ZÁKLADY FUNKCIONÁLNEJ ANALÝZY A VARIAČNÉHO POČTU

Angela Handlovičová
Matúš Tibenský

STU
SLOVENSKÁ TECHNICKÁ
UNIVERZITA V BRATISLAVE

ZÁKLADY FUNKCIONÁLNEJ ANALÝZY
A VARIAČNÉHO POČTU

ZÁKLADY FUNKCIONÁLNEJ ANALÝZY A VARIAČNÉHO POČTU

Angela Handlovičová
Matúš Tibenský

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
2016

Teória základných funkcionálnych priestorov, operátorov a ich vlastností. Základy teórie variačného počtu.

Recenzenti: prof. RNDr. Michal Fečkan, DrSc.
prof. RNDr. Marian Slodička, PhD.
Ing. Tomáš Oberhuber, PhD.

doc. RNDr. Angela Handlovičová, PhD. – Ing. Mgr. Matúš Tibenský

ZÁKLADY FUNKCIONÁLNEJ ANALÝZY A VARIAČNÉHO POČTU

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave vo Vydavateľstve STU, Bratislava, Vazovova 5, v roku 2016.

Edícia vysokoškolských učebníc

Rozsah 155 strán, 11 obrázkov, 5,592 AH, 5,810 VH, 1. vydanie, edičné číslo 5901, vydané v elektronickej forme;
umiestnenie na http://www.svf.stuba.sk

Schválila Edičná rada Stavebnej fakulty STU v Bratislave.

85 – 215 – 2016

ISBN 978-80-227-4559-8

Čitateľovi....

Začali ste listovať v učebnici základov funkcionálnej analýzy a variačného počtu. Možno dobre padne pár slov o čom to celé vlastne bude, pre koho a prečo vznikla táto učebnica a na čo by mala slúžiť.
Najskôr teda pre koho a prečo: hlavne pre našich snaživých študentov študijného odboru aplikovaná matematika, ktorý je špecifický tým, že treba veľa vedieť zo všeličoho a niektoré veci aj poriadne. To vôbec nie je jednoduchý problém a preto je taká „polopatistická“ učebnica niekedy celkom vhod. Ako vraví jeden môj priateľ[F]*:„Vieš, najťažšie a najdôležitejšie je povedať aj zložité veci jednoducho“.*
Má to samozrejme jedno úskalie, že sa človek môže dopustiť nejakých nepresností a exaktní matematici z toho určite nebudú nadšení. Ale aplikovaná veda je plná kompromisov, keď je človek nútený robiť zjednodušenia, takže, čo už...na prvé čítanie sú niektoré výborné učebnice a knihy funkcionálnej analýzy dosť ťažké (aj hrubé !!!) a menej húževnatých rýchlo odradia. A to by bola veľká škoda! Táto učebnica chce nejakou jednoduchšou formou otvoriť dvere, ktorými sa dá nazrieť do čara tejto časti matematiky, ktorá okrem toho, že je veľmi krásna, vie byť aj úžasne užitočná.
A teraz čosi o tom, na čo je to všetko dobré: aplikovaná matematika, alebo presnejšie jej veľká časť, sa zaoberá modelmi inžinierskej praxe, ktoré spravidla vedú k úlohám, ktoré sa matematicky dajú opísať diferenciálnymi rovnicami. Riešením tohto problému môže byť nejaká funkcia, ktorej vlastnosti a priebeh nás mimoriadne zaujímajú, pretože je to napríklad stav podzemnej vody, či rozloženie teploty v miestnosti, stav opcie na burze... alebo všeličo iné tiež veľmi užitočné. Človek to chce poznať, opísať a vypočítať, keď to inak nejde, aspoň približne. Navyše, taký problém vôbec nemusí byť opísaný nejakou hladkou „peknou“ funkciou o jej derivácii ani nehovoriac. A predsa to chceme vedieť, veď napríklad tepelný tok súvisí práve s deriváciou teploty... Takže treba skúmať aj takéto objekty, nejako ich opísať, vymyslieť matematické štruktúry, ktorých prvky (napríklad funkcie) budú mať spoločné vlastnosti a ak sa dá, vybudovať na týchto štruktúrach nejaké rozumné meranie prvkov a hlavne ich „vzdialenosť“, aby sme vedeli, ako „ďaleko“ sme od skutočného riešenia. No a v neposlednom rade je tu problém, či vieme zostrojiť takú metódu, ktorá náš problém vie vypočítať tak dobre, že jej riešenie má so zjemňovaním veľkosti parametrov aproximácie stále menšiu „vzdialenosť“ od skutočného riešenia. Tomuto hovoríme konvergencia numerického riešenia a je to v numerickej matematike veľmi dôležitá vlastnosť. No a prečo pojem vzdialenosti je v úvodzovkách? Pretože to meranie môže byť rôzne a dobrý „numerik“ by mal vedieť, kedy o ktoré ide a čo to znamená... a o tom to celé je.

A teraz, už hor sa na vec! Tak ako tento akože úvod aj ostatné nie celkom matematické myšlienky budú písané kurzívou a čitateľ ich môže pokojne vynechať, ale niekomu možno pomôžu urobiť si o niektorých veciach takú svoju „ľudskú predstavu“...

Úvod

„**Funkcionálna analýza** je časť matematiky, v ktorej objektom skúmania sú skupiny funkcií a vzťah medzi nimi. Jedna z charakteristických čŕt funkcionálnej analýzy je, že prenáša rad pojmov a metód matematickej analýzy na prvky všeobecnejšieho charakteru. Okrem pojmov a metód matematickej analýzy používa aj metódy a pojmy algebry a geometrie“. Toľko citát zo slovenskej verzie Wikipédie, ktorá je dnes, najmä pre mladých zdrojom poznania (niekedy nie najpresnejším). Z predhovoru k funkcionálnej analýze od Ladislava Mišíka [M] sa dozvieme: „Základný priestor vo funkcionálnej analýze je lienárny topologický priestor“.
Táto učebnica má v názve základy funkcionálnej analýzy a v tejto časti sa obmedzuje naozaj len na základné funkcionálne priestory a vzťahy medzi nimi.
Ako ale ďalej píše Wikipédia: „Funkcionálna analýza vznikla začiatkom 20. storočia. Korene funkcionálnej analýzy treba hľadať v klasických disciplínach matematiky, najmä vo variačnom počte, v teórii integrálnych rovníc a v teórii diferenciálnych rovníc“.
Vidíme, že hneď tu sa objaví úzke prepojenie funkcionálnej analýzy a variačného počtu. Takže čo hovorí ten druhý pojem? Opäť citát Wikipédia:
„**Počet variačný** je disciplína matematiky, ktorá sa zaoberá hľadaním lokálnych extrémov funkcionálov. Možno výstižnejšie pre našu učebnicu je to napísané v predhovore ku knihe Solomona Michlina [Mi]: V mnohých prípadoch možno integrovanie diferenciálnej rovnice nahradiť ekvivalentnou úlohou získania funkcie, ktorá minimalizuje nejaký integrál. Úlohy takéhoto typu sa nazývajú variačné“.
V tomto kontexte si opäť treba uvedomiť, že učebnica si dáva za cieľ zvládnuť naozaj len základy tejto matematickej disciplíny.

V úvodnej časti si uvedieme označenia, ktoré budeme v knihe používať. Tieto nám v ďalšom uľahčia prácu a zrozumiteľnosť textu.

Označenia

G – N–rozmerná oblasť: otvorená súvislá množina euklidovského podpriestoru E_N.
ohraničená oblasť s Lipschitzovskou hranicou
Γ, ∂G – hranica oblasti G
$\overline{G}$ – uzáver oblasti G: $\overline{G} = G+\Gamma$ – uzavretá oblasť
$x_1, x_2, x_3, ..., x_N$ - súradnice bodov v E_N
$x= (x_1, x_2, x_3, ..., x_N)$ – bod v E_N.
Viacrozmerné integrály: $\iiint\ldots\int_G u((x_1, x_2, x_3, ..., x_N)\, dx_1\, dx_2 \,....dx_N = \int_G u(x)dx$
Funkcie definované na oblasti G – reálne funkcie.

1.Základné pojmy

Definujeme základné priestory v ich abstraktnej definícii a tiež aj ich definíciu pri práci s priestormi funkcií, ktoré nás budú zaujímať predovšetkým. Tie abstraktné robíme zámerne, aby si čitateľ uvedomil, aká široká a dômyselná tá matematika je a ako pekne sa dajú jedným spôsobom výstižne opísať rôzne veci.

Lineárny priestor

Pojem lineárneho priestoru si definujeme len pre teleso reálnych čísel R, čo je pre naše potreby postačujúce. Všeobecnejšiu definíciu ako aj definíciu pojmu teleso môže čitateľ nájsť napríklad v [M].

Definícia 1.1:
Lineárny priestor nad R nazývame štvoricu (X,R,+,.), kde
X je neprázdna množina, na ktorej sú definované operácie
+ : X×X → X (operácia sčítania)
. : R×X → X (operácia násobenia skalárom)
Operácie + a . sú zobrazenia s vlastnosťami:
1. $\forall x, y, z \in X : (x + y) + z = x + (y + z)$
2. $\forall x, y \in X : x + y = y + x$
3. $\forall x, y \in X \quad \exists z \in X : x + z = y$
4. $\forall x, y \in X \quad \forall \alpha \in R : \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
5. $\forall x \in X \quad \forall \alpha, \beta \in R : (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
6. $\forall x \in X \quad \forall \alpha, \beta \in R : \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
7. $\forall x \in X \quad 1.x = x$

Poznámka 1.1:
Z uvedenej definície vyplýva, že množina X musí byť taká, aby operácie + a . boli definované dobre, teda súčet ľubovoľných prvkov z X je tiež z X a tak isto súčin ľubovoľného prvku z X a ľubovoľného skalára je tiež z X. Tejto vlastnosti hovoríme uzavretosť na operácie + a . . Z toho teda vyplýva, že ľubovoľná lineárna kombinácia prvkov z X s ľubovoľnými skalármi z R je opäť z X:
$\forall x, y \in X, \forall \alpha, \beta \in R \quad \alpha x + \beta y \in X.$
Poznámka 1.2:
Existujú samozrejme aj priestory nad iným telesom ako R, napríklad nad telesom komplexných čísel, ale táto oblasť presahuje rámec tejto učebnice, a preto sa s ňou v ďalšom nebudeme zaoberať.

L-Príklady lineárnych priestorov:
1. Príkladom lineárneho priestoru môže byť aj samotná množina R, s obvyklou definíciou sčítania a násobenia, kde samozrejme platia vlastnosti z vyššie uvedenej definície.
2. Ďalší bežný príklad je euklidovský priestor E_N, kde N je dimenzia daného priestoru pri obvyklej definícii sčítania vektorov a násobenia skalárom.

3. Pre nás budú zaujímavé priestory funkcií. Napríklad majme množinu všetkých reálnych spojitých funkcií definovaných na uzavretom intervale $\langle a,b\rangle$ s obvyklou definíciou sčítania funkcií a násobenia skalárnom (reálnym číslom). Z vlastností spojitých funkcií hneď vyplýva, že takto definovaná množina tvorí lineárny priestor.

Teraz sa bližšie pozrieme na to, akým spôsobom môžeme jednotlivé prvky množiny alebo v lepšom prípade lineárnej množiny „merať". Intuitívnou predstavou je najjednoduchšia euklidovská vzdialenosť dvoch bodov, kde je veľmi jednoduché pochopiť, či sú dva body vzdialené alebo blízke. Vo všeobecnosti môžeme zaviesť takéto „meranie" prvkov rozmanitým spôsobom, musí ale spĺňať určité pravidlá. Takže poďme na to!

Metrický priestor

Definícia1.2:
Metrickým priestorom rozumieme dvojicu (A,ρ), kde
A je neprázdna množina,
ρ: AxA→R je zobrazenie- **metrika** s nasledujúcimi vlastnosťami:
1. $\forall x,y\in A: \quad \rho(x,y)\geq 0, \quad \rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$
2. $\forall x,y\in A: \quad \rho(x,y)=\rho(y,x)$
3. $\forall x,y,z\in A: \quad \rho(x,y)\leq \rho(x,z)+\rho(z,y)$

Poslednú vlastnosť nazývame **trojuholníková nerovnosť**.

M- Príklady metrických priestorov:

1. Príkladom metrického priestoru môže byť opäť množina R, kde definujeme nejakú metriku, napríklad

$\rho(x,y)=\begin{cases}1 & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$ (ukážte, že je to ozaj metrika).

2. Je jasné, že metrík na tej istej množine môžeme definovať mnoho. Najbežnejšia a najznámejšia metrika je určite absolútna hodnota rozdielu prvkov

$\forall x,y\in R: |x-y|$ (ukážte, že je to ozaj metrika).

3. Euklidovský priestor E_N, kde N je dimenzia daného priestoru má tak isto najbežnejšiu takzvanú **euklidovskú metriku**

$$\forall\, x=(x_1,\dots x_N) \quad y=(y_1,\dots y_N)\in E_N : \rho_E=\left(\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-y_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

(ukážte, že je to ozaj metrika).

4. Pre množinu M všetkých reálnych spojitých funkcií definovaných na uzavretom intervale $\langle a,b\rangle$ môžeme tiež definovať metriku napríklad

$\forall f,g\in M: \quad \rho_C(f,g)=\max_{x\in<a,b>}|f(x)-g(x)|$ (ukážte, že je to ozaj metrika).

Nuž, vzdialenosť (metriku) by sme mali. Ozaj dosť všeobecný pojem! Teraz skúmanie zúžime na lineárne množiny, veď aj tých je dosť. Zaujímavé a dôležité je aj vedieť

„merať veľkosť" samotného prvku lineárnej množiny. Asi tak ako je to s absolútnymi hodnotami (ako keby metrika z príkladu číslo 2, keď ide o vzdialenosť od nulového prvku).

Lineárny normovaný priestor

Definícia 1.3:
Lineárnym normovaným priestorom rozumieme dvojicu (A,$\|.\|$), kde
A je lineárny priestor (nad poľom R),
$\|.\|$: A→ R je zobrazenie – **norma** s nasledujúcimi vlastnosťami:

1. $\forall x \in A: \quad \|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\forall x \in A, \alpha \in R: \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
3. $\forall x, y \in A: \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Posle dná nerovnosť sa nazýva **trojuholníková nerovnosť**.

Tvrdenie 1.1:
Nech je A lineárny normovaný priestor s normou $\|.\|$.
Potom vzťahom $\forall x, y \in A: \rho(x, y) = \|x - y\|$ definujeme metriku a túto metriku nazývame **indukovanou metrikou**.
Dôkaz:
vyplýva ihneď z vlastností normy.

N-Príklady normovaných priestorov:
1. Príkladom normovaného priestoru môže byť opäť množina R, kde definujeme normu ako absolútnu hodnotu reálneho čísla:
   $\forall x \in R: |x|$ **(**ukážte, že je to ozaj norma**).**
2. **** Euklidovský priestor E_N, kde N je dimenzia daného priestoru má tak isto najbežnejšiu takzvanú euklidovskú normu, ktorou je veľkosť vektora v E_N:
   $\forall\, x = (x_1,...x_N) \quad \in E_N : |x|_E = \left(\sum_{i=1}^{N} (x_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ **(**ukážte, že je to ozaj norma**).**
3. Analogicky pre M množinu všetkých reálnych spojitých funkcií definovaných na uzavretom intervale $\langle a,b \rangle$ môžeme tiež definovať normu
   $\forall f \in M: \quad \|f\|_c = \max_{x \in <a,b>} |f(x)|$ **(**ukážte, že je to ozaj norma**).**

Poznámka 1.2:
Všimnite si, že všetky vyššie uvedené príklady sú normy ktoré indukujú metriky z vyššie uvedených príkladov metrických priestorov M-2., 3., 4.

