$

15. $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{46} & \frac{11}{92} & \frac{1}{4} & \frac{15}{92} \\ \frac{3}{23} & -\frac{4}{23} & 0 & \frac{5}{23} \\ \frac{5}{46} & \frac{25}{92} & -\frac{1}{4} & \frac{9}{92} \\ \frac{5}{23} & \frac{1}{23} & 0 & -\frac{7}{23} \end{pmatrix}$

16. $\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 & -6 \\ 11 & 2 & -5 & 0 \\ -6 & 0 & -6 & 6 \\ -19 & -4 & 25 & -12 \end{pmatrix}$

17. $\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & -8 & -10 & 12 \\ -5 & 13 & 14 & -15 \\ 0 & 6 & 12 & -12 \\ -1 & -7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$

18. $\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 3 & 8 \\ -5 & 12 & -2 & -17 \end{pmatrix}$

5

Hodnosť, regularita a singularita matíc, sústavy lineárnych rovníc s parametrom

Hodnosť, regularita a singularita matíc

- *Hodnosť matice*, je počet nenulových riadkov po eliminácii tejto matice na trojuholníkový tvar. Ak sa na riadky matice pozeráme ako na vektory, tak hodnosť matice udáva, koľko z týchto vektorov je lineárne nezávislých.

- Štvorcová matica typu $n \times n$ je *regulárna* práve vtedy, keď jej hodnosť je n. To znamená, že po eliminácii tejto matice na trojuholníkový tvar, sú všetky riadky nenulové. Alebo inak povedané, všetky riadky tejto matice sú lineárne nezávislé vektory.

- Štvorcová matica typu $n \times n$ je *singulárna* práve vtedy, keď nie je regulárna. To znamená, že po eliminácii tejto matice na trojuholníkový tvar, dostaneme aj nulové riadky. Alebo inak povedané, riadky tejto matice sú lineárne závislé vektory.

Pre štvorcovú maticu $\mathbb{A}$ potom platia nasledujúce tvrdenia:

- Determinant matice $\mathbb{A}$ je nenulový práve vtedy keď, je táto matica regulárna.

- Ku matici $\mathbb{A}$ existuje inverzná matica práve vtedy, keď je táto matica regulárna.

- Ku matici $\mathbb{A}$ existuje inverzná matica práve vtedy, keď jej determinant je nenulový.

I. Zistite, či sú dané vektory lineárne závislé alebo nezávislé:

1. $(3,-1,-1)$, $(-3,5,5)$, $(1,-2,-2)$
2. $(7,-2,3)$, $(7,2,8)$, $(7,-10,-8)$
3. $(1,1,1)$, $(8,1,8)$, $(-3,2,-3)$
4. $(1,-5,-2)$, $(2,3,5)$, $(3,6,4)$
5. $(7,-2,3)$, $(7,-1,5)$, $(1,0,1)$
6. $(7,2,1)$, $(3,14,2)$, $(1,2,3)$
7. $(1,-2,3)$, $(2,3,5)$, $(4,2,-1)$, $(5,3,-2)$
8. $(3,-1,5)$, $(1,4,0)$, $(2,-5,-7)$
9. $(2,2,3,2)$, $(-2,4,3,4)$, $(2,5,6,5)$
10. $(2,3,2,3)$, $(-1,5,-1,5)$, $(3,4,3,4)$, $(4,13,4,13)$
11. $(1,0,-2,1)$, $(3,4,0,1)$, $(-1,1,3,-1)$, $(2,-2,0,3)$
12. $(5,2,-1,3)$, $(10,7,-4,3)$, $(5,-1,-20,-2)$, $(5,8,16,5)$
13. $(1,2,3,4,5)$, $(2,1,3,4,5)$, $(2,3,1,4,5)$, $(2,3,4,1,5)$, $(2,3,4,5,1)$
14. $(3,0,-1,-2,-1)$, $(10,1,-4,-5,-13)$, $(6,-3,0,-9,-3)$, $(1,4,-3,6,0)$, $(4,1,-2,-1,-5)$

II. Vypočítajte hodnosť matice $\mathbb{A}$ a pri štvorcových maticiach určte, či je matica regulárna, alebo singulárna:

1. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

2. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

3. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

4. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

5. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

6. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 11 & -4 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

7. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -7 & -2 \end{pmatrix}$
8. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -6 \\ 2 & -3 & 8 \\ 2 & 0 & -3 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

9. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 8 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
10. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -8 & -6 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

11. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
12. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 10 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

13. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 2 & 0 & -3 \\ 4 & -3 & -6 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}$
14. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

15. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 & -4 \\ 4 & 7 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
16. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

17. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
18. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 8 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

19. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 6 & -1 \\ 9 & -1 & 15 & -5 \end{pmatrix}$
20. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

21. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
22. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & -2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 & -1 & -5 \\ 6 & -3 & 0 & -9 & -3 \\ 10 & 1 & -4 & -5 & -13 \end{pmatrix}$

III. V nasledujúcich úlohach je $p \in \mathbb{R}$ parameter. Zistite pre akú hodnotu parametra p uvedené sústavy rovníc
a) majú práve jedno riešenie,
b) majú nekonečne veľa riešení,
c) nemajú riešenie.
V prípadoch, keď sústava má riešenie, nájdite toto riešenie.

1.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 7x_2 & + & 2px_3 & = & 23 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & px_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 3px_3 & = & 21 \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & & & = & 2 \\ x_1 & + & px_2 & & & = & 1 \\ & & & & 3x_3 & = & 6 \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2px_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 8 \\ & & 7x_2 & + & 2x_3 & = & -3 \\ px_1 & - & 3x_2 & - & 5x_3 & = & -2 \end{array}$$

4.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ & & 2px_2 & + & 2x_3 & = & 2p \\ & & x_2 & + & px_3 & = & 3 \end{array}$$

5.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -3-4p \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 3-6p \\ x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & = & -2-2p \end{array}$$

6.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & px_2 & + & 3x_3 & = & -13 \\ x_1 & + & 2px_2 & + & 5x_3 & = & -12 \\ 7x_1 & - & 4px_2 & - & 2x_3 & = & -9 \end{array}$$

7.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & (p+1)x_2 & + & 2x_3 & = & p+3 \\ 2x_1 & + & (p+3)x_2 & + & 4x_3 & = & 3p+5 \\ x_1 & + & (1-p)x_2 & & & = & p+1 \end{array}$$

8.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & (2+p)x_2 & + & 3x_3 & = & 10 \\ -x_1 & + & (1+2p)x_2 & + & 3x_3 & = & 7 \\ 2x_1 & + & (1+3p)x_2 & + & 4x_3 & = & 13 \end{array}$$

IV. Pomocou inverznej matice vyriešte sústavu lineárnych rovníc:

1.

$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & x_2 & = & 5 \\ x_1 & - & x_2 & = & 3 \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & = & 9 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & = & 7 \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & 2 \\ -2x_1 & + & 6x_2 & = & 5 \end{array}$$

4.

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & x_2 & = & 5 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & = & 2 \end{array}$$

5.
$$\begin{array}{rcrcl} 10x_1 & & & +20x_3 & = & 60 \\ & 20x_2 & & & = & 60 \\ 20x_1 & & & +68x_3 & = & 176 \end{array}$$

6.
$$\begin{array}{rrrcr} 3x_1 & & & = & 12 \\ & 2x_2 & & = & 3 \\ & & 5x_3 & = & 1 \end{array}$$

7.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & & & + & 3x_3 & = & 4 \\ & & 4x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 7 \end{array}$$

8.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & -6 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ & & & & x_3 & = & 4 \end{array}$$

9.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & & & - & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ 5x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \end{array}$$

10.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 6x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 9 \end{array}$$

11.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & & +x_3 & = & 3 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \end{array}$$

12.
$$\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 7 \\ 3x_1 & & & + & 3x_3 & = & -3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \end{array}$$

13.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & & & & & = & 3 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & & & = & 7 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 8 \end{array}$$

14.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 11 \\ x_1 & - & 5x_2 & - & 2x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \end{array}$$

15.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & & & + & 10x_3 & = & 1 \\ & & 10x_2 & & & = & 2 \\ 10x_1 & & & + & 5x_3 & = & 3 \end{array}$$

16.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \end{array}$$

17.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 4x_4 & = & -2 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -3 \\ -5x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 4 \end{array}$$

18.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 3 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & 4 \end{array}$$

5. cvičenie – Výsledky

Hodnosť, regularita a singularita matíc

I.

1. závislé ($h = 2$)
2. nezávislé
3. závislé ($h = 2$)
4. nezávislé
5. závislé ($h = 2$)
6. nezávislé
7. závislé ($h = 3$)
8. nezávislé
9. nezávislé
10. závislé ($h = 3$)
11. nezávislé
12. závislé ($h = 3$)
13. nezávislé
14. závislé ($h = 3$)

II.

1. $h(\mathbb{A}) = 3$
   matica je regulárna
2. $h(\mathbb{A}) = 3$
   matica je regulárna
3. $h(\mathbb{A}) = 3$
   matica je regulárna
4. $h(\mathbb{A}) = 3$
   matica je regulárna
5. $h(\mathbb{A}) = 2$
   matica je singulárna
6. $h(\mathbb{A}) = 2$
   matica je singulárna
7. $h(\mathbb{A}) = 3$
8. $h(\mathbb{A}) = 3$
9. $h(\mathbb{A}) = 2$
   matica je singulárna
10. $h(\mathbb{A}) = 2$
    matica je singulárna
11. $h(\mathbb{A}) = 3$
12. $h(\mathbb{A}) = 3$
13. $h(\mathbb{A}) = 3$
14. $h(\mathbb{A}) = 3$
15. $h(\mathbb{A}) = 4$
    matica je regulárna
16. $h(\mathbb{A}) = 4$
    matica je regulárna
17. $h(\mathbb{A}) = 4$
18. $h(\mathbb{A}) = 4$

19. $h(\mathbb{A}) = 3$
matica je singulárna

20. $h(\mathbb{A}) = 3$
matica je singulárna

21. $h(\mathbb{A}) = 4$

22. $h(\mathbb{A}) = 3$
matica je singulárna

III.

1.
   - $p = 0$: nemá riešenie
   - $p \neq 0$: $(x_1, x_2, x_3) = \left(1, 2, \frac{3}{p}\right)$
2.
   - $p \neq 1$: $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 2)$
   - $p = 1$: $(x_1, x_2, x_3) = (1 - t, t, 2)$
3.
   - $p = 0$: nemá riešenie
   - $p \neq 0$: $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{5}{p}, -1, 2\right)$
4.
   - $p = \pm 1$: nemá riešenie
   - $p \neq \pm 1$: $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{p-1}{p+1}, \frac{p^2-3}{p^2-1}, \frac{2p}{p^2-1}\right)$
5.
   - $(x_1, x_2, x_3) = (-1 - 2p, 1, 2)$, pre $\forall p \in \mathbb{R}$
6.
   - $p = 0$: nemá riešenie
   - $p \neq 0$: $(x_1, x_2, x_3) = \left(-1, \frac{2}{p}, -3\right)$
7.
   - $p = 1$: $(x_1, x_2, x_3) = (2, 1 - t, t)$
   - $p \neq 1$: $(x_1, x_2, x_3) = (2, -1, p + 1)$
8.
   - $p = 1$: nemá riešenie
   - $p \neq 1$: $(x_1, x_2, x_3) = \left(1, \frac{1}{p-1}, \frac{2p-3}{p-1}\right)$

IV.

1. $(x_1, x_2) = (2, -1)$
2. $(x_1, x_2) = \left(\frac{31}{7}, -\frac{15}{7}\right)$
3. $(x_1, x_2) = \left(11, \frac{9}{2}\right)$
4. $(x_1, x_2) = \left(\frac{27}{13}, -\frac{11}{13}\right)$
5. $(x_1, x_2, x_3) = (2, 3, 2)$
6. $(x_1, x_2, x_3) = \left(4, \frac{3}{2}, \frac{1}{5}\right)$
7. $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{53}{22}, \frac{7}{22}, -\frac{3}{11}\right)$
8. $(x_1, x_2, x_3) = (20, -7, 4)$
9. $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{7}{11}, -\frac{3}{22}, \frac{21}{22}\right)$
10. $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 5)$

11. $(x_1, x_2, x_3) = (5, 3, -2)$

12. $(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, -3)$

13. $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{8}, -\frac{3}{4}\right)$

14. $(x_1, x_2, x_3) = (1, -2, 3)$

15. $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{5}{16}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{40}\right)$

16. $(x_1, x_2, x_3) = (4, 1, -3)$

17. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(-\frac{16}{15}, -\frac{4}{15}, \frac{1}{5}, -\frac{2}{15}\right)$

18. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 0, 0)$

6

Funkcia jednej premennej a jej základné vlastnosti

Upozornenie: informácie v nasledovnom texte obsahujú zjednodušenia postačujúce k riešeniu tu uvedených príkladov. Nejedná sa o matematicky korektné a úplné definície. Naviac v tomto texte pod pojmom *funkcia* budeme rozumieť len číselné funkcie jednej premennej na reálnych číslach.

- Pod pojmom *funkcia* budeme rozumieť priradenie, ktoré jednému reálnemu číslu priradí ďalšie reálne číslo. Toto priradenie však musí byť také, že jednému číslu x priradí **najviac** jedno číslo y.

- Funkcie budeme označovať malými písmenami, t.j. napr. $f, g, h, \ldots$. Potom fakt, že funkcia f priradí číslu x číslo y zapisujeme ako: $f(x) = y$.

- Množinu tých reálnych čísel x, ktorým funkcia f priraďuje nejaké hodnoty, nazývame *definičný obor* funkcie f a označujeme $D(f)$.

- V prípade, že v úlohach je funkcia daná nejakým predpisom a treba nájsť jej definičný obor, musíme nájsť všetky reálne čísla x, pre ktoré má daný predpis zmysel. Napríklad pre funkciu $f(x) = \frac{1}{x}$ bude jej definičný obor množina $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- Množina tých reálnych čísel y, na ktoré funkcia f zobrazuje hodnoty, t.j. pre ktoré existuje číslo x z jej definičného oboru také, že $f(x) = y$, sa nazýva *obor hodnôt* funkcie f a označuje sa $H(f)$.

- Ak je obor hodnôt funkcie ohraničená množina, napríklad interval, tak potom hovoríme, že aj *funkcia je ohraničená*. Funkcia môže byť ohraničená zdola, ohraničená zhora, prípadne obojstranne ohraničená.

Pre úspešné riešenie príkladov z tohto cvičenia (a samozrejme všetkých nasledujúcich cvičení) je nevyhnutné okrem teórie poznať aj základné elementárne funkcie, ich definičné obory, všetky ich ďalšie vlastnosti a grafy. Tieto základné elementárne funkcie sú:

Základné elementárne funkcie

1. $f(x) = ax + b$ kde $a, b \in \mathbb{R}$
2. $f(x) = |x|$
3. $f(x) = ax^2 + bx + c$ kde $a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$
4. $f(x) = \sqrt{x}$
5. $f(x) = x^3$
6. $f(x) = \frac{1}{x}$
7. $f(x) = \sin x$
8. $f(x) = \cos x$
9. $f(x) = \operatorname{tg} x$
10. $f(x) = \operatorname{cotg} x$
11. $f(x) = e^x$
12. $f(x) = a^x$ kde $a > 0, \quad a \neq 1$
13. $f(x) = \ln x$
14. $f(x) = \log_a x$ kde $a > 0, \quad a \neq 1$

I. Nájdite definičný obor a obor hodnôt funkcie f:

1. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$
3. $f(x) = 3 - |x|$
4. $f(x) = 3 \ln 2x$
5. $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$
6. $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x^2-25}}$
7. $f(x) = \sqrt{(3 - 2x)^2}$
8. $f(x) = 3^{-x}$
9. $f(x) = 2 \cos x - 1$
10. $f(x) = -3^{-x}$
11. $f(x) = 1 + 3^x$
12. $f(x) = \frac{3^{\frac{x}{2}}}{10}$
13. $f(x) = 3^{x-1}$
14. $f(x) = \sin x + 2$
15. $f(x) = -\operatorname{cotg} x$
16. $f(x) = 5 - \operatorname{tg} x$
17. $f(x) = \sin x^2$
18. $f(x) = \sin^2 x$

II. Nájdite definičný obor, obor hodnôt a načrtnite graf funkcie f:

1. $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$
2. $f(x) = \frac{3x+6}{x^2+3x+2}$
3. $f(x) = \ln x^2$
4. $f(x) = \ln(2 - x)$
5. $f(x) = \ln \frac{1}{x}$
6. $f(x) = |x^2 - 4|$
7. $f(x) = -3^x$
8. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2}}$
9. $f(x) = \frac{x}{|x|}$
10. $f(x) = |\sin x|$
11. $f(x) = 2 \cos \frac{x}{2}$
12. $f(x) = 2^{x^2}$

III. Napíšte zložené funkcie $f(g(x))$ a $g(f(x))$ a nájdite ich definičné obory ak:

1. $f(x) = x^2$; $g(x) = \sqrt{x}$
2. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$; $g(x) = \sqrt{x}$
3. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = 3 - \sqrt{x}$
4. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$; $g(x) = x - 2$
5. $f(x) = (-1)^x$; $g(x) = e^x$
6. $f(x) = \sin x$; $g(x) = 2x - 3$
7. $f(x) = \ln x$; $g(x) = 3x - 4$
8. $f(x) = e^x$; $g(x) = \sqrt{\frac{x^2+x-6}{x^2-4x-5}}$
9. $f(x) = \sqrt{x^3}$; $g(x) = |x|$
10. $f(x) = 1 - x^2$; $g(x) = \sqrt{x}$
11. $f(x) = \cos x$; $g(x) = \sqrt{x-1}$
12. $f(x) = \frac{1}{x}$; $g(x) = \log_3 x$

IV. Nájdite definičný obor zloženej funkcie a rozložte ju na zložky (elementárne funkcie alebo elementárne funkcie spojené aritmetickými operáciami):

1. $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x-3}$
2. $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$
3. $f(x) = \sqrt{3 - \sqrt{x}}$
4. $f(x) = \cos^2 x$
5. $f(x) = \sqrt[3]{2 - \ln x}$
6. $f(x) = \sqrt[3]{(2x+3)^2}$
7. $f(x) = \ln |x|$
8. $f(x) = e^{\frac{\sin x}{2-x}}$
9. $f(x) = \ln(2\cos x - \sqrt{3})$
10. $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$
11. $f(x) = \ln \frac{2-x}{2+x}$
12. $f(x) = \sqrt[5]{\frac{1}{\sqrt[3]{4x+1}}}$

Intervaly monotónnosti funkcie sú intervaly, na ktorých je funkcia *klesajúca*, *nerastúca*, *neklesajúca* alebo *rastúca*. Tieto vlastnosti funkcie sa definujú na intervale I nasledovne:

1. Funkcia f je na intervale I *klesajúca* ak platí:

$$\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

2. Funkcia f je na intervale I *nerastúca* ak platí:

$$\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

3. Funkcia f je na intervale I *neklesajúca* ak platí:

$$\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

4. Funkcia f je na intervale I *rastúca* ak platí:

$$\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

V príkladoch na tomto cvičení sa intervaly monotónnosti funkcie určujú tak, že na základe poznatkov o elementárnych funkciách, načrtneme graf danej funkcie a z neho potom určíme jej intervaly monotónnosti.

V. Nájdite definičný obor a intervaly monotónnosti funkcie:

1. $f(x) = 2 - 7x$
2. $f(x) = x - |x|$
3. $f(x) = \sqrt{2 - 3x}$
4. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$
5. $f(x) = x^2 + 5x - 14$
6. $f(x) = \frac{e^x+3}{5}$
7. $f(x) = \frac{2+x}{3-x}$
8. $f(x) = x^3 - 2$
9. $f(x) = x^2 + 2x$
10. $f(x) = 1 - \frac{2}{x-1}$
11. $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$
12. $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1$

Parita funkcie sa graficky dá vyjadriť ako symetria jej grafu. Funkcia môže byť *párna*, *nepárna* alebo nemusí byť ani párna ani nepárna. Analyticky sa parita funkcia definuje nasledovne:

1. Funkcia f je *párna* ak: $\forall x \in D(f) : f(x) = f(-x)$
2. Funkcia f je *nepárna* ak: $\forall x \in D(f) : f(x) = -f(-x)$

Graf párnej funkcie je symetrický podľa osi o_y a graf nepárnej funkcie je symetrický podľa počiatku súradnicového systému.

VI. Určte definičný obor a paritu funkcie:

1. $f(x) = 2$
2. $f(x) = \sqrt{x}$
3. $f(x) = \sqrt[3]{x}$
4. $f(x) = x - x^2$
5. $f(x) = x^3 - x$
6. $f(x) = \sin(x + 5)$
7. $f(x) = \cos x - 3$
8. $f(x) = \frac{1}{2x}$
9. $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$
10. $f(x) = \frac{x^2}{1+2x^2}$
11. $f(x) = \frac{x}{|x|}$
12. $f(x) = 2\sin x + 1$
13. $f(x) = \operatorname{tg} x + 1$
14. $f(x) = x + |x|$

Funkcia f je *prostá* ak platí: $\forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Voľne povedané to znamená, že funkcia je prostá ak rôznym hodnotám x priraďuje rôzne hodnoty y. Pre potreby príkladov sa to dá formulovať aj opačne, t.j. ak sa rovnajú hodnoty y, musia byť rovnaké aj hodnoty x: $\forall y_1, y_2 \in H(f) : f(x_1) = y_1 = y_2 = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$.
Pritom platí, že ku funkcii f existuje inverzná funkcia f^{-1} práve vtedy, keď funkcia f je prostá.

VII. Nájdite definičný obor, zistite či je funkcia f prostá a ak je, tak k nej nájdite inverznú funkciu:

1. $f(x) = 3x$
2. $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$
3. $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$
4. $f(x) = \sqrt{x}$
5. $f(x) = \ln(2-3x)$
6. $f(x) = x^3 - 1$
7. $f(x) = \frac{x^3}{x^3+1}$
8. $f(x) = -4 + 3\sqrt{x}$
9. $f(x) = \sqrt{x^3 - 1}$
10. $f(x) = x.|x|$
11. $f(x) = 4^{\sin x}$
12. $f(x) = 3.e^{2x+1}$

VIII. Nájdite definičný obor, zistite či je funkcia f periodická a ak je, tak určte jej periódu p:

1. $f(x) = \sin \frac{2x}{3}$
2. $f(x) = 5\cos 2\pi x$
3. $f(x) = \cos^2 x$
4. $f(x) = \cos x^2$
5. $f(x) = x \sin x$
6. $f(x) = 2\sin 3x + 3\sin 2x$
7. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$
8. $f(x) = \arcsin(\sin x)$
9. $f(x) = \ln(\cos x + \sin x)$
10. $f(x) = 3\cos x - 5\sin 4x$
11. $f(x) = \sin 2x + \operatorname{tg} \frac{x}{2}$
12. $f(x) = 2\sin\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right)$

IX. Špeciálne úlohy

1. Nech $f_n(x) = \underbrace{f\left(f\left(...f(x)\right)\right)}_{n\text{-krát}}$. Nájdite $f_n(x)$ ak $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
2. Nájdite $f(x)$ ak $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$.
3. Nájdite $f(x)$ ak $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, pre $|x| \geq 2$.
4. Nájdite $f(x)$ ak $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}$, pre $x > 0$.

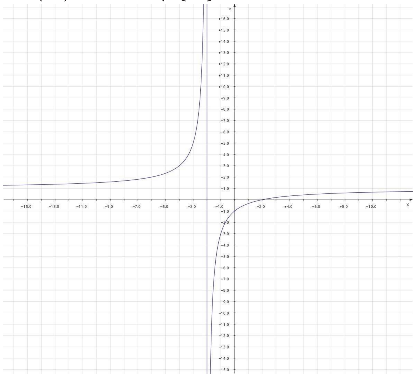
6. cvičenie – Výsledky

I.

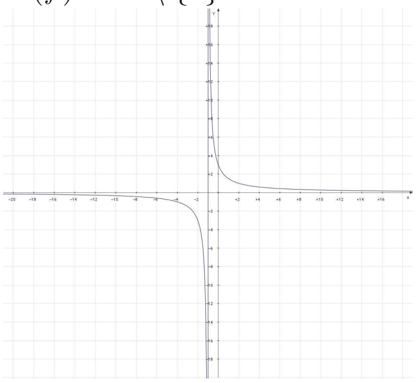
1. $D(f) = (-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty)$
   $H(f) = \langle 0, \infty)$
2. $D(f) = (3, \infty)$
   $H(f) = (0, \infty)$
3. $D(f) = \mathbb{R}$
   $H(f) = (-\infty, 3\rangle$
4. $D(f) = (0, \infty)$
   $H(f) = \mathbb{R}$
5. $D(f) = (-\infty, -1\rangle \cup (1, \infty)$
   $H(f) = \langle 0, 1) \cup (1, \infty)$
6. $D(f) = (-\infty, -5) \cup (5, \infty)$
   $H(f) = (0, \infty)$
7. $D(f) = \mathbb{R}$
   $H(f) = \langle 0, \infty)$
8. $D(f) = \mathbb{R}$
   $H(f) = (0, \infty)$
9. $D(f) = \mathbb{R}$
   $H(f) = \langle -3, 1\rangle$
10. $D(f) = \mathbb{R}$
    $H(f) = (-\infty, 0)$
11. $D(f) = \mathbb{R}$
    $H(f) = (1, \infty)$
12. $D(f) = \mathbb{R}$
    $H(f) = (0, \infty)$
13. $D(f) = \mathbb{R}$
    $H(f) = (0, \infty)$
14. $D(f) = \mathbb{R}$
    $H(f) = \langle 1, 3\rangle$
15. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
    $H(f) = \mathbb{R}$
16. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
    $H(f) = \mathbb{R}$
17. $D(f) = \mathbb{R}$
    $H(f) = \langle -1, 1\rangle$
18. $D(f) = \mathbb{R}$
    $H(f) = \langle 0, 1\rangle$

II.

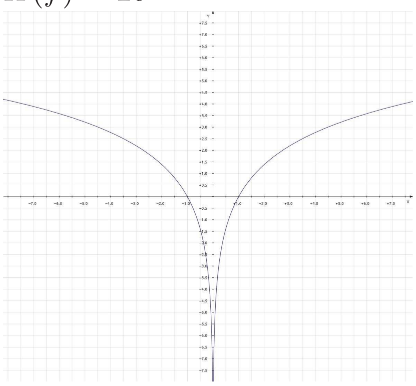
1. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$
   $H(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$



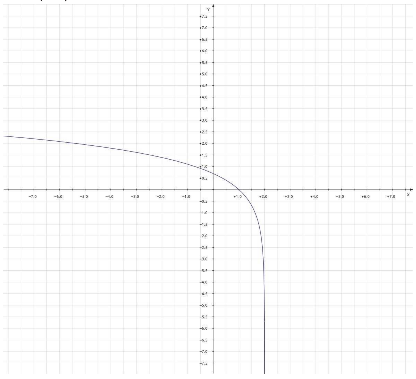
2. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$
   $H(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



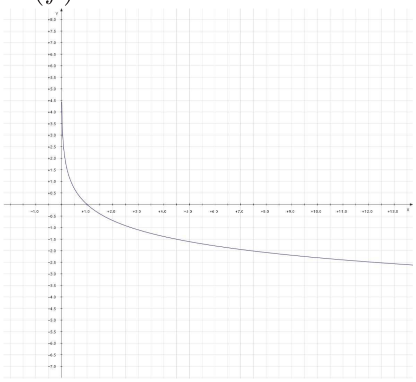
3. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
   $H(f) = \mathbb{R}$



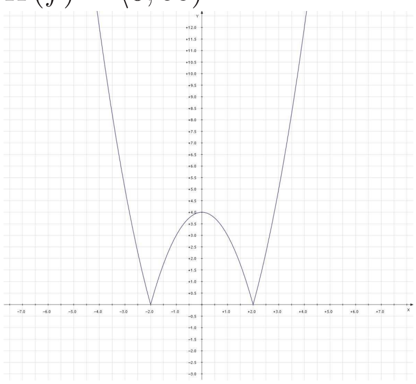
4. $D(f) = (-\infty, 2)$
   $H(f) = \mathbb{R}$



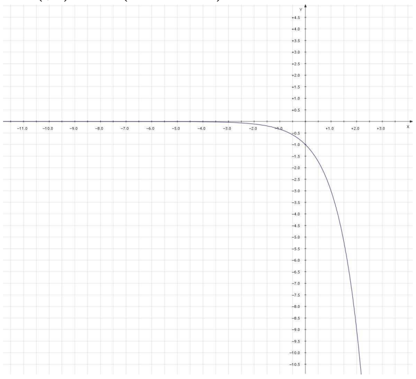
5. $D(f) = (0, \infty)$
   $H(f) = \mathbb{R}$



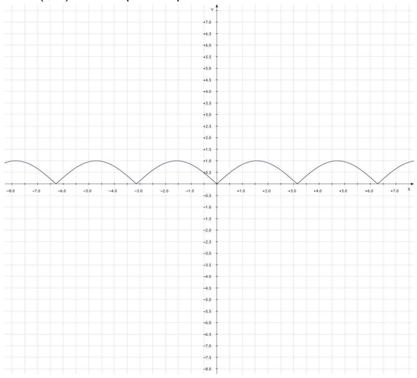
6. $D(f) = \mathbb{R}$
   $H(f) = \langle 0, \infty)$



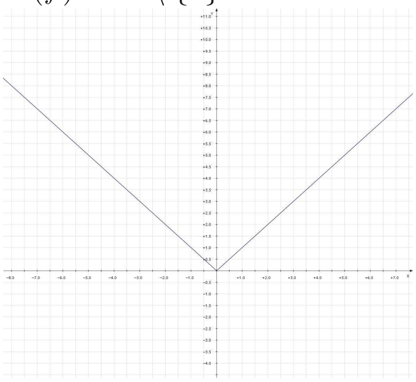
7. $D(f) = \mathbb{R}$
   $H(f) = (-\infty, 0)$



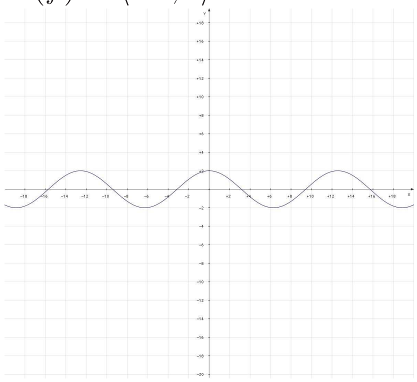
10. $D(f) = \mathbb{R}$
    $H(f) = \langle 0, 1 \rangle$



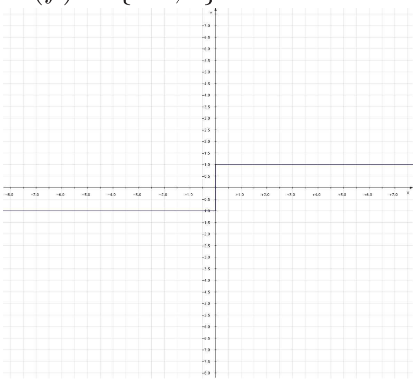
8. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
   $H(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



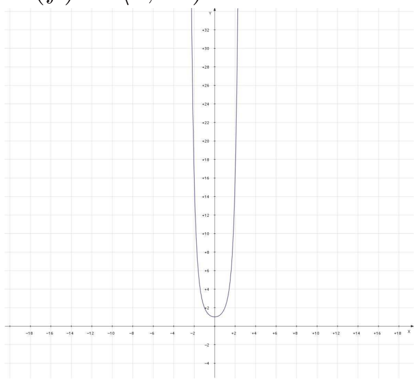
11. $D(f) = \mathbb{R}$
    $H(f) = \langle -2, 2 \rangle$



9. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
   $H(f) = \{-1, 1\}$



12. $D(f) = \mathbb{R}$
    $H(f) = \langle 0, \infty)$



III.

1. $f(g(x)) = x$
   $D(f(g)) = \langle 0, \infty)$
   $g(f(x)) = |x|$
   $D(g(f)) = \mathbb{R}$

2. $f(g(x)) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$
   $D(f(g)) = \langle 0, \infty) \setminus \{1\}$
   $g(f(x)) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$
   $D(g(f)) = (-\infty, -1\rangle \cup (1, \infty)$

3. $f(g(x)) = \sqrt{3 - \sqrt{x}}$
   $D(f(g)) = \langle 0, 9\rangle$
   $g(f(x)) = 3 - \sqrt[4]{x}$
   $D(g(f)) = \langle 0, \infty)$

4. $f(g(x)) = \frac{\sqrt{x-2}}{x-3}$
   $D(f(g)) = \langle 2, \infty) \setminus \{3\}$
   $g(f(x)) = \frac{\sqrt{x}}{x-1} - 2$
   $D(g(f)) = \langle 0, \infty) \setminus \{1\}$

5. $f(g(x)) = (-1)^{e^x}$
   $D(f(g)) = \mathbb{R}$
   $g(f(x)) = e^{(-1)^x}$
   $D(g(f)) = \mathbb{R}$

6. $f(g(x)) = \sin(2x - 3)$
   $D(f(g)) = \mathbb{R}$
   $g(f(x)) = 2\sin x - 3$
   $D(g(f)) = \mathbb{R}$

7. $f(g(x)) = \ln(3x - 4)$
   $D(f(g)) = \left(\frac{4}{3}, \infty\right)$
   $g(f(x)) = 3\ln x - 4$
   $D(g(f)) = (0, \infty)$

8. $f(g(x)) = e^{\sqrt{\frac{x^2+x-6}{x^2-4x-5}}}$
   $D(f(g)) = (-\infty, -3\rangle \cup (-1, 2\rangle \cup (5, \infty)$
   $g(f(x)) = \sqrt{\frac{e^{2x}+e^x-6}{e^{2x}-4e^x-5}}$
   $D(g(f)) = (-\infty, \ln 2\rangle \cup (\ln 5, \infty)$

9. $f(g(x)) = \sqrt{|x|^3}$
   $D(f(g)) = \mathbb{R}$
   $g(f(x)) = \left|\sqrt{x^3}\right|$
   $D(g(f)) = \langle 0, \infty)$

10. $f(g(x)) = 1 - x$
    $D(f(g)) = \langle 0, \infty)$
    $g(f(x)) = \sqrt{1 - x^2}$
    $D(g(f)) = \langle -1, 1\rangle$

11. $f(g(x)) = \cos\sqrt{x - 1}$
    $D(f(g)) = \langle 1, \infty)$
    $g(f(x)) = \sqrt{\cos x - 1}$
    $D(g(f)) = \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

12. $f(g(x)) = \frac{1}{\log_3 x}$
    $D(f(g)) = (0, \infty) \setminus \{1\}$
    $g(f(x)) = \log_3 \frac{1}{x} = -\log_3 x$
    $D(g(f)) = (0, \infty)$

IV.

1. $D(f) = \langle 2, \infty) \setminus \{3\}$
   $f_1(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$
   $f_2(x) = x - 2$

2. $D(f) = (-\infty, -1) \cup \langle 1, \infty)$
   $f_1(x) = \sqrt{x}$
   $f_2(x) = \frac{x-1}{x+1}$

3. $D(f) = \langle 0, 9 \rangle$
   $f_1(x) = \sqrt{x}$
   $f_2(x) = 3 - x$
   $f_3(x) = \sqrt{x}$

4. $D(f) = \mathbb{R}$
   $f_1(x) = x^2$
   $f_2(x) = \cos x$

5. $D(f) = (0, \infty)$
   $f_1(x) = \sqrt[3]{x}$
   $f_2(x) = 2 - \ln x$

6. $D(f) = \mathbb{R}$
   $f_1(x) = \sqrt[3]{x}$
   $f_2(x) = x^2$
   $f_3(x) = 2x + 3$

7. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
   $f_1(x) = \ln x$
   $f_2(x) = |x|$

8. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
   $f_1(x) = e^x$
   $f_2(x) = \frac{\sin x}{2-x}$

9. $D(f) = \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$
   $f_1(x) = \ln x$
   $f_2(x) = 2\cos x - \sqrt{3}$

10. $D(f) = \mathbb{R}$
    $f_1(x) = e^x$
    $f_2(x) = \cos x . \ln(\sin x)$

11. $D(f) = (-2, 2)$
    $f_1(x) = \ln x$
    $f_2(x) = \frac{2-x}{2+x}$

12. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{4}\right\}$
    $f_1(x) = \sqrt[5]{x}$
    $f_2(x) = x^{-\frac{1}{3}}$
    $f_3(x) = 4x + 1$

V.[1]

1. $D(f) = \mathbb{R}$
   klesá pre $x \in D(f)$

2. $D(f) = \mathbb{R}$
   rastie pre $x \in (-\infty, 0)$
   konštantná pre $x \geq 0$

[1] V týchto a aj niektorých nasledujúcich príkladoch budeme občas používať skrátený zápis „funkcia rastie (klesá) pre $x \in D(f)$“. Bude to v prípadoch, keď funkcia je definovaná na intervaloch a na všetkých týchto intervaloch sa bude správať rovnako. Napr. funkcia $f(x) = \frac{1}{x}$ má $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Pre intervaly monotónnosti by bola formálne správna odpoveď, že funkcia klesá na intervaloch $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. My namiesto toho skrátene napíšeme, že funkcia klesá pre $x \in D(f)$.

3. $D(f) = \left(-\infty, \frac{2}{3}\right\rangle$
   klesá pre $x \in D(f)$

4. $D(f) = \langle 0, \infty)$
   rastie pre $x \in D(f)$

5. $D(f) = \mathbb{R}$
   klesá pre $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right)$
   rastie pre $x \in \left(-\frac{5}{2}, \infty\right)$

6. $D(f) = \mathbb{R}$
   rastie pre $x \in D(f)$

7. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
   rastie pre $x \in D(f)$

8. $D(f) = \mathbb{R}$
   rastie pre $x \in D(f)$

9. $D(f) = \mathbb{R}$
   klesá pre $x \in (-\infty, -1)$
   rastie pre $x \in (-1, \infty)$

10. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
    rastie pre $x \in D(f)$

11. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
    rastie pre $x \in D(f)$

12. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
    rastie pre $x \in D(f)$

VI.

1. $D(f) = \mathbb{R}$
   funkcia je párna

2. $D(f) = \langle 0, \infty)$
   funkcia nemá paritu

3. $D(f) = \mathbb{R}$
   funkcia je nepárna

4. $D(f) = \mathbb{R}$
   funkcia nemá paritu

5. $D(f) = \mathbb{R}$
   funkcia je nepárna

6. $D(f) = \mathbb{R}$
   funkcia nemá paritu

7. $D(f) = \mathbb{R}$
   funkcia je párna

8. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
   funkcia je nepárna

9. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
   funkcia nemá paritu

10. $D(f) = \mathbb{R}$
    funkcia je párna

11. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
    funkcia je nepárna

12. $D(f) = \mathbb{R}$
    funkcia nemá paritu

13. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
    funkcia nemá paritu

14. $D(f) = \mathbb{R}$
    funkcia nemá paritu

VII.

1. $D(f) = \mathbb{R}$
   $f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$
2. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
   $f^{-1}(x) = \frac{1-x}{1+x}$
3. $D(f) = \mathbb{R}$
   funkcia nie je prostá
   (dôkaz cez definíciu)
4. $D(f) = \langle 0, \infty)$
   $f^{-1}(x) = x^2$, pre $x \in \langle 0, \infty)$
5. $D(f) = \left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$
   $f^{-1}(x) = \frac{2-e^x}{3}$
6. $D(f) = \mathbb{R}$
   $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$
7. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
   $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{1-x}}$
8. $D(f) = \langle 0, \infty)$
   $f^{-1}(x) = \frac{(x+4)^2}{9}$
9. $D(f) = \langle 1, \infty)$
   $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$
10. $D(f) = \mathbb{R}$
    $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\,, & \text{pre } x \geq 0 \\ -\sqrt{x}\,, & \text{pre } x < 0 \end{cases}$
11. $D(f) = \mathbb{R}$
    funkcia nie je prostá
12. $D(f) = \mathbb{R}$
    $f^{-1}(x) = \frac{\ln x - \ln 3 - 1}{2}$

VIII.

1. $D(f) = \mathbb{R}$
   $p = 3\pi$
2. $D(f) = \mathbb{R}$
   $p = 1$
3. $D(f) = \mathbb{R}$
   $p = \pi$
4. $D(f) = \mathbb{R}$
   funkcia nie je periodická
5. $D(f) = \mathbb{R}$
   funkcia nie je periodická
6. $D(f) = \mathbb{R}$
   $p = 2\pi$
7. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
   funkcia nie je periodická
8. $D(f) = \mathbb{R}$
   $p = \pi$
9. $D(f) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$
   $p = 2\pi$
10. $D(f) = \mathbb{R}$
    $p = 2\pi$
11. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
    $p = 2\pi$
12. $D(f) = \mathbb{R}$
    $p = \frac{2}{3}\pi$

IX.

1. $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$
2. $f(x) = x^2 - 5x + 6$
3. $f(x) = x^2 - 2$
4. $f(x) = \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}$

7

Limity postupností a funkcií

Veľmi dôležité upozornenie: Pri výpočte limít z tohto cvičenia **nesmiete** používať L'Hospitalovo pravidlo a to ani v prípade ak ho poznáte a ak ho viete používať!!! Ak si nahlásite v domácich úlohach príklad, ktorý nebudete vedieť vyriešiť bez použitia L'Hospitalovho pravidla, bude sa to považovať za podvod!!!

Na tomto cvičení sa budú počítať jednoduché limity postupností a funkcií. Všetky príklady sú robené tak, aby sa dali vyriešiť pomocou vedomostí zo základnej a strednej školy (úprava algebraických výrazov, delenie polynómov, súčtové vzorce pre gioniometrické funkcie,...) a informácií obsiahnutých na prednáške a v skriptách. Žiaden tu uvedený príklad nevyžaduje použitie L'Hospitalovho pravidla, alebo komplikovanejších nástrojov.

Limity postupností

Existencia limity postupnosti

- Každá monotónna a ohraničená postupnosť má limitu.
- Majme číselné postupnosti $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ a $\{z_n\}$ a nech pre $\forall n \in \mathbb{N}$ platí: $y_n \leq x_n \leq z_n$. Potom ak existujú limity postupností $\{y_n\}$ a $\{z_n\}$ a sú rovnaké, t.j. platí: $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = c$, tak existuje aj limita postupnosti $\{x_n\}$ a platí: $\lim_{n\to\infty} x_n = c$.
- **Cauchyho kritérium konvergencie** (nutná a postačujúca podmienka existencie limity postupnosti): číselná postupnosť $\{x_n\}$ má limitu práve vtedy, keď platí:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad |x_n - x_{n+p}| < \varepsilon \quad \text{pre } \forall n > n_0 \quad \text{a} \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

Pravidlá pre počítanie limít

Ak existujú limity $\lim_{n\to\infty} x_n$ a $\lim_{n\to\infty} y_n$, tak platí:

1. Ak pre $\forall n \in \mathbb{N}:\ x_n \leq y_n$, tak $\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n$
2. $\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n$
3. $\lim_{n\to\infty}(x_n.y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n . \lim_{n\to\infty} y_n$
4. Ak $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$, tak platí: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}$

Dve dôležité limity postupností:

1. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \doteq 2,71828182845904523536028747135 2...$
2. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$, kde $a \in \mathbb{R}$

Číslo e je Eulerovo číslo, t.j. základ prirodzeného logaritmu. Druhá z uvedených limít je len zovšeobecnenie prvej, pre jednoduchšie riešenie niektorých príkladov.

I. Vypočítajte limitu postupnosti:

1. $\lim_{n\to\infty} = \frac{10^6 n}{n^2+1}$
2. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$
3. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}.\sin(n!)}{n+1}$
4. $\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$
5. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\ ...\ \sqrt[2^n]{2}\right)$
6. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$
7. $\lim_{n\to\infty}\frac{7n^2+2n-1}{3n^2+n+5}$
8. $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+5}{n^3+n^2+n+1}$
9. $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+2n^2+n-1}{4n^2+2n+1}$
10. $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n-1}$
11. $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2-3n}$
12. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}$
13. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$
14. $\lim_{n\to\infty}(n-(-1)^n)$
15. $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+2}$
16. $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}$
17. $\lim_{n\to\infty} n\,(1-(-1)^n)$
18. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-(-1)^n}$
19. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{2n}{3n+1}\right)$
20. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n}\sin n^2$
21. $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+...+n}{n^2}$
22. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{2n^2-1}\cos\frac{n+1}{2n-1}\right)$

23. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{1-2n}\cdot\frac{n(-1)^n}{n^2+1}\right)$

24. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{(2n+3)^2}$

25. $\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)(n+1)(n+2)}{n^4+2n^2+3}$

26. $\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$

27. $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}$, pre $a>1$

28. $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}$, pre $|a|<1$

29. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

30. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+4}$

31. $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$

32. $\lim_{n\to\infty} n\left(\ln(n+1)-\ln n\right)$

33. $\lim_{n\to\infty}\left((-1)^n+\frac{1}{n}\right)$

34. $\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n}{n+3}\right)$

35. $\lim_{n\to\infty}\frac{2-\cos(n\pi)}{2+\cos(n\pi)}$

36. $\lim_{n\to\infty}\left(8-\frac{1}{n^2}\right)^{-\frac{1}{3}}$

37. $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n}}$

38. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-1}-n-1\right)$

39. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n}+n}$

40. $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}}-1\right)$

41. $\lim_{n\to\infty}\frac{9+\frac{n}{n+1}}{2+\frac{1}{n}}$

42. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2-n}{n+1}+\frac{n2^{-n}}{n+2}\right)$

43. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{2-n}\right)^5$

44. $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+5)^3-n(n+7)^2}{n^2}$

45. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n+1}$

46. $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}-(-1)^n}$

47. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+\ldots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)$

48. $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+2}-3^{n+3}}{2^n+3^n}$

49. $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^{-n}}{2^{-n}-3^n}$

50. $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n^2+1)^2-(n^2-1)^2}$

51. $\lim_{n\to\infty}\frac{(2+n)^{100}-n^{100}-200n^{99}}{n^{98}-10n^2+1}$

52. $\lim_{n\to\infty}\frac{\log^2 10n}{\log^2 n}$

53. $\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n^2-n+1)}{\log(n^{10}+n+1)}$

54. $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{n^2+3}-n}$

55. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n^3+1}-n\sqrt{n}}$

56. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+10}{2n-1}\right)^n$

57. $\lim_{n\to\infty}\frac{n\log n}{n^2-1}$

58. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n$

59. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+k+1}{n+k}\right)^n$, $k\in\mathbb{N}$

60. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n+3}{2^n}\right)^{2^n}$

61. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{2n}$

62. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right)$

63. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+...+\frac{n-1}{n^2}\right)$

64. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+...+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right)$
Pomôcka: $1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

65. $\lim_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+...+a^n}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+...+\left(\frac{1}{4}\right)^n}$, pre $|a|<1$

66. $\lim_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+...+a^n}{1+b+b^2+...+b^n}$, pre $|a|<1, |b|<1$

67. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+2n^2}-n\right)$
Pomôcka: $(a^3-b^3):(a-b)=a^2+ab+b^2$

68. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{8}-1}{\sqrt[n]{16}-1}$
Pomôcka: $(a^n-1):(a-1)=a^{n-1}+a^{n-2}+...+a+1$

Limity funkcií

Pravidlá pre počítanie limít

V pravidlách 8 až 14 symboly 0, $a\in\mathbb{R}$ a ∞ označujú len **typy limít**. To znamená, že zastupujú nejakú funkciu, ktorej limita v danom bode má uvedenú hodnotu, t.j. $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim_{x\to x_0} f(x)=a$ alebo $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$. Hodnota ∞ nie je reálne číslo a v žiadnom prípade sa s ňou nesmú robiť aritmetické operácie tak, ako sa dajú robiť s reálnymi číslami.

1. $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$
2. $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$
3. $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$
4. $\lim_{x\to\infty} x^a=0$, ak $a<0$
5. $\lim_{x\to\infty} x^a=\infty$, ak $a>0$
6. $\lim_{x\to\infty} a^x=0$, ak $|a|<1$
7. $\lim_{x\to\infty} a^x=\infty$, ak $a>1$
8. $0.a=0$
9. $\infty+\infty=\infty$
10. $\infty.\infty=\infty$
11. $\infty.(-\infty)=-\infty$
12. $a.\infty=\infty$, ak $a>0$
13. $a.\infty=-\infty$, ak $a<0$
14. $\frac{1}{\pm\infty}=0$

Dôležité limity funkcií

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
2. $\lim_{x\to 0^+} x \log_a x = 0$
   pre $a > 0, a \neq 1$
3. $\lim_{x\to \infty} \frac{\log_a x}{x} = 0$
   pre $a > 0, a \neq 1$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$, pre $a > 0$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(x+1)}{x} = \frac{1}{\ln a}$
   pre $a > 0, a \neq 1$
6. $\lim_{x\to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$
7. $\lim_{x\to \infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$, pre $a \in \mathbb{R}$
8. $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^p-1}{x} = p$, pre $p \in \mathbb{R}$

Vlastná limita vo vlastnom bode

II. Vypočítajte limitu funkcie:

1. $\lim_{x\to -2} \frac{2x^2+3x-2}{x^2+x-2}$
2. $\lim_{x\to -1} \frac{2x^3+2x^2+3x+3}{x^3+x^2+x+1}$
3. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+1}{2x+1}$
4. $\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
5. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$
6. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x^2-1}{x^4-1}\right)^2$
7. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$
8. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}{x}$
9. $\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt{6+x}-2}{x+2}$
10. $\lim_{x\to -1} \frac{\sin(x+1)}{x+1}$
11. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{3x}$
12. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\cos 3x \sin 7x}$
13. $\lim_{x\to 0} \frac{2^{2x+3}-8}{x}$
14. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$
15. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{x^4-1}\right)$
16. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}$
17. $\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1}$, kde $m, n \in \mathbb{N}$
18. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$
19. $\lim_{x\to e} \frac{\ln x-1}{x-e}$
20. $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{x^2-2x+7}}{x^2-2x}$
21. $\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1}$
22. $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x^2-4x}$
23. $\lim_{x\to 1}(x^2-x-2)$
24. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-x-2}$
25. $\lim_{x\to a} \frac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$
26. $\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1}}{x^2-25}$

27. $\lim_{x\to 0} x.\mathrm{cotg}\, 5x$

28. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{x}$

29. $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{arctg}\, x}{x}$

30. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x - \cos 7x}{x^2}$
    Pomôcka: $3 = 5-2$, $7 = 5+2$

31. $\lim_{x\to 2} \frac{2^x - x^2}{x-2}$

32. $\lim_{x\to 1} \frac{x^{101} - 101x + 100}{x^2 - 2x + 1}$

33. $\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^3 - 8x^2 + 21x - 18}$

34. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{3}{1-x^3} + \frac{1}{x-1}\right)$

35. $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}\, 4x}{\sin x}$

36. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{x+32} - 2}{x}$

37. $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin 2x}{x}$

38. $\lim_{x\to 10} \frac{\log x - 1}{x - 10}$

39. $\lim_{x\to 0} \frac{10^x - 1}{2^x - 1}$

40. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[k]{x} - 1}$, $k, n \in \mathbb{N}$

Vlastná limita v nevlastnom bode

III. Vypočítajte limitu funkcie:

1. $\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+9} - x\right)$

2. $\lim_{x\to\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

3. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x-5}{4-x}\right)^3$

4. $\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{\sqrt{4x^2+2x-7}}$

5. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-1}{3x^2-4}$

6. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

7. $\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^4+6x^2-4}{x^4+x^3+1}$

8. $\lim_{x\to\infty} \frac{(4x-1)^{100}(3x+1)^{200}}{(6x+5)^{300}}$

9. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{2x+1}\right)^{x^2}$

10. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x} - 6x}{3x+1}$

11. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$

12. $\lim_{x\to\infty} \frac{7x^2+2x+15}{13x^2+6}$

13. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{5x^2}{1-x^2} + 2^{\frac{1}{x}}\right)$

14. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$

15. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right)$

16. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2+3}{2x^2-1}\right)^{x^2}$

17. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3+3x^2}{x^2+1} - x\right)$

18. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+\sqrt{x^2}}} - \sqrt{x^2}\right)$

19. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x-2} - \sqrt{x}\right)$

20. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x+3}\right)^x$

21. $\lim_{x\to\infty} x.\log_2 \frac{10+x}{5+x}$

22. $\lim_{x\to\infty} x\left(3^{\frac{1}{x}} - 1\right)$

<u>**Nevlastná limita**</u>

IV. Vypočítajte limitu funkcie a pokiaľ neexistuje, vypočítajte jednostranné limity v danom bode:

1. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^3-2}\right)$
2. $\lim_{x\to 0}\frac{5x^2-3x+2}{x}$
3. $\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^3-7x}{x^2+\sqrt{1-x}}$
4. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x-3}\right)$
5. $\lim_{x\to-2}\frac{x^3-2x^2}{(x^2+1)(x^2-4)}$
6. $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-1}{x^2+1}$