Tá euklidovská metrika je človeku blízka od malička. Dokonca sa veľmi ľahko naučí základné pojmy a vlastnosti práce s vektormi. Hlavne v dvoj- a trojdimenzionálnom svete si to človek vie ľahko predstaviť a zvládne pojmy ako je skalárny súčin vektorov a vie podľa neho zistiť, či sú dva vektory na seba kolmé, čo je veľakrát veľmi užitočná *vec (jasné, skalárny súčin sa vtedy rovná nule). „Matik" vždy špekuluje, ako sa dajú užitočné veci zovšeobecniť, aby priniesli prospech aj inde. A tu to máme*:

Lineárny priestor so skalárnym súčinom

Definícia 1.4:
Lineárnym priestorom so skalárnym súčinom rozumieme dvojicu (A,(.,.)), kde A je lineárny priestor (nad poľom R),
(.,.): AxA→ R je zobrazenie – **skalárny súčin** s nasledujúcimi vlastnosťami:

1. $\forall x \in A: \quad (x,x) \geq 0, \quad (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\forall x, y \in A: \quad (x,y) = (y,x)$
3. $\forall x, y, z \in A: \quad (x, y+z) = (x,y) + (x,z)$
4. $\forall x, y \in A:, \forall \alpha \in R \quad (\alpha x, y) = \alpha (x,y)$

Tvrdenie 1.2:
Nech je A lineárny priestor so skalárnym súčinom (.,.). Potom vzťahom $\forall x \in A: (x,x)^{\frac{1}{2}}$ definujeme normu a túto normu nazývame **norma indukovaná skalárnym súčinom**. Budeme ju opäť označovať $\|x\| = (x,x)^{\frac{1}{2}}$. Navyše platí tzv. **Cauchyho-Schwarzova nerovnosť**:

(1.1) $\quad \forall x, y \in A: \quad |(x,y)| \leq \|x\| \|y\|.$

Dôkaz:
Takto definované zobrazenie má vlastnosti normy**,** čo sa ukáže veľmi jednoducho**,** trojuholníkovú nerovnosť ukážeme na konci.
Pri dôkaze použijeme často používanú skutočnosť, keď máme dokázať nerovnosť. Využijeme nezápornosť definovanej normy pre ľubovoľný prvok a tento zvolíme tak, aby sme dostali kvadratickú funkciu nejakej nami zvolenej premennej o ktorej vieme, že je nezáporná a využijeme fakt, že v tom prípade musí mať nekladný diskriminant:

$$\forall x, y \in A, \in \lambda \in R: (x + \lambda y, x + \lambda y) = (x,x) + 2\lambda (x,y) + \lambda^2 (y,y),$$

kde sme využili vlastnosti skalárneho súčinu. Na pravej strane nerovnice dostávame kvadratickú funkciu premennej λ, ktorá je nezáporná, teda jej diskriminant musí byť nekladný, z čoho máme

$$4(x,y)^2 - 4(x,x)(y,y) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad (x,y)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2 \quad \Rightarrow \quad |(x,y)| \leq \|x\| \|y\|,$$

čo sme mali dokázať.
Trojuholníková nerovnosť:

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = \|x\|^2 + 2(x,y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

kde sme využili vlastnosti skalárneho súčinu a Cauchyho-Schwarzovu nerovnosť.
Keď si uvedomíme, že norma je nezáporné číslo, po odmocnení ihneď dostávame trojuholníkovú nerovnosť. □

S-Príklady priestorov so skalárnym súčinom:

1. **1.** Príkladom takéhoto priestoru môže byť opäť množina R, kde definujeme skalárny súčin obvyklým spôsobom násobenia reálnych čísel
   $\forall x, y \in R : (x, y) = x.y$.
2. **2.** Euklidovský priestor E_N, kde N je dimenzia daného priestoru má tak isto skalárny súčin, ktorý je obvyklý skalárny súčin vektorov v E_N:
   $$\forall\, x = (x_1,...x_N) \quad y = (y_1,...y_N) \in E_N : (x, y) = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \,.$$

Poznámka 1.3:
Všimnite si opäť, že vyššie uvedené príklady indukujú metriky z uvedených príkladov normovaných priestorov N-1. a 2.

Poznámka 1.4:
Ak máme priestor so skalárnym súčinom, máme zároveň aj normovaný priestor s indukovanou normou a ďalej metrický priestor s indukovanou metrikou.
Ale existujú aj normované priestory s normami, ktoré nie sú indukované žiadnym skalárnym súčinom a analogicky existujú metrické priestory, ktorých metrika nie je indukovaná žiadnou normou.

A teraz sa pustíme do toho, čo sme si predsavzali. Venovať sa problematike funkcií a priestorov, ktoré sa dajú vybudovať nad množinami nejakých funkcií s určitými vlastnosťami a opísať si ako na nich môžeme vybudovať rôzne normy, metriky a skalárne súčiny, ktoré nám poskytnú úžasnú škálu možností ich merania. Ale po poriadku: najskôr si vybudujeme len tie najjednoduchšie, tie zložitejšie si necháme až do druhej polovice učebnice.

Skalárny súčin funkcií, norma, metrika

Teraz vybudujeme lineárny priestor so skalárnym súčinom, ktorého prvky budú funkcie. Tento bude v ďalších kapitolách hrať dôležitú úlohu a označenie, ktoré tu zavedieme, budeme používať pre tento skalárny súčin, normu a metriku aj v ďalších častiach učebnice.

Poznámka 1.5:
Množinu M, ktorej prvky sú funkcie definované na oblasti G, nazývame **lineárny priestor** (lineál, lineárna množina), práve vtedy, ak pre ľubovoľné dve funkcie $\mathrm{u(x), v(x)}$ z M a pre ľubovoľné dve reálne čísla $\mathrm{a, b}$ platí, že aj ich lineárna kombinácia, to je funkcia $\mathrm{au(x) + bv(x)}$ patrí do množiny M. Na tejto množine sú operácie sčítania a násobenia skalárom (v našom prípade bude pole skalárov vždy tvoriť množina všetkých reálnych čísel) definované obvyklým spôsobom a majú vlastnosti z definície 1.1. Túto vlastnosť nazývame uzavretosť na lineárne kombinácie.

Príklad 1.1:
Označme **M** množinu všetkých spojitých funkcií definovaných na uzavretej oblasti $\overline{\mathrm{G}}$ s obvyklou definíciou súčtu dvoch funkcií a násobenia funkcie konštantou. Potom **M** je lineárny priestor.

Riešenie:
Tento fakt vyplýva z vlastnosti spojitých funkcií, kde súčet dvoch spojitých funkcií je opäť funkcia spojitá a tak isto spojitá funkcia vynásobená reálnou konštantou je opäť spojitá funkcia.

Definícia 1.5:
Skalárnym súčinom funkcií $u(x), v(x)$ definovaných na G z lineárneho priestoru **M** rozumieme integrál

$$(1.2) \qquad \int_G u(x)v(x)dx$$

a označujeme ho: (u, v).

Veta 1.1:
Skalárny súčin je dobre definovaný. Pre takto definovaný skalárny súčin platí:
Nech sú $u(x), v(x), u_1(x), u_2(x)$ ľubovoľné funkcie definované na oblasti G z lineárneho priestoru **M** a α, β sú ľubovoľné reálne čísla. Pre skalárny súčin definovaný vzťahom (1.2) platí:

$$(1.3) \qquad (u, v) = (v, u),$$

$$(1.4) \qquad (\alpha u_1 + \beta u_2, v) = \alpha(u_1, v) + \beta(u_2, v),$$

$$(1.5) \qquad (u, u) \geq 0,$$

$$(1.6) \qquad (u, u) = 0 \Leftrightarrow u(x) = 0 \quad v \quad G$$

Vzťah (1.3) vyjadruje **symetriu**, vzťah (1.4) **homogénnosť** a **aditivitu** skalárneho súčinu.

Dôkaz:
To, že je skalárny súčin na tejto množine dobre definovaný vyplýva z faktu, že súčin dvoch funkcií definovaných a spojitých na $\overline{G}$ je funkcia ohraničená na $\overline{G}$, a teda má konečný Riemannov integrál.
Vzťahy (1.3)-(1.5) sú priamym dôsledkom vlastností Riemannovho integrálu vzhľadom na vzťah (1.2), ktorý definuje tento skalárny súčin. Vlastnosť (1.6) je z jednej strany ($\Leftarrow$) triviálna a z opačnej platí preto, že ide o spojitú funkciu. □

Dôsledok 1.1:
Nech sú $u(x), v_1(x), v_2(x)$ ľubovoľné funkcie definované na oblasti G z lineárneho priestoru **M** a a_1, a_2 sú ľubovoľné reálne čísla. Potom pre skalárny súčin definovaný vzťahom (1.2) platí:

$$(1.7) \qquad (u, a_1 v_1 + a_2 v_2) = a_1(u, v_1) + a_2(u, v_2).$$

Dôkaz:
Ponechávame ako jednoduché cvičenie.

Definícia 1.6:
Nech je daná funkcia $u(x)$ z lineárneho priestoru **M**. Normou funkcie $u(x)$ rozumieme číslo

(1.8) $\|u\| = \sqrt{(u,u)} = \left(\int_G u(x)^2\, dx \right)^{1/2}.$

Veta 1.2:
Nech sú $\mathrm{u(x), v(x)}$ ľubovoľné funkcie definované na oblasti G z lineárneho priestoru **M** a a je ľubovoľné reálne číslo. Potom pre normu definovanú vzťahom (1.8) platí:

(1.9) $\|u\| \geq 0,$

(1.10) $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u(x) = 0 \quad v \quad G,$

(1.11) $\|au\| = |a|.\|u\|,$

(1.12) $|(u,v)| \leq \|u\|.\|v\|,$

(1.13) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|,$

(1.14) $\big|\|u\| - \|v\|\big| \leq \|u - v\|$

Dôkaz:
Tvrdenia (1.9)- (1.13) vyplývajú ihneď z **Tvrdenia 1.2**.
Nerovnosť (1.14):

$$\|u\| = \|(u-v)+v\| \leq \|u-v\| + \|v\| \quad \Rightarrow \quad \|u\| - \|v\| \leq \|u-v\|$$
$$\|v\| = \|(v-u)+u\| \leq \|v-u\| + \|u\| \quad \Rightarrow \quad \|v\| - \|u\| \leq \|v-u\|.$$

Ak si teraz uvedomíme, že norma je nezáporná a $\|u-v\| = \|v-u\|$ nerovnosť (1.14) platí. □

Definícia 1.7:
Nech sú dané funkcie $\mathrm{u(x), v(x)}$ z lineárneho priestoru **M**.
Vzdialenosťou (metrikou) funkcií $\mathrm{u(x), v(x)}$ rozumieme číslo

(1.15) $\rho(u,v) = \|u - v\|.$

Veta 1.3:
Nech sú $\mathrm{u(x), v(x), z(x)}$ ľubovoľné funkcie definované na oblasti G z lineárneho priestoru **M**. Pre metriku definovanú vzťahom (1.15) platí:

(1.16) $\rho(u,v) \geq 0,$

(1.17) $\rho(u,v) = 0 \Leftrightarrow u(x) = v(x) \quad v \quad G,$

(1.18) $\rho(u,v) = \rho(v,u),$

(1.19) $\rho(u,z) \leq \rho(u,v) + \rho(v,z)$

Dôkaz:
Vyplýva ihneď z konštrukcie metriky, ktorá je indukovaná normou. □

Poznámka 1.6:
Takto indukovaná norma a metrika vytvorí samozrejme iný normovaný (metrický) priestor, ako je ten, ktorý sme definovali v príklade M-4., N-3, v jednodimenzionálnom prípade, kde hovoríme o tzv. C- norme (metrike) (C – z anglického continuous) alebo maximovej norme (metrike).
Ako už vieme, metrika či norma nemusí byť definovaná len takým spôsobom, ako sme uviedli vo vzťahu (1.15).
Podobne ako v príkladoch N-3, M-4 definujeme normu a metriku aj pre funkcie viac premenných.
Na priestore reálnych funkcií definovaných na oblasti G existujú aj iné metriky napríklad definujeme normu takto (podobne ako v príklade pre metrické priestory pre funkcie jednej reálnej premennej):

(1.20) $\|u\|_C = \max\limits_{x \in \overline{G}} |u(x)|$ a potom z nej odvodená metrika bude

(1.21) $\rho_C(u,v) = \max\limits_{x \in \overline{G}} |u(x) - v(x)|.$

Priestor s takto definovanou metrikou bude potom iný metrický priestor. Spravidla ho označujeme $C(\overline{G})$.

Poznámka 1.7:
Takto sme zaviedli dve známe normy a metriky na tej istej lineárnej množine **M,** pomocou ktorých môžeme nejakým spôsobom „merať“ vzdialenosť dvoch funkcií – prvkov lineárneho normovaného priestoru. Teraz si ukážeme na tvrdení a príklade, aký je vzájomný vzťah týchto dvoch metrík.

Príklad 1.2
Ak sú funkcie „blízke“ vo všetkých bodoch oblasti $\overline{\mathrm{G}}$, to je ak pre nejaké malé $\varepsilon > 0$ platí:

(1.22) $|\mathrm{u(x)} - \mathrm{v(x)}| \le \varepsilon \quad \forall \mathrm{x} \in \overline{\mathrm{G}}$,

potom aj ich metrika v priestore $C(\overline{G})$, to je vzdialenosť medzi nimi je malá: $\rho_C(u,v) \le \varepsilon$. Platí to aj opačne: ak je metrika malá aj vzdialenosť medzi funkciami v každom bode je malá.
Tento fakt vyplýva priamo z definície maximovej metriky a faktu, že maximum sa dosahuje v nejakom bode $z \in \overline{G}$:

Iná je situácia pre metriku odvodenú z normy (1.7).
Ak je rozdiel funkcií malý, je aj metrika malá: teda, ak platí (1.22), potom

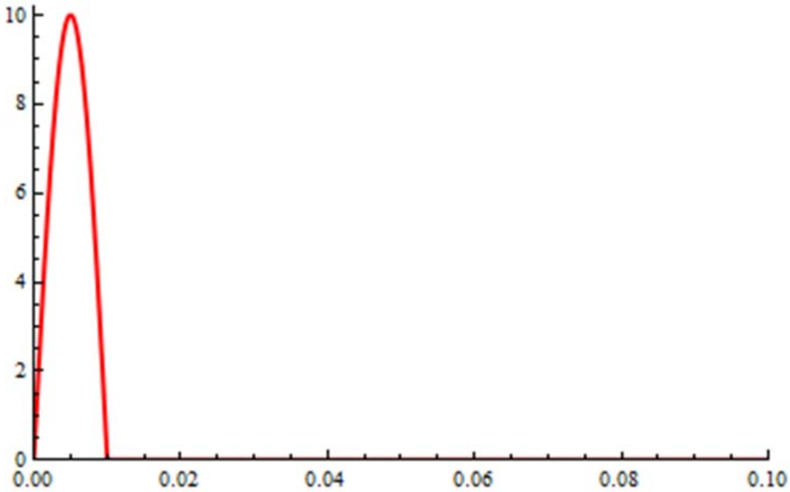
$\rho(\mathrm{u},\mathrm{v}) = \left(\int\limits_G (\mathrm{u(x)} - \mathrm{v(x)})^2 \mathrm{dx} \right)^{1/2} \le \left(\int\limits_G (\varepsilon)^2 \mathrm{dx} \right)^{1/2} = \varepsilon\sqrt{\mathrm{P}}$, kde P je obsah (objem) oblasti G. Opačné tvrdenie neplatí.