7. cvičenie – Výsledky

I. Limity postupností

1. $\lim_{n\to\infty} = \frac{10^6 n}{n^2+1} = 0$
2. $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}.\sin(n!)}{n+1} = 0$
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}} = \frac{1}{3}$
5. $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\ \ldots\ \sqrt[2^n]{2}\right) = 2$
6. $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) = \frac{1}{2}$
7. $\lim_{n\to\infty} \frac{7n^2+2n-1}{3n^2+n+5} = \frac{7}{3}$
8. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-3n+5}{n^3+n^2+n+1} = 0$
9. $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3+2n^2+n-1}{4n^2+2n+1} = \infty$
10. $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n-1} = \frac{3}{2}$
11. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2-3n} = -\frac{2}{3}$
12. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$
13. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 0$
14. $\lim_{n\to\infty} (n - (-1)^n) = \infty$
15. $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+2} = 0$
16. $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$
17. limita neexistuje
18. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-(-1)^n} = 0$
19. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{2n}{3n+1}\right) = \frac{2}{3}$
20. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n}\sin n^2 = 0$
21. $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2} = \frac{1}{2}$
22. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{2n^2-1}\cos\frac{n+1}{2n-1}\right) = 0$
23. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{1-2n}\cdot\frac{n(-1)^n}{n^2+1}\right) = 0$
24. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{(2n+3)^2} = \frac{1}{4}$
25. $\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)(n+1)(n+2)}{n^4+2n^2+3} = 0$
26. $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}} = \frac{4}{3}$
27. $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a^n} = 1$
28. $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a^n} = 0$
29. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{-1}$
30. $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+4} = e$
31. $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$
32. $\lim_{n\to\infty} n\left(\ln(n+1) - \ln n\right) = 1$
33. limita neexistuje
34. $\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n}{n+3}\right) = -3$
35. limita neexistuje
36. $\lim_{n\to\infty} \left(8 - \frac{1}{n^2}\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$

37. $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n}} = 1$

38. $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-1} - n - 1\right) = -1$

39. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n}+n} = \frac{1}{2}$

40. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2}\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}} - 1\right) = \frac{1}{3}$

41. $\lim_{n\to\infty} \frac{9+\frac{n}{n+1}}{2+\frac{1}{n}} = 5$

42. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2-n}{n+1} + \frac{n2^{-n}}{n+2}\right) = -1$

43. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{2-n}\right)^5 = -1$

44. $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+5)^3-n(n+7)^2}{n^2} = 1$

45. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{2n+1} = -\frac{1}{6}$

46. $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}-(-1)^n} = -1$

47. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+2+3+...+n}{n+2} - \frac{n}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

48. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+2}-3^{n+3}}{2^n+3^n} = -27$

49. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+3^{-n}}{2^{-n}-3^n} = 0$

50. $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n^2+1)^2-(n^2-1)^2} = \infty$

51. $\lim_{n\to\infty} \frac{(2+n)^{100}-n^{100}-200n^{99}}{n^{98}-10n^2+1} = 19\,800$

52. $\lim_{n\to\infty} \frac{\log^2 10n}{\log^2 n} = 1$

53. $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n^2-n+1)}{\log(n^{10}+n+1)} = 0$

54. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{n^2+3}-n} = \frac{1}{3}$

55. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n^3+1}-n\sqrt{n}} = \infty$

56. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+10}{2n-1}\right)^n = 0$

57. $\lim_{n\to\infty} \frac{n\log n}{n^2-1} = 0$

58. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n = \sqrt{e}$

59. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+k+1}{n+k}\right)^n = e$

60. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n+3}{2^n}\right)^{2^n} = e^3$

61. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^{2n} = e^4$

62. $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}\right) = 1$

63. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + ... + \frac{n-1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$

64. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + ... + \frac{(n-1)^2}{n^3}\right) = \frac{1}{3}$

65. $\lim_{n\to\infty} \frac{1+a+a^2+...+a^n}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+...+\left(\frac{1}{4}\right)^n} = \frac{3}{4(a-1)}$

66. $\lim_{n\to\infty} \frac{1+a+a^2+...+a^n}{1+b+b^2+...+b^n} = \frac{b-1}{a-1}$

67. $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+2n^2} - n\right) = \frac{2}{3}$

68. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{8}-1}{\sqrt[n]{16}-1} = \frac{3}{4}$

Limity funkcií

II. Vlastná limita vo vlastnom bode

1. $\lim_{x\to -2} \frac{2x^2+3x-2}{x^2+x-2} = \frac{5}{3}$
2. $\lim_{x\to -1} \frac{2x^3+2x^2+3x+3}{x^3+x^2+x+1} = \frac{5}{2}$
3. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+1}{2x+1} = -\frac{3}{5}$
4. $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$
5. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$
6. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x^2-1}{x^4-1}\right)^2 = \frac{1}{4}$
7. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$
8. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}{x} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$
9. $\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt{6+x}-2}{x+2} = \frac{1}{4}$
10. $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x+1)}{x+1} = 1$
11. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{3x} = \frac{4}{3}$
12. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\cos 3x \sin 7x} = \frac{3}{7}$
13. $\lim_{x\to 0} \frac{2^{2x+3}-8}{x} = 8\ln 2$
14. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$
15. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{x^4-1}\right) = \frac{1}{2}$
16. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x} = \frac{2}{5}$
17. $\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1} = \frac{m}{n}$
18. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
19. $\lim_{x\to e} \frac{\ln x-1}{x-e} = \frac{1}{e^2}$
20. $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{x^2-2x+7}}{x^2-2x} = \frac{3}{4\sqrt{7}}$
21. $\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1} = -\frac{1}{4}$
22. $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x^2-4x} = 2$
23. $\lim_{x\to 1}(x^2-x-2) = -2$
24. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-x-2} = \frac{4}{3}$
25. $\lim_{x\to a} \frac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} = 2\sqrt{a}$
26. $\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1}}{x^2-25} = -\frac{3}{80}$
27. $\lim_{x\to 0} x.\operatorname{cotg} 5x = \frac{1}{5}$
28. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha$
29. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$
30. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x-\cos 7x}{x^2} = 20$
31. $\lim_{x\to 2} \frac{2^x-x^2}{x-2} = 4(\ln 2-1)$
32. $\lim_{x\to 1} \frac{x^{101}-101x+100}{x^2-2x+1} = 5\,050$
33. $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-5x^2+3x+9}{x^3-8x^2+21x-18} = 4$
34. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{3}{1-x^3} + \frac{1}{x-1}\right) = 0$
35. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin x} = 4$
36. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{x+32}-2}{x} = \frac{1}{80}$
37. $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin 2x}{x} = 2$
38. $\lim_{x\to 10} \frac{\log x-1}{x-10} = \frac{1}{10\ln 10}$
39. $\lim_{x\to 0} \frac{10^x-1}{2^x-1} = \frac{\ln 10}{\ln 2}$
40. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[k]{x}-1} = \frac{k}{n}$

III. Vlastná limita v nevlastnom bode

1. $\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+9}-x\right)=\frac{9}{2}$
2. $\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=1$
3. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-5}{4-x}\right)^3=-8$
4. $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{\sqrt{4x^2+2x-7}}=\frac{1}{2}$
5. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{3x^2-4}=\frac{2}{3}$
6. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=1$
7. $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^4+6x^2-4}{x^4+x^3+1}=3$
8. $\lim_{x\to\infty}\frac{(4x-1)^{100}(3x+1)^{200}}{(6x+5)^{300}}=\frac{1}{6^{100}}$
9. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^{x^2}=0$
10. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}-6x}{3x+1}=-2$
11. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$
12. $\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2+2x+15}{13x^2+6}=\frac{7}{13}$
13. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2}{1-x^2}+2^{\frac{1}{x}}\right)=-4$
14. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=e^2$
15. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=0$
16. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3}{2x^2-1}\right)^{x^2}=e^2$
17. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+3x^2}{x^2+1}-x\right)=3$
18. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+\sqrt{x^2}}}-\sqrt{x^2}\right)=\frac{1}{2}$
19. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)=0$
20. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+3}\right)^x=e^{-3}$
21. $\lim_{x\to\infty} x.\log_2\frac{10+x}{5+x}=\frac{5}{\ln 2}$
22. $\lim_{x\to\infty} x\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)=\ln 3$

IV. Nevlastná limita

1. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^3-2}\right)=-\infty$
2. limita neexistuje
   $\lim_{x\to 0^-}\frac{5x^2-3x+2}{x}=-\infty$
   $\lim_{x\to 0^+}\frac{5x^2-3x+2}{x}=\infty$
3. $\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^3-7x}{x^2+\sqrt{1-x}}=-\infty$
4. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x-3}\right)=\infty$
5. limita neexistuje
   $\lim_{x\to-2^-}\frac{x^3-2x^2}{(x^2+1)(x^2-4)}=-\infty$
   $\lim_{x\to-2^+}\frac{x^3-2x^2}{(x^2+1)(x^2-4)}=\infty$
6. $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-1}{x^2+1}=-\infty$

8

Asymptoty ku grafu funkcie

Na tomto cvičení sa budú hľadať asymptoty ku grafu funkcie, čo je pre nás hlavné využitie limít. Asymptoty ku grafu funkcie potrebujeme poznať, keď pri vyšetrovaní priebehu funkcie budeme chcieť nakresliť graf funkcie. Ku zavedeniu pojmu asymptoty bez smernice budeme potrebovať aj pojem spojitosti, takže to tu v stručnosti uvedieme:

- Funkcia f je *spojitá v bode* $x_0 \in D(f)$ práve vtedy, ak existuje limita $\lim_{x\to x_0} f(x)$ a platí: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Funkcia f v bode x_0 *nie je spojitá* ak platí niektorý z nasledujúcich prípadov:

  a. $x_0 \notin D(f)$

  b. $x_0 \in D(f)$ a neexistuje limita $\lim_{x\to x_0} f(x)$

  c. $x_0 \in D(f)$, existuje limita $\lim_{x\to x_0} f(x)$ ale $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

Asymptoty sú, vo všeobecnosti, priamky, ku ktorým sa graf funkcie (hodnoty funkcie) blíži, ale nikdy ich nedosiahne. Rozlišujeme ich na *asymptoty so smernicou* a *asymptoty bez smernice.* Asymptoty so smernicou sú priamky, ktoré možno zapísať v smernicovom tvare $y = kx + q$. Asymptoty bez smernice sú kolmé na os o_x a dajú sa zapísať v tvare $x = x_0$. Asymptoty bez smernice môže mať funkcia len v bodoch, v ktorých nie je spojitá alebo, pokiaľ definičný obor funkcie nie je $\mathbb{R}$ a obsahuje intervaly, tak ešte v krajných bodoch týchto intervalov. Platí:

- Funkcia f má v bode $x_0 \in \mathbb{R}$ asymptotu bez smernice práve vtedy, ak platí: $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$ alebo $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ (môžu nastať aj oba prípady súčasne).

- Funkcia f má asymptotu so smernicou v tvare $y = kx + q$ ak existuje limita: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ a existuje limita: $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = q$. Jedná sa vlastne o dva prípady: dve limity pre $x \to -\infty$ a dve limity pre $x \to \infty$.

I. Nájdite rovnice asymptot ku grafu funkcie f:

1. $f(x) = \frac{x}{x-1}$
2. $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$
3. $f(x) = 3x + \frac{3}{x-2}$
4. $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$
5. $f(x) = \frac{x^3+2}{x^2-4}$
6. $f(x) = x + \frac{2x}{x^2-1}$
7. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 4x^2}$
8. $f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2x^2-1}$
9. $f(x) = 2x - \frac{\cos x}{x}$
10. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$
11. $f(x) = \frac{x \sin x}{1+x^2}$
12. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$
13. $f(x) = x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$
14. $f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$
15. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
16. $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$
17. $f(x) = \sqrt{x^4 - 1}$
18. $f(x) = \frac{6(x^2-4)}{3x^2+8}$
19. $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$
20. $f(x) = \frac{x^2+2x}{x-1}$
21. $f(x) = \frac{x^2-2x}{x+3}$
22. $f(x) = \frac{\sqrt{4x^4+1}}{|x|}$
23. $f(x) = 3\sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}$
24. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$
25. $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$
26. $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$
27. $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$
28. $f(x) = \frac{x^2}{|x|+1}$
29. $f(x) = \frac{x^5}{x^4+1}$
30. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2}$
31. $f(x) = 0{,}1^{x^2}$
32. $f(x) = \frac{2^x}{x}$
33. $f(x) = x.\sin\frac{1}{x}$
34. $f(x) = x.\operatorname{arctg} x$

8. cvičenie – Výsledky

Použité označenia:

- **ABS:** Asymptoty bez smernice
- **ASS:** Asymptoty so smernicou

I.

1. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
   ABS: $x = 1$
   ASS: $y = 1$

2. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$
   ABS: $x = -1\,, x = 1$
   ASS: $y = 0$

3. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
   ABS: $x = 2$
   ASS: $y = 3x$

4. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$
   ABS: $x = -1\,, x = 0\,, x = 1$
   ASS: $y = 0$

5. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$
   ABS: $x = -2\,, x = 2$
   ASS: $y = x$

6. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$
   ABS: $x = -1\,, x = 1$
   ASS: $y = x$

7. $D(f) = \mathbb{R}$
   ABS: nemá
   ASS: $y = x + \frac{4}{3}$

8. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$
   ABS: $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,, x = \frac{1}{\sqrt{2}}$
   ASS: $y = -\frac{1}{2}\,, y = \frac{1}{2}$

9. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
   ABS: $x = 0$
   ASS: $y = 2x$

10. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
    ABS: nemá
    ASS: $y = 0$

11. $D(f) = \mathbb{R}$
    ABS: nemá
    ASS: $y = 0$

12. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
    ABS: $x = 0$
    ASS: $y = 1$

13. $D(f) = \left(-\infty, -\frac{1}{e}\right) \cup (0, \infty)$
    ABS: $x = -\frac{1}{e}$
    ASS: $y = x + \frac{1}{e}$

14. $D(f) = (0, \infty)$
    ABS: $x = 0$
    ASS: $y = x$

15. $D(f) = (-1, 1)$
    ABS: $x = -1\,, x = 1$
    ASS: nemá

16. $D(f) = (0, 1\rangle$
    ABS: $x = 0$
    ASS: nemá

17. $D(f) = (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty)$
ABS: nemá
ASS: nemá

18. $D(f) = \mathbb{R}$
ABS: nemá
ASS: $y = 2$

19. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
ABS: $x = 0$
ASS: $y = -1\,, y = 1$

20. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
ABS: $x = 1$
ASS: $y = x + 3$

21. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$
ABS: $x = -3$
ASS: $y = x - 5$

22. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
ABS: $x = 0$
ASS: $y = -2x\,, y = 2x$

23. $D(f) = (-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty)$
ABS: nemá
ASS: $y = \frac{3}{2}x$

24. $D(f) = \mathbb{R}$
ABS: nemá
ASS: $y = 0$

25. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
ABS: $x = 0$
ASS: $y = x$

26. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0\}$
ABS: $x = -2\,, x = -1\,, x = 0$
ASS: $y = 0$

27. $D(f) = (-\infty, -2) \cup \langle 2, \infty)$
ABS: $x = -2$
ASS: $y = 1$

28. $D(f) = \mathbb{R}$
ABS: nemá
ASS: $y = -x - 1\,, y = x - 1$

29. $D(f) = \mathbb{R}$
ABS: nemá
ASS: $y = x$

30. $D(f) = \mathbb{R}$
ABS: nemá
ASS: $y = x + \frac{1}{3}$

31. $D(f) = \mathbb{R}$
ABS: nemá
ASS: $y = 0$

32. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
ABS: $x = 0$
ASS: nemá

33. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
ABS: nemá
ASS: $y = 1$

34. $D(f) = \mathbb{R}$
ABS: nemá
ASS: $y = -\frac{\pi}{2}x - 1\,, y = \frac{\pi}{2}x - 1$

9

Derivácie a ich geometrické aplikácie

Na tomto cvičení sa budú precvičovať derivácie funkcií a úlohy na ich geometrické aplikácie. Derivovanie je samo o sebe veľmi jednoduchá záležitosť. Stačí ovládať elementárne funkcie, ich vlastnosti, rozklad zložených funkcií na zložky a potom už len základné derivačné vzorce a pravidlá. Všetko ostatné sú už len mechanické úpravy a dosadzovanie do vzorcov.

Derivačné vzorce:

1. $a' = 0\,,\ a \in \mathbb{R}$
2. $(x^a)' = ax^{a-1}\,,\ a \in \mathbb{R}$
3. $(\sin x)' = \cos x$
4. $(\cos x)' = -\sin x$
5. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
6. $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
7. $(e^x)' = e^x$
8. $(a^x)' = a^x \ln a\,,\ a > 0\ a \neq 1$
9. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
10. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}\,,\ a > 0\ a \neq 1$
11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,\ x \in (-1, 1)$
12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,\ x \in (-1, 1)$
13. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
14. $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Derivačné pravidlá:

a. $(a.f(x))' = a.f'(x)\,,\ a \in \mathbb{R}$

b. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

c. $(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

d. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)}$

e. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \,.\, g'(x)$

f. $\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

I. Nájdite deriváciu funkcie:

1. $f(x) = 5x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2$
2. $f(x) = x\sqrt{x}$
3. $f(x) = 2e^x$
4. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}$
5. $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$
6. $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$
7. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$
8. $f(x) = (x^3 + 8)(x - 2)$
9. $f(x) = 3.4^x + \log x$
10. $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$
11. $f(x) = x\ln(x) - x$
12. $f(x) = \frac{\sin x}{1-\cos x}$
13. $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$
14. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
15. $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$
16. $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$
17. $f(x) = \operatorname{tg} x - 3x\log_4 x$
18. $f(x) = \sqrt[5]{x^9}$
19. $f(x) = e^x(\cos x + \sin x)$
20. $f(x) = x^3\cos x + \frac{\sqrt[3]{x}}{3+\sqrt{x}}$

II. Nájdite deriváciu zloženej funkcie:

1. $f(x) = (2 + 3x)^{17}$
2. $f(x) = x^{-n}$
3. $f(x) = e^{3x}$
4. $f(x) = x^2(x^3 - 1)^2$
5. $f(x) = \sqrt[3]{(2x + 3)^2}$
6. $f(x) = 4^{3x}$
7. $f(x) = x^x$
8. $f(x) = \log(x + 2x^2)$
9. $f(x) = \sqrt{\sin\frac{2x}{3}}$
10. $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}\right)$
11. $f(x) = \ln\left(\cos\left(\sqrt{e^x + 1}\right)\right)$
12. $f(x) = 4.3^x.2^{-x}$
13. $f(x) = \cos 3x$
14. $f(x) = \cos^3 x$
15. $f(x) = \ln(x - x^2)$
16. $f(x) = \operatorname{tg}^2(x^3)$
17. $f(x) = 2^{-x^2} + \ln\frac{1}{\sqrt{x}}$
18. $f(x) = \log_2^2 e^x$
19. $f(x) = e^{\sin^2 x^3}$
20. $f(x) = \sqrt[5]{\frac{1}{\sqrt[3]{4x+1}}}$
21. $f(x) = (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$
22. $f(x) = (\ln x)^x$

23. $f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$
24. $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$
25. $f(x) = \operatorname{tg}(\ln x)$
26. $f(x) = \ln\left(\operatorname{cotg}\frac{x}{3}\right)$
27. $f(x) = \arcsin(\operatorname{tg} 2x)$
28. $f(x) = x \arcsin(\ln x)$
29. $f(x) = \sqrt{\log 5x}$
30. $f(x) = \arccos\sqrt{x}$
31. $f(x) = (2+\cos x)^x$
32. $f(x) = \ln|\sin x|$

III. Nájdite dotyčnicu a normálu ku grafu funkcie f v bode x_0:

1. $f(x) = \sqrt{x}\,,\ x_0 = 5$
2. $f(x) = x^3 + 2x\,,\ x_0 = 1$
3. $f(x) = \frac{3x-4}{2x-3}\,,\ x_0 = 2$
4. $f(x) = \ln(x+1)\,,\ x_0 = 0$
5. $f(x) = \sqrt[3]{x^{11}}\,,\ x_0 = 1$
6. $f(x) = \left(1+\frac{2}{x}\right)^3,\ x_0 = -1$
7. $f(x) = (x^3+8)(x-2)\,,\ x_0 = 0$
8. $f(x) = e^{x+3}\,,\ x_0 = -3$
9. $f(x) = 3^{x-2}\,,\ x_0 = 1$
10. $f(x) = \ln\frac{1}{x}\,,\ x_0 = 1$
11. $f(x) = \log(x^3)\,,\ x_0 = 10$
12. $f(x) = 3\sin x + 5\,,\ x_0 = \frac{\pi}{2}$
13. $f(x) = 2\sin x - 5\cos x\,,\ x_0 = 0$
14. $f(x) = 2\operatorname{tg} x - 1\,,\ x_0 = \frac{\pi}{4}$
15. $f(x) = \operatorname{cotg} x\,,\ x_0 = -\frac{\pi}{4}$
16. $f(x) = x^2 \sin x\,,\ x_0 = 0$
17. $f(x) = \sqrt{x}.e^{-x}\,,\ x_0 = 1$
18. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}\,,\ x_0 = 0$
19. $f(x) = x^3 \ln x\,,\ x_0 = 1$
20. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,,\ x_0 = 0$

IV. Zistite pod akým uhlom pretína graf funkcie f os o_x:

1. $f(x) = \cos x$
2. $f(x) = \ln x - 1$
3. $f(x) = \operatorname{cotg} x$
4. $f(x) = x^2 - 3x + 2$
5. $f(x) = e^x - 1$
6. $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$
7. $f(x) = xe^{-x} - e^{-x} - x + 1$
8. $f(x) = x^3 - 3x$
9. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
10. $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$
11. $f(x) = \sin x$
12. $f(x) = \ln^2(x+1)$
13. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2}$
14. $f(x) = \left(1+\frac{3}{x}\right)^3$

V. Nájdite dotyčnicu a normálu ku grafu funkcie f za danej podmienky:

1. $f(x) = 10^x$ a dotyčnica je rovnobežná s priamkou $y = 5x - 2$.
2. $f(x) = x^2 - 2x + 3$ a dotyčnica je rovnobežná s priamkou $3x - y + 5 = 0$.
3. $f(x) = x^2 - 3x + 2$ a dotyčnica je kolmá na priamku $x + y - 1 = 0$
4. $f(x) = \sqrt{2x}$ a dotyčnica zviera s priamkou $x + y + 7 = 0$ uhol $\frac{5}{12}\pi$.
5. $f(x) = \ln x$ a normála je rovnobežná s priamkou $x + 2y - 3 = 0$.
6. $f(x) = \frac{e^x}{2} + 1$ a normála je kolmá na priamku $x - 2y + 1 = 0$.
7. $f(x) = x \ln x$ a normála je kolmá na priamku $3x - 3y + 7 = 0$.
8. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ a normála je rovnobežná s osou o_y.

9. cvičenie – Výsledky

I.

1. $f'(x) = 20x^3 - 6x^2 + 6x$
2. $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$
3. $f'(x) = 2e^x$
4. $f'(x) = -\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{x^5}}$
5. $f'(x) = \frac{7}{8\sqrt[8]{x}}$
6. $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$
7. $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$
8. $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 8$
9. $f'(x) = 3.4^x . \ln 4 + \frac{1}{x \ln 10}$
10. $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
11. $f'(x) = \ln x$
12. $f'(x) = \frac{1}{\cos x - 1}$
13. $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
14. $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$
15. $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$
16. $f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$
17. $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 3\log_4 x - \frac{3}{\ln 4}$
18. $f'(x) = \frac{9}{5}\sqrt[5]{x^4}$
19. $f'(x) = 2e^x \cos x$
20. $f'(x) = x^2(3\cos x - x \sin x) + \frac{6-\sqrt{x}}{6\sqrt[3]{x^2}(3+\sqrt{x})}$

II.

1. $f'(x) = 51(2+3x)^{16}$
2. $f'(x) = -nx^{-(n+1)}$
3. $f'(x) = 3e^{3x}$
4. $f'(x) = 2(x^3-1)(4x^4 - x)$
5. $f'(x) = \frac{4}{3\sqrt[3]{2x+3}}$
6. $f'(x) = 3.4^{3x} . \ln 4$
7. $f'(x) = x^x(\ln x + 1)$
8. $f'(x) = \frac{4x+1}{(x+2x^2)\ln 10}$
9. $f'(x) = \frac{1}{3}\sqrt{\operatorname{cotg}\frac{2x}{3} . \cos\frac{2x}{3}}$
10. $f'(x) = \frac{2}{x^2-4}$
11. $f'(x) = \frac{-e^x}{2\sqrt{e^x+1}} \cdot \operatorname{tg}\left(\sqrt{e^x+1}\right)$
12. $f'(x) = 4\left(\frac{3}{2}\right)^x \ln\frac{3}{2}$
13. $f'(x) = -3\sin 3x$
14. $f'(x) = -3\sin x . \cos^2 x$
15. $f'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x}$
16. $f'(x) = \frac{6x^2 \sin x^3}{\cos^3 x^3}$
17. $f'(x) = -\frac{x \ln 2}{2^{x^2-1}} - \frac{1}{2x}$
18. $f'(x) = \frac{2x}{\ln^2 2}$

19. $f'(x) = 6x^2 . \sin x^3 . \cos x^3 . e^{\sin^2 x^3}$

20. $f'(x) = -\frac{4}{15 \sqrt[15]{(4x+1)^{16}}}$

21. $f'(x) = \frac{1}{2} (\sqrt{x})^{\sqrt{x}-1} (\ln \sqrt{x} + 1)$

22. $f'(x) = (\ln x)^x \left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}\right)$

23. $f'(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^x \left(\ln \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1}\right)$

24. $f'(x) = (\sin x)^{\cos x} \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x . \ln(\sin x)\right)$

25. $f'(x) = \frac{1}{x \cos^2 \ln x}$

26. $f'(x) = \frac{-1}{3 \sin \frac{x}{3} . \cos \frac{x}{3}}$

27. $f'(x) = \frac{2}{\cos 2x \sqrt{\cos 4x}}$

28. $f'(x) = \arcsin (\ln x) + \frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}$

29. $f'(x) = \frac{1}{2x \ln 10 . \sqrt{\log 5x}}$

30. $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x-x^2}}$

31. $f'(x) = (2+\cos x)^x \left(\ln(2+\cos x) - \frac{x \sin x}{2+\cos x}\right)$

32. $f(x) = \begin{cases} \ln(\sin x)\,, & x \in (0,\pi) + 2k\pi \\ \ln(-\sin x)\,, & x \in (\pi, 2\pi) + 2k\pi \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} \operatorname{cotg} x\,, & x \in (0,\pi) + 2k\pi \\ -\operatorname{cotg} x\,, & x \in (\pi, 2\pi) + 2k\pi \end{cases}$

III.