Príklad 1.3 [R]:
Nech sú dané funkcie

$$u(x)=\begin{cases}10\sin(100\pi x) & 0\le x\le 0{,}01\\ 0 & 0{,}01\le x\le 1\end{cases}$$

$$\mathrm{v(x)=0} \quad 0\le \mathrm{x} \le 1$$

Pre tieto funkcie je $\rho(\mathrm{u,v})=\left(\int_0^1 (\mathrm{u(x)-v(x)})\,\mathrm{dx}\right)^{1/2}\approx 0.224$. Ako vidno metrika má malú hodnotu, ale vzdialenosť týchto funkcií, napr. v bode $x=0{,}005$ je veľká v porovnaní s metrikou (rovná sa 10), ako vidno aj na Obrázku 1.1.



Obrázok 1.1

Budeme tým chápať funkcie, ktorých vzdialenosť je malá, teda platí
$\rho(\mathrm{u,v})\le\varepsilon$, pre vhodne zvolené kladné reálne číslo ε a nejakú konkrétnu metriku.

Poznámka 1.8:
V numerickej a inžinierskej praxi pri odhadoch chýb zohráva použitie určitej metriky veľký význam nielen pri interpretácii a porozumení chyby, ktorej sa dopúšťame pri použití príslušnej normy, ale v neposlednom rade aj pri numerickej analýze a odhadoch chýb pre riešenia, ktoré, ako uvidíme neskôr, nemusia byť riešenia v klasickom zmysle.

Lebesgueov integrál

V ďalších kapitolách budeme predpokladať, že čitateľ vie aspoň niečo z teórie tzv. Lebesgueovho integrálu, nemusí to byť zase veľmi veľa a pri jednoduchých funkciách je to aj tak obyčajný integrál alebo jeho intuitívne rozšírenie (keď napríklad funkcia nie je spojitá alebo nie je definovaná v niektorých bodoch). Ale pre istotu si o nich niečo málo povieme.

Vyššie zavedená definícia priestoru funkcií so skalárnym súčinom (1.1) sa dá rozšíriť aj na širšiu triedu funkcií, ako je množina všetkých spojitých funkcií na $\overline{\mathrm{G}}$. Integrál, ktorý je v definícii skalárneho súčinu môžeme chápať aj v Lebesgueovom zmysle a tak rozšíriť základnú množinu funkcií. Lebesgueova miera (často budeme používať len výraz miera), Lebesgueov integrál, jeho definícia a základné vlastnosti pozri napr. [R], alebo pozri [L]. Preto teraz len veľmi stručne.

Definíciu Lebesgueovho integrálu najskôr urobíme pre funkcie jednej premennej, teda oblasť integrovania je nejaká množina reálnych čísel.
Bod P sa nazýva **vnútorný bod množiny M**, ak existuje nejaké okolie tohto bodu, celé ležiace v množine M. (Tento bod teda patrí do množiny M).
Množina M sa nazýva **otvorená,** ak každý jej bod je vnútorný bod. (príklad –otvorený interval).
Zjednotenie spočítateľne mnoho otvorených množín je otvorená množina.
Množinu nazývame **ohraničená,** ak celá leží v nejakom intervale (-R,R), kde R je dostatočne veľké číslo.

Veta 1.4.:
Každú neprázdnu ohraničenú otvorenú množinu M možno vytvoriť ako zjednotenie nanajvýš spočítateľne mnoho otvorených intervalov I_k, ktoré sa neprekrývajú (disjunktné) a ktorých koncové body nepatria do danej množiny.

Bod P sa nazýva **hromadný bod množiny M,** ak v každom jeho ľubovoľne malom okolí leží nekonečne mnoho bodov množiny M (tento bod môže a nemusí patriť do M).
Množina M´ všetkých hromadných bodov množiny M sa nazýva **derivovaná množina M.** Ak je $M' \subset M$, potom množinu M nazývame **uzavretá** (príklad – uzavretý interval).
Prienik konečného počtu uzavretých množín je uzavretá množina.
Interval $(-\infty,\infty)$ je zároveň uzavretá aj otvorená množina.

Veta 1.5.:
Každá neprázdna uzavretá množina N je alebo uzavretý interval alebo sa dá vytvoriť tak, že z vhodného uzavretého intervalu I vyberieme konečný alebo spočítateľný počet otvorených intervalov I_k , ktoré sa neprekrývajú a ktorých koncové body patria do danej množiny.

Lebesgueova miera

Definícia Lebesgueovho integrálu je založená na pojme tzv. Lebesgueovej miery. Táto je vhodným zobecnením pojmu dĺžky intervalu. Určitej triede množín tzv. **Lebesgueovsky merateľným množinám** je priradená tzv**. Lebesgueova miera,** označujeme ju mM alebo µM alebo measM, ktorá má určité vlastnosti analogické ako dĺžka (aditívnosť). Miera prázdnej množiny je definitoricky nulová. Miera ohraničeného intervalu je jeho dĺžka. Ak je M otvorená množina, potom podľa **Vety 1.4** definujeme jej mieru ako

(1.23) $$mM = \sum_k mI_k \ .$$

Takto sa dá definovať miera ľubovoľnej neprázdnej ohraničenej otvorenej množiny M. Ak je N uzavretá množina, potom podľa **Vety 1.5** definujeme jej mieru

(1.24) $$mN = mI - \sum_k mI_k \ .$$

Takto je definovaná miera ľubovoľnej neprázdnej uzavretej množiny M.
Nech teraz M je ľubovoľná ohraničená neprázdna množina, nemusí byť ani otvorená ani uzavretá.

Definícia 1.8:
Vonkajšou (vnútornou) Lebesgueovou mierou neprázdnej ohraničenej množiny M rozumieme infimum mier všetkých ohraničených otvorených množín, ktoré obsahujú množinu M. (suprémum mier všetkých ohraničených uzavretých množín, ktoré obsahuje množina M). Označenie m^*M, (m_*M).

(1.25) $m^*M = \inf_N mN, \quad m_*M = \sup_N mN$

Pri infime uvažujeme systém ohraničených otvorených množín takých, že $M \subset N$. V prípade supréma uvažujeme systém ohraničených uzavretých množín takých, že $N \subset M$.

Tvrdenie 1.3.:
Pre každú neprázdnu ohraničenú množinu platí

(1.26) $0 \le m_*M \le m^*M$.

Definícia 1.9.:
Ak platí $m_*M = m^*M$, hovoríme, že množina M je **merateľná v Lebesgueovom zmysle** (Lebesgueovsky merateľná, stručne merateľná) a pod jej mierou rozumieme spoločnú hodnotu vonkajšej a vnútornej miery:

(1.27) $mM = m_*M = m^*M$.

Príklad 1.4.:
Dokážte, že množina $\frac{1}{n}, n = 1,2,...$ je množina miery nula.
Podobným spôsobom sa dá ukázať, že ak je M ľubovoľná spočítateľná ohraničená množina, jej miera je nula.
Dá sa ukázať, že existujú aj Lebesgueovsky nemerateľné množiny. V technických a inžinierskych aplikáciách sa používajú len merateľné množiny.
Pojem Lebesgueovsky merateľná množina sme zaviedli iba pre ohraničené množiny a takto ho budeme aj používať. Pod pojmom „skoro všade“ budeme stručne označovať „ s výnimkou bodov tvoriacich množinu nulovej miery“.

Definícia 1.10.:
Nech f(x) je reálna funkcia definovaná na ohraničenej merateľnej množine M Ak je množina všetkých x z M pre ktoré platí f(x)<C merateľná, ak za C zvolíme akékoľvek číslo, hovoríme, že **f je na množine M Lebesgueovsky merateľná.**

Vlastnosti Lebesgueovsky merateľných funkcií:
Nech f a g sú na M Lebesgueovsky merateľné funkcie. Potom aj af(x)+bg(x) pre ľubovoľné reálne čísla a, b je Lebesgueovsky merateľná funkcia.

Ak je f Lebesgueovsky merateľná funkcia, potom aj $|f|$ je Lebesgueovsky merateľná funkcia.
Všetky funkcie spojité a po častiach spojité sú Lebesgueovsky merateľné.
Funkcie bežnej technickej, inžinierskej a prírodovedeckej praxe sú Lebesgueovsky merateľné.

Lebesgueov integrál pre ohraničené funkcie.

Nech na ohraničenej merateľnej množine M je daná ohraničená merateľná funkcia f: $k<f(x)<K$, x z M. Na intervale (k,K) zvoľme body $y_1<y_2 \ldots <y_{n-1}$ a $y_0=k$, $y_n=K$. Takže interval <k,K> sme rozdelili na n podintervalov $<y_i, y_{i+1}>$, i=0, 1, ..., n-1. Toto delenie označíme d. Ďalej označíme M_i , i=1, 2, ..., n množinu všetkých tých x z m, pre ktoré platí
$y_{i-1} \le f(x) \le y_i$ a k zvolenému deleniu zostrojme horné resp. dolné súčty:

$$(1.28) \quad S(d) = \sum_{j=1}^{n} y_j mM_j, \quad s(d) = \sum_{j=1}^{n} y_{j-1} mM_j ,$$

kde mM_j je miera množiny M_j. Zvolíme všetky možné delenia d intervalu <k,K>, dostaneme určitú množinu horných a dolných súčtov. Obe tieto množiny sú množiny reálnych čísel. Dá sa ukázať, že pre každú ohraničenú merateľnú funkciu definovanú na merateľnej množine M sa infimum množiny horných Lebesgueových súčtov rovná suprému množiny dolných Lebesgueových súčtov.

Definícia 1.11:
Spoločnú hodnotu infima množiny horných Lebesgueových súčtov a supréma množiny dolných Lebesgueových súčtov nazývame **Lebesgueov integrál** ohraničenej merateľnej funkcie f na merateľnej množine M a označujeme

$$(1.29) \quad \int_M f(x)dx.$$

Ak by hrozila zámena s iným typom integrálov označujeme ho písmenom L pred integrál.
Potom môžeme hovoriť o **funkciách integrovateľných v Lebesgueovom zmysle.**
Pre ohraničené funkcie je Lebesgueov integrál podstatným zovšeobecnením Riemannovho integrálu v tom zmysle, že integračným oborom je ľubovoľná ohraničená merateľná množina. Platí, že ak je funkcia integrovateľná v Riemanovskom zmysle je aj Lebesgueovsky integrovateľná. Opačné tvrdenie neplatí.

Príklad 1.5.:
Funkcia f je daná predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \in I \end{cases}$$

Riemanov integrál z tejto funkcie neexistuje. Lebesgueov áno a rovná sa nule.
V technickej praxi sa spravidla stretávame s funckiami, ktoré sú aj Riemannovsky integrovateľné a teda sú aj Lebesgueovsky integrovateľné a tieto integrály sú rovnaké.

Lebesgueov integrál pre neohraničené funkcie.

Nech je daná merateľná neohraničená nezáporná funckia f na merateľnej oblasti M. Zvoľme číslo C>0 a definujme na množine M funkciu f_C takto:

$$f_C(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \le C \\ C, & f(x) > C \end{cases}$$

Táto funkcia je na M merateľná a ohraničená. Preto existuje jej Lebesgueov integrál $\int_M f_C(x)dx$. Definujme potom

(1.30) $\int_M f(x)dx = \lim_{C\to\infty} \int_M f_C(x)dx$. Táto limita existuje, pretože limitná funkcia je neklesajúca funkcia parametra C. Pritom limita je buď konečná, alebo nie. V prvom prípade hovoríme, že je Lebesgueov integrál konvergentný v druhom prípade, že diverguje.

Ak je funkcia všeobecná, teda nie nutne nezáporná a neohraničená, potom zostrojíme

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \ge 0 \\ 0, & f(x) < 0 \end{cases} \qquad f_-(x) = \begin{cases} -f(x), & f(x) < 0 \\ 0, & f(x) \ge 0 \end{cases}$$

A platí: $f(x)=f_+(x)-f_-(x)$. Pritom obe funkcie $f_+(x), f_-(x)$ sú nezáporné a merateľné na M. Existujú teda integrály: $\int_M f_+(x)dx$ **a** $\int_M f_-(x)dx$ pričom nemusia byť konečné.

Hovoríme, že integrál $\int_M f(x)dx$ **existuje** a definujeme ho

(1.31) $\int_M f(x)dx = \int_M f_+(x)dx - \int_M f_-(x)dx$ ak aspoň jeden z týchto integrálov konečný.

V prípade, že sa oba integrály rovnajú plus nekonečnu, nemá pravá strana zmysel a hovoríme, že integrál **neexistuje.**

Ak je prvý integrál nekonečný a druhý konečný, potom platí, že integrál $\int_M f(x)dx$ **je divergentný.** Ak je prvý integrál konečný a druhý nekonečný aj v tomto prípade je integrál $\int_M f(x)dx$ **divergentný.**

Vlastnosti Lebesgueovho integrálu:

(1.32) $f(x) \le g(x) \quad v \quad M \Rightarrow \int_M f(x)dx \le \int_M g(x)dx$

(1.33) $\left|\int_M f(x)dx\right| \le \int_M |f(x)|dx$

(1.34) $\int_M (af(x) + bg(x))dx \le a\int_M f(x)dx + b\int_M g(x)dx \quad a,b \in R$

Niektoré vlastnosti Lebesgueovho integrálu, sú ale podstatne iné, ako vlastnosti Riemanovho integrálu, hlavne, keď pracujeme s funkcionálnymi priestormi ako je napríklad priestor $L_2(G)$, kde napríklad pre úplnosť týchto priestorov má Lebesgueov integrál prvoradý význam.

Lebesgueovu definíciu integrálu môžeme prirodzeným spôsobom rozšíriť aj na viacrozmerné prípady.
Napríklad rozšírenie v dvojdimenzionálnom priestore. Význam otvoreného intervalu tu má otvorený štvorec a obdobne sa definuje aj okolie bodu, ako otvorený štvorec. Preto definícia vnútorného a hromadného bodu sú bez zmeny. Treba zmeniť definíciu miery otvorenej ohraničenej množiny, pretože veta 17.1 platí pre konečné alebo spočítateľné zjednotenie uzavretých štvorcov, ktoré nemajú spoločné vnútorné body. Lebesgueovu mieru štvorca, ktorému môže patriť časť alebo celá jeho hranica definujeme ako druhú mocninu dĺžky jeho strany. Potom mieru neprázdnej otvorenej ohraničenej množiny M môžeme definovať ako súčet mier uzavretých štvorcov, z ktorých je táto množina vytvorená. Mieru neprázdnej ohraničenej uzavretej množiny N potom definujeme ako rozdiel mier niektorého otvoreného štvorca N_1, v ktorom N leží a množiny N_1-N. Analogicky potom definujeme vonkajšiu a vnútornú mieru ľubovoľnej neprázdnej ohraničenej množiny. Budeme mať opäť pojem ohraničenej Lebesgueovsky merateľnej množiny. Potom analogicky definujeme pojem merateľnej funkcie a pre každú merateľnú funkciu definujeme pojem Lebesgueovho integrálu.