1. $A = \left[5, \sqrt{5}\right]$
   $d : y = \frac{x}{2\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}}{2}$
   $n : y = -2\sqrt{5}x + 11\sqrt{5}$

2. $A = [1, 3]$
   $d : y = 5x - 2$
   $n : y = -\frac{1}{5}x + \frac{16}{5}$

3. $A = [2, 2]$
   $d : y = -x + 4$
   $n : y = x$

4. $A = [0, 0]$
   $d : y = x$
   $n : y = -x$

5. $A = [1, 1]$
   $d : y = \frac{11}{3}x - \frac{8}{3}$
   $n : y = -\frac{3}{11}x + \frac{14}{11}$

6. $A = [-1, -1]$
   $d : y = -6x - 7$
   $n : y = \frac{1}{6}x - \frac{5}{6}$

7. $A = [0, -16]$
   $d : y = 8x - 16$
   $n : y = -\frac{1}{8}x - 16$

8. $A = [-3, 1]$
   $d : y = x + 4$
   $n : y = -x - 2$

9. $A = \left[1, \frac{1}{3}\right]$
   $d : y = \frac{\ln 3}{3}x + \frac{1-\ln 3}{3}$
   $n : y = -\frac{3}{\ln 3}x + \frac{9+\ln 3}{3 \ln 3}$

10. $A = [1, 0]$
    $d : y = -x + 1$
    $n : y = x - 1$

11. $A = [10, 3]$
    $d : y = \frac{3x}{10 \ln 10} + \frac{3 \ln 10 - 3}{\ln 10}$
    $n : y = -\frac{10 \ln 10}{3}x + \frac{9+100 \ln 10}{3}$

12. $A = \left[\frac{\pi}{2}, 8\right]$
    $d : y = 8$
    $n : x = \frac{\pi}{2}$

13. $A = [0, -5]$
$d : y = 2x - 5$
$n : y = -\frac{1}{2}x - 5$

14. $A = \left[\frac{\pi}{4}, 1\right]$
$d : y = 4x + 1 - \pi$
$n : y = -\frac{1}{4}x + \frac{16+\pi}{16}$

15. $A = \left[-\frac{\pi}{4}, -1\right]$
$d : y = -2x - 1 - \frac{\pi}{2}$
$n : y = \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{8} - 1$

16. $A = [0, 0]$
$d : y = 0$
$n : x = 0$

17. $A = \left[1, \frac{1}{e}\right]$
$d : y = -\frac{x}{2e} + \frac{3}{2e}$
$n : y = 2ex + \frac{1-2e^2}{e}$

18. $A = [0, 1]$
$d : y = x + 1$
$n : y = -x + 1$

19. $A = [1, 0]$
$d : y = x - 1$
$n : y = -x + 1$

20. $A = [0, 0]$
$d : y = x$
$n : y = -x$

IV.

1. $f(x)$ pretína o_x v bodoch $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ a $x_2 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$. V prvom prípade zviera s o_x uhol $\alpha_1 = -\frac{\pi}{4}$ a v druhom uhol $\alpha_2 = \frac{\pi}{4}$.
2. $f(x)$ pretína o_x v bode $x = e$. S o_x tam zviera uhol $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{e}\right)$.
3. $f(x)$ pretína o_x v bode $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. S o_x tam zviera uhol $\alpha = -\frac{\pi}{4}$.
4. $f(x)$ pretína o_x v bodoch $x_1 = 1$ a $x_2 = 2$. V prvom prípade zviera s o_x uhol $\alpha_1 = -\frac{\pi}{4}$ a v druhom uhol $\alpha_2 = \frac{\pi}{4}$.
5. $f(x)$ pretína o_x v bode $x = 0$. S o_x v tomto bode zviera uhol $\alpha = \frac{\pi}{4}$.
6. $f(x)$ pretína o_x v bodoch $x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. V oboch prípadoch zviera s o_x uhol $\alpha = \operatorname{arctg}(-9)$.
7. $f(x)$ pretína o_x v bode $x = 0$. S o_x v tomto bode zviera uhol $\alpha = \frac{\pi}{4}$.
8. $f(x)$ pretína o_x v bodoch $x_1 = 0$ a $x_{2,3} = \pm 1$. S o_x v prvom bode zviera uhol $\alpha_1 = -\frac{\pi}{4}$ a vo zvyšných dvoch bodoch uhol $\alpha_{2,3} = \operatorname{arctg} 2$.
9. $f(x)$ pretína o_x v bode $x = 1$. S o_x v tomto bode zviera uhol $\alpha = \frac{\pi}{4}$.
10. $f(x)$ pretína o_x v bodoch $x_1 = -1 - \sqrt{2}$ a $x_2 = -1 + \sqrt{2}$. Graf funkcie $f(x)$ v týchto dvoch bodoch zviera s o_x uhol $\alpha_1 = \operatorname{arctg}\left(3\sqrt{2} - 4\right)$ a $\alpha_2 = \operatorname{arctg}\left(-4 - 3\sqrt{2}\right) = -\operatorname{arctg}\left(4 + 3\sqrt{2}\right)$.

11. $f(x)$ pretína o_x v bodoch $x_1 = 2k\pi$ a $x_2 = (2k+1)\pi$. V prvom prípade zviera s o_x uhol $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$ a v druhom uhol $\alpha_2 = -\frac{\pi}{4}$.
12. $f(x)$ pretína o_x v bode $x = 0$. S o_x v tomto bode zviera uhol $\alpha = 0°$.
13. $f(x)$ pretína o_x v bode $x = -1$. S o_x tam zviera uhol $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)$.
14. $f(x)$ pretína o_x v bode $x = -3$. S o_x v tomto bode zviera uhol $\alpha = 0°$.

V.

1. $A = \left[\log\frac{5}{\ln 10}, \frac{5}{\ln 10}\right]$
   $d : y = 5x + \frac{5}{\ln 10} - 5\log\frac{5}{\ln 10}$
   $n : y = -\frac{1}{5}x + \frac{5}{\ln 10} + \frac{1}{5}\log\frac{5}{\ln 10}$
2. $A = \left[\frac{5}{2}, \frac{17}{4}\right]$
   $d : y = 3x - \frac{13}{4}$
   $n : y = -\frac{1}{3}x + \frac{61}{12}$
3. $A = [2, 0]$
   $d : y = x - 2$
   $n : y = -x + 2$
4. $A = \left[\frac{3}{2}, \sqrt{3}\right]$
   $d : y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2}$
   $n : y = -\sqrt{3}.x + \frac{5}{2}\sqrt{3}$
5. $A = \left[\frac{1}{2}, -\ln 2\right]$
   $d : y = 2x - 1 - \ln 2$
   $n : y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \ln 2$
6. $A = \left[1, \frac{e}{2} + 1\right]$
   $d : y = \frac{1}{2}x + \frac{e+1}{2}$
   $n : y = -2x + \frac{e}{2} + 3$
7. $A = [1, 0]$
   $d : y = x - 1$
   $n : y = -x + 1$
8. $A = \left[1, \frac{1}{2}\right]$, $B = \left[-1, -\frac{1}{2}\right]$
   $d_A : y = \frac{1}{2}$, $n_A : x = 1$
   $d_B : y = -\frac{1}{2}$, $n_B : x = -1$

10

L'Hospitalovo pravidlo, diferenciál funkcie, Taylorov polynóm

Na tomto cvičení si ukážeme využitie derivácií pri riešení úloh. Najskôr to bude výpočet špeciálnych typov limít s použitím L'Hospitalovho pravidla a potom približný výpočet hodnôt funkcií pomocou diferenciálu funkcie, resp. pomocou Taylorovho polynómu.

L'Hospitalovo pravidlo

Veta: Nech:

a. limity oboch funkcií f a g sú v bode x_0 súčasne rovné 0, alebo súčasne rovné $\pm\infty$,

b. funkcie f a g majú deriváciu v okolí bodu x_0, pričom v samotnom bode x_0 derivácia nemusí existovať,

c. existuje vlastná, alebo nevlastná limita: $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Potom existuje aj limita $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí rovnosť:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ .$$

L'Hospitalovo pravidlo hovorí o tom, ako sa dajú pomocou derivácie funkcií vypočítať limity typov $\frac{0}{0}$ alebo $\pm\frac{\infty}{\infty}$ (pomocou drobných úprav aj typov: 0.0, $0.\infty$,...). Ak ale používame L'Hospitalovo pravidlo, vždy je nutné si najskôr overiť, či sú splnené všetky predpoklady uvedené vo vete!

I. Vypočítajte limitu:

1. $\lim_{x\to 1} \frac{x^5-1}{2x^3-x-1}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$
3. $\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$
5. $\lim_{x\to 1} \frac{x^{10}-10x+9}{x^5-5x+4}$
6. $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$
7. $\lim_{x\to 0^+} x^x$
8. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\operatorname{cotg} x}$
9. $\lim_{x\to \infty} \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\ln x}$
10. $\lim_{x\to \infty} \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$
11. $\lim_{x\to 1} \frac{3x^2+4x-7}{2x^2+3x-5}$
12. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{\ln\cos 3x}$
13. $\lim_{x\to 3} \frac{\ln\left(x^2-8\right)}{2x^2-5x-3}$
14. $\lim_{x\to \infty} \frac{2+2x+\sin 2x}{(2x+\sin 2x)e^{\sin x}}$
15. $\lim_{x\to 1} \frac{x^\alpha-1}{x^\beta-1}$, kde $\beta \neq 0$
16. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos ax}{x^2}$
17. $\lim_{x\to a} \frac{x^a-a^x}{a^x-a^a}$, kde $a>0\,,a\neq 1$
18. $\lim_{x\to a} \frac{x^a-a^x}{x^a-a^a}$, kde $a>0$
19. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\arcsin x}\right)$
20. $\lim_{x\to 1} \frac{x^x-1}{\ln x}$
21. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\operatorname{cotg} 2x}$
22. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$
23. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$
24. $\lim_{x\to 1} \frac{x^{10}-10x+9}{(x-1)^2}$
25. $\lim_{x\to 1} \frac{x^{50}-50x+49}{x^{100}-100x+99}$
26. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$
27. $\lim_{x\to -1} \frac{2x^4+3x^3-4x^2-9x-4}{3x^4+5x^3+3x^2+3x+2}$
28. $\lim_{x\to 0} \frac{(a+x)^x-a^x}{x^2}$, kde $a>0$
29. $\lim_{x\to 1} \frac{x^{20}-2x+1}{x^{30}-2x+1}$
30. $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{2}{\pi}\cdot \operatorname{arctg} x\right)^x$

Diferenciál funkcie

Nech funkcia f má v bode x_0 deriváciu. Potom diferenciál funkcie f v bode x_0 označujeme $\mathrm{d}f(x_0)$ a platí:

$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)\ .$$

Pomocou diferenciálu môžme vypočítať približnú hodnotu funkcie f v okolí bodu x_0 nasledovne:

$$f(x) \doteq f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)\ .$$

II. Nájdite diferenciál funkcie f v bode x_0:

1. $f(x) = x - 3x^2$, $x_0 = 2$
2. $f(x) = x^2 + 2x - 3$, $x_0 = 1$
3. $f(x) = \sin 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$
4. $f(x) = e^{x+1}$, $x_0 = 0$
5. $f(x) = \ln \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$
6. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $x_0 = 1$
7. $f(x) = \ln(1 - x^2)$, $x_0 = 2$
8. $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$
9. $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 3$
10. $f(x) = \log x$, $x_0 = \frac{1}{\ln 10}$

III. Nájdite diferenciál funkcie f v bode x_0:

1. $f(x) = x.e^x$
2. $f(x) = \operatorname{cotg} 3x$
3. $f(x) = \frac{1}{x}$
4. $f(x) = \sin x - x \cos x$
5. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
6. $f(x) = x\sqrt{64 - x^2} + 64.\arcsin \frac{x}{8}$
7. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$
8. $f(x) = e^{-x} + \ln x$
9. $f(x) = \arccos e^x$
10. $f(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt{x + \sqrt{x}}$

IV. Pomocou diferenciálu funkcie vypočítajte približnú hodnotu:

1. $\sqrt[3]{1{,}02}$
2. $\sin 29^\circ$
3. $\cos 151^\circ$
4. $\log 11$
5. $\operatorname{arctg} 1{,}05$
6. $\sqrt[3]{65}$
7. $\operatorname{tg} 44^\circ 50'$
8. $\sqrt{\frac{1{,}85}{2{,}15}}$
9. $\ln \operatorname{tg} 47^\circ 15'$
10. $\sqrt[10]{1000}$

Taylorov polynóm

Taylorov polynóm je zovšeobecnenie diferenciálu. Pomocou Taylorovho polynómu môžme s ľubovoľnou, vopred stanovenou, presnosťou v okolí bodu x_0 aproximovať akúkoľvek funkciu, ktorá je v okolí tohto bodu n-krát diferencovateľná. Všeobecný tvar Taylorovho polynómu n-tého stupňa funkcie f v bode x_0 je nasledovný:

$$T_n(f, x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1}$$

Odhad chyby

Člen R_{n+1}, uvedený na konci predošlého výrazu, predstavuje chybu výpočtu. Jej odhad sa robí podľa nasledovného vzroca:

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}\left(x_0 + \vartheta(x - x_0)\right)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{(n+1)}\,, \quad 0 \le \vartheta \le 1$$

pričom premenná ϑ sa volí tak, aby chyba R_{n+1} vyšla čo najväčšia. Čiže berie sa najhorší možný prípad a reálny výsledok môže byť potom už len lepší.

Taylorov polynóm v bode $x_0 = 0$ sa nazýva **Maclaurinov** polynóm.

V. Napíšte Taylorov polynóm n-tého stupňa pre funkciu f v danom bode x_0 a pre dané n:

1. $f(x) = e^x\,,\ x_0 = 0\,,\ n \in \mathbb{N}$
2. $f(x) = \sin x\,,\ x_0 = 0\,,\ n \in \mathbb{N}$
3. $f(x) = \cos x\,,\ x_0 = 0\,,\ n \in \mathbb{N}$
4. $f(x) = \ln(x+1)\,,\ x_0 = 0\,,\ n \in \mathbb{N}$
5. $f(x) = \ln x\,,\ x_0 = 1\,,\ n \in \mathbb{N}$
6. $f(x) = \frac{1}{2^x}\,,\ x_0 = 0\,,\ n \in \mathbb{N}$
7. $f(x) = \operatorname{arctg} x\,,\ x_0 = 0\,,\ n \le 5$
8. $f(x) = \ln(1-x)\,,\ x_0 = 0\,,\ n \in \mathbb{N}$
9. $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\,,\ x_0 = 0\,,\ n \in \mathbb{N}$
10. $f(x) = e^{\frac{x}{2}+2}\,,\ x_0 = 0\,,\ n \in \mathbb{N}$
11. $f(x) = \operatorname{tg} x\,,\ x_0 = 0\,,\ n \le 5$
12. $f(x) = \arcsin x\,,\ x_0 = 0\,,\ n \le 5$
13. $f(x) = x^x\,,\ x_0 = 1\,,\ n \le 3$
14. $f(x) = \ln\cos x\,,\ x_0 = 0\,,\ n \le 4$

VI. Vypočítajte približnú hodnotu s uvedenou presnosťou aspoň ε:

1. $\sqrt[10]{1010}\,,\ \varepsilon = 10^{-3}$
2. $\sqrt{\pi}\,,\ \varepsilon = 10^{-2}$
3. $(1{,}1)^{1{,}2}\,,\ \varepsilon = 10^{-4}$
4. $\sin 85^\circ\,,\ \varepsilon = 10^{-5}$
5. $\sqrt[4]{2400}\,,\ \varepsilon = 10^{-10}$
6. $\operatorname{arctg} 1{,}07\,,\ \varepsilon = 10^{-4}$
7. $\cos 5^\circ\,,\ \varepsilon = 10^{-5}$
8. $\sin 49^\circ\,,\ \varepsilon = 10^{-4}$
9. $\sqrt[3]{121}\,,\ \varepsilon = 10^{-4}$
10. $\ln 2\,,\ \varepsilon = 10^{-2}$
11. $\sqrt[5]{1{,}5}\,,\ \varepsilon = 10^{-2}$
12. $e\,,\ \varepsilon = 10^{-3}$
13. $\sqrt[4]{121}\,,\ \varepsilon = 10^{-2}$
14. $\ln 1{,}3\,,\ \varepsilon = 10^{-3}$

15. $\sqrt[4]{83}\,,\ \varepsilon = 10^{-5}$
16. $\sin 1^\circ\,,\ \varepsilon = 10^{-5}$
17. $\cos 9^\circ\,,\ \varepsilon = 10^{-4}$
18. $\sqrt{5}\,,\ \varepsilon = 10^{-5}$
19. $\log 11\,,\ \varepsilon = 10^{-4}$
20. $\operatorname{arctg} 0{,}8\,,\ \varepsilon = 10^{-3}$
21. $\sqrt[3]{e}\,,\ \varepsilon = 10^{-5}$
22. $\cos 72^\circ\,,\ \varepsilon = 10^{-4}$
23. $0{,}98^{0{,}98}\,,\ \varepsilon = 10^{-5}$
24. $\sqrt{127}\,,\ \varepsilon = 10^{-3}$
25. $\sin 92^\circ\,,\ \varepsilon = 10^{-5}$
26. $\sqrt[5]{250}\,,\ \varepsilon = 10^{-5}$
27. $\operatorname{arctg} 1{,}1\,,\ \varepsilon = 10^{-4}$
28. $2^{-0{,}12}\,,\ \varepsilon = 10^{-5}$

10. cvičenie – Výsledky

I.

1. $\lim_{x\to 1} \frac{x^5-1}{2x^3-x-1} = 1$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3} = \frac{1}{3}$
3. $\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x} = \frac{1}{3}$
5. $\lim_{x\to 1} \frac{x^{10}-10x+9}{x^5-5x+4} = \frac{9}{2}$
6. $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$
7. $\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$
8. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\operatorname{cotg} x} = 0$
9. $\lim_{x\to \infty} \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\ln x} = 1$
10. $\lim_{x\to \infty} \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{\ln x}} = e$
11. $\lim_{x\to 1} \frac{3x^2+4x-7}{2x^2+3x-5} = \frac{10}{7}$
12. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{\ln\cos 3x} = \frac{1}{9}$
13. $\lim_{x\to 3} \frac{\ln\left(x^2-8\right)}{2x^2-5x-3} = \frac{6}{7}$
14. a) Na túto limitu sa nedá použiť L'Hospitalovo pravidlo, pretože nie sú splnené potrebné podmienky!
    b) Táto limita neexistuje!
15. $\lim_{x\to 1} \frac{x^\alpha-1}{x^\beta-1} = \frac{\alpha}{\beta}$, $\beta \neq 0$
16. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos ax}{x^2} - \frac{a^2}{2}$
17. $\lim_{x\to a} \frac{x^a-a^x}{a^x-a^a} = \frac{1-\ln a}{\ln a}$, $a>0\,, a\neq 1$
18. $\lim_{x\to a} \frac{x^a-a^x}{x^a-a^a} 1-\ln a$, $a>0$
19. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\arcsin x}\right) = 0$
20. $\lim_{x\to 1} \frac{x^x-1}{\ln x} = 1$
21. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\operatorname{cotg} 2x} = -1$
22. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right) = \frac{1}{2}$
23. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) = 0$
24. $\lim_{x\to 1} \frac{x^{10}-10x+9}{(x-1)^2} = 45$
25. $\lim_{x\to 1} \frac{x^{50}-50x+49}{x^{100}-100x+99} = \frac{49}{198}$
26. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = -\frac{1}{3}$
27. $\lim_{x\to -1} \frac{2x^4+3x^3-4x^2-9x-4}{3x^4+5x^3+3x^2+3x+2} = -\frac{1}{6}$
28. $\lim_{x\to 0} \frac{(a+x)^x-a^x}{x^2} = \frac{1}{a}$, $a>0$
29. $\lim_{x\to 1} \frac{x^{20}-2x+1}{x^{30}-2x+1} = \frac{9}{14}$
30. $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{2}{\pi}\cdot\operatorname{arctg} x\right)^x = e^{-\frac{2}{\pi}}$

II.

1. $\mathrm{d}f(2) = -11x+22$
2. $\mathrm{d}f(1) = 4x-4$
3. $\mathrm{d}f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$
4. $\mathrm{d}f(0) = e.x$
5. $\mathrm{d}f\left(\frac{\pi}{4}\right) = x-\frac{\pi}{4}$
6. $\mathrm{d}f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-1)$

7. $\mathrm{d}f(2) = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$

8. $\mathrm{d}f(1) = x - 1$

9. $\mathrm{d}f(3) = \frac{1}{10}(x-3)$

10. $\mathrm{d}f\left(\frac{1}{\ln 10}\right) = x - \frac{1}{\ln 10}$

III.

1. $\mathrm{d}f(x) = e^{x_0}(x_0+1)(x-x_0)$
2. $\mathrm{d}f(x) = \frac{-3}{\sin^2 3x_0}(x-x_0)\,,\ x_0 \neq \frac{k\pi}{3}$
3. $\mathrm{d}f(x) = -\frac{1}{x_0^2}(x-x_0)\,,\ x_0 \neq 0$
4. $\mathrm{d}f(x) = x_0 \sin x_0 (x-x_0)$
5. $\mathrm{d}f(x) = \frac{(x-x_0)}{(1-x_0^2)\sqrt{1-x_0^2}}\,,\ |x_0| < 1$
6. $\mathrm{d}f(x) = 2\sqrt{64-x_0^2}(x-x_0)\,,\ |x_0| \leq 8$
7. $\mathrm{d}f(x) = \frac{x_0\cos x_0 - \sin x_0}{x_0^2}(x-x_0)\,,\ x_0 \neq 0$
8. $\mathrm{d}f(x) = \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{e^{x_0}}\right)(x-x_0)\,,\ x_0 \neq 0$
9. $\mathrm{d}f(x) = \frac{-e^{x_0}}{\sqrt{1-e^{2x_0}}}(x-x_0)\,,\ x_0 \neq 0$
10. $\mathrm{d}f(x) = \frac{1+2\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0+\sqrt{x_0}}}{2\sqrt{x_0}\sqrt{x_0+\sqrt{x_0}}}(x-x_0)\,,\ x_0 > 0$

IV.

1. $f(x) = \sqrt[3]{x}\,,\ x_0 = 1$
   $\sqrt[3]{1{,}02} \doteq 1,00\overline{66}$
2. $f(x) = \sin x\,,\ x_0 = \frac{\pi}{6}$
   $\sin 29^\circ \doteq 0{,}4849$
3. $f(x) = \cos x\,,\ x_0 = \frac{5}{6}\pi$
   $\cos 151^\circ \doteq -0{,}8748$
4. $f(x) = \log x\,,\ x_0 = 10$
   $\log 11 \doteq 1{,}0434$
5. $f(x) = \operatorname{arctg} x\,,\ x_0 = 1$
   $\operatorname{arctg} 1{,}05 \doteq 0{,}258\pi \doteq 46{,}44^\circ$
6. $f(x) = \sqrt[3]{x}\,,\ x_0 = 64$
   $\sqrt[3]{65} \doteq 4{,}0208$
7. $f(x) = \operatorname{tg} x\,,\ x_0 = \frac{\pi}{4}$
   $\operatorname{tg} 44^\circ 50' \doteq 0{,}9942$
8. $f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\,,\ x_0 = 0\,,\ x = 0{,}15$
   $\sqrt{\frac{1{,}85}{2{,}15}} \doteq 0{,}925$
9. $f(x) = \ln \operatorname{tg} x\,,\ x_0 = \frac{\pi}{4}$
   $\ln \operatorname{tg} 47^\circ 15' \doteq 0{,}0785$
10. $f(x) = \sqrt[10]{x}\,,\ x_0 = 1024$
    $\sqrt[10]{1000} \doteq 1{,}9953$

V.

1. $T_n(f,0) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$
2. $T_n(f,0) = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$
3. $T_n(f,0) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$
4. $T_n(f,0) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$

5. $T_n(f,0) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + ... + (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n} + ...$

6. $T_n(f,0) = 1 - x\ln 2 + \frac{x^2 \ln^2 2}{2!} - ... + (-1)^n \frac{x^n \ln^n 2}{n!} + ...$

7. $T_5(f,0) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$

8. $T_n(f,0) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - ... - \frac{x^n}{n} + ...$

9. $T_n(f,0) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + ...\right)$

10. $T_n(f,0) = e^2 + \frac{e^2 x}{2} + \frac{e^2 x^2}{2^2 2!} ... + \frac{e^2 x^n}{2^n n!} + ...$

11. $T_5(f,0) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5$

12. $T_5(f,0) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5$

13. $T_3(f,0) = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{2}$

14. $T_4(f,0) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}$

VI.