Cvičenia:

Človek sa múdry vraj nerodí, ale sa múdry stáva, a to je tak všade aj s futbalom alebo s hudbou, ani Hamšík ani Liszt to nemali hneď, ale museli priložiť ruku k dielu...takže, keď vonku bude pršať ^{N}...

Lineárne priestory

1.1. Označme **S** množinu všetkých polynomických funkcií stupňa nanajvýš n definovaných na oblasti $\overline{\mathrm{G}}$. Ukážte, že **S** je lineárny priestor.

1.2. Vyberme z množiny **M** z príkladu 1.1. množinu všetkých takých funkcií, pre ktoré platí: $|u(x)| \leq 7, \quad \forall x \in G$. Označme túto novú množinu **H**. Ukážte, že množina **H** nie je lineárny priestor.

Príklady iných ako funkcionálnych lineárnych priestorov:

1.3 Ukážte, že množina všetkých komplexných čísel s obvyklou definíciou súčtu komplexných čísel a násobenia reálnym číslom tvorí lineárny priestor

1.4. Ukážte, že množina všetkých konvergentných postupností reálnych čísel s obvyklou definíciou súčtu postupností a násobenia reálnym číslom je lineárny priestor.

1.5. Ukážte, že množina všetkých ohraničených postupností reálnych čísel s obvyklou definíciou súčtu postupností a násobenia reálnym číslom je lineárny priestor. Je to lineárny podpriestor (čo to presne je si uvedieme neskôr) lineárneho priestoru z vyššie uvedeného príkladu.

Skalárny súčin, norma

1.6. Nech oblasť $\overline{\mathrm{G}}$ je štvorec s hranou 1 a ľavým spodným vrcholom v počiatku súradnicovej sústavy. Majme dve funkcie $\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2, \quad \mathrm{v}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 2$. Vypočítajte skalárny súčin z týchto funkcií v zmysle vzťahu (1.2).

1.7. Uvažujme na intervale $< 0, \pi >$ funkcie $\mathrm{u} = \cos \mathrm{x}, \quad \mathrm{v} = \sin \mathrm{x}$. Nájdite ich normu v zmysle vzťahu (1.8). Na tomto konkrétnom prípade overte platnosť vzťahu (1.12).

1.8. Pre funkcie z cvičenia **1.6**. nájdite hodnotu normy týchto funkcií v zmysle vzťahu (1.20).

Metrika

1.9. Pre funkcie z cvičenia **1.6**. nájdite hodnotu metriky odvodenej z normy (1.8) a potom aj z normy (1.20).

1.10. Majme lineárny priestor **M.** Definujme

$$\rho(f,g) = \begin{cases} 1, & ak \quad f = g \\ 0, & ak \quad f \neq g. \end{cases}$$

Ukážte, že dané zobrazenie má vlastnosti metriky.

1.11. Na lineárnom priestore z cvičenia **1.5** s prvkami $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ definujme zobrazenie:

$\rho(x, y) = \sup\limits_k |y_k - x_k|$. Ukážte, že je to metrika na tomto priestore.

Ďalšie úlohy:

1.12. Nech M je množina všetkých konštantných funkcií definovaných na intervale <0,1>. Zistite, či takto definovaná množina je lineárna množina.

1.13. Nech N je množina všetkých lineárnych funkcií definovaných na intervale <0,1>. Zistite, či takto definovaná množina je lineárna množina.

1.14. Nech A je množina všetkých polynómov stupňa n definovaných na intervale <0,1>. Zistite, či takto definovaná množina je lineárna množina.

1.15. Nech B je množina všetkých funkcií definovaných a spojite diferencovateľných na oblasti $G \subset R^N$. Definujme funkciu $((.,.)) : BxB \to R$ takto:

$$((u,v)) = \int_G \nabla u . \nabla v dx \qquad \forall u, v \in B.$$

Definuje táto funkcia skalárny súčin? Ak nie, prečo?

1.16. Ak je odpoveď v predchádzajúcom cvičení záporná, vedeli by ste upraviť množinu B na $\overline{B}$ tak, aby vyššie definovaná funkcia bola skalárny súčin na $\overline{B} x \overline{B}$?

1.17. Na lineárnej množine **M** z príkladu **1.1** definujme funkciu $\| . \|_1 : L \to R$ takto: $\| u \|_1 = \int_G |u(x)| dx \qquad \forall u \in L$. Ukážte, že táto funkcia definuje normu na lineárnej množine **M.**

1.19. Funkcia f: R → R je prostá. Je zobrazenie definované ako $\rho(x, y) = | f(x) - f(y)|$ metrikou na R?

1.20. Aké podmienky musí spĺňať funkcia f: R → R, aby zobrazenie $\rho(x, y) = | f(x-y)|$ bola metrika na R?

2. Priestor L_2

V tejto časti sa budeme zaoberať tým asi najdôležitejším priestorom funkcionálnej analýzy. Je dostatočne veľký, má veľmi pekné vlastnosti a aj je veľmi užitočný.

Teraz využijeme základné vedomosti z poslednej kapitoly o Lebesgueovom integrále, a vybudujeme nový priestor s podobne zavedeným skalárnym súčinom (1.1) ale integrál budeme odteraz chápať v Lebesgueovom zmysle.

Definícia 2.1:
Hovoríme, že reálna funkcia $u(x)$ je integrovateľná v oblasti G s druhou mocninou (kvadrátom), ak existujú a sú konečné integrály (v Lebesgueovom zmysle) $\int_G u(x)dx$ a $\int_G u^2(x)dx$.

Príklad 2.1:
Každá funkcia spojitá alebo po častiach spojitá v uzavretej oblasti $\overline{G}$ je integrovateľná s kvadrátom.

Poznámka 2.1:
Integrály v predchádzajúcej definícii chápeme v Lebesgueovom zmysle.

Tvrdenie 2.1:
Množina všetkých reálnych funkcií integrovateľných v oblasti G s druhou mocninou tvorí lineárny priestor, označíme ho **L**.
Dôkaz:
Stačí ukázať, že lineárna kombinácia funkcií integrovateľných s kvadrátom je tiež integrovateľná s kvadrátom:
$$\forall f, g \in L, \forall \alpha, \beta \in R \qquad \int_G (\alpha f(x) + \beta g(x))^2 dx \leq 2(\alpha^2 \int f(x)^2 dx + \beta^2 \int g(x)^2 dx) < \infty,$$
kde sme využili jednoduchú nerovnosť: $\forall a, b \in R : (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$.
Túto dostaneme celkom jednoducho keď si uvedomíme:
$$\forall a, b \in R : 0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow 2ab \leq a^2 + b^2$$
a teda
$$\forall a, b \in R : (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq 2(a^2 + b^2)$$
□

Definícia 2.2:
Pre reálne funkcie $u(x), v(x)$ integrovateľné v oblasti G s druhou mocninou chceme definovať podobne ako v predchádzajúcej kapitole skalárny súčin, normu aj metriku.

$$(2.1) \qquad (u, v) = \int_G u(x)v(x)dx$$

(2.2) $\|u\| = \sqrt{(u,u)} = \left(\int\limits_G u(x)^2 dx \right)^{1/2}$

(2.3) $\rho(u,v) = \|u - v\| = \left(\int\limits_G (u(x) - v(x))^2 dx \right)^{1/2}$

Poznámka 2.2:
Ak je funkcia spojitá v $\overline{G}$, potom zo vzťahu $\int\limits_G u^2(x)dx = 0$ platí, že $u(x) = 0$ v G. Ak ale platí $u(x) \in L_2(G)$, potom z uvedeného vzťahu sa nedá usúdiť, že $u(x) = 0$. Napríklad funkcia všade nulová, len v jednom bode nenulová. Dokonca to platí aj pre funkciu, ktorá má nenulových bodov spočítateľne veľa. V týchto dokonca funkcia nemusí byť definovaná. To isté platí aj pre funkciu, ktorá má počet takýchto bodov množiny Lebesgueovej miery nula.

Definícia 2.4:
Nech sú reálne funkcie $u(x), v(x)$ integrovateľné v oblasti G s druhou mocninou a v oblasti G sa rovnajú **skoro všade**, to jest líšia sa len na oblasti s Lebesgueovou mierou nula. Hovoríme. že v priestore $L_2(G)$ sú tieto funkcie **ekvivalentné.** Píšeme u = v.

V tomto priestore to budú sebe rovné funkcie. Takéto funkcie sú charakterizované vlastnosťou

(2.4) $\int\limits_G (u(x) - v(x))^2 dx = 0$.

Funkcie ktoré nie sú ekvivalentné sú charakterizované vlastnosťou

(2.5) $\int\limits_G (u(x) - v(x))^2 dx \neq 0$.

Ak vezmeme funkcie ekvivalentné s nulovou funkciou, je len jediná funkcia spojitá a všade sa identicky rovná nule.

Takže, ak napíšeme, že zo vzťahu $\int\limits_G u^2(x)dx = 0$ plynie $u = 0$ v $L_2(G)$, znamená to, že funkcia u je v tomto priestore ekvivalentná nulovej funkcii (identicky sa rovná nule až na množinu miery nula). Takto vytvorené triedy ekvivalencií tvoria teda funkcie, ktoré sa líšia len na množine s mierou nula a predstavujú v tomto priestore prvky daného priestoru. Tento fakt budeme mať na zreteli vždy, keď budeme hovoriť o tomto priestore, aj keď budeme triedu ekvivalentných funkcií ako prvok tohto priestoru nazývať funkcia.

Definícia 2.3:
Lineárny priestor funkcií integrovateľných v oblasti G s druhou mocninou s metrikou (2.3) nazývame **metrický priestor** $L_2(G)$.

Veta 2.1:
Nech sú $u(x), v(x), z(x), u_1(x), u_2(x)$ ľubovoľné funkcie z $L_2(G)$ a a, a_1, a_2 sú ľubovoľné reálne čísla. Pre skalárny súčin (2.1), normu (2.2) a vzdialenosť (2.3) platia vzťahy:

(2.6) $(u, v) = (v, u),$

(2.7) $(a_1 u_1 + a_2 u_2, v) = a_1(u_1, v) + a_2(u_2, v),$

(2.8) $(u, u) \geq 0,$

(2.9) $(u, u) = 0 \Leftrightarrow u(x) = 0 \quad v \quad G$

(2.10) $\|u\| \geq 0,$

(2.11) $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u(x) = 0 \quad v \quad G,$

(2.12) $\|au\| = |a|.\|u\|,$

(2.13) $|(u, v)| \leq \|u\|.\|v\|,$

(2.14) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|,$

(2.15) $\big|\|u\| - \|v\|\big| \leq \|u - v\|,$

(2.16) $\rho(u, v) \geq 0,$

(2.17) $\rho(u, v) = 0 \Leftrightarrow u(x) = v(x) \quad v \quad G,$

(2.18) $\rho(u, v) = \rho(v, u),$

(2.19) $\rho(u, z) \leq \rho(u, v) + \rho(v, z).$

Dôkaz:
Po zavedení tried ekvivalencií platí aj vzťah (2.9) a (2.11), ostatné sú priamym dôsledkom toho, že (2.1) definuje skalárny súčin, (2.2) indukovanú normu a (2.3) indukovanú metriku. □

Nerovnosť (2.13) je v literatúre známa ako **Cauchyho-Schwarzova (Hölderova alebo Cauchyho-Buňakovského nerovnosť).**
V priestore $L_2(G)$ má tvar

(2.20) $$\left|\int_G u(x)v(x)dx\right| \leq \left(\int_G u^2(x)dx\right)^{1/2}\left(\int_G v^2(x)dx\right)^{1/2}.$$

Cvičenia:

2.1. Ukážte, že funkcia $u(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ je funkcia na intervale (0,1) integrovateľná a je aj integrovateľná s druhou mocninou.

2.2. Ukážte, že funkcia $u(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ nie je integrovateľná s kvadrátom na intervale (0,1).

2.3. Uvažujme na intervale $< 0,2 >$ funkcie $u = \ln x,\ v = x$. Nájdite ich normu v priestore $L_2((0,2))$. Na tomto konkrétnom prípade overte platnosť Cauchyho-Schwarzovej nerovnosti.

3. Konvergencia v priestore L_2

Konvergencia

V tejto časti pristúpime k pojmu konvergencie v priestore zavedenom v predchádzajúcej časti. Pripomíname len, že pojem konvergencie, tak ako bude definovaný, sa dá definovať pre každý metrický priestor a je to obdoba toho, čo čitateľ pozná z klasickej analýzy pre konvergenciu funkcií.
Pre aplikovanú matematiku a numerickú analýzu je to kľúčový pojem, bez ktorého sa nedá vybudovať konvergencia približného riešenia k presnému riešeniu v nejakom rozumnom zmysle.

Pripomíname, že v ďalšom budeme skalárny súčin, normu a metriku v priestore $L_2(G)$ označovať : (u,v), $\|u\|$, $\rho(u,v)$.

Definícia 3.1:
Hovoríme, že postupnosť funkcií $\{u_n\} \in L_2(G)$ **konverguje v priestore** $L_2(G)$ k funkcii $u \in L_2(G)$, ak platí:

(3.1) $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(u_n, u) = 0$,

teda $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int\limits_G (u_n(x)-u(x))^2\,dx\right)^{1/2} = 0$.

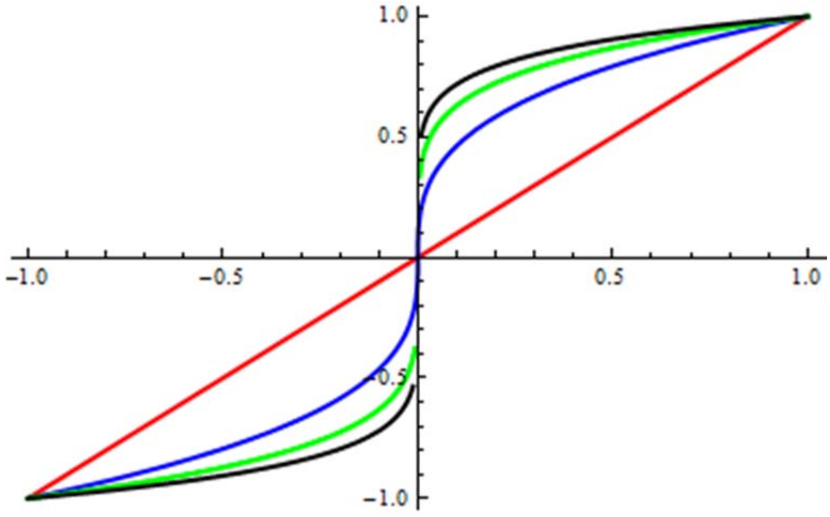
Zapisujeme $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$ v $L_2(G)$. Stručne $u_n \to u$ v $L_2(G)$.

Funkciu u(x) nazývame **limita postupnosti** $\{u_n(x)\}$ v $L_2(G)$.

Príklad 3.1 [R]:
Máme postupnosť funkcií $u_n(x) = x^{\frac{1}{2n-1}}$ na intervale (-1,1) (pozri Obrázok 3.1). Každá z nich je spojitá na intervale $<-1,1>$, teda sú z priestoru $L_2(-1,1)$. Ukážte, že

funkcia $u(x) = \begin{cases} -1 & \text{pre} \quad -1 \le x < 0 \\ 0 & \text{pre} \quad x = 0 \\ 1 & \text{pre} \quad 0 < x \le 1 \end{cases}$

je limitou uvedenej postupnosti v priestore $L_2(-1,1)$. Funkcia u(x) nie je spojitá funkcia aj keď postupnosť k nej konvergujúca je postupnosť spojitých funkcií.
(Dôkaz bude ponechaný na cvičenie).



Obrázok 3.1

Pripomíname, že funkcia u nie je jediná možná funkcia, ku ktorej postupnosť konverguje v $L_2(-1,1)$. Táto konverguje ku každej funkcii, ktorá je s ňou ekvivalentná, teda k tomuto prvku z $L_2(-1,1)$.

Definícia 3.2 (ekvivalentná definícia):
Hovoríme, že postupnosť funkcií $u_n \in L_2(G)$ **konverguje v priestore** $L_2(G)$ k funkcii $u \in L_2(G)$, ak platí:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N : \forall u_n; \quad n > n_0 : \rho(u_n, u) < \varepsilon.$$

Poznámka 3.1:
V každom metrickom priestore môžeme vysloviť definíciu konvergencie analogickú definícii v metrickom priestore $L_2(G)$.

Veta 3.1:
Postupnosť funkcií $u_n \in L_2(G)$ môže mať v priestore $L_2(G)$ **najviac jednu limitu** (túto tvorí prvok navzájom ekvivalentných funkcií, to je takých, ktoré sa líšia na množine miery nula).
Dôkaz:
Sporom. Nech existujú dve takéto limity u a v, pre ktoré platí $u \neq v$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \rho(u_n, u) = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \rho(u_n, v) = 0 \Rightarrow$$

$$\rho(u,v) = \lim_{n\to\infty} \rho(u,v) \leq \lim_{n\to\infty} \rho(u_n, u) + \lim_{n\to\infty} \rho(u_n, v) = 0$$

Z posledného vzťahu a vlastnosti (2.7) metriky dostávame u = v, čo je spor. □

Poznámka 3.2:
Pozor, hovoríme o funkcii z priestoru $\mathrm{L}_2(\mathrm{G})$, teda ide o ekvivalenciu funkcií, ktoré sa líšia na množine miery nula. Preto aj funkcia $v(x) = \begin{cases} -1 & \text{pre} \quad -1 \le x < 0 \\ 1 & \text{pre} \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$
je limitou postupnosti z predchádzajúceho príkladu.

Keďže sme v tejto časti zaviedli nový pojem konvergencie, je celkom pochopiteľné, že nás bude zaujímať v akom vzťahu je tento nový pojem k už známym pojmom konvergencie z klasickej analýzy. Táto hierarchia konvergencií (hovoríme o tom, ktorá konvergencia je „silnejšia“) je pre numerickú analýzu veľmi dôležitá.

Veta 3.2:
Ak postupnosť funkcií $\{u_n(x)\}$ konverguje k funkcii u(x) **rovnomerne,** potom **konverguje aj v priestore** $\mathrm{L}_2(\mathrm{G})$ k tejto funkcií. Opačné tvrdenie neplatí.
Dôkaz:
Treba dokázať podľa definície (3.2)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N : \forall u_n; \quad n > n_0 : \left(\int_G (u_n - u)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

Vieme, že postupnosť konverguje rovnomerne, takže platí:

$\forall \varepsilon > 0 \forall x \in G \quad \exists n_0 \in N : \forall u_n; \quad n > n_0 : |u_n(x) - u(x)| < \varepsilon$ a teda stačí zvoliť

$$\frac{\varepsilon}{m(G)} \forall x \in G \quad \exists n_0 \in N : \forall u_n; \quad n > n_0 : |u_n(x) - u(x)| < \frac{\varepsilon}{m(G)},$$

kde m(G) je miera oblasti G.
Z toho máme

$$\left(\int_G (u_n - u)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} < \left(\int_G \left(\frac{\varepsilon}{m(G)} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < m(G) \frac{\varepsilon}{m(G)} = \varepsilon.$$

To, že opačné tvrdenie neplatí vyplýva z príkladu (3.1), kde sme ukázali konvergenciu v $\mathrm{L}_2(\mathrm{G})$. Postupnosť ale nemôže konvergovať rovnomerne, pretože ide o postupnosť spojitých funkcií a tá rovnomerne konverguje k spojitej funkcii. Z jednoznačnosti limity potom dostávame, že postupnosť rovnomerne nekonverguje.

Úplnosť

Definícia 3.3:
Postupnosť funkcií $u_n \in \mathrm{L}_2(\mathrm{G})$ sa nazýva **cauchyovská (fundamentálna)** v priestore $\mathrm{L}_2(\mathrm{G})$, ak platí:

$$(3.2) \quad \lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} \rho(u_m, u_n) = 0.$$

Poznámka 3.3:
Pojem cauchyovskej postupnosti platí v tejto podobe aj pre iné metrické priestory.

Definícia 3.4:
Postupnosť funkcií u_n z metrického priestoru P s metrikou ρ_P sa nazýva **cauchyovská (fundamentálna)** v priestore P, ak platí:

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \rho_P(u_m, u_n) = 0.$$

Veta 3.3:
Každá postupnosť konvergentná v danom metrickom priestore P je v tomto priestore cauchyovská.
Dôkaz:
Ak je postupnosť konvergentná, tak platí
.

$$0 = \lim_{m\to\infty} \rho(u_m, u), \qquad 0 = \lim_{n\to\infty} \rho(u_n, u) \qquad \Rightarrow$$
$$0 \le \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \rho(u_m, u_n) \le \lim_{m\to\infty} \rho(u_m, u) + \lim_{n\to\infty} \rho(u_n, u) = 0.$$

Z toho okamžite dostávame tvrdenie vety 3.3.□

Poznámka 3.4:
Opačné tvrdenie neplatí. O tom sa ľahko presvedčíme na postupnosti z príkladu 3.1, kde za základný priestor zvolíme priestor M všetkých spojitých funkcií definovaných na <-1,1> s metrikou odvodenou zo skalárneho súčinu (2.1). Ľahko sa ukáže, že táto postupnosť je v tomto priestore cauchyovská, ale nie je konvergentná, keďže konverguje k nespojitej funkcii.

Definícia 3.5:
Metrický priestor P sa nazýva **úplný** ak každá cauchyovská postupnosť je v ňom konvergentná. To jest ku každej cauchyovskej postupnosti u_n z tohto metrického priestoru P sa dá nájsť prvok u, ležiaci v tomto priestore, ktorý je limitou tejto postupnosti.

Príklad 3.2:
Euklidovský priestor so štandardnou metrikou je úplný priestor
(Cauchyho-Bolzanovo kritérium).

Veta 3.4 :
Priestor $L_2(G)$ **je úplný priestor**.
Dôkaz:
Čitateľ môže nájsť dôkaz napríklad v [K]. □

Poznámka 3.5:
Nie každý metrický priestor je úplný (pozri poznámku 3.4).

Hustota. Separabilnosť.

Metrika nám okrem pojmu konvergencie podľa metriky umožňuje zaviesť aj pojmy, ktoré sú bežne známe v obore reálnych čísel. Najmä pojem hustoty je pre funkcionálne priestory veľmi dôležitý, pretože hovorí o aproximácii funkcie z tohto priestoru nejakou funkciou z jej hustej podmnožiny (samozrejme, ide o aproximáciu v metrike funkcionálneho priestoru, to majme vždy na pamäti), ale toto už z reálnych čísel vieme, že ľubovoľné reálne číslo môžeme s akoukoľvek presnosťou aproximovať číslom racionálnym... a množina racionálnych čísel je predsa spočitateľná.

Definícia 3.6:
Nech je $\delta > 0$ ľubovoľné kladné reálne číslo. δ**- okolím funkci**e $u(x)$ v priestore $L_2(G)$ rozumieme množinu všetkých funkcií $v \in L_2(G)$, pre ktoré platí

(3.3) $\rho(u, v) < \delta$.

Príklad 3.3:
V priestore $L_2(0,1)$ ležia v δ-okolí nulovej funkcie zrejme napríklad všetky konštantné funkcie tvaru $v(x) = k, \quad k < \delta$.

Definícia 3.7:
Nech je M množina funkcií v priestore $L_2(G)$. Hovoríme, že funkcia $u \in L_2(G)$ je **hromadným bodom** tejto množiny M, ak v každom ľubovoľnom δ-okolí funkcie u leží nekonečne veľa funkcií z množiny M.

Veta 3.5:
Funkcia u je v priestore $L_2(G)$ hromadným bodom množiny M práve vtedy, ak existuje postupnosť funkcií $u_n \in M$, ktorá konverguje v $L_2(G)$ k funkcii u.
Dôkaz:
Prenechávame na cvičenie.

Poznámka 3.6:
Hromadný bod nemusí byť nutne prvkom množiny M.

Definícia 3.8:
Množina $\overline{M}$, ktorá vznikne zjednotením množiny M a všetkých jej hromadných bodov sa nazýva **uzáver** množiny M v priestore $L_2(G)$.
Ak platí $\overline{M} = M$, potom množinu M voláme **uzavretá**.

Definícia 3.9:
Množina M sa nazýva **hustá v priestore** $L_2(G)$**,** ak každá funkcia z priestoru $L_2(G)$ je jej hromadným bodom, to je $\overline{M} = L_2(G)$.

Definícia 3.10: (Ekvivalentná definícia)
Množina M sa nazýva hustá v priestore $L_2(G)$, ak ku každej funkcii u z priestoru $L_2(G)$ je možné nájsť postupnosť funkcií $u_n \in M$ konvergujúcich v $L_2(G)$ k funkcii u.

Poznámka 3.7:
Z poslednej definície vyplýva, že funkcie u a u_n sú v metrike priestoru $L_2(G)$ ľubovoľne blízko, ak je n dostatočne veľké. Množina M hustá v priestore $L_2(G)$ práve vtedy, keď každú funkciu z $L_2(G)$ možno s ľubovoľnou presnosťou aproximovať v metrike tohto priestoru funkciami z množiny M.

Poznámka 3.8:
Z Weierstrassovej vety je známe, že každú spojitú funkciu na uzavretom intervale $< a, b >$ možno s ľubovoľnou presnosťou aproximovať mnohočlenom, dokonca rovnomerne a teda tým skôr v priestore $L_2(a, b)$. Toto platí aj pre funkcie z $L_2(a, b)$.

Veta 3.6:
Množina všetkých **mnohočlenov** je v priestore $L_2(G)$ hustá.
Dôkaz:
pozri napríklad [K].

Veta 3.7:
Lineárny priestor všetkých **spojitých** funkcií v uzavretej oblasti $\overline{G}$ je hustý v $L_2(G)$.
Dôkaz:
pozri napríklad [K].

Definícia 3.11:
M sa nazýva **spočítateľná** množina, ak jej prvky sa dajú zostaviť do postupnosti, teda existuje vzájomne jednoznačné priradenie medzi danou množinou a množinou prirodzených čísel.

Definícia 3.12:
Množina je **nanajvýš spočítateľná** ak je alebo spočítateľná alebo konečná.

Definícia 3.13:
Metrický priestor je **separabilný** ak v ňom existuje nanajvýš spočítateľná množina hustá v tomto priestore.

Veta 3.8: Priestor $L_2(G)$ **je separabilný.**
Dôkaz :
pozri napríklad [K].

Rozklad priestoru $L_2(G)$ na ortogonálne podpriestory

V tejto podkapitole trošku predbehneme pojem ortogonálnosti, ktorému je venované viac priestoru v ďalšej podkapitole, ale výsledky v tejto časti uvedené logicky patria k vlastnostiam $L_2(G)$ *priestoru a tým zakončujú túto časť.*

Definícia 3.14:
Lineárnym podpriestorom priestoru $L_2(G)$ budeme nazývať **úplný** lineárny podpriestor priestoru $L_2(G)$ s príslušnou metrikou tohto priestoru.

Príklad 3.4:
Nech M je množina všetkých konštantných funkcií definovaných na intervale (0,1). Ukážte, že je to lineárny priestor. Ukážte, že s metrikou lineárneho priestoru $L_2(0,1)$ je to lineárny podpriestor priestoru $L_2(0,1)$.
Riešenie:
príkladu ponechávame ako cvičenie.

Príklad 3.5:
Nech L je množina spojitých funkcií na uzavretom intervale $<-1,1>$. Tento lineárny priestor nie je s metrikou priestoru $L_2(-1,1)$ úplným priestorom, preto nie je podpriestor $L_2(-1,1)$.
Riešenie:
príkladu ponechávame ako cvičenie.

Označme $M_{L_2(G)}$ lineárny priestor, kde $M \subset L_2(G)$ s metrikou priestoru $L_2(G)$.

Veta 3.9:
Priestor $M_{L_2(G)}$ je lineárnym podpriestorom priestoru $L_2(G)$ práve vtedy, keď je M uzavretá množina v $L_2(G)$.
Dôkaz:
ponechávame ako cvičenie

Veta 3.10:
Nech N je lineárny podpriestor priestoru $L_2(G)$. Nech u je ľubovoľná funkcia v priestore $L_2(G)$. Potom túto funkciu je možné jednoznačne rozložiť na súčet
(3.4) $\quad u(x) = v(x) + w(x),$
kde v je funkcia z lineárneho podpriestoru N a funkcia w je **ortogonálna** ku každej funkcii z N (to je (w,f) = 0 pre všetky f z N).
Funkcia v sa nazýva **ortogonálna projekcia** funkcie u do podpriestoru N. Vlastnosť funkcie w zapisujeme krátko $w \perp N$ a hovoríme, že w je **ortogonálna na podpriestor** N.
Dôkaz:
pozri napríklad v [L].

Príklad 3.6:
Uvažujme v priestore $L_2(0,1)$ lineárny podpriestor všetkých konštantných funkcií definovaných na intervale (0,1) s metrikou priestoru $L_2(0,1)$. Rozložte funkciu $u(x) \in L_2(0,1)$ na súčet, kde jeden sčítanec bude ortogonálna projekcia do uvedeného podpriestoru.
Riešenie:

Ak má takýto rozklad existovať musí sa daná funkcia dať napísať ako súčet konštantnej funkcie a nejakej inej funkcie, ktorá bude z ortogonálneho podpriestoru. Označme túto konštantnú funkciu ako a. Potom platí:
$u(x) = a + (u(x) - a)$, kde a musí byť taká konštanta, aby platilo: $w(x) = u(x) - a$ je kolmá na všetky konštantné funkcie, teda platí pre ľubovoľné

$$k \in R : \int_0^1 k(u(x) - a)dx = 0 \Rightarrow \int_0^1 ku(x)dx = \int_0^1 kadx \Rightarrow$$

$$k\int_0^1 u(x)dx = ka \Rightarrow a = \int_0^1 u(x)dx \qquad \forall k \neq 0,$$

v prípade, že k = 0 je to splnené automaticky.

Z toho hneď máme: $a = \int_0^1 u(x)dx,$ pretože konštanta k je ľubovoľná. Dostali sme, že projekciou funkcie u(x) do priestoru všetkých konštantných funkcií definovaných na intervale (0,1) s metrikou priestoru $\mathrm{L}_2(0,1)$ je konštantná funkcia $v(x) = \int_0^1 u(x)dx$.