1. $f(x) = \sqrt[10]{x}\,,\ x_0 = 1024\,,\ n = 1\,,\ \sqrt[10]{1010} \doteq 1{,}9973$

2. $f(x) = \sqrt{x}\,,\ x_0 = 4\,,\ n = 2\,,\ \sqrt{\pi} \doteq 1{,}774$

3. $f(x) = 1{,}1^x\,,\ x_0 = 1\,,\ n = 2\,,\ (1{,}1)^{1{,}2} \doteq 1{,}12116$

4. $f(x) = \sin x\,,\ x_0 = \frac{\pi}{2}\,,\ n = 3\,,\ \sin 85^\circ \doteq 0{,}996192$

5. $f(x) = \sqrt[4]{x}\,,\ x_0 = 7^4 = 2401\,,\ n = 2\,,\ \sqrt[4]{2400} \doteq 6{,}999271023$

6. $f(x) = \operatorname{arctg} x\,,\ x_0 = 1\,,\ n = 2\,,\ \operatorname{arctg} 1{,}07 \doteq 0{,}81917$

7. $f(x) = \cos x\,,\ x_0 = 0\,,\ n = 3\,,\ \cos 5^\circ \doteq 0{,}996192$

8. $f(x) = \sin x\,,\ x_0 = \frac{\pi}{4}\,,\ n = 3\,,\ \sin 49^\circ \doteq 0{,}754749$

9. $f(x) = \sqrt[3]{x}\,,\ x_0 = 5^3 = 125\,,\ n = 2\,,\ \sqrt[3]{121} \doteq 4{,}94609$

10. $f(x) = \ln x\,,\ x_0 = e\,,\ n = 3\,,\ \ln 2 \doteq 0{,}695$

11. $f(x) = \sqrt[5]{x}\,,\ x_0 = 1\,,\ n = 3\,,\ \sqrt[5]{1{,}5} \doteq 1{,}086$

12. $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$, $n = 6$, $e \doteq 2{,}718$

13. $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $x_0 = 3^4 = 81$, $n = 3$, $\sqrt[4]{121} \doteq 3{,}3215$

14. $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$, $n = 4$, $\ln 1{,}3 \doteq 0{,}2619$

15. $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $x_0 = 3^4 = 81$, $n = 2$, $\sqrt[4]{83} \doteq 3{,}018347$

16. $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$, $n = 2$, $\sin 1^\circ \doteq 0{,}017453$

17. $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$, $n = 3$, $\cos 9^\circ \doteq 0{,}98766$

18. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 2{,}25^2 = 5{,}0625$, $n = 3$, $\sqrt{5} \doteq 2{,}236067$

19. $f(x) = \log x$, $x_0 = 10$, $n = 3$, $\log 11 \doteq 1{,}0414$

20. $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$, $n = 2$, $\operatorname{arctg} 0{,}8 \doteq 0{,}6753$

21. $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$, $n = 5$, $\sqrt[3]{e} \doteq 1{,}39561$

22. $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$, $n = 3$, $\cos 72^\circ \doteq 0{,}30898 \doteq 0{,}3090$

23. $f(x) = x^x$, $x_0 = 1$, $n = 2$, $0{,}98^{0{,}98} \doteq 0{,}9804$

24. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 121$, $n = 2$, $\sqrt{127} \doteq 11{,}26935$

25. $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $n = 3$, $\sin 92^\circ \doteq 0{,}999391$

26. $f(x) = \sqrt[5]{x}$, $x_0 = 3^5 = 243$, $n = 2$, $\sqrt[5]{250} \doteq 3{,}017084$

27. $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$, $n = 2$, $\operatorname{arctg} 1{,}1 \doteq 0{,}83289$

28. $f(x) = 2^x$, $x_0 = 0$, $n = 3$, $2^{-0{,}12} \doteq 0{,}920185$

11

Monotónnosť, extrémy, konvexnosť a konkávnosť funkcie

Na tomto cvičení si ukážeme použitie derivácií pri vyšetrovaní priebehu funkcie. Derivácia funkcie sa využíva pri zisťovaní intervalov monotónnosti funkcie, pri hľadaní lokálnych, aj globálnych, extrémov a pri zisťovaní intervalov, na ktorých je funkcia konvexná, resp. konkávna.

Intervaly monotónnosti funkcie

Intervaly monotónnosti funkcie f sú intervaly, na ktorých je táto funkcia *rastúca*, *neklesajúca*, *nerastúca*, alebo *klesajúca*. Formálne sa to definuje takto: Nech $(a,b) \in D(f)$. Potom hovoríme, že funkcia f je na intervale (a,b):

- *rastúca* ak pre $\forall x_1, x_2 \in (a,b)\,, x_1 < x_2$ platí: $f(x_1) < f(x_2)\,,$
- *neklesajúca* ak pre $\forall x_1, x_2 \in (a,b)\,, x_1 < x_2$ platí: $f(x_1) \leq f(x_2)\,,$
- *nerastúca* ak pre $\forall x_1, x_2 \in (a,b)\,, x_1 < x_2$ platí: $f(x_1) \geq f(x_2)\,,$
- *klesajúca* ak pre $\forall x_1, x_2 \in (a,b)\,, x_1 < x_2$ platí: $f(x_1) > f(x_2)\,.$

Ak funkcia len klesá alebo rastie, hovoríme že je *rýdzomonotónna*. To, či funkcia f na intervale $(a,b) \in D(f)$ rastie alebo klesá zisťujeme pomocou jej prvej derivácie. Platí:

- Ak pre $\forall x \in (a,b)$ platí $f'(x) > 0\,,$ tak funkcia f na intervale (a,b) rastie.
- Ak pre $\forall x \in (a,b)$ platí $f'(x) < 0\,,$ tak funkcia f na intervale (a,b) klesá.

Body $D(f)$, v ktorých je prvá derivácie funkcie nulová, sa nazývajú *stacionárne body* a v týchto bodoch funkcia môže (ale nemusí) mať extrém.

Extrémy funkcie

Extrémy funkcie f sú jej minimá a maximá a tieto môžu byť buď lokálne, alebo globálne. Lokálne extrémy funkcie sú extrémy len v okolí nejakého bodu. Globálne extrémy funkcie sú extrémy na celom $D(f)$.
Funkcia môže mať extrémy len **v stacionárnych bodoch**, v takých bodoch $D(f)$, v ktorých **nemá deriváciu**, alebo pokiaľ jej definičný obor pozostáva z intervalov, tak **v krajných bodoch týchto intervalov**.
Na určovanie toho, či funkcia má v niektorom bode extrém a prípadne aký, sa používajú druhé, prípadne vyššie, derivácie funkcie (viď prednášky). Toto je ale zbytočný a príliš komplikovaný postup! Jednoduchšie je hľadať lokálne extrémy pomocou intervalov monotónnosti funkcie:

1. Nájdeme všetky intervaly, na ktorých je funkcia rýdzomonotónna.

2. Ak na intervale (a, x_0) funkcia rastie a na intervale (x_0, b) klesá, tak v bode x_0 má maximum.

3. Ak na intervale (a, x_0) funkcia klesá a na intervale (x_0, b) rastie, tak v bode x_0 má minimum.

I. Nájdite definičný obor, intervaly monotónnosti a všetky lokálne extrémy funkcie f :

1. $f(x) = x^3 - 12x + 16$
2. $f(x) = x^3 - 3x$
3. $f(x) = (x^2 - 1)^3$
4. $f(x) = 2x^3 + 16$
5. $f(x) = x^5 - 15x^3 + 3$
6. $f(x) = x^3 - x$
7. $f(x) = \frac{4}{x} + \frac{1}{1-x}$
8. $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$
9. $f(x) = -x^4 - 2x^2 + 3$
10. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 12$
11. $f(x) = \operatorname{cotg} x$
12. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2$
13. $f(x) = x^{10}(1 - x)^{90}$
14. $f(x) = x^3 - 9x$
15. $f(x) = x^5 - 4x^3 + 4x$
16. $f(x) = x^3 - 12x - 6$
17. $f(x) = x^3 - 3x + 2$
18. $f(x) = \cos x^2$
19. $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+1}$
20. $f(x) = x - \frac{1}{x}$
21. $f(x) = 2x^2 e^{-x}$
22. $f(x) = \sin x + \cos x$

23. $f(x) = \frac{x^3}{3(x+1)^2}$

24. $f(x) = \frac{(x+3)^3}{(x+1)^2}$

25. $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$

26. $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$

27. $f(x) = \frac{5}{2x+6}$

28. $f(x) = \frac{2}{3x-5}$

29. $f(x) = \cos 2x$

30. $f(x) = \sqrt{1-2x}$

31. $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$

32. $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$

33. $f(x) = \sqrt{9+4x^2}$

34. $f(x) = x - 2\ln x$

35. $f(x) = x \ln x$

36. $f(x) = 2x + 3\ln x$

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

Konvexnosť a konkávnosť funkcie f sa nejjednoduchšie definuje ako geometrická vlastnosť grafu tejto funkcie. Pokiaľ je na intervale $(a,b) \in D(f)$ graf funkcie f „vypuklý smerom nadol“, tak je táto funkcia na intervale (a,b) *konvexná*. Ak je jej graf „vypuklý smerom nahor“, tak je táto funkcia na intervale (a,b) *konkávna*. Formálne to definujeme takto: Nech $(a,b) \in D(f)$.

Potom hovoríme, že funkcia f je na intervale (a,b):

- *konvexná* ak pre $\forall x_1, x_2, x_3 \in (a,b)\,, x_1 < x_2 < x_3$ leží bod $[x_2, f(x_2)]$ pod alebo na priamke spájajúcej body $[x_1, f(x_1)]$ a $[x_3, f(x_3)]$,
- *konkávna* ak pre $\forall x_1, x_2, x_3 \in (a,b)\,, x_1 < x_2 < x_3$ leží bod $[x_2, f(x_2)]$ nad alebo na priamke spájajúcej body $[x_1, f(x_1)]$ a $[x_3, f(x_3)]$,

Pokiaľ je funkcia f na intervale $(a,b) \in D(f)$ spojitá a má tam druhú deriváciu, tak to či je funkcia f na intervale (a,b) konvexná alebo konkávna, zisťujeme pomocou jej druhej derivácie. Platí:

- Ak pre $\forall x \in (a,b)$ platí $f''(x) > 0$, tak funkcia f je na intervale (a,b) konvexná.
- Ak pre $\forall x \in (a,b)$ platí $f''(x) < 0$, tak funkcia f je na intervale (a,b) konkávna.

Body $D(f)$, v ktorých sa funkcia mení z konvexnej na konkávnu, alebo naopak, sa nazývajú *inflexné body* funkcie.

II. Nájdite inflexné body a intervaly, na ktorých je funkcia konvexná alebo konkávna:

1. $f(x) = e^{-x^2}$
2. $f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$
3. $f(x) = x + \sqrt[3]{x^5}$
4. $f(x) = x^5 - 3x^3 + 3$
5. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$
6. $f(x) = x + \sin x$
7. $f(x) = x \ln x$
8. $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 5x + 2$
9. $f(x) = \sin x$
10. $f(x) = \cos x$
11. $f(x) = e^{-x^2} + 2x$
12. $f(x) = x^4 + 8x^3 + 6x^2 - \pi x$
13. $f(x) = x^3 - 3x$
14. $f(x) = |x^2 + x - 20|$
15. $f(x) = \frac{e^x}{x}$
16. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$
17. $f(x) = \frac{2x^2}{3x+4}$
18. $f(x) = \ln \sqrt{1 + x^2}$
19. $f(x) = \sqrt[5]{x^4}$
20. $f(x) = -2 + 3x - x^2$
21. $f(x) = |6 - x - x^2|$
22. $f(x) = |\ln 5x|$
23. $f(x) = \ln |3x|$
24. $f(x) = 3^{-x}$
25. $f(x) = 5x^2 + 20x + 7$
26. $f(x) = x(1 - x)^2$
27. $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$
28. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$
29. $f(x) = 3 - \sqrt[5]{(x + 2)^7}$
30. $f(x) = x - \cos x$
31. $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$
32. $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 4$
33. $f(x) = 2 - |x^2 - 2|$
34. $f(x) = x + \frac{2x}{1-x^2}$
35. $f(x) = 1 - \ln(x^2 - 9)$
36. $f(x) = x - \frac{1}{x^2}$

III. Vyriešte slovné úlohy:

1. Daný je obdĺžnik s obvodom 20 cm. Aké musí mať tento obdĺžnik dĺžky strán, aby jeho plocha bola maximálna?

2. Aké rozmery musí mať hranol s objemom $27\,\text{cm}^3$, aby jeho povrch bol minimálny?

3. Nájdite rozmery valca s maximálnym objemom, ktorý sa dá vpísať do gule s polomerom R.

4. Spomedzi všetkých obdĺžnikov s plochou P nájdite ten, ktorý má najmenší obvod.

5. Akú maximálnu plochu môže mať obdĺžnik vpísaný do kružnice s polomerom R?

6. Ktorý bod paraboly $y = x^2$ je najbližšie ku bodu $A = \left[2, \frac{1}{2}\right]$?

7. Na hyperbole $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ nájdite bod, ktorý je najbližšie ku bodu $A = [3, 0]$.

8. Akú najväčšiu plochu môže mať obdĺžnik, ktorého dva vrcholy ležia na kladných poloosiach o_x^+ a o_y^+, tretí vrchol leží v bode $[0, 0]$ a štvrtý vrchol na parabole $y = 3 - x^2$?

9. Prierez tunelom má tvar obdĺžnika s polkruhom na vrchnej strane. Zistite pri akom polomere tohto polkruhu, bude mať prierez tunelom najväčšiu plochu, ak jeho obvod je o.

10. Aký najväčší objem môže mať valec s povrchom P ?

11. cvičenie – Výsledky

Poznámka: Vo všetkých výsledkoch tejto a aj nasledujúcej kapitoly uvádzame intervaly monotónnosti, konvexnosti a konkávnosti ako otvorené. Je to z toho dôvodu, že v krajných bodoch týchto intervalov funkcia buď nie je definovaná, alebo má prvú alebo druhú deriváciu nulovú. Pokiaľ by ste vo výsledku uviedli tieto intervaly ako uzavreté a príslušné body by boli z definičného oboru, tak sa to nepovažuje za chybu.

I.

1. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
   Funkcia klesá: $x \in (-2, 2)$
   Funkcia rastie: $x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$
   Lokálne minimá: $x = 2$
   Lokálne maximá: $x = -2$

2. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
   Funkcia klesá: $x \in (-1, 1)$
   Funkcia rastie: $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
   Lokálne minimá: $x = 1$
   Lokálne maximá: $x = -1$

3. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
   Funkcia klesá: $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
   Funkcia rastie: $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$
   Lokálne minimá: $x = 0$
   Lokálne maximá: nemá

4. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
   Funkcia rastie: $x \in D(f)$
   Lokálne extrémy: nemá

5. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
   Funkcia klesá: $x \in (-3, 0) \cup (0, 3)$
   Funkcia rastie: $x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$
   Lokálne minimá: $x = 3$
   Lokálne maximá: $x = -3$

6. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
   Funkcia klesá: $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Funkcia rastie: $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$
Lokálne minimá: $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$
Lokálne maximá: $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

7. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$
   Funkcia klesá: $x \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{2}{3}\right) \cup (2, \infty)$
   Funkcia rastie: $x \in \left(\frac{2}{3}, 1\right) \cup (1, 2)$
   Lokálne minimá: $x = \frac{2}{3}$
   Lokálne maximá: $x = 2$

8. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$
   Funkcia rastie: $x \in D(f)$
   Lokálne extrémy: nemá

9. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
   Funkcia klesá: $x \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$
   Funkcia rastie: $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$
   Lokálne minimá: $x = 0$
   Lokálne maximá: $x_1 = -1\,,\ x_2 = 1$

10. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
    Funkcia klesá: $x \in (-2, 1)$
    Funkcia rastie: $x \in (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$
    Lokálne minimá: $x = 1$
    Lokálne maximá: $x = -2$

11. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$
    Funkcia klesá: $x \in D(f)$
    Lokálne extrémy: nemá

12. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
    Funkcia klesá: $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 3)$
    Funkcia rastie: $x \in (3, \infty)$
    Lokálne minimá: $x = 3$

13. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
    Funkcia klesá: $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{10}, 1\right)$
    Funkcia rastie: $x \in \left(0, \frac{1}{10}\right) \cup (1, \infty)$
    Lokálne minimá: $x_1 = 0\,,\ x_2 = 1$
    Lokálne maximá: $x = \frac{1}{10}$

14. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
    Funkcia klesá: $x \in \left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$
    Funkcia rastie: $x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, \infty\right)$
    Lokálne minimá: $x = \sqrt{3}$
    Lokálne maximá: $x = -\sqrt{3}$

15. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
    Funkcia klesá: $x \in \left(-\sqrt{2}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right) \cup \left(\frac{2}{\sqrt{10}}, \sqrt{2}\right)$
    Funkcia rastie: $x \in \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(-\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right) \cup \left(\sqrt{2}, \infty\right)$
    Lokálne minimá: $x_1 = -\frac{2}{\sqrt{10}}\,,\ x_2 = \sqrt{2}$
    Lokálne maximá: $x_3 = -\sqrt{2}\,,\ x_4 = \frac{2}{\sqrt{10}}$

16. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
    Funkcia klesá: $x \in (-2, 2)$
    Funkcia rastie: $x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$
    Lokálne minimá: $x = 2$
    Lokálne maximá: $x = -2$

17. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
    Funkcia klesá: $x \in (-1, 1)$
    Funkcia rastie: $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
    Lokálne minimá: $x = 1$
    Lokálne maximá: $x = -1$

18. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
    Funkcia klesá: $x \in \left(-\sqrt{2k\pi}, -\sqrt{(2k+1)\pi}\right) \cup \left(\sqrt{2k\pi}, \sqrt{(2k+1)\pi}\right)$
    Funkcia rastie: $x \in \left(-\sqrt{(2k+1)\pi}, -\sqrt{2k\pi}\right) \cup \left(\sqrt{(2k+1)\pi}, \sqrt{2k\pi}\right)$
    Lokálne minimá: $x = \sqrt{(2k+1)\pi}$
    Lokálne maximá: $x = \sqrt{2k\pi}$

19. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
    Funkcia klesá: $x \in \left(-\infty, \frac{-3-\sqrt{10}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3+\sqrt{10}}{2}, \infty\right)$
    Funkcia rastie: $x \in \left(\frac{-3-\sqrt{10}}{2}, \frac{-3+\sqrt{10}}{2}\right)$
    Lokálne minimá: $x = \frac{-3-\sqrt{10}}{2}$
    Lokálne maximá: $x = \frac{-3+\sqrt{10}}{2}$

20. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
    Funkcia rastie: $x \in D(f)$
    Lokálne extrémy: nemá

21. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
    Funkcia klesá: $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$
    Funkcia rastie: $x \in (0, 2)$
    Lokálne minimá: $x = 0$
    Lokálne maximá: $x = 2$

22. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
    Funkcia klesá: $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) + 2k\pi$
    Funkcia rastie: $x \in \left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi$
    Lokálne minimá: $x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$
    Lokálne maximá: $x = \frac{1}{4}\pi + 2k\pi$

23. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
    Funkcia klesá: $x \in (-3, -1)$
    Funkcia rastie: $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, 0) \cup (0, \infty)$
    Lokálne minimá: nemá
    Lokálne maximá: $x = -3$

24. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
    Funkcia klesá: $x \in (-1, 3)$
    Funkcia rastie: $x \in (-\infty, -3) \cup (-3, -1) \cup (3, \infty)$
    Lokálne minimá: $x = 3$
    Lokálne maximá: nemá

25. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
    Funkcia klesá: $x \in (-\infty, 1) \cup \left(1, \frac{4}{3}\right) \cup (2, \infty)$
    Funkcia rastie: $x \in \left(\frac{4}{3}, 2\right)$
    Lokálne minimá: $x = \frac{4}{3}$
    Lokálne maximá: $x = 2$

26. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
    Funkcia klesá: $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$
    Funkcia rastie: $x \in \left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$
    Lokálne minimá: $x = -\frac{1}{3}$
    Lokálne maximá: nemá

27. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$
    Funkcia klesá: $x \in D(f)$
    Lokálne extrémy: nemá

28. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{3}\right\}$
    Funkcia klesá: $x \in D(f)$
    Lokálne extrémy: nemá

29. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
    Funkcia klesá: $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) + k\pi$
    Funkcia rastie: $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) + k\pi$
    Lokálne minimá: $x \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$
    Lokálne maximá: $x \in \{k\pi\}$

30. Definičný obor: $D(f) = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right\rangle$
    Funkcia klesá: $x \in D(f)$
    Lokálne minimá: $x = \frac{1}{2}$
    Lokálne maximá: nemá

31. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
    Funkcia rastie: $x \in D(f)$
    Lokálne extrémy: nemá

32. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
    Funkcia klesá: $x \in D(f)$
    Lokálne extrémy: nemá

33. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
    Funkcia klesá: $x \in (-\infty, 0)$
    Funkcia rastie: $x \in (0, \infty)$
    Lokálne minimá: $x = 0$
    Lokálne maximá: nemá

34. Definičný obor: $D(f) = (0, \infty)$
    Funkcia klesá: $x \in (0, 2)$
    Funkcia rastie: $x \in (2, \infty)$
    Lokálne minimá: $x = 2$
    Lokálne maximá: nemá

35. Definičný obor: $D(f) = (0, \infty)$
    Funkcia klesá: $x \in (0, e)$
    Funkcia rastie: $x \in (e, \infty)$
    Lokálne minimá: $x = e$
    Lokálne maximá: nemá

36. Definičný obor: $D(f) = (0, \infty)$
    Funkcia rastie: $x \in D(f)$
    Lokálne extrémy: nemá

II.

1. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
   Funkcia je konkávna: $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
   Funkcia je konvexná: $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$
   Inflexné body: $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

2. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
   Funkcia je konkávna: $x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \cup \left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$
   Funkcia je konvexná: $x \in \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right) \cup \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty\right)$
   Inflexné body: $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}}\,,\ x_2 = 0\,,\ x_3 = \sqrt{\frac{3}{2}}$

3. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
   Funkcia je konkávna: $x \in (0, \infty)$
   Funkcia je konvexná: $x \in (-\infty, 0)$
   Inflexné body: $x = 0$

4. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
   Funkcia je konkávna: $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \cup \left(0, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$
   Funkcia je konvexná: $x \in \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, 0\right) \cup \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \infty\right)$
   Inflexné body: $x_1 = -\frac{3}{\sqrt{10}}\,,\ x_2 = 0\,,\ x_3 = \frac{3}{\sqrt{10}}$

5. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
   Funkcia je konkávna: $x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$
   Funkcia je konvexná: $x \in \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$
   Inflexné body: $x = \frac{3}{2}$

6. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
   Funkcia je konkávna: $x \in (\pi, 2\pi) + 2k\pi$
   Funkcia je konvexná: $x \in (0, \pi) + 2k\pi$
   Inflexné body: $x \in \{k\pi\}$

7. Definičný obor: $D(f) = (0, \infty)$
   Funkcia je konvexná: $x \in D(f)$
   Inflexné body: nemá

8. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
   Funkcia je konkávna: $x \in (-2, 1)$
   Funkcia je konvexná: $x \in (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$
   Inflexné body: $x_1 = -2\,,\ x_2 = 1$

9. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
   Funkcia je konkávna: $x \in (0, \pi) + 2k\pi$
   Funkcia je konvexná: $x \in (\pi, 2\pi) + 2k\pi$
   Inflexné body: $x \in \{k\pi\}$

10. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
    Funkcia je konkávna: $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi$
    Funkcia je konvexná: $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) + 2k\pi$
    Inflexné body: $x \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$

11. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
    Funkcia je konkávna: $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
    Funkcia je konvexná: $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$
    Inflexné body: $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

12. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
    Funkcia je konkávna: $x \in \left(-2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}\right)$
    Funkcia je konvexná: $x \in \left(-\infty, -2 - \sqrt{3}\right) \cup \left(-2 + \sqrt{3}, \infty\right)$
    Inflexné body: $x = -2 \pm \sqrt{3}$

13. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
    Funkcia je konkávna: $x \in (-\infty, 0)$
    Funkcia je konvexná: $x \in (0, \infty)$
    Inflexné body: $x = 0$

14. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
    Funkcia je konkávna: $x \in (-5, 4)$
    Funkcia je konvexná: $x \in (-\infty, -5) \cup (4, \infty)$
    Inflexné body: $x_1 = -5\,,\ x_2 = 4$

15. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
    Funkcia je konkávna: $x \in (-\infty, 0)$
    Funkcia je konvexná: $x \in (0, \infty)$
    Inflexné body: nemá

16. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$
    Funkcia je konkávna: $x \in (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$
    Funkcia je konvexná: $x \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, \infty)$
    Inflexné body: $x = -\frac{1}{2}$
17. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{4}{3}\right\}$
    Funkcia je konvexná: $x \in D(f)$
    Inflexné body: nemá
18. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
    Funkcia je konkávna: $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
    Funkcia je konvexná: $x \in (-1, 1)$
    Inflexné body: $x = \pm 1$
19. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
    Funkcia je konkávna: $x \in D(f)$
    Inflexné body: nemá
20. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
    Funkcia je konkávna: $x \in D(f)$
    Inflexné body: nemá
21. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
    Funkcia je konkávna: $x \in (-3, 2)$
    Funkcia je konvexná: $x \in (-\infty, -3) \cup (2, \infty)$
    Inflexné body: $x_1 = -3\,,\ x_2 = 2$
22. Definičný obor: $D(f) = (0, \infty)$
    Funkcia je konkávna: $x \in \left(\frac{1}{5}, \infty\right)$
    Funkcia je konvexná: $x \in \left(0, \frac{1}{5}\right)$
    Inflexné body: $x = \frac{1}{5}$
23. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
    Funkcia je konkávna: $x \in D(f)$
    Inflexné body: nemá
24. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
    Funkcia je konvexná: $x \in D(f)$
    Inflexné body: nemá
25. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
    Funkcia je konvexná: $x \in D(f)$
    Inflexné body: nemá

26. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
    Funkcia je konkávna: $x \in \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$
    Funkcia je konvexná: $x \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$
    Inflexné body: $x = \frac{2}{3}$

27. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
    Funkcia je konvexná: $x \in D(f)$
    Inflexné body: nemá

28. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
    Funkcia je konkávna: $x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right)$
    Funkcia je konvexná: $x \in \left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, \infty\right)$
    Inflexné body: $x_1 = -\sqrt{3}\,,\ x_2 = 0\,,\ x_3 = \sqrt{3}$

29. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
    Funkcia je konkávna: $x \in (-2, \infty)$
    Funkcia je konvexná: $x \in (-\infty, -2)$
    Inflexné body: $x = -2$

30. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
    Funkcia je konkávna: $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) + 2k\pi$
    Funkcia je konvexná: $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi$
    Inflexné body: $x \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$

31. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
    Funkcia je konkávna: $x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right)$
    Funkcia je konvexná: $x \in \left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, \infty\right)$
    Inflexné body: $x_1 = 0\,,\ x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$

32. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
    Funkcia je konkávna: $x \in (0, 1)$
    Funkcia je konvexná: $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$
    Inflexné body: $x_1 = 0\,,\ x_2 = 1$

33. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
    Funkcia je konkávna: $x \in \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, \infty\right)$
    Funkcia je konvexná: $x \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$
    Inflexné body: $x = \pm\sqrt{2}$

34. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$
Funkcia je konkávna: $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$
Funkcia je konvexná: $x \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$
Inflexné body: $x = 0$

35. Definičný obor: $D(f) = (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$
Funkcia je konvexná: $x \in D(f)$
Inflexné body: nemá

36. Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Funkcia je konkávna: $x \in D(f)$
Inflexné body: nemá

III.