Dá sa ukázať, že množina všetkých funkcií ortogonálnych k danému podpriestoru je tiež lineárny podpriestor priestoru $\mathrm{L}_2(\mathrm{G})$. Označme ho K. Hovoríme, že priestor $\mathrm{L}_2(\mathrm{G})$ je **ortogonálnym súčtom** podpriestorov N a K a zapisujeme

(3.5) $\qquad L_2(G) = N \oplus K.$

Podpriestoru K hovoríme **ortogonálny doplnok** podpriestoru N v priestore $\mathrm{L}_2(\mathrm{G})$.

Vlastnosti skalárneho súčinu

Veta 3.11:
Nech postupnosť $\{\mathrm{u}_\mathrm{n}(\mathrm{x})\}$ konverguje v priestore $\mathrm{L}_2(\mathrm{G})$ k funkcii u(x) a postupnosť $\{\mathrm{v}_\mathrm{n}(\mathrm{x})\}$ konverguje v priestore $\mathrm{L}_2(\mathrm{G})$ k funkcii v(x). Potom postupnosť skalárnych súčinov $(\mathrm{u}_\mathrm{n}, \mathrm{v}_\mathrm{n})$ konverguje k skalárnemu súčinu (u, v).

Stručne: $\mathrm{u}_\mathrm{n} \to \mathrm{u}, \mathrm{v}_\mathrm{n} \to \mathrm{v} \;\; \mathrm{v} \;\; \mathrm{L}_2(\mathrm{G}) \Rightarrow (\mathrm{u}_\mathrm{n}, \mathrm{v}_\mathrm{n}) \to (\mathrm{u}, \mathrm{v})$.

Dôkaz:
Z definície konvergencie v priestore $\mathrm{L}_2(\mathrm{G})$ vieme, že platí:

$$\left(\lim_{n\to\infty} \rho(u_n, u,) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty} \rho(v_n, v) = 0\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\| = 0 \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty} \|v_n - v\| = 0\right) \Leftrightarrow$$

Máme dokázať:
$\lim_{n\leftarrow\infty}\left((u_n, v_n) - (u, v) = 0\right)$, preto počítajme využijúc vlastnosti skalárneho súčinu a Cauchyho - Schwarzovu nerovnosť:

$$\left|\left((u_n, v_n) - (u, v)\right)\right| = \left|(u_n - u, v_n - v) + (u, v_n - v) + (v, u_n - u)\right| \leq$$

$$\left|(u_n - u, v_n - v)\right| + \left|(u, v_n - v)\right| + \left|(v, u_n - u)\right| \leq \|u_n - u\|\|v_n - v\| + \|u\|\|v_n - v\| + \|v\|\|u_n - u\|$$

Keď teraz v tomto výraze prejdeme k limite dostávame:

$0 \le \lim_{n\to\infty} |(u_n v_n) - (u,v)| \le \lim_{n\to\infty} \left(\|u_n - u\| \|v_n - v\| + \|u\| \|v_n - v\| + \|v\| \|u_n - u\| \right) = 0,$

kde sme využili vyššie uvedené vlastnosti konvergencie jednotlivých postupností. □

Dôsledok 3.1:

1. Ak je $u_n \to u,\ \ v\ \ L_2(G)\ \ v \in L_2(G) \Rightarrow (u_n, v) \to (u, v).$

2. Ak je $u_n \to u,\ \ v\ \ L_2(G) \Rightarrow \|u_n\| \to \|u\|.$

Dôkaz:
1. vyplýva okamžite z Vety 3.11, ak položíme $v_n(x) = v(x)$ pre každé $n \in N.$
2. vyplýva okamžite z Vety 3.11,ak položíme $v_n(x) = u_n(x)$ $v(x) = u(x)$ pre každé $n \in N.$ □

Veta 3.12:
Nech M je hustá množina v $\mathrm{L}_2(\mathrm{G})$ a nech u(x) je ortogonálna ku každej funkcii z množiny M potom u = 0 v $\mathrm{L}_2(\mathrm{G})$ (to je $(u,v) = 0, \quad \forall v \in M$).
Dôkaz:
M je hustá množina v $\mathrm{L}_2(\mathrm{G})$, teda sa dá nájsť taká postupnosť funkcií $u_n(x)$ z M , že platí: $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$ v $\mathrm{L}_2(\mathrm{G})$. Z predpokladu vety ale platí: $(u_n, u) = 0$ pre všetky $n \in N$. Z dôsledku 3.1 hneď máme
$\lim_{n\to\infty} (u_n, u) = (u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$ v $\mathrm{L}_2(\mathrm{G})$.□

Cvičenia:

3.1. Uvažujme na intervale $<0,1>$ postupnosť funkcií

$$u_n(x) = \begin{cases} 10\sin 10^{2n+1}\pi x & 0 \le x \le 10^{-(2n+1)} \\ 0 & 10^{-(2n+1)} \le x \le 1. \end{cases}$$

Ukážte, že $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = 0$ v $L_2(0,1)$. Uvedomte si, že napriek konvergencii v uvedenom priestore pre maximovú normu platí:

$$\max_{x\in<0,1>} |u_n(x) - u(x)| = 10, \forall n \in N, \quad kde \quad u(x) = 0 \quad v \quad L_2(0,1).$$

3.2. Ukážte konvergenciu postupnosti z príkladu 3.1.

3.3. Ukážte, že postupnosť z príkladu 3.1. je cauchyovská aj v priestore M pozri poznámku 3.3.

3.4. Ukážte, že v priestore $L_2(0,1)$ v δ-okolí nulovej funkcie ležia funkcie tvaru $v(x) = k, \ k \in R, \ |k| < \delta$.

3.5. Ukážte, že v priestore $L_2(0,1)$ v δ-okolí nulovej funkcie ležia aj funkcie z príkladu 3.1. pre dostatočne veľké n (pre aké?).

3.6. Nech množinu M predstavujú všetky funkcie definované v príklade 3.1. pre n =1, 2, ... Ukážte, že nulová funkcia je ich hromadný bod.

3.7. Ukážte, že lineárny priestor všetkých spojitých funkcií na intervale $<-1,1>$ nie je uzavretá množina v priestore $L_2(-1,1)$.

Návod: Konvergenica postupnosti $u_n(x) = x^{\frac{1}{2n-1}}$.

3.8. Dokážte vetu 3.5.

3.9. Uvažujme v priestore $L_2(0,1)$ lineárny podpriestor všetkých konštantných funkcií definovaných na intervale $(0,1)$ s metrikou priestoru $L_2(0,1)$ ako v príklade 3.6. Rozložte funkciu $u(x) = x^2, \ x \in <0,1>$ na súčet, kde jeden sčítanec bude ortogonálna projekcia do uvedeného podpriestoru.

3.10. Nájdite projekciu funkcie $f(t) = t^3$ na priestor lineárnych funkcií na intervale $< 0,1 >$, ktoré tvoria podpriestor priestoru $L_2(0,1)$.

4. Ortogonálne systémy v priestore $L_2(G)$

Základy tejto kapitoly už čitateľ zrejme pozná z lineárnej algebry pre lineárnu závislosť vektorov. Čitateľ už tiež zrejme počul o báze vektorového priestoru. To je taká úžasná množina vektorov, ktoré nielen že sú lineárne nezávislé, ale tiež aj každý vektor sa dá napísať ako lineárna kombinácia bázy. Keby čosi podobné platilo aj pri funkcionálnych priestoroch, tak by sme aj riešenie nejakej úlohy, ktoré by predstavovala funkcia z tohto funkcionálneho priestoru mohli zapísať ako lineárnu kombináciu bázy. Ako sa ukáže, nie je to zase celkom rovnaké, ako pri vektorových priestoroch (ťažko možno očakávať, že by takáto báza bola konečná), ale pre vhodné funkcionálne priestory (napríklad pre $L_2(G)$*) to nie je to zase až také zlé. Navyše teórie funkcionálnych radov, či riešenia okrajových úloh pre diferenciálne rovnice už nejaké poznatky čitateľ zrejme má. V tejto kapitole vlastne zhrnieme tieto už známe výsledky a zovšeobecníme ich pre priestor* $L_2(G)$.

Lineárna závislosť a nezávislosť v $L_2(G)$.

Ak si čitateľ pamätá definíciu lineárnej kombinácie vektorov a lineárnej závislosti hneď vidí, že je to pri funkciách analogické.

V ďalšom budeme pod funkciami u a v rozumieť funkcie z priestoru $L_2(G)$.

Definícia 4.1:
Hovoríme, že funkcia u je v priestore $L_2(G)$ **lineárnou kombináciou** funkcií $v_1(x), v_2(x),..., v_r(x)$, z $L_2(G)$, ak sa dá v tomto priestore vyjadriť v tvare

(4.1) $u(x) = a_1 v_1(x) + a_2 v_2(x) + ... + a_r v_r(x)$, kde $a_1, a_2,..., a_r$ sú vhodné reálne konštanty.

Definícia 4.2:
O funkciách $v_1(x), v_2(x),..., v_k(x)$, z priestoru $L_2(G)$ hovoríme, že sú **lineárne závislé**, ak aspoň jednu z nich možno vyjadriť ako lineárnu kombináciu ostatných k-1 funkcií. Ak sa ani jedna z týchto funkcií nedá vyjadriť ako lineárne kombinácia ostatných, hovoríme, že funkcie sú **lineárne nezávislé**.
Stručne nazývame takýto systém funkcií lineárne závislý alebo lineárne nezávislý.

Veta 4.1:
Funkcie $u_1(x), u_2(x),..., u_k(x)$, z priestoru $L_2(G)$ sú v ňom **lineárne závislé** práve vtedy ak existujú konštanty $b_1, b_2 ..., b_k$, z ktorých **aspoň jedna je nenulová** a také, že platí:

(4.2) $b_1 u_1(x) + b_2 u_2(x) + ... + b_k u_k(x) = 0.$

Funkcie $u_1(x), u_2(x),..., u_k(x)$, sú **lineárne nezávislé** práve vtedy ak rovnosť (4.2) nastáva len v prípade, že sú **všetky** konštanty $b_1, b_2 ..., b_k$ **nulové.**

Dôkaz:
ponecháme ako cvičenie.

Poznámka 4.1:
Systém funkcií $u_1(x), u_2(x), ..., u_k(x)$ je z priestoru $\mathrm{L}_2(\mathrm{G})$, a teda sú to funkcie integrovateľné s kvadrátom a rovnosť (4.2) sa chápe v zmysle tohto priestoru, to je ekvivalencie funkcií odlišných na množine miery nula. Pravá strana (4.2) je teda nulový prvok v $\mathrm{L}_2(\mathrm{G})$, teda trieda funkcií, ktoré sa od nulovej konštantnej funkcie líšia len na množine miery nula.

Príklad 4.1:
Funkcie $\sin^2 \mathrm{xy}, \cos^2 \mathrm{xy}, 4$ sú lineárne závislé v $\mathrm{L}_2(\mathrm{G})$, kde G je ľubovoľná oblasť v rovine xy.
Riešenie:
Tento fakt je jasný zo vzťahu: $4\sin^2 xy + 4\cos^2 xy = 4 \quad \forall x, y \in R$, teda konštantná funkcia 4 sa dá vyjadriť, ako lineárna kombinácia ostatných dvoch s kombinačnými číslami 4,4.

Rozhodnúť, či je množina funkcií lineárne závislá, nie je vždy vo všeobecnosti také jednoduché. Vieme z lineárnej algebry, že ani pri vektoroch to nie je jednoduché, aj keď to nie je ťažké, je to niekedy zdĺhavá práca a môže nám napríklad pomôcť, že vektory napíšeme do matice a skúmame jej hodnosť alebo determinant a tu to bude podobne.

Nasledujúca veta poskytuje kritérium lineárnej závislosti funkcií, ale ako sa ukáže, analogicky, ako pri vektoroch je to tiež zdĺhavá práca.

Veta 4.2:
Funkcie $\mathrm{u}_1(\mathrm{x}), \mathrm{u}_2(\mathrm{x}), ..., \mathrm{u}_k(\mathrm{x})$, z $\mathrm{L}_2(\mathrm{G})$ sú v priestore $\mathrm{L}_2(\mathrm{G})$ **lineárne závislé** práve vtedy ak je tzv. **Gramov determinant** rovný nule:

$$(4.3) \quad D(u_1, u_2, ..., u_k) = \begin{vmatrix} (u_1, u_1) & (u_1, u_2) & ... & (u_1, u_k) \\ (u_2, u_1) & (u_2, u_2) & ... & (u_2, u_k) \\ ... & ... & ... & ... \\ (u_k, u_1) & (u_k, u_2) & ... & (u_k, u_k) \end{vmatrix}.$$

Dôkaz:
Keďže ide o ekvivalenciu, vetu dokážeme ako dve implikácie (treba to dokázať na obidve strany [V]). Využijeme pri tom poznatky z lineárnej algebry, kde vieme, že homogénny systém n rovníc o n neznámych má nenulové riešenie práve vtedy, keď je matica systému singulárna, to jest jej determinant matice je nulový.

$\Rightarrow$ Nech sú funkcie lineárne závislé. Existujú teda konštanty, označíme ich $b_a, .. b_k \in R$ nie všetky nulové, také že **v** $\mathrm{L}_2(\mathrm{G})$ platí: $b_1 u_1 + ... + b_k u_k = 0$. Prevedieme nasledujúci postup: Danú rovnicu postupne vynásobíme funkciami $u_1, ..., u_k$ a každú takto vzniknutú rovnicu zintegrujeme cez oblasť G. Využijúc definíciu skalárneho súčinu (2.1) dostávame nasledujúci systém, rovníc:

$$(4.4) \quad \begin{array}{l} (\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_1)\mathrm{b}_1 + (\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2)\mathrm{b}_2 + \cdots + (\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_k)\mathrm{b}_k = 0 \\ (u_2, u_1)b_1 + (u_2, u_2)b_2 + \cdots + (u_2, u_k)b_k = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (u_k, u_1)b_1 + (u_k, u_2)b_2 + \cdots + (u_k, u_k)b_k = 0 \end{array}$$

Keď si uvedomíme, že príslušné skalárne súčiny sú čísla – koeficienty tejto sústavy, dostávame lineárny homogénny systém k rovníc o k neznámych, ktorého riešením sú naše koeficienty $b_1,...b_k \in R$ a toto riešenie, je z predpokladu nenulové. To je ale možné iba tak, že matica systému je singulárna, a teda jej determinant je nulový. Determinant tohto systému je ale Gramov determinant, ktorý je nulový.

$\Leftarrow$*Máme dokázať, že systém funkcií je lineárne závislý teda existuje lineárna kombinácia týchto funkcií s aspoň jedným nenulovým koeficientom, ktorá dáva nulový prvok v* $L_2(G)$. *Vytvoríme takúto lineárnu kombináciu a ukážeme, že jej norma je nulová. Potom z vlastnosti normy ihneď vyplýva, že tento prvok musí byť nulový, čo potrebujeme dokázať.*

Nech teraz je Gramov determinant rovný nule. Napíšeme si sústavu (4.4)

Keďže jej determinant je nulový, musí mať táto sústava nenulové riešenie (dokonca ich je nekonečne veľa). Vyberieme jedno z nich a označíme ho $b_1,...b_k$ a vytvoríme funkciu

(4.5) $\quad v(x) = b_1 u_1(x) + ... + b_k u_k(x)$.

Ukážeme, že norma v je nulová. Na to stačí ukázať, že (v,v) = 0, pretože $\|v\|^2 = (v,v)$. Rovnicu (4.5) postupne násobíme funkciami $u_1,...,u_k$ a zintegrujeme na G dostávame

$$
(4.6) \quad \begin{aligned}
(u_1,u_1)b_1 + (u_1,u_2)b_2 + \cdots + (u_1,u_k)b_k &= (u_1,v) \\
(u_2,u_1)b_1 + (u_2,u_2)b_2 + \cdots + (u_2,u_k)b_k &= (u_2,v) \\
&\cdots\cdots\cdots \\
(u_k,u_1)b_1 + (u_k,u_2)b_2 + \cdots + (u_k,u_k)b_k &= (u_k,v).
\end{aligned}
$$

Keďže čísla $b_1,...b_k$ sú podľa predpokladu riešením sústavy (4.4), musia byť všetky koeficienty pravej strany v (4.6) nulové:$(u_1,v) = 0, (u_2,v) = 0, ... (u_k,v) = 0$. Ak teraz tieto nulové rovnosti postupne násobíme číslami $b_1,...b_k$ a rovnosti sčítame dostávame po využití vlastnosti skalárneho súčinu rovnosť:

$(b_1\, u_1 + b_2\, u_2 + \cdots + b_k\, u_k, v) = 0 \Longrightarrow (v,v) = 0.$ □

Veta 4.3:

Funkcie $u_1(x), u_2(x),...,u_k(x)$ z $L_2(G)$ sú v priestore $L_2(G)$ **lineárne nezávislé** práve vtedy, ak je Gramov determinant rôzny od nuly.

Dôkaz:

Vyplýva priamo z predchádzajúcej vety.

Príklad 4.2:

Funkcie $\sin x, \cos x, 1$ sú lineárne nezávislé v $L_2(0,\pi)$, prenecháme ako cvičenie.

Ortogonálne a ortonormálne systémy v $L_2(G)$

Definícia 4.3:

Dve funkcie $u \in L_2(G)$, $v \in L_2(G)$ sa nazývajú **ortogonálne** v priestore $L_2(G)$, ak sa ich skalárny súčin rovná nule: $(u,v) = 0$. Zápis: $u \perp v$ v $L_2(G)$.

Definícia 4.4:
Funkcia $u \in L_2(G)$**,** pre ktorú platí**:** $\|u\| = 1$ sa nazýva **normovaná** v priestore $L_2(G)$**.**

Definícia 4.5:
Systém funkcií

(4.4) $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_i(x), ... \in L_2(G), \quad i = 1,2,...,$

ktoré sú navzájom ortogonálne v $L_2(G)$ sa nazýva **ortogonálny sytém.** Ak sú tieto funkcie navyše normované, hovoríme , že systém je **ortonormálny.**

Príklad 4.2:
Systém funkcií $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x, \ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 2x, \ ..., \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx, ...$ je ortonormálny v priestore $L_2(0,\pi)$.

Riešenie:
Stačí len ukázať, že pre $k \neq n$ platí

$$0 = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin kx, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(kx)\sin(nx)dx$$

a pre $k = n$ platí $1 = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin kx, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin kx\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin^2(kx)dx.$

Definícia 4.6:

Systém funkcií $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_i(x), ... \in L_2(G), \quad i = 1,2,...$ je **lineárne nezávislý**, ak každý systém vytvorený z konečného počtu týchto funkcií je lineárne nezávislý.

Poznámka 4.1:
Ak vyberieme z ortonormálneho systému ľubovoľný konečný počet funkcií, tento bude lineárne nezávislý, pretože Gramov determinant sa bude rovnať 1. Teda každý systém ortonormálny v $L_2(G)$ je v tomto priestore lineárne nezávislý.

Príklad 4.3:
Nech je funkcia u(x) daná ako lineárna kombinácia ortonormálneho systému. Vypočítajte jej normu.
Riešenie:

Platí: (4.5) $u(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k(x), \ a_k \in R, \qquad k = 1,2,...n$ Použijeme vlastnosť normy a skalárneho súčinu, z ktorého je indukovaná a vypočítame kvadrát normy:

$$\|u\|^2 = (u,u) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \phi \ , \sum_{l=1}^{n} a_l \phi_l\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\phi_k, \sum_{l=1}^{n} a_l \phi_l\right), = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{l=1}^{n} a_l (\phi_k, \phi_l) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \ ,$$

Kde sme na konci využili, že systém funkcií je ortonormálny.

Zaviedli sme pojem konvergencie postupnosti funkcií v priestore $L_2(G)$ pomocou metriky v ňom definovanej. Nech máme rad funkcií

(4.5) $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x), \ u_k \in L_2(G), k = 1,2,...$

Podobne ako je zvykom u funkcionálnych radov, zavedieme postupnosť čiastočných súčtov

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x).$$

Definícia 4.7:
Hovoríme, že **rad** (4.5) **konverguje** v priestore $L_2(G)$ a má súčet s(x) ak postupnosť $\{s_n(x)\}$ jeho čiastočných súčtov konverguje v priestore $L_2(G)$ a má limitu s(x) .

Už z teórie Fourierových radov vieme, čo to je rozvoj funkcie do Fourierovho radu. Všimnite si, že to je vlastne spočítateľná lineárna kombinácia systému funkcií, pri bežných Fourierových radoch to bol systém sínusov a kosínusov.
Vynára sa preto analogická otázka rozvinutia danej funkcie z priestoru $L_2(G)$ *do ortonormálneho systému funkcií.*

Veta 4.4:
Ak je systém funkcií (4.4) ortonormálny v priestore $L_2(G)$ potom rad

$$(4.6) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x), \ a_k \in R, k = 1,2,...$$

konverguje v priestore $L_2(G)$ práve vtedy, keď konverguje rad

$$(4.7) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2.$$

Dôkaz:
Tento dôkaz je ekvivalencia a dokážeme ho priamo, ako ekvivalenciu z definície jednotlivých konvergencií.
Rad (4.6) konverguje v priestore $L_2(G)$ práve vtedy, keď postupnosť $\{s_n(x)\}$ jeho čiastočných súčtov konverguje v priestore $L_2(G)$.
Číselný rad (4.7) konverguje práve vtedy, keď postupnosť $\{\sigma_n\}$ jeho čiastočných súčtov konverguje (ako číselná postupnosť) teda v R.
Uvedomme si dôležitú vec, že aj priestor R aj $L_2(G)$ sú úplné priestory, a teda postupnosť v nich konverguje práve vtedy keď je cauchyovská, čo znamená pre postupnosť v $L_2(G)$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \rho(s_n(x), s_m(x)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \|s_n(x) - s_m(x\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \|s_n(x) - s_m(x)\|^2 = 0$$

a pre postupnosť v R platí

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} | \sigma_n - \sigma_m |= 0.$$

Keď si teraz uvedomíme, že pre čiastočný súčet $s_n(x)$ platí: $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k$ podľa príkladu (4.3) máme: $\|s_n(x)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$ a teda bez ujmy na všeobecnosti nech m<n

(ak nie, len vymeníme v ďalšom m za n): $\|s_n(x) - s_m(x)\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} a_k^2$ a zároveň platí $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$ a teda $|\sigma_n - \sigma_m| = \sigma_n - \sigma_m = \sum_{k-m+1}^{n} a_k^2$. Z uvedeného je jasné, že sa tieto čiastočné súčty rovnajú, a teda alebo oba súčasne konvergujú alebo súčasne divergujú. □

Fourierove rady

Definícia 4.8:
Nech je daný ortonormálny systém (4.4) a funkcia $u(x) \in L_2(G)$. Potom čísla

$$(4.8) \quad \alpha_k = (u, \varphi_k) = \int_G u(x)\varphi_k(x)dx, \;\; k = 1,2,...$$

sa nazývajú **Fourierove koeficienty** funkcie u vzhľadom k systému (4.4) a rad

$$(4.9) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(x)$$

sa nazýva **Fourierovým radom** funkcie u vzhľadom k systému (4.4).

Príklad 4.4:
Nájdite Fourierove koeficienty pre funkciu u(x) = x pri ortonormálnom systéme v priestore $L_2(0, \pi)$.

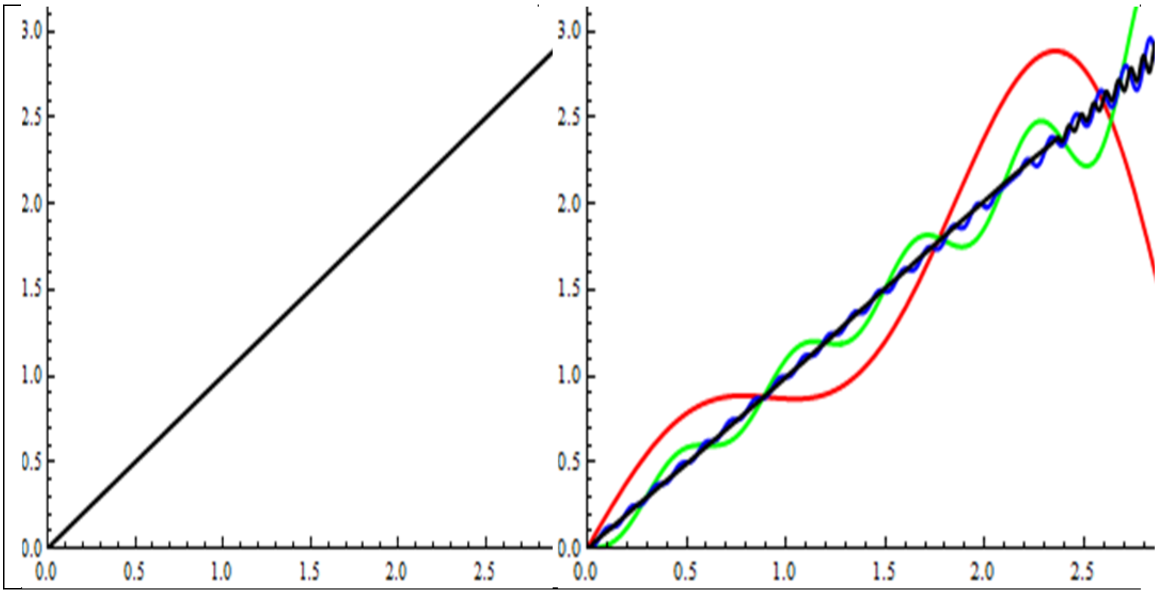
$$(4.10) \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 2x, ,...\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx,....$$

Riešenie:
Fourierov koeficient $\alpha_k = .\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi} x \sin kx dx = (-1)^{k+1}\frac{\sqrt{2\pi}}{k}$.

Príslušný Fourierov rad je

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sqrt{2\pi}}{k}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sin kx = 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k}.$$

Na Obrázku 4.1 vidíme pôvodnú funkciu (vľavo) a čiastočné súčty Fourierovho radu pre 3,10,50 a 100 členov radu (vpravo).



Obrázok 4.1

Veta 4.5:
Nech je daný ortonormálny systém (4.4) a funkcia $u(x) \in L_2(G)$. Nech n je ľubovoľné, ale pevné prirodzené číslo. Označme

(4.11) $u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x),$

kde $\alpha_k, k = 1,2,...$ sú Fourierove koeficienty funkcie u vzhľadom k systému (4.4). Označme ďalej

$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \varphi_k(x),$ kde $b_k, k = 1,2,...$ sú ľubovoľné reálne čísla.

Potom platí
$\rho(u_n, u) \le \rho(s_n, u),$ pričom ostrá nerovnosť nastáva práve vtedy, keď je aspoň jedno z čísel b_k rôzne od $\alpha_k, k = 1,2,.., n$.

Dôkaz:
V dôkaze podstatne využijeme vlastnosti ortonormálneho systému. Keďže metrika je indukovaná normou a tá skalárnym súčinom budeme odhadovať kvadrát z metriky, aby sme sa vyhli odmocninám:

$$\rho^2(s_n, u) = \|s_n - u\|^2 = (s_n - u, s_n - u) = (\sum_{k=1}^{n} b_k \varphi_k - u, \sum_{k=1}^{n} b_k \varphi_k - u) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} b_k (\varphi_k, u) + \|u\|^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} b_k \alpha_k + \|u\|^2 =$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} b_k \alpha_k \pm \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 + \|u\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (b_k - \alpha_k)^2 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 + \|u\|^2.$$

V tejto úprave číslo $\sum_{k=1}^{n}(b_k-\alpha_k)^2$ je vždy nezáporné a nulové vtedy a len vtedy keď pre všetky k platí $b_k=\alpha_k$. Ostatné dva členy sú pre každú funkciu pevne dané, pretože druhý je súčet štvorcov jej Fourierových koeficientov a tretí štvorec z normy danej funkcie. Teda tento výraz bude najmenší vtedy a len vtedy keď pre všetky k platí $b_k=\alpha_k$, z čoho máme tvrdenie vety. □

Veta 4.6:
Pre každú funkciu u je rad štvorcov

(4.12) $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2$ Fourierových koeficientov tejto funkcie vzhľadom k ľubovoľnému ortonormálnemu systému z priestoru $L_2(G)$ konvergentný. Pritom platí:

(4.13) $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2 \le \|u\|^2$. (**Besselova nerovnosť**)

Dôkaz:
Z dôkazu predchádzajúcej vety pri tom istom označení špeciálne pre Fourierove koeficienty hneď máme:

$$0 \le \rho^2(u_n,u) = -\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2 + \|u\|^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2 \le \|u\|^2 .$$

Keď že posledný odhad je na pravej strane nezávislý od premennej k, z toho hneď máme Besselovu nerovnosť a aj konvergenciu príslušného radu, ktorý je rad nezáporných členov ohraničený kvadrátom z normy.□

Veta 4.7:
Nech je daný ortonormálny systém (4.4) a funkcia $u(x)\in L_2(G)$. Potom Fourierov rad prislúchajúci k tejto funkcii je konvergentný v priestore $L_2(G)$.
Dôkaz:
ihneď vyplýva z predchádzajúcej vety a Vety 4.4. □

Veta 4.8:
Nech je daný ortonormálny systém (4.4) a funkcia $u(x)\in L_2(G)$. Ak konverguje rad $\sum_{k=1}^{\infty} b_k\varphi_k(x)$ v priestore $L_2(G)$ k funkcii u, potom sú $b_k, k=1,2,...$nutne Fourierove koeficienty tejto funkcie vzhľadom k systému (4.4).
Dôkaz:
Rad konverguje v priestore $L_2(G)$ k funkcii u, ak platí, že k funkcii u konverguje v priestore $L_2(G)$
limita jeho čiastočných súčtov (a aj ich kvadrátov), teda podobne ako v dôkaze vety 4.5 máme

$$0=\lim_{n\to\infty}\rho^2(s_n,u)=\lim_{n\to\infty}\|s_n-u\|^2=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(b_k-\alpha_k)^2-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2+\|u\|^2 \ge \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(b_k-\alpha_k)^2,$$

kde sme v poslednej nerovnosti využili Besselovu nerovnosť. Posledný člen je ale vo všeobecnosti nezáporný, ak teda má byť nulový, musia byť nutne všetky jeho členy nulové, čiže $b_k=\alpha_k \quad k=1,2,...$. □

Poznámka 4.2:
Opačná veta nemusí vo všeobecnosti platiť. Fourierov rad ľubovoľnej funkcie $u(x) \in L_2(G)$ je konvergentný, ale nemusí konvergovať práve k funkcii u.