1. $a = 5\,,\ b = 5$
2. $a = 3\,,\ h = 3$
3. $r = R.\sqrt{\frac{2}{3}}\,,\ h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$
4. $a = b = \sqrt{P}$
5. $P = 2R^2$
6. $X = [1, 1]$
7. $X_1 = [2, -1]\,,\ X_2 = [2, 1]$
8. $P = 2$
9. $r = \frac{o}{4+\pi}$
10. $V = \frac{P}{3}\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$

12

Vyšetrovanie priebehu funkcie

Na tomto cvičení si zhrnieme a zopakujeme veci, ktoré sme preberali na predchádzajúcich šiestich cvičeniach zaoberajúcich sa matematickou analýzou reálnej funkcie jednej premennej. Budeme vyšetrovať priebeh funkcie. Vyšetrovanie priebehu funkcie $f(x)$ zahŕňa:

1. Nájdenie definičného oboru $D(f)$.
2. Nájdenie nulových bodov funkcie f.
3. Nájdenie intervalov monotónnosti funkcie f.
4. Nájdenie lokálnych extrémov funkcie f.
5. Nájdenie intervalov, na ktorých je funkcia f konvexná, resp. konkávna.
6. Nájdenie asymptot bez smernice aj so smernicou ku grafu funkcie f.
7. Načrtnutie grafu funkcie f.

Niekedy sa explicitne požaduje aj určenie oboru hodnôt $H(f)$ a nájdenie inflexných bodov funkcie f. Oboje samozrejme musíme poznať ak chceme načrtnúť graf funkcie f, rovnako ako potrebujeme poznať aj hodnoty funkcie f v jej kritických bodoch ako sú extrémy, prienik s osou o_y a inflexné body.

I. Vyšetrite priebeh funkcie f a načrtnite jej graf:

1. $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$
2. $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$
3. $f(x) = x(x-1)^3$
4. $f(x) = x + \frac{2x}{x^2-1}$
5. $f(x) = \frac{2x^3}{x^2+1}$
6. $f(x) = e^{-x^2}$
7. $f(x) = x.e^{-\frac{x^2}{2}}$
8. $f(x) = x + e^{-x}$
9. $f(x) = x.\ln x$
10. $f(x) = \ln(4x - x^2 - 3)$
11. $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$
12. $f(x) = x - 2\,\mathrm{arctg}\, x$
13. $f(x) = x.\mathrm{arctg}\, x$
14. $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$
15. $f(x) = \frac{1}{4}\left(x^3 + 3x^2 - 9x + 5\right)$
16. $f(x) = \frac{x^3}{4(x-2)^2}$
17. $f(x) = x\sqrt[3]{(x+1)^2}$
18. $f(x) = \sqrt{\frac{x^3-2x^2}{x-3}}$
19. $f(x) = \frac{x^2-4}{x} \cdot e^{-\frac{5}{3x}}$
20. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$
21. $f(x) = (x+1)\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2$
22. $f(x) = e^x - x$
23. $f(x) = e^{1-x^2}$
24. $f(x) = \ln x - x + 1$
25. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
26. $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}}$
27. $f(x) = 1 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2}$
28. $f(x) = 32x^2\left(x^2-1\right)^3$
29. $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\sin 2x$
30. $f(x) = x^2 - 2\ln x$

12. cvičenie – Výsledky

Na tomto cvičení si zhrnieme a zopakujeme veci, ktoré sme preberali na predchádzajúcich šiestich cvičeniach zaoberajúcich sa matematickou analýzou reálnej funkcie jednej premennej. Budeme vyšetrovať priebeh funkcie. Vyšetrovanie priebehu funkcie $f(x)$ zahŕňa:

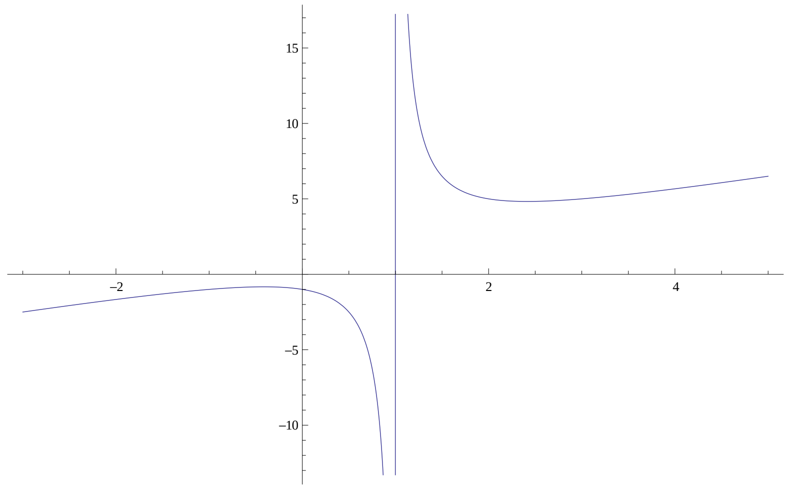
1. Nájdenie definičného oboru $D(f)$.
2. Nájdenie nulových bodov funkcie f.
3. Nájdenie intervalov monotónnosti funkcie f.
4. Nájdenie lokálnych extrémov funkcie f.
5. Nájdenie intervalov, na ktorých je funkcia f konvexná, resp. konkávna.
6. Nájdenie asymptot bez smernice aj so smernicou ku grafu funkcie f.
7. Načrtnutie grafu funkcie f.

Niekedy sa explicitne požaduje aj určenie oboru hodnôt $H(f)$ a nájdenie inflexných bodov funkcie f. Oboje samozrejme musíme poznať ak chceme načrtnúť graf funkcie f, rovnako ako potrebujeme poznať aj hodnoty funkcie f v jej kritických bodoch ako sú extrémy, prienik s osou o_y a inflexné body.

I. Vyšetrite priebeh funkcie f a načrtnite jej graf:

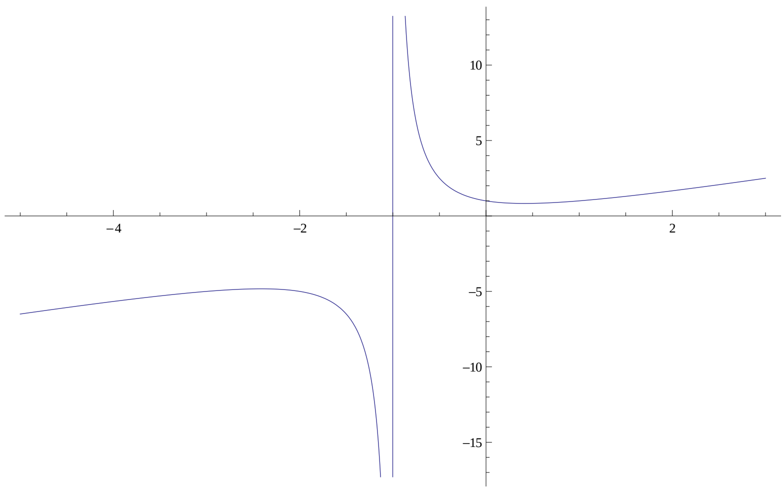
1. $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$

- Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- Nulové body funkcie: nemá.
- Intervaly monotónnosti:
  - prvá derivácia funkcie: $f'(x) = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$,
  - stacionárne body: $s_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$,
  - funkcia klesá na: $x \in \left(1-\sqrt{2}, 1\right) \cup \left(1, 1+\sqrt{2}\right)$,
  - funkcia rastie na: $x \in \left(-\infty, 1-\sqrt{2}\right) \cup \left(1+\sqrt{2}, \infty\right)$.
- Lokálne extrémy:
  - minimum: $x = 1+\sqrt{2}$
  - maximum: $x = 1-\sqrt{2}$
- Konvexnoxť, konkávnosť:
  - druhá derivácia funkcie: $f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}$,
  - nulové body 2. derivácie: nemá,
  - inflexné body funkcie: nemá,
  - funkcia je konkávna na: $x \in (-\infty, 1)$,
  - funkcia je konvexná na: $x \in (1, \infty)$.
- Asymptoty:
  - asymptota bez smernice: $x = 1$,
  - asymptota so smernicou: $y = x + 1$.
- Graf funkcie:



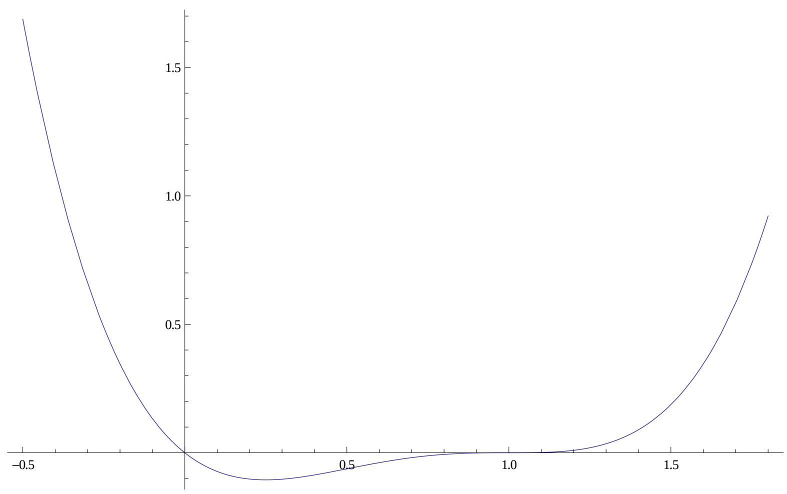
2. $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$

- Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- Nulové body funkcie: nemá.
- Intervaly monotónnosti:
  - prvá derivácia funkcie: $f'(x) = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$,
  - stacionárne body: $s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$,
  - funkcia klesá na: $x \in \left(-1-\sqrt{2}, -1\right) \cup \left(-1, -1+\sqrt{2}\right)$,
  - funkcia rastie na: $x \in \left(-\infty, -1-\sqrt{2}\right) \cup \left(-1+\sqrt{2}, \infty\right)$.
- Lokálne extrémy:
  - minimum: $x = -1 + \sqrt{2}$,
  - maximum: $x = -1 - \sqrt{2}$.
- Konvexnoxť, konkávnosť:
  - druhá derivácia funkcie: $f''(x) = \frac{4}{(x+1)^3}$,
  - nulové body 2. derivácie: nemá,
  - inflexné body funkcie: nemá,
  - funkcia je konkávna na: $x \in (-\infty, -1)$,
  - funkcia je konvexná na: $x \in (-1, \infty)$.
- Asymptoty:
  - asymptota bez smernice: $x = -1$,
  - asymptota so smernicou: $y = x - 1$.
- Graf funkcie:



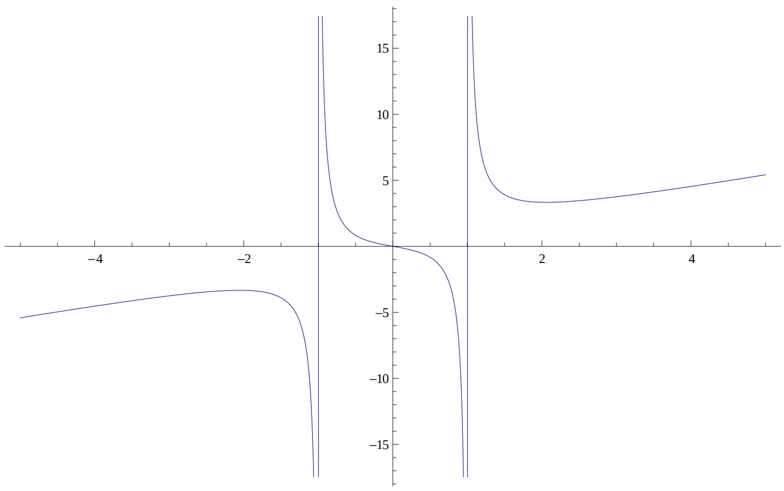
3. $f(x) = x(x-1)^3 = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$

- Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$.
- Nulové body funkcie: $n_1 = 0 \;\; n_{2,3,4} = 1$.
- Intervaly monotónnosti:
  - prvá derivácia funkcie: $f'(x) = (x-1)(4x^2 - 5x + 1)$,
  - stacionárne body: $s_{1,2} = 1$, $s_3 = \frac{1}{4}$.
  - funkcia klesá na: $x \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$,
  - funkcia rastie na: $x \in \left(\frac{1}{4}, 1\right) \cup (1, \infty)$.
- Lokálne extrémy:
  - minimum: $x = \frac{1}{4}$,
  - maximá: nemá
- Konvexnoxť, konkávnosť:
  - druhá derivácia funkcie: $f''(x) = 6(2x^2 - 3x + 1)$,
  - nulové body 2. derivácie: $d_1 = 1$, $d_2 = \frac{1}{2}$,
  - inflexné body funkcie: $i_1 = 1$, $i_2 = \frac{1}{2}$.
  - funkcia je konkávna na: $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$,
  - funkcia je konvexná na: $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (1, \infty)$.
- Asymptoty:
  - asymptoty bez smernice: nemá,
  - asymptoty so smernicou: nemá.
- Graf funkcie:



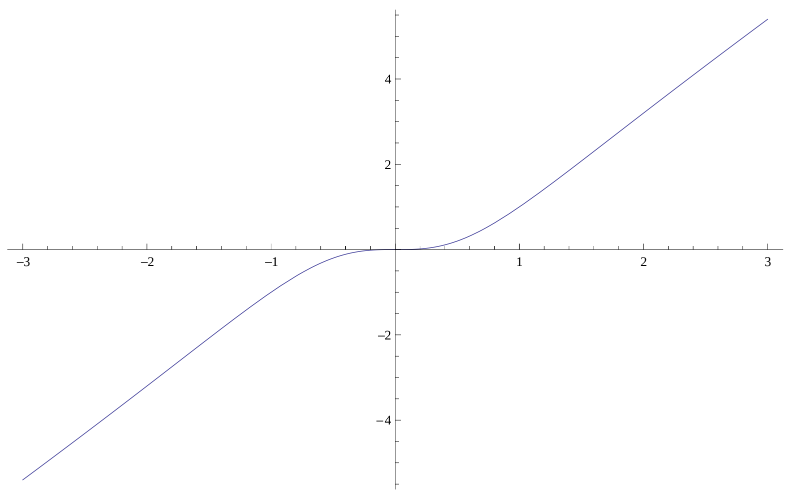
4. $f(x) = x + \frac{2x}{x^2-1}$

- Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.
- Nulové body funkcie: $n_1 = 0$.
- Intervaly monotónnosti:
  - prvá derivácia funkcie: $f'(x) = 1 - \frac{2x^2+2}{(x^2-1)^2}$,
  - stacionárne body: $s_{1,2} = \pm\sqrt{2+\sqrt{5}}$,
  - funkcia klesá na: $x \in \left(-\sqrt{2+\sqrt{5}}, -1\right) \cup (-1,1) \cup \left(1, \sqrt{2+\sqrt{5}}\right)$,
  - funkcia rastie na: $x \in \left(-\infty, -\sqrt{2+\sqrt{5}}\right) \cup \left(\sqrt{2+\sqrt{5}}, \infty\right)$.
- Lokálne extrémy:
  - minimum: $x = \sqrt{2+\sqrt{5}}$,
  - maximum: $x = -\sqrt{2+\sqrt{5}}$.
- Konvexnoxť, konkávnosť:
  - druhá derivácia funkcie: $f''(x) = \frac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$,
  - nulové body 2. derivácie: $d_1 = 0$,
  - inflexné body funkcie: $i_1 = 0$,
  - funkcia je konkávna na: $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$,
  - funkcia je konvexná na: $x \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$.
- Asymptoty:
  - asymptoty bez smernice: $x = -1$, $x = 1$,
  - asymptota so smernicou: $y = x$.
- Graf funkcie:



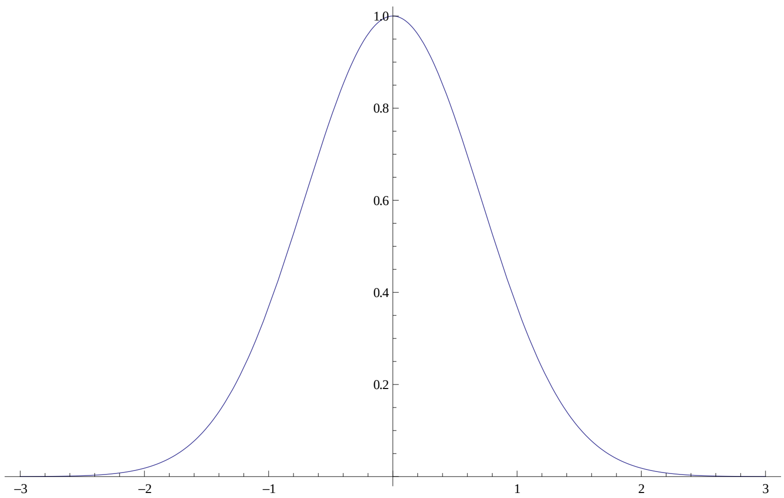
5. $f(x) = \frac{2x^3}{x^2+1}$

- Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$.
- Nulové body funkcie: $n_1 = 0$.
- Intervaly monotónnosti:
  - prvá derivácia funkcie: $f'(x) = \frac{2x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$,
  - stacionárne body: $s_1 = 0$,
  - funkcia klesá na: $\emptyset$,
  - funkcia rastie na: $x \in D(f)$.
- Lokálne extrémy:
  - minimá: nemá,
  - maximá: nemá.
- Konvexnoxť, konkávnosť:
  - druhá derivácia funkcie: $f''(x) = \frac{4x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$,
  - nulové body 2. derivácie: $d_1 = 0$, $d_{2,3} = \pm\sqrt{3}$.
  - inflexné body funkcie: $i_1 = 0$, $i_{2,3} = \pm\sqrt{3}$.
  - funkcia je konkávna na: $x \in \left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, \infty\right)$,
  - funkcia je konvexná na: $x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right)$.
- Asymptoty:
  - asymptoty bez smernice: nemá,
  - asymptota so smernicou: $y = 2x$.
- Graf funkcie:



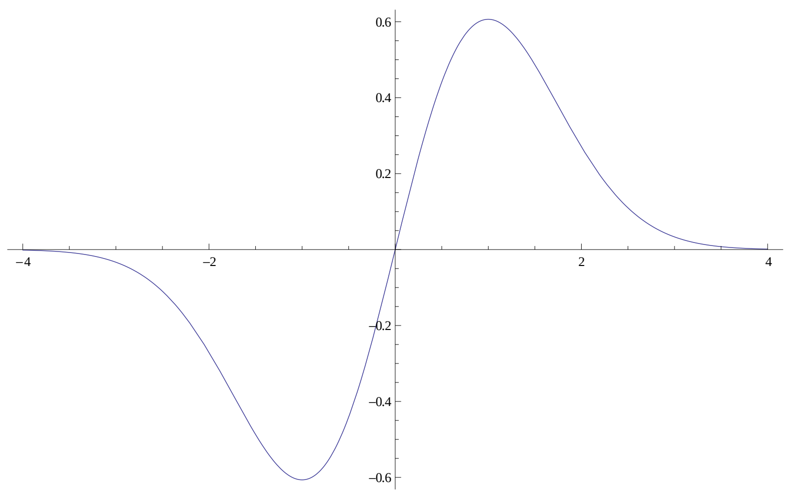
6. $f(x) = e^{-x^2}$

- Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$.
- Nulové body funkcie: nemá.
- Intervaly monotónnosti:
  - prvá derivácia funkcie: $f'(x) = -2xe^{-x^2}$,
  - stacionárne body: $s_1 = 0$,
  - funkcia klesá na: $x \in (0, \infty)$,
  - funkcia rastie na: $x \in (-\infty, 0)$.
- Lokálne extrémy:
  - minimá: nemá,
  - maximá: $x = 0$.
- Konvexnoxť, konkávnosť:
  - druhá derivácia funkcie: $f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$,
  - nulové body 2. derivácie: $d_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$,
  - inflexné body funkcie: $i_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$,
  - funkcia je konkávna na: $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,
  - funkcia je konvexná na: $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$.
- Asymptoty:
  - asymptoty bez smernice: nemá,
  - asymptota so smernicou: $y = 0$.
- Graf funkcie:



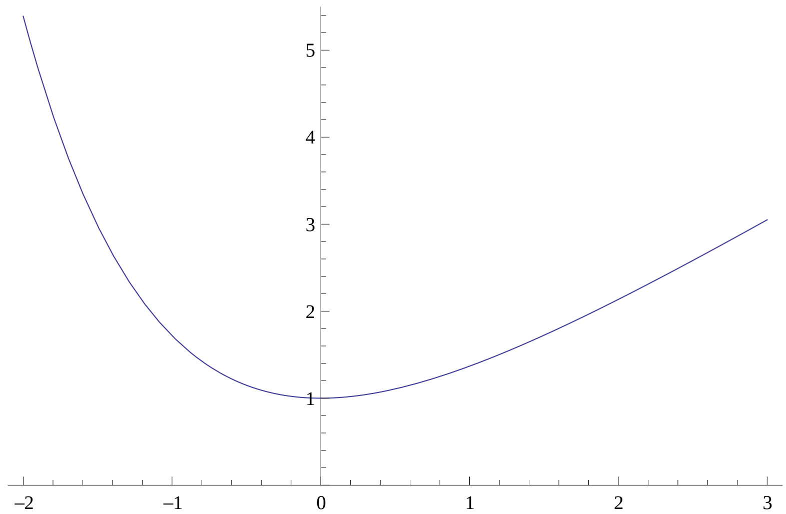
7. $f(x) = x.e^{-\frac{x^2}{2}}$

- Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$.
- Nulové body funkcie: $n_1 = 0$.
- Intervaly monotónnosti:
  - prvá derivácia funkcie: $f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}(1 - x^2)$,
  - stacionárne body: $s_{1,2} = \pm 1$,
  - funkcia klesá na: $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$,
  - funkcia rastie na: $x \in (-1, 1)$.
- Lokálne extrémy:
  - minimum: $x = -1$,
  - maximum: $x = 1$.
- Konvexnoxť, konkávnosť:
  - druhá derivácia funkcie: $f''(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}(x^2 - 3)$,
  - nulové body 2. derivácie: $d_1 = 0$, $d_{2,3} = \pm\sqrt{3}$.
  - inflexné body funkcie: $i_1 = 0$, $i_{2,3} = \pm\sqrt{3}$.
  - funkcia je konkávna na: $x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right)$,
  - funkcia je konvexná na: $x \in \left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, \infty\right)$.
- Asymptoty:
  - asymptoty bez smernice: nemá,
  - asymptota so smernicou: $y = 0$.
- Graf funkcie:



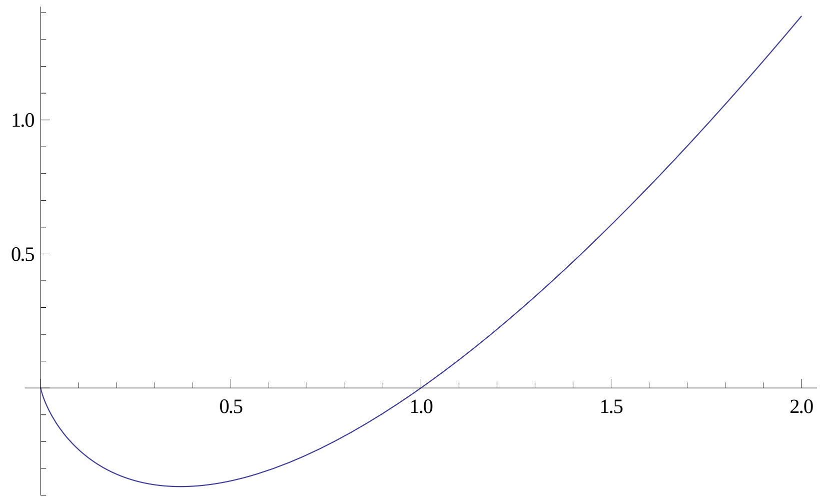
8. $f(x) = x + e^{-x}$

- Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$.
- Nulové body funkcie: nemá.
- Intervaly monotónnosti:
  - prvá derivácia funkcie: $f'(x) = 1 - e^{-x}$,
  - stacionárne body: $s_1 = 0$,
  - funkcia klesá na: $x \in (-\infty, 0)$,
  - funkcia rastie na: $x \in (0, \infty)$.
- Lokálne extrémy:
  - minimum: $x = 0$,
  - maximá: nemá.
- Konvexnoxť, konkávnosť:
  - druhá derivácia funkcie: $f''(x) = e^{-x}$,
  - nulové body 2. derivácie: nemá,
  - inflexné body funkcie: nemá,
  - funkcia je konkávna na: $\emptyset$,
  - funkcia je konvexná na: $x \in D(f)$.
- Asymptoty:
  - asymptoty bez smernice: nemá,
  - asymptoty so smernicou: $y = x$ pre $x \to \infty$.
    Pre $x \to -\infty$ ASS nemá.
- Graf funkcie:



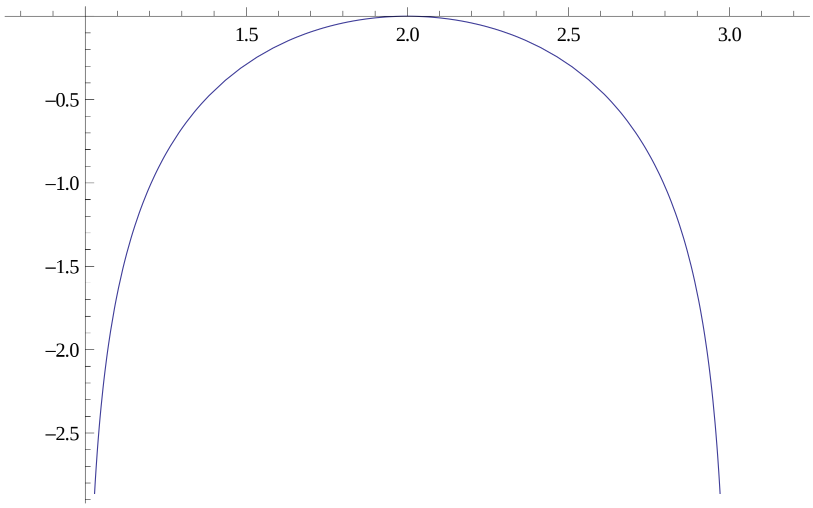
9. $f(x) = x . \ln x$

- Definičný obor: $D(f) = (0, \infty)$.
- Nulové body funkcie: $n_1 = 1$.
- Intervaly monotónnosti:
  - prvá derivácia funkcie: $f'(x) = \ln x + 1$,
  - stacionárne body: $s_1 = \frac{1}{e}$,
  - funkcia klesá na: $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$,
  - funkcia rastie na: $x \in \left(\frac{1}{e}, \infty\right)$.
- Lokálne extrémy:
  - minimá: $x = \frac{1}{e}$,
  - maximá: nemá
- Konvexnoxť, konkávnosť:
  - druhá derivácia funkcie: $f''(x) = \frac{1}{x}$,
  - nulové body 2. derivácie: nemá,
  - inflexné body funkcie: nemá,
  - funkcia je konkávna na: $\emptyset$,
  - funkcia je konvexná na: $x \in D(f)$.
- Asymptoty:
  - asymptoty bez smernice: nemá,
  - asymptoty so smernicou: nemá.
- Graf funkcie:



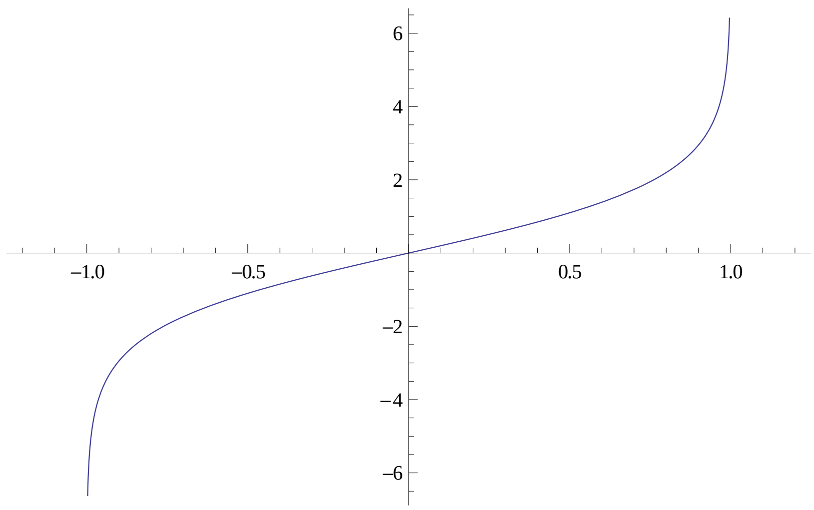
10. $f(x) = \ln(4x - x^2 - 3)$

- Definičný obor: $D(f) = (1, 3)$.
- Nulové body funkcie: $n_1 = 2$.
- Intervaly monotónnosti:
  - prvá derivácia funkcie: $f'(x) = \frac{4-2x}{4x-x^2-3}$,
  - stacionárne body: $s_1 = 2$,
  - funkcia klesá na: $x \in (2, 3)$,
  - funkcia rastie na: $x \in (1, 2)$.
- Lokálne extrémy:
  - minimá: nemá,
  - maximum: $x = 2$.
- Konvexnoxť, konkávnosť:
  - druhá derivácia funkcie: $f''(x) = \frac{-2x^2+8x-10}{(4x-x^2-3)^2}$,
  - nulové body 2. derivácie: nemá,
  - inflexné body funkcie: nemá,
  - funkcia je konkávna na: $x \in D(f)$,
  - funkcia je konvexná na: $\emptyset$.
- Asymptoty:
  - asymptoty bez smernice: $x = 1$, $x = 3$
  - asymptoty so smernicou: nemá.
- Graf funkcie:



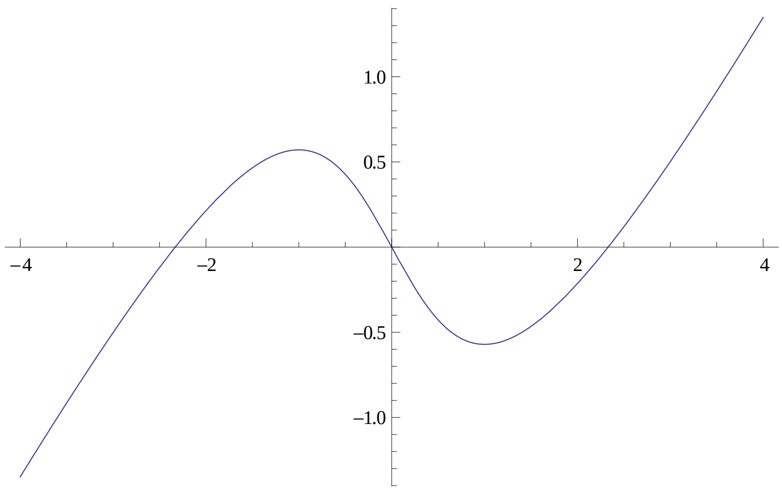
11. $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$

- Definičný obor: $D(f) = (-1, 1)$.
- Nulové body funkcie: $n_1 = 0$.
- Intervaly monotónnosti:
  - prvá derivácia funkcie: $f'(x) = \frac{2}{1-x^2}$,
  - stacionárne body: nemá,
  - funkcia klesá na: $\emptyset$,
  - funkcia rastie na: $x \in D(f)$.
- Lokálne extrémy:
  - minimá: nemá,
  - maximá: nemá.
- Konvexnoxť, konkávnosť:
  - druhá derivácia funkcie: $f''(x) = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$,
  - nulové body 2. derivácie: $d_1 = 0$,
  - inflexné body funkcie: $i_1 = 0$,
  - funkcia je konkávna na: $x \in (-1, 0)$,
  - funkcia je konvexná na: $x \in (0, 1)$.
- Asymptoty:
  - asymptoty bez smernice: $x = -1$, $x = 1$,
  - asymptoty so smernicou: nemá.
- Graf funkcie:



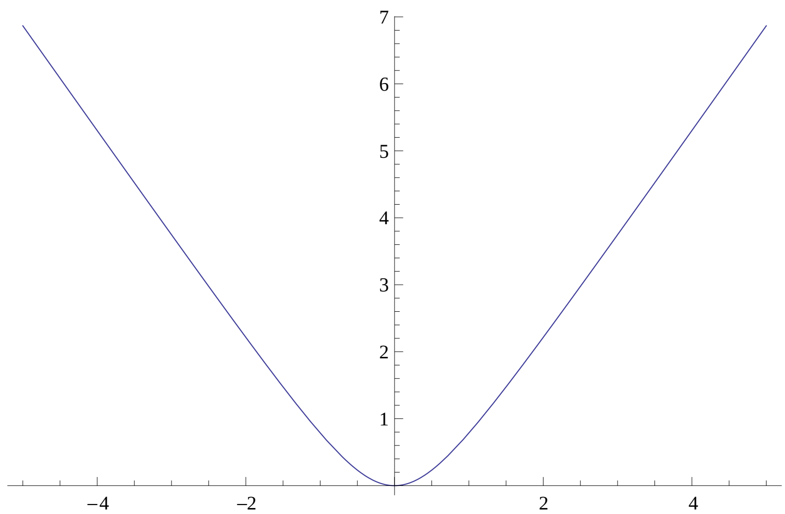
12. $f(x) = x - 2\,\mathrm{arctg}\,x$

- Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$.
- Nulové body funkcie: $n_1 = 0$, $n_{2,3} \doteq \pm 2{,}3312$ (delením intervalu).
- Intervaly monotónnosti:
  - prvá derivácia funkcie: $f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2}$,
  - stacionárne body: $s_{1,2} = \pm 1$,
  - funkcia klesá na: $x \in (-1, 1)$,
  - funkcia rastie na: $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.
- Lokálne extrémy:
  - minimum: $x = 1$,
  - maximum: $x = -1$.
- Konvexnosť, konkávnosť:
  - druhá derivácia funkcie: $f''(x) = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$,
  - nulové body 2. derivácie: $d_1 = 0$,
  - inflexné body funkcie: $i_1 = 0$,
  - funkcia je konkávna na: $x \in (-\infty, 0)$,
  - funkcia je konvexná na: $x \in (0, \infty)$.
- Asymptoty:
  - asymptoty bez smernice: nemá,
  - asymptoty so smernicou: $y = x + \pi$ pre $x \to -\infty$,
    $y = x - \pi$ pre $x \to \infty$.
- Graf funkcie:



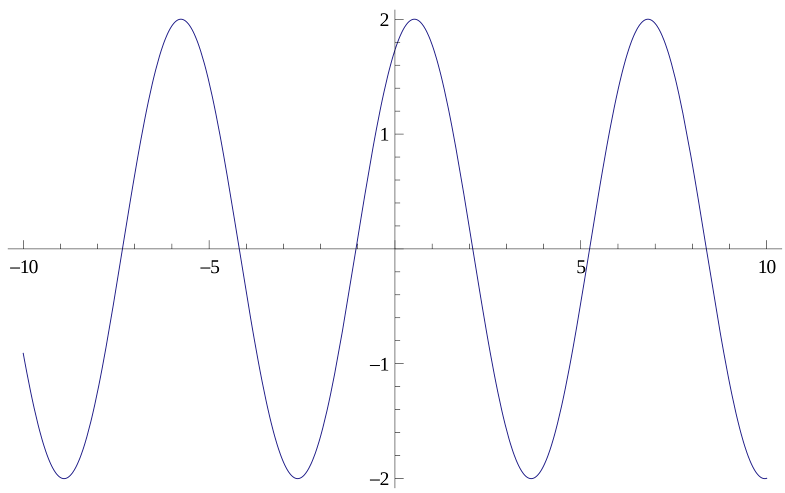
13. $f(x) = x.\mathrm{arctg}\, x$

- Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$.
- Nulové body funkcie: $n_1 = 0$.
- Intervaly monotónnosti:
  - prvá derivácia funkcie: $f'(x) = \mathrm{arctg}\, x + \frac{x}{1+x^2}$,
  - stacionárne body: $s_1 = 0$,
  - funkcia klesá na: $x \in (-\infty, 0)$,
  - funkcia rastie na: $x \in (0, \infty)$.
- Lokálne extrémy:
  - minimum: $x = 0$,
  - maximá: nemá.
- Konvexnoxť, konkávnosť:
  - druhá derivácia funkcie: $f''(x) = \frac{2}{(1+x^2)^2}$,
  - nulové body 2. derivácie: nemá,
  - inflexné body funkcie: nemá,
  - funkcia je konkávna na: $\emptyset$,
  - funkcia je konvexná na: $x \in D(f)$.
- Asymptoty:
  - asymptoty bez smernice: nemá,
  - asymptoty so smernicou: $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ pre $x \to -\infty$
    $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ pre $x \to \infty$.
- Graf funkcie:



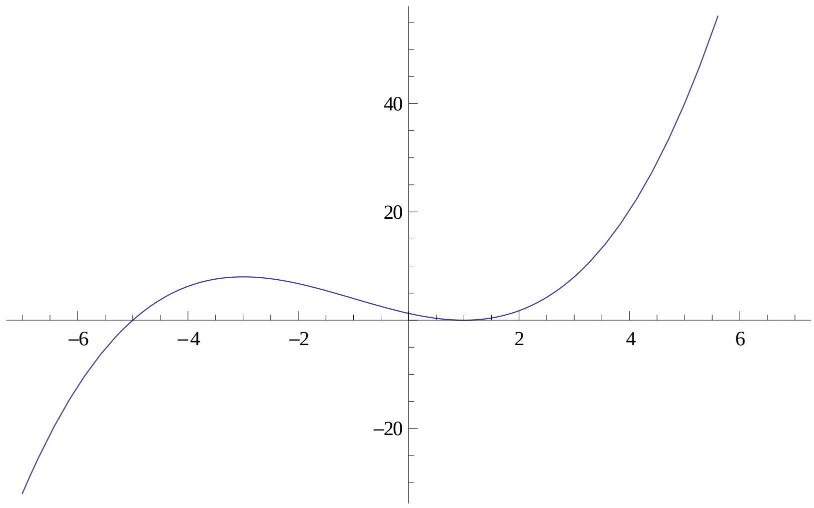
14. $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$

- Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$.
- Nulové body funkcie: $n_1 = -\frac{\pi}{3} + k\pi$.
- Intervaly monotónnosti:
  - prvá derivácia funkcie: $f'(x) = \cos x - \sqrt{3}\sin x$,
  - stacionárne body: $s_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi$,
  - funkcia klesá na: $x \in \left(\frac{1}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi\right) + 2k\pi$,
  - funkcia rastie na: $x \in \left(\frac{7}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi\right) + 2k\pi$.
- Lokálne extrémy:
  - minimá: $x = \frac{1}{6}\pi + 2k\pi$,
  - maximá: $x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$.
- Konvexnoxť, konkávnosť:
  - druhá derivácia funkcie: $f''(x) = -\sin x - \sqrt{3}\cos x$,
  - nulové body 2. derivácie: $d_1 = -\frac{\pi}{3} + k\pi$,
  - inflexné body funkcie: $i_1 = -\frac{\pi}{3} + k\pi$,
  - funkcia je konkávna na: $x \in \left(-\frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right) + 2k\pi$,
  - funkcia je konvexná na: $x \in \left(\frac{2}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi\right) + 2k\pi$.
- Asymptoty:
  - asymptoty bez smernice: nemá,
  - asymptoty so smernicou: nemá.
- Graf funkcie:



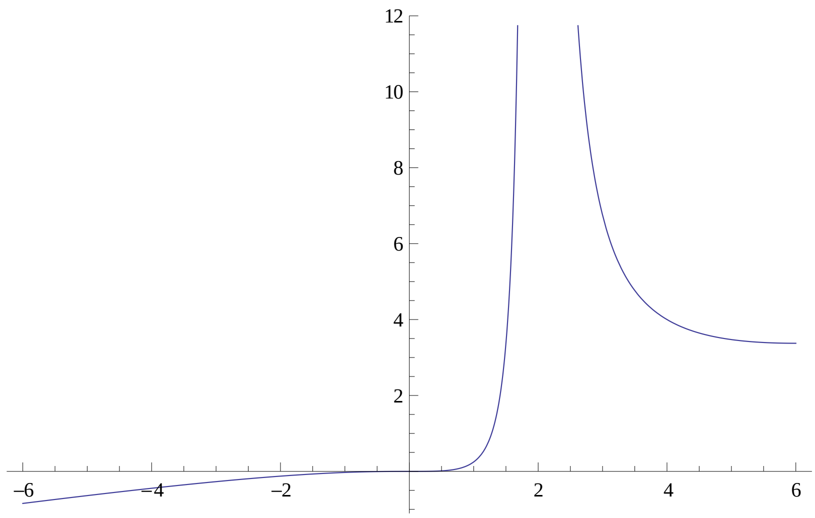
15. $f(x) = \frac{1}{4}\left(x^3 + 3x^2 - 9x + 5\right)$

- Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$.
- Nulové body funkcie: $n_1 = -5$, $x_{2,3} = 1$. .
- Intervaly monotónnosti:
  - prvá derivácia funkcie: $f'(x) = \frac{3}{4}(x+3)(x-1)$,
  - stacionárne body: $s_1 = -3$, $s_2 = 1$,
  - funkcia klesá na: $x \in (-3, 1)$,
  - funkcia rastie na: $x \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$.
- Lokálne extrémy:
  - minimum: $x = 1$,
  - maximum: $x = -3$.
- Konvexnoxť, konkávnosť:
  - druhá derivácia funkcie: $f''(x) = \frac{3}{4}(2x + 2)$,
  - nulové body 2. derivácie: $d_1 = -1$,
  - inflexné body funkcie: $i_1 = -1$,
  - funkcia je konkávna na: $x \in (-\infty, -1)$,
  - funkcia je konvexná na: $x \in (-1, \infty)$.
- Asymptoty:
  - asymptoty bez smernice: nemá,
  - asymptoty so smernicou: nemá.
- Graf funkcie:



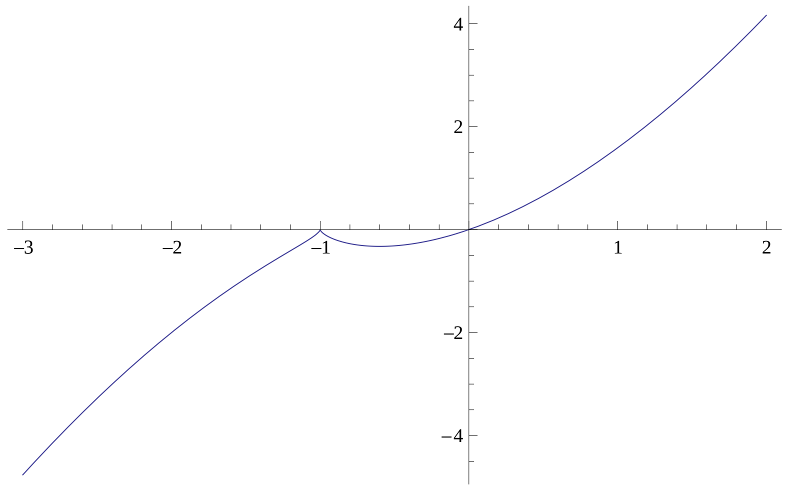
16. $f(x) = \frac{x^3}{4(x-2)^2}$

- Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- Nulové body funkcie: $n_1 = 0$.
- Intervaly monotónnosti:
  - prvá derivácia funkcie: $f'(x) = \frac{x^3-6x^2}{4(x-2)^3}$,
  - stacionárne body: $s_{1,2} = 0$, $s_3 = 6$,
  - funkcia klesá na: $x \in (2, 6)$,
  - funkcia rastie na: $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (6, \infty)$.
- Lokálne extrémy:
  - minimum: $x = 6$,
  - maximá: nemá.
- Konvexnoxť, konkávnosť:
  - druhá derivácia funkcie: $f''(x) = \frac{24x}{4(x-2)^4}$,
  - nulové body 2. derivácie: $d_1 = 0$,
  - inflexné body funkcie: $i_1 = 0$,
  - funkcia je konkávna na: $x \in (-\infty, 0)$,
  - funkcia je konvexná na: $x \in (0, 2) \cup (2, \infty)$.
- Asymptoty:
  - asymptota bez smernice: $x = 2$,
  - asymptota so smernicou: $y = \frac{x}{4} + 1$.
- Graf funkcie:



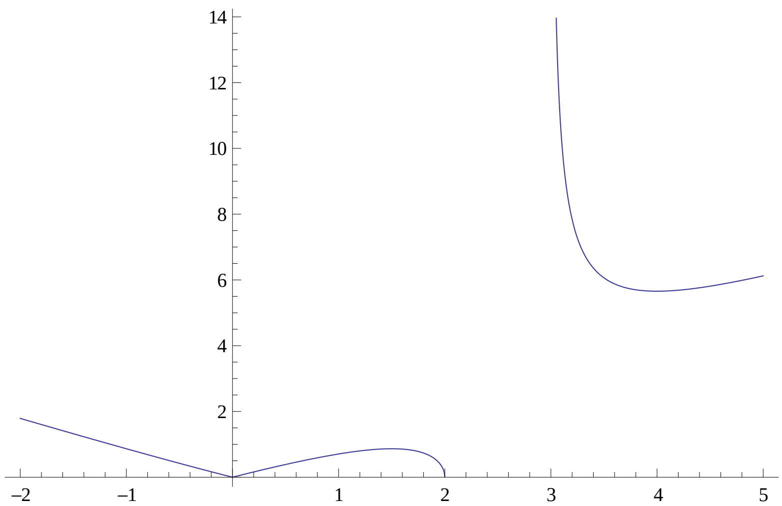
17. $f(x) = x\sqrt[3]{(x+1)^2}$

- Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$.
- Nulové body funkcie: $n_1 = -1$, $n_2 = 0$..
- Intervaly monotónnosti:
  - prvá derivácia funkcie: $f'(x) = \frac{5x+3}{3\sqrt[3]{x+1}}$,
  - stacionárne body: $s_1 = -\frac{3}{5}$,
  - funkcia klesá na: $x \in \left(-1, -\frac{3}{5}\right)$,
  - funkcia rastie na: $x \in (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{3}{5}, \infty\right)$.
- Lokálne extrémy:
  - minimum: $x = -\frac{3}{5}$,
  - maximum: $x = -1$.
- Konvexnoxť, konkávnosť:
  - druhá derivácia funkcie: $f''(x) = \frac{10x+12}{9\sqrt[3]{(x+1)^4}}$,
  - nulové body 2. derivácie: $d_1 = -\frac{6}{5}$,
  - inflexné body funkcie: $i_1 = -\frac{6}{5}$,
  - funkcia je konkávna na: $x \in \left(-\infty, -\frac{6}{5}\right)$,
  - funkcia je konvexná na: $x \in \left(-\frac{6}{5}, \infty\right)$.
- Asymptoty:
  - asymptoty bez smernice: nemá,
  - asymptoty so smernicou: nemá.
- Graf funkcie:



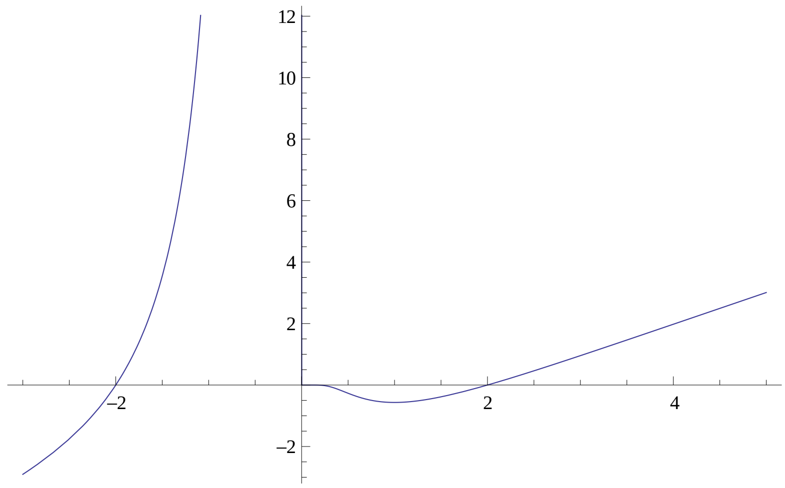
18. $f(x) = \sqrt{\frac{x^3-2x^2}{x-3}}$

- Definičný obor: $D(f) = (-\infty, 2\rangle \cup (3, \infty)$.
- Nulové body funkcie: $n_1 = 0$, $n_2 = 2$.
- Intervaly monotónnosti:
  - prvá derivácia funkcie: $f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-3}{x^3-2x^2}} \cdot \frac{x(2x^2-11x+12)}{(x-3)^2}$,
  - stacionárne body: $s_1 = 0$, $s_2 = \frac{3}{2}$, $s_3 = 4$,
  - funkcia klesá na: $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right\rangle \cup (3, 4)$,
  - funkcia rastie na: $x \in \left(0, \frac{3}{2}\right) \cup (4, \infty)$.
- Lokálne extrémy:
  - minimá: $x = 0$, $x = 2$, $x = 4$,
  - maximum: $x = \frac{3}{2}$.
- Konvexnoxť, konkávnosť:
  - druhá derivácia funkcie: $f''(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x-3}} \cdot \frac{11x-24}{4(x-2)^2(x-3)^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2}}$,
  - nulové body 2. derivácie: $d_1 = 2$, $d_2 = \frac{24}{11}$,
  - inflexné body funkcie: $i_1 = 0$,
  - funkcia je konkávna na: $x \in (0, 2\rangle$,
  - funkcia je konvexná na: $x \in (-\infty, 0) \cup (3, \infty)$.
- Asymptoty:
  - asymptota bez smernice: $x = 3$,
  - asymptoty so smernicou: $y = -x - \frac{1}{2}$ pre $x \to -\infty$,
    $y = x + \frac{1}{2}$ pre $x \to \infty$.
- Graf funkcie:



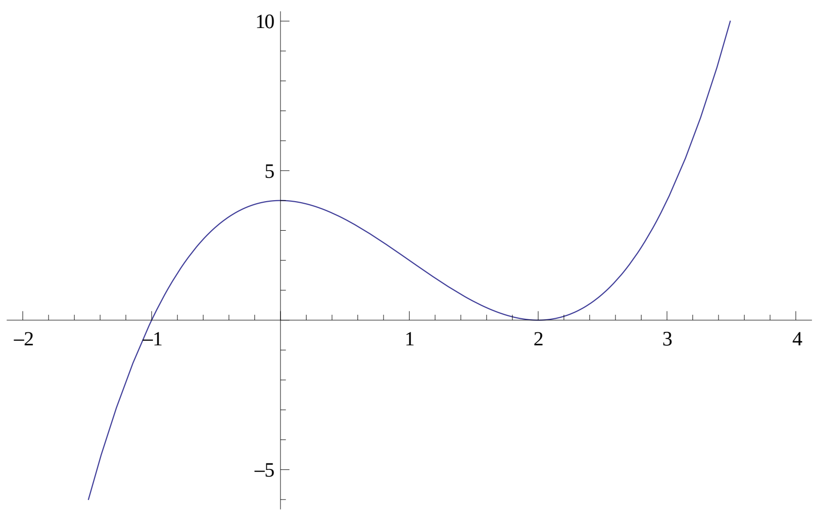
19. $f(x) = \frac{x^2-4}{x} \cdot e^{-\frac{5}{3x}}$

- Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Nulové body funkcie: $n_{1,2} = \pm 2$.
- Intervaly monotónnosti:
  - prvá derivácia funkcie: $f'(x) = e^{-\frac{5}{3x}} \cdot \frac{(x-1)(3x^2+8x+20)}{3x^3}$,
  - stacionárne body: $s_1 = 1$,
  - funkcia klesá na: $x \in (0, 1)$,
  - funkcia rastie na: $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.
- Lokálne extrémy:
  - minimum: $x = 1$,
  - maximá: nemá.
- Konvexnoxť, konkávnosť:
  - druhá derivácia funkcie: $f''(x) = -e^{-\frac{5}{3x}} \cdot \frac{47x^2-240x+100}{9x^5}$,
  - nulové body 2. derivácie: $d_{1,2} = \frac{10}{47}\left(12 \pm \sqrt{97}\right)$,
  - inflexné body funkcie: $i_{1,2} = \frac{10}{47}\left(12 \pm \sqrt{97}\right)$,
  - funkcia je konkávna na: $x \in \left(0, \frac{10}{47}\left(12 - \sqrt{97}\right)\right) \cup \left(\frac{10}{47}\left(12 + \sqrt{97}\right), \infty\right)$,
  - funkcia je konvexná na: $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{10}{47}\left(12 - \sqrt{97}\right), \frac{10}{47}\left(12 + \sqrt{97}\right)\right)$.
- Asymptoty:
  - asymptota bez smernice: $x = 0$,
  - asymptota so smernicou: $y = x - \frac{5}{3}$.
- Graf funkcie:



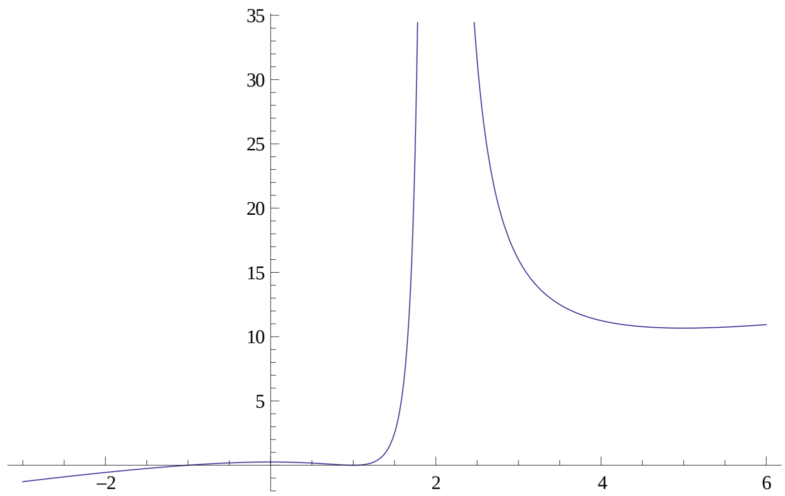
20. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

- Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$.
- Nulové body funkcie: $n_1 = -1$, $n_2 = 2$.
- Intervaly monotónnosti:
  - prvá derivácia funkcie: $f'(x) = 3x(x-2)$,
  - stacionárne body: $s_1 = 0$, $s_2 = 2$,
  - funkcia klesá na: $x \in (0, 2)$,
  - funkcia rastie na: $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$.
- Lokálne extrémy:
  - minimum: $x = 2$,
  - maximum: $x = 0$.
- Konvexnoxť, konkávnosť:
  - druhá derivácia funkcie: $f''(x) = 6x - 6$,
  - nulové body 2. derivácie: $d_1 = 1$,
  - inflexné body funkcie: $i_1 = 1$,
  - funkcia je konkávna na: $x \in (-\infty, 1)$,
  - funkcia je konvexná na: $x \in (1, \infty)$.
- Asymptoty:
  - asymptoty bez smernice: nemá,
  - asymptoty so smernicou: nemá.
- Graf funkcie:



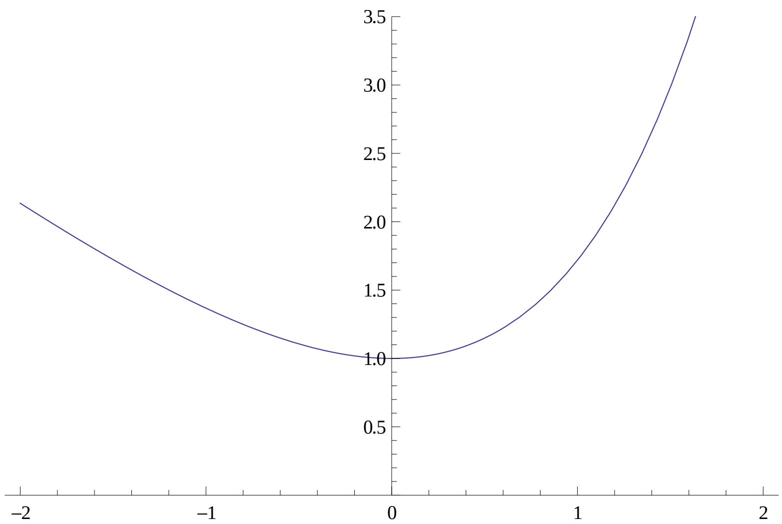
21. $f(x) = (x+1)\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2$

- Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- Nulové body funkcie: $n_{1,2} = \pm 1$.
- Intervaly monotónnosti:
  - prvá derivácia funkcie: $f'(x) = \frac{x(x-1)(x-5)}{(x-2)^3}$,
  - stacionárne body: $s_1 = 0$, $s_2 = 1$, $s_3 = 5$,
  - funkcia klesá na: $x \in (0,1) \cup (2,5)$,
  - funkcia rastie na: $x \in (-\infty, 0) \cup (1,2) \cup (5,\infty)$.
- Lokálne extrémy:
  - minimá: $x = 1$, $x = 5$,
  - maximum: $x = 0$.
- Konvexnoxť, konkávnosť:
  - druhá derivácia funkcie: $f''(x) = \frac{14x-10}{(x-2)^4}$,
  - nulové body 2. derivácie: $d_1 = \frac{5}{7}$,
  - inflexné body funkcie: $i_1 = \frac{5}{7}$,
  - funkcia je konkávna na: $x \in \left(-\infty, \frac{5}{7}\right)$,
  - funkcia je konvexná na: $x \in \left(\frac{5}{7}, 2\right) \cup (2,\infty)$.
- Asymptoty:
  - asymptota bez smernice: $x = 2$,
  - asymptota so smernicou: $y = x + 3$.
- Graf funkcie:



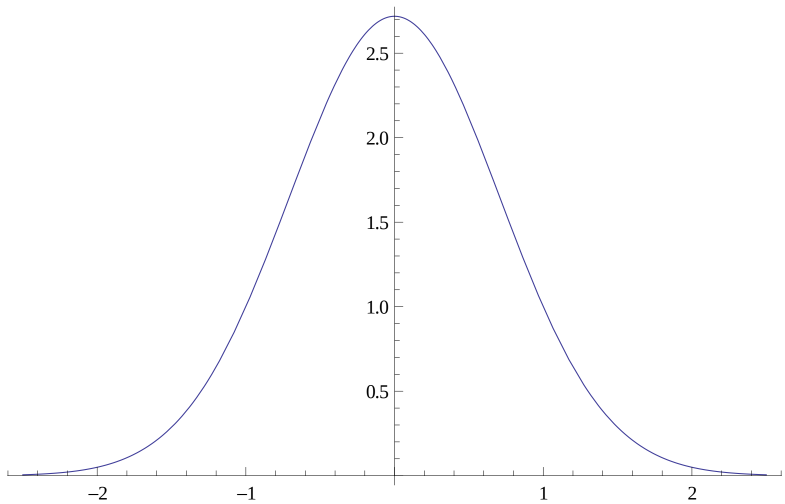
22. $f(x) = e^x - x$

- Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$.
- Nulové body funkcie: nemá.
- Intervaly monotónnosti:
  - prvá derivácia funkcie: $f'(x) = e^x - 1$,
  - stacionárne body: $s_1 = 0$,
  - funkcia klesá na: $x \in (-\infty, 0)$,
  - funkcia rastie na: $x \in (0, \infty)$.
- Lokálne extrémy:
  - minimum: $x = 0$
  - maximá: nemá
- Konvexnoxť, konkávnosť:
  - druhá derivácia funkcie: $f''(x) = e^x$,
  - nulové body 2. derivácie: nemá,
  - inflexné body funkcie: nemá,
  - funkcia je konkávna na: $\emptyset$,
  - funkcia je konvexná na: $x \in D(f)$.
- Asymptoty:
  - asymptoty bez smernice: nemá,
  - asymptota so smernicou: $y = -x$ pre $x \to -\infty$.
- Graf funkcie:



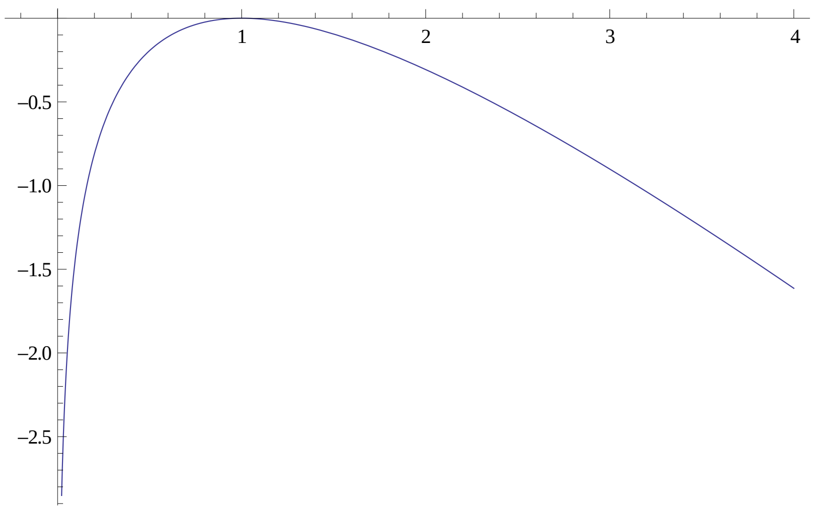
23. $f(x) = e^{1-x^2}$

- Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$.
- Nulové body funkcie: nemá.
- Intervaly monotónnosti:
  - prvá derivácia funkcie: $f'(x) = -2xe^{1-x^2}$,
  - stacionárne body: $s_1 = 0$,
  - funkcia klesá na: $x \in (0, \infty)$,
  - funkcia rastie na: $x \in (-\infty, 0)$.
- Lokálne extrémy:
  - minimá: nemá,
  - maximum: $x = 0$.
- Konvexnoxť, konkávnosť:
  - druhá derivácia funkcie: $f''(x) = 2e^{1-x^2}(2x^2 - 1)$,
  - nulové body 2. derivácie: $d_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$,
  - inflexné body funkcie: $i_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$,
  - funkcia je konkávna na: $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,
  - funkcia je konvexná na: $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$.
- Asymptoty:
  - asymptoty bez smernice: nemá,
  - asymptota so smernicou: $y = 0$.
- Graf funkcie:



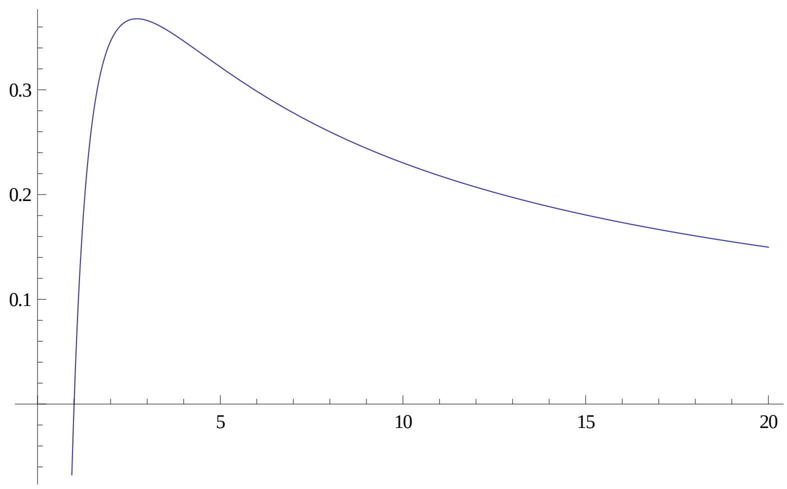
24. $f(x) = \ln x - x + 1$

- Definičný obor: $D(f) = (0, \infty)$.
- Nulové body funkcie: $n_1 = 1$.
- Intervaly monotónnosti:
  - prvá derivácia funkcie: $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$,
  - stacionárne body: $s_1 = 1$,
  - funkcia klesá na: $x \in (1, \infty)$,
  - funkcia rastie na: $x \in (0, 1)$.
- Lokálne extrémy:
  - minimá: nemá,
  - maximum: $x = 1$.
- Konvexnoxť, konkávnosť:
  - druhá derivácia funkcie: $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$,
  - nulové body 2. derivácie: nemá,
  - inflexné body funkcie: nemá,
  - funkcia je konkávna na: $x \in D(f)$,
  - funkcia je konvexná na: $\emptyset$.
- Asymptoty:
  - asymptota bez smernice: $x = 0$,
  - asymptoty so smernicou: nemá.
- Graf funkcie:



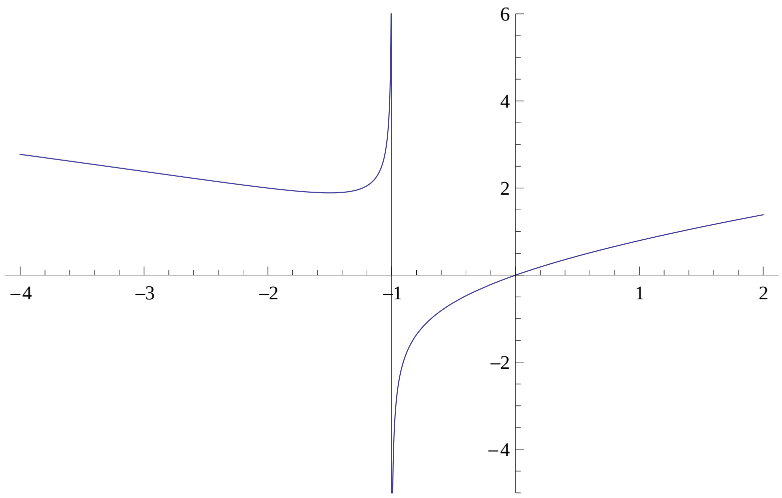
25. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

- Definičný obor: $D(f) = (0, \infty)$.
- Nulové body funkcie: $n_1 = 1$.
- Intervaly monotónnosti:
  - prvá derivácia funkcie: $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$,
  - stacionárne body: $s_1 = e$,
  - funkcia klesá na: $x \in (e, \infty)$,
  - funkcia rastie na: $x \in (0, e)$.
- Lokálne extrémy:
  - minimá: nemá,
  - maximum: $x = e$.
- Konvexnoxť, konkávnosť:
  - druhá derivácia funkcie: $f''(x) = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$,
  - nulové body 2. derivácie: $d_1 = e^{\frac{3}{2}}$,
  - inflexné body funkcie: $i_1 = e^{\frac{3}{2}}$,
  - funkcia je konkávna na: $x \in \left(0, e^{\frac{3}{2}}\right)$,
  - funkcia je konvexná na: $x \in \left(e^{\frac{3}{2}}, \infty\right)$.
- Asymptoty:
  - asymptota bez smernice: $x = 0$,
  - asymptota so smernicou: $y = 0$ pre $x \to \infty$.
- Graf funkcie:



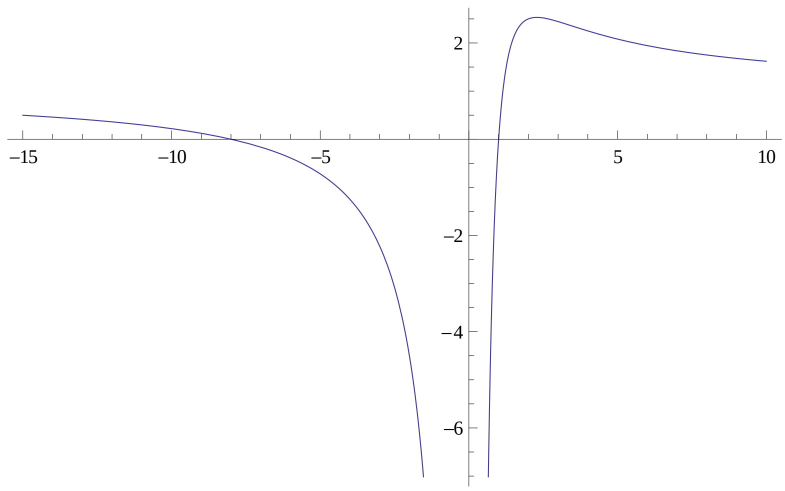
26. $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}}$

- Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- Nulové body funkcie: $n_1 = 0$.
- Intervaly monotónnosti:
  - prvá derivácia funkcie: $f'(x) = \frac{2x+3}{3\sqrt[3]{(x+1)^4}}$,
  - stacionárne body: $s_1 = -\frac{3}{2}$,
  - funkcia klesá na: $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$,
  - funkcia rastie na: $x \in \left(-\frac{3}{2}, -1\right) \cup (-1, \infty)$.
- Lokálne extrémy:
  - minimum: $x = -\frac{3}{2}$.
  - maximá: nemá.
- Konvexnosť, konkávnosť:
  - druhá derivácia funkcie: $f''(x) = \frac{-2x-6}{9\sqrt[3]{(x+1)^7}}$,
  - nulové body 2. derivácie: $d_1 = -3$,
  - inflexné body funkcie: $i_1 = -3$,
  - funkcia je konkávna na: $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, \infty)$,
  - funkcia je konvexná na: $x \in (-3, -1)$.
- Asymptoty:
  - asymptota bez smernice: $x = -1$,
  - asymptoty so smernicou: nemá.
- Graf funkcie:



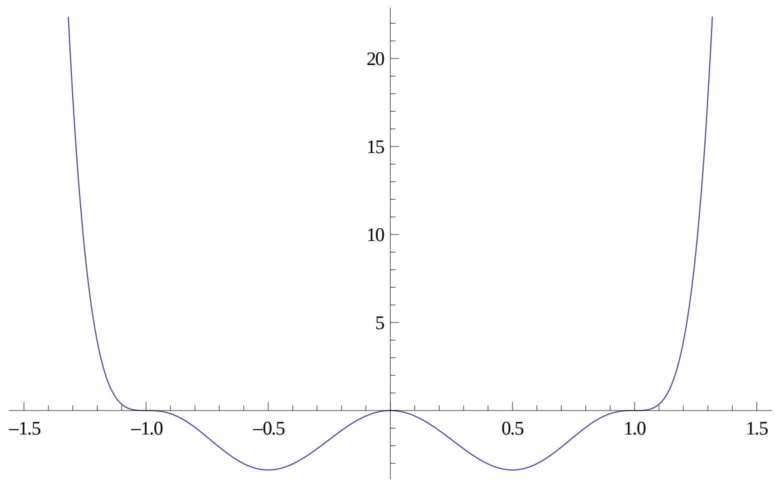
27. $f(x) = 1 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2}$

- Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Nulové body funkcie: $n_1 = -8$, $n_2 = 1$.
- Intervaly monotónnosti:
  - prvá derivácia funkcie: $f'(x) = \frac{16-7x}{x^3}$,
  - stacionárne body: $s_1 = \frac{16}{7}$,
  - funkcia klesá na: $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{16}{7}, \infty\right)$,
  - funkcia rastie na: $x \in \left(0, \frac{16}{7}\right)$.
- Lokálne extrémy:
  - minimá: nemá,
  - maximá: $x = \frac{16}{7}$.
- Konvexnoxť, konkávnosť:
  - druhá derivácia funkcie: $f''(x) = \frac{2(7x-24)}{x^4}$,
  - nulové body 2. derivácie: $d_1 = \frac{24}{7}$,
  - inflexné body funkcie: $i_1 = \frac{24}{7}$,
  - funkcia je konkávna na: $x \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{24}{7}\right)$,
  - funkcia je konvexná na: $x \in \left(\frac{24}{7}, \infty\right)$.
- Asymptoty:
  - asymptota bez smernice: $x = 0$,
  - asymptota so smernicou: $y = 1$.
- Graf funkcie:



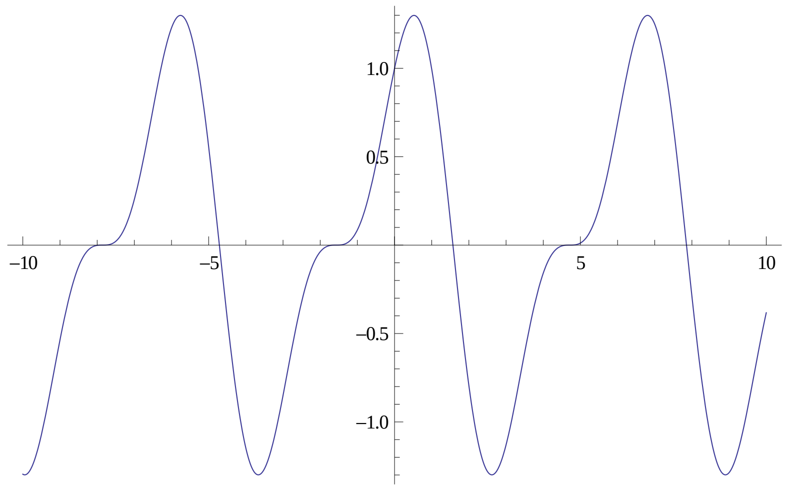
28. $f(x) = 32x^2\left(x^2-1\right)^3$

- Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$.
- Nulové body funkcie: $n_1 = 0$, $n_{2,3} = \pm 1$.
- Intervaly monotónnosti:
  - prvá derivácia funkcie: $f'(x) = 64x(x+1)(x-1)(4x^4-5x^2+1)$,
  - stacionárne body: $s_1 = 0$, $s_{2,3} = \pm 1$, $s_{4,5} = \pm\frac{1}{2}$,
  - funkcia klesá na: $x \in (-\infty,-1) \cup \left(-1,-\frac{1}{2}\right) \cup \left(0,\frac{1}{2}\right)$,
  - funkcia rastie na: $x \in \left(-\frac{1}{2},0\right) \cup \left(\frac{1}{2},1\right) \cup (1,\infty)$.
- Lokálne extrémy:
  - minimá: $x = \pm\frac{1}{2}$,
  - maximum: $x = 0$.
- Konvexnoxť, konkávnosť:
  - druhá derivácia funkcie: $f''(x) = 64(x+1)(x-1)(28x^4-17x^2+1)$,
  - nulové body 2. derivácie: $d_{1,2} = \pm 1$, $d_{3,4,5,6} = \pm\sqrt{\frac{17\pm\sqrt{177}}{56}}$,
  - inflexné body funkcie: $i_{1,2} = \pm 1$, $i_{3,4,5,6} = \pm\sqrt{\frac{17\pm\sqrt{177}}{56}}$,
  - funkcia je konkávna na:
    $x \in \left(-1,-\sqrt{\frac{17+\sqrt{177}}{56}}\right) \cup \left(-\sqrt{\frac{17-\sqrt{177}}{56}},\sqrt{\frac{17-\sqrt{177}}{56}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{17+\sqrt{177}}{56}},1\right)$,
  - funkcia je konvexná na: $x \in (-\infty,-1) \cup$
    $\cup \left(-\sqrt{\frac{17+\sqrt{177}}{56}},-\sqrt{\frac{17-\sqrt{177}}{56}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{17-\sqrt{177}}{56}},\sqrt{\frac{17+\sqrt{177}}{56}}\right) \cup (1,\infty)$.
- Asymptoty:
  - asymptoty bez smernice: nemá,
  - asymptoty so smernicou: nemá.
- Graf funkcie:



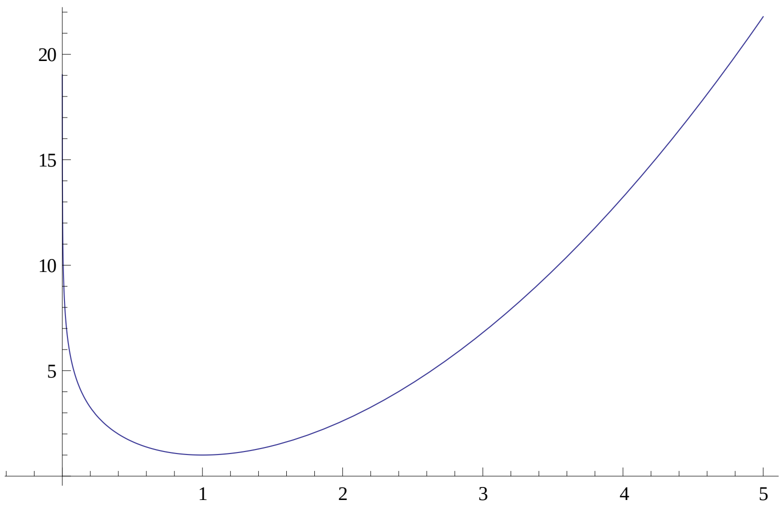
29. $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\sin 2x = \cos x(1 + \sin x)$

- Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$.
- Nulové body funkcie: $n = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
- Intervaly monotónnosti:
  - prvá derivácia funkcie: $f'(x) = -(2\sin^2 x + \sin x - 1)$,
  - stacionárne body: $s_1 = \frac{1}{6}\pi + 2k\pi$, $s_2 = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, $s_3 = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$,
  - funkcia klesá na: $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right) + 2k\pi$,
  - funkcia rastie na: $x \in \left(\frac{5}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi\right) + 2k\pi$.
- Lokálne extrémy:
  - minimá: $x = \frac{1}{6}\pi + 2k\pi$,
  - maximá: $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$.
- Konvexnoxť, konkávnosť:
  - druhá derivácia funkcie: $f''(x) = -\cos x(4\sin x + 1)$,
  - nulové body 2. derivácie: $d_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $d_{2,3} = \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + 2k\pi$,
  - inflexné body funkcie: $i_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $i_{2,3} = \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + 2k\pi$, $i_2 \doteq 14{,}5^\circ$, $i_3 \doteq 165^\circ$.
  - funkcia je konkávna na: $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, i_2\right) + 2k\pi$,
  - funkcia je konvexná na: $x \in (i_2, i_3) + 2k\pi$.
- Asymptoty:
  - asymptoty bez smernice: nemá,
  - asymptoty so smernicou: nemá.
- Graf funkcie:



30. $f(x) = x^2 - 2\ln x$

- Definičný obor: $D(f) = (0, \infty)$.
- Nulové body funkcie: nemá.
- Intervaly monotónnosti:
  - prvá derivácia funkcie: $f'(x) = 2x - \frac{2}{x}$,
  - stacionárne body: $s_{1,2} = \pm 1$,
  - funkcia klesá na: $x \in (0, 1)$,
  - funkcia rastie na: $x \in (1, \infty)$.
- Lokálne extrémy:
  - minimum: $x = 1$,
  - maximá: nemá.
- Konvexnoxť, konkávnosť:
  - druhá derivácia funkcie: $f''(x) = 2 + \frac{2}{x^2}$,
  - nulové body 2. derivácie: nemá,
  - inflexné body funkcie: nemá,
  - funkcia je konkávna na: $\emptyset$,
  - funkcia je konvexná na: $x \in D(f)$.
- Asymptoty:
  - asymptota bez smernice: $x = 0$,
  - asymptoty so smernicou: nemá.
- Graf funkcie:



Literatúra

[1] Handlovičová A., Mišík L., Schneider Z., Širáň J.: Riešené úlohy z Matematiky 1, *STU Bratislava, 1998*

[2] Kalina M.: Matematika, *STU Bratislava, 2012*

[3] Eliáš, Horváth, Kajan: Zbierka úloh z vyššej matematiky 1, *Alfa Bratislava, 1966*

[4] Eliáš, Horváth, Kajan: Zbierka úloh z vyššej matematiky 2, *STU Bratislava, 1995*