Príklad 4.5:
Uvažujme systém $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x,\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 3x,\ ,\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 5x,...$ Tento je zrejme v priestore $L_2(0,\pi)$ ortonormálny. Zostrojte Fourierov rad funkcie $u(x) = \sin 2x$ a ukážte k čomu konverguje.
Riešenie:
V príklade 4.2, sme si ukázali, že tieto funkcie tvoria ortnormálny systém funkcií, ale všimnite si, že na rozdiel od systému z príkladu 4.2, tu sme vybrali z tejto množiny len nepárne n. Iste aj tento systém je spočítateľný ortnormálny systém funkcií v $L_2(0,\pi)$ len je tých funkcií „menej". Vieme ale, že až na konštantu bola funkcia $u(x) = \sin 2x$ v pôvodnom systéme z príkladu 4.2, teda je nutne ortogonálna ku všetkým funkciám z tohto systému. Preto platí, že v tomto novom systéme jej všetky Fourierove koeficienty sú nulové a teda aj celý Fourierov rad je nulový, a preto nutne konverguje k nulovej funkcii v $L_2(0,\pi)$ a nie k funkcii $u(x) = \sin 2x$ z vlastnosti jednoznačnosti limity.

Definícia 4.9:
Ortonormálny systém funkcií (4.4) sa nazýva **úplný** v priestore $L_2(G)$, ak pre každú funkciu $u(x) \in L_2(G)$ konverguje v priestore $L_2(G)$ Fourierov rad k nej vytvorený práve k tejto funkcii.
Podmienka takejto konvergencie vyplýva priamo z definície konvergencie v priestore $L_2(G)$: $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(u_n, u) = 0$, kde v tomto prípade je u_n n-tý čiastočný súčet Fourierovho radu. Pre daný ortonormálny systém platí:

$$\rho^2(u_n,u) = \|u_n - u\|^2 = (u - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k,\ u - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k) = (u,u) - 2\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(u,\varphi_k) + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2 =$$

$$\|u\|^2 - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2.$$

A teda $\lim\limits_{n\to\infty}(\|u\|^2 - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2) = 0,$ z čoho

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2. \tag{4.14}$$

Podmienka (4.14) vyjadruje nutnú a postačujúcu podmienku, aby Fourierov rad funkcie $u(x) \in L_2(G)$ konvergoval v $L_2(G)$ k tejto funkcii a nazýva sa **Parsevalova rovnosť.**

Definícia 4.10:
Ortonormálny systém funkcií (4.4) sa nazýva **uzavretý** v priestore $L_2(G)$, ak neexistuje žiadna funkcia $v(x) \in L_2(G)$ ortogonálna ku všetkým funkciám daného systému s výnimkou funkcie nulovej v $L_2(G)$.

Veta 4.9:
Ortonormálny systém funkcií (4.4) v $L_2(G)$ je úplný práve vtedy, keď je uzavretý.
Dôkaz:
$\Rightarrow$ Dôkaz prevedieme sporom:
Nech je systém úplný v $L_2(G)$, potom platí, že pre každú funkciu $u(x) \in L_2(G)$ konverguje v priestore $L_2(G)$ Fourierov rad k nej vytvorený práve k tejto funkcii. Nech navyše existuje nenulová funckia $v(x) \in L_2(G)$ ortogonálna ku všetkým funkciám daného systému v $L_2(G)$. Teda táto funkcia má všetky Fourierove koeficienty nulové a preto nutne jej Fourierov rad konverguje k nulovej funkcii a nie k nenulovej funkcii v(x), čo je spor.
$\Leftarrow$ Dôkaz prevedieme sporom:
Nech je systém uzavretý, teda neexistuje žiadna funkcia $v(x) \in L_2(G)$ ortogonálna ku všetkým funkciám daného systému s výnimkou funkcie nulovej v $L_2(G)$.Nech existuje funkcia $v(x) \in L_2(G)$, ktorej Fourierov rad konverguje k funkcii $w(x) \in L_2(G)$ a platí: $v(x) \neq w(x)$ v $L_2(G)$.
Z Vety 4.8 ale platí, že potom tento rad je Fourierovým radom funkcie w(x) a teda pre jeho koeficienty platí:
$(v(x), \varphi_k) = (w(x), \varphi_k) \Rightarrow (v(x) - w(x), \varphi_k) = 0.$
Funkcia
$0 \neq z(x) = v(x) - w(x)$
má teda nulové koeficienty a keďže systém je uzavretý, funckia z(x) musí byť nutne nulová v L_2 (G), čo je spor. □

Príklad 4.6:
Z uvedenej vety vyplýva, že systém z predchádzajúceho príkladu nie je úplný v $L_2(0, \pi)$.

Príklad 4.7:
Na intervale $< a, b >$ je systém funkcií

$$\sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin \frac{n\pi(x-a)}{b-a}, \qquad n = 1,2,...,...$$

úplný ortonormálny systém funkcií v $L_2(a,b)$.

Analogické tvrdenie platí pre viacrozmerné oblasti.

Príklad 4.8:
Nech G je obdĺžnik $0 < x < a, \quad 0 < y < b$. Potom systém funkcií

$$\frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, m = 1,2,... n = 1,2,...$$

je úplný ortonormálny systém v $L_2(G)$.

Poznámka 4.3:
Ak je ortonormálny systém úplný v $L_2(G)$, potom každú funkciu možno vyjadriť v tvare jej Fourierovho radu, teda ako lineárnu kombináciu (nekonečného) systému týchto funkcií, a preto tomuto systému hovoríme **ortonormálna báza.**

Definícia 4.11:
Systém funkcií
(4.15) $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n, ...$ z $L_2(G)$ (nemusí byť ani ortogonálny ani normovaný) sa nazýva **úplný** v $L_2(G)$ ak je množina všetkých lineárnych kombinácií prvkov tohto systému **hustá** v $L_2(G)$.
To je: Ku každej funkcii $u(x) \in L_2(G)$ a ku každému $\varepsilon > 0$ možno nájsť prirodzené číslo n a čísla $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, ..., a_n^{(n)}$ tak, že platí: $\rho(u, \sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} \psi_k) < \varepsilon$.
Ak je okrem toho uvedený systém **lineárne nezávislý v** $L_2(G)$, potom tvorí **bázu** v $L_2(G)$.

Poznámka 4.4:
Existujú aj iné definície bázy, napr. Schauderova báza.

Príklad 4.9:
Neortonormálnou bázou v priestore $L_2(a,b)$ je postupnosť
$1, x, x^2, ..., x^n, ...$ a podobne vo viacdimenzionálnom priestore je to systém mnohočlenov, napríklad pre dvojrozmernú oblasť je to systém mnohočlenov
$1, x, y, xy, x^2, y^2, ...$

Poznámka 4.10:
Z úplného systému, ktorý nie je vo všeobecnosti ani ortogonálny ani ortonormálny sa dá vytvoriť takýto systém. Táto metóda sa volá **Grammov-Schmidtov ortogonalizačný, resp. ortonormalizačný proces** (pozri Rektorys. strana 62).

Cvičenia:

4.1. Dokážte tvrdenie z príkladu 4.2.

4.2. Ukážte, že systém funkcií $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x,\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 2x,\ \ldots,\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx,\ldots$ je ortonormálny v priestore $L_2(0,\pi)$.

4.3. Ukážte, že systém funkcií $\sqrt{\frac{2}{b-a}}\sin\frac{n\pi(x-a)}{b-a}, \quad n = 1,2,\ldots,\ldots$ je ortonormálny v priestore $L_2(a,b)$.

4.4. Nech G je obdĺžnik $0 < x < a, 0 < y < b$. Potom systém funkcií $\frac{2}{\sqrt{ab}}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, m = 1,2,\ldots n = 1,2,\ldots$ je úplný ortonormálny systém v $L_2(G)$

4.5. Neortonormálnou bázou v priestore $L_2(a,b)$ je postupnosť $1, x, x^2,\ldots, x^n,\ldots$. Použitím Grammovho-Schmidtovho ortonormalizačného procesu, z nej vytvorte ortonormálnu bázu.

5. Funkcionálne priestory všeobecne

O $L_2(G)$ *priestore sme si povedali základné vlastnosti. Stále bolo zdôrazňované, že tieto vlastnosti môže mať aj iný priestor, takže v tejto kapitole to celé zhrnieme vo všeobecnej rovine, aby sme sa v tom utvrdili, pojmy teda nebudú už nové, zmenia sa len prvky lineárnej množiny a ich merania.*

Unitárny priestor

Nech M je ľubovoľná množina prvkov (funkcie, vektory...). Uvedieme tu výsledky predchádzajúcich kapitol vo všeobecnom prípade.

Definícia 5.1.:
Hovoríme, že M je **lineárny priestor nad telesom reálnych čísel,** (vektorový priestor...) ak má tieto vlastnosti:
1. Pre ľubovoľné prvky u, v z M je definovaný súčet $u + v$ a pre každý prvok u z M a každé reálne číslo a z R je definovaný súčin au, pričom $u + v$ aj au sú opäť prvky z M.
2. Pre takto zavedené operácie súčtu a súčinu platia axiómy:

(5.1) $u + v = v + u, \qquad u + (v + z) = (u + v) = z,$

(5.2) $a(u + v) = au + av, \qquad (a + b)u = au + bu,$

(5.3) $a(bu) = (ab)u, \qquad 1.u = u.$

3. Existuje taký prvok $0 \in M$, že platí $u + 0 = u$ pre každé $u \in M$. Tento prvok nazývame **nulovým prvkom.**
4. Ku každému prvku $u \in M$ existuje prvok $v \in M$ tak, že platí $u + v = 0$. Tento prvok nazývame **opačným** k prvku u.
Nulový prvok v M ako aj opačný prvok k prvku u sú jednoznačne určené.

Príklad 5.1:
Euklidovské priestory, množina všetkých spojitých funkcií na uzavretej oblasti $\overline{G}$.

Definícia 5.2:
Hovoríme, že na lineárnom priestore je definovaný **skalárny súčin** , ak je každej dvojici prvkov u,v z M priradené reálne číslo, označujeme ho (u,v) s vlastnosťami:

(5.4) $(u, v) = (v, u)$

(5.5) $(a_1 u_1 + a_2 u_2, v) = a_1(u_1, v) + a_2(u_2, v)$

(5.6) $(u, u) \geq 0, \qquad (u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0 \qquad v \qquad M$

Príklad 5.2:
Klasický skalárny súčin v euklidovskom priestore, integrál zo súčinu funkcií v priestore L_2, ...

Definícia 5.3:
Nech na lineárnom priestore M je definovaný skalárny súčin v zmysle predchádzajúcej definície. Potom čísla:

(5.7) $\|u\| = \sqrt{(u,u)}$,

(5.8) $\rho(u,v) = \|u - v\|$

nazývame **norma a vzdialenosť (metrika**) v M.

Veta 5.1:
Nech sú $u(x), v(x), z(x), u_1(x), u_2(x)$ ľubovoľné prvky z M a a je ľubovoľné reálne číslo. Potom pre vyššie definovanú normu a vzdialenosť platia vzťahy:

(5.9) $\|u\| \geq 0$,

(5.10) $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u(x) = 0 \quad v \quad M$,

(5.11) $\|au\| = |a|.\|u\|$,

(5.12) $|(u,v)| \leq \|u\|.\|v\|$,

(5.13) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$,

(5.14) $\left\|\|u\| - \|v\|\right\| \leq \|u - v\|$,

(5.15) $\rho(u,u) \geq 0$,

(5.16) $\rho(u,v) = 0 \Leftrightarrow u(x) = v(x) \quad v \quad M$,

(5.17) $\rho(u,v) = \rho(v,u)$,

(5.18) $\rho(u,z) \leq \rho(u,v) + \rho(v,z)$.

Definícia 5.4:
Lineárny priestor s metrikou, kde norma je odvodená od skalárneho súčinu, nazývame **unitárny** priestor.

V ďalšom budeme takýto priestor označovať S_2.

Definícia 5.4:
Hovoríme, že postupnosť prvkov $u_n \in S_2$ **konverguje v priestore** S_2 k prvku $u \in S_2$, ak platí:

(5.19) $\lim\limits_{n \to \infty} \rho(u_n, u) = 0$.

Zapisujeme $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = u \quad v \quad S_2$. Stručne $u_n \to u \quad v \quad S_2$.

Prvok u nazývame **limita postupnosti** $\{u_n\}$ v S_2.

Veta 5.2:
Postupnosť funkcií $u_n \in S_2$ môže mať v priestore S_2 najviac jednu limitu.

Definícia 5.5:
Postupnosť funkcií $u_n \in S_2$ sa nazýva **cauchyovská (fundamentálna)** v priestore S_2, ak platí:

(5.20) $\lim\limits_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} \rho(u_m, u_n) = 0.$

Veta 5.3:
Každá postupnosť konvergentná v S_2 je v tomto priestore cauchyovská.

Poznámka 5.1:
Opačné tvrdenie neplatí.

Definícia 5.6:
Priestor S_2 sa nazýva **úplný,** ak každá cauchyovská postupnosť je v ňom konvergentná.

Definícia 5.7:
Ak je unitárny priestor S_2 úplný, nazývame ho **Hilbertovým** priestorom. Spravidla ho označujeme symbolom H.

Príklad 5.3:
Priestor $L_2(G)$ je Hilbertovým priestorom.

Definícia 5.8:
Nech H je Hilbertov priestor. Postupnosť prvkov $\varphi_i \in H$ voláme **ortonormálna** postupnosť práve vtedy, keď platí: $\|\varphi_i\| = 1$ pre všetky i a $(\varphi_i, \varphi_j) = 0, i \neq j$.

Definícia 5.9:
Ortonormálna postupnosť v Hilbertovom priestore H sa nazýva **maximálna** ak platí
$u \in H \wedge \ (u, \varphi_i) = 0, \forall i \Rightarrow u = 0$.

Definícia 5.10:
Maximálna ortonormálna postupnosť v Hilbertovom priestore sa nazýva **ortonormálna báza v H.**

Veta 5.4:
V každom separabilnom Hilbertovom priestore existuje spočítateľná báza.
Dôkaz: [M].

Definícia 5.11:
Lineárny normovaný metrický priestor, ktorý je úplný v metrike indukovanej normou sa nazýva **Banachov priestor.**

Príklad 5.4:
Priestor $\mathrm{L}_2(\mathrm{G})$ je Banachov priestor.

Veta 5.5
Ak je v LN (lineárnom normovanom) priestore s metrikou indukovanou normou postupnosť $\{u_n\}$ cauchyovská, potom je postupnosť $\{\|u_n\|\}$ príslušných noriem konvergentná.

Veta 5.6:
Ak je v LN (lineárnom normovanom) priestore s metrikou indukovanou normou postupnosť $\{u_n\}$ konvergentná alebo aspoň cauchyovská, potom je v norme ohraničená, teda existuje číslo K, také, že $\|u_n\| \leq K$ pre všetky n.

Cvičenia:

5.1. Nech M je množina všetkých vektorových funkcií $\mathbf{u}(x) = u_1(x)\mathbf{i} + u_2(x)\mathbf{j}$, ktorej zložky $u_1(x), u_2(x)$ sú funkcie integrovateľné s druhou mocninou v oblasti G. Definujeme sčítanie vektorových funkcií a násobenie vektorovej funkcie skalárom po zložkách. Ukážte, že M je lineárny priestor s nulovým prvkom nulovou vektorovou funkciou.
Definujeme skalárny súčin vektorových funkcií vzťahom $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (u_1, v_1) + (u_2, v_2)$, kde jednotlivé zložky sú skalárne súčiny funkcií. Ukážte, že takto definované zobrazenie je naozaj skalárny súčin.

5.2. Uvažujme lineárny priestor (LP) M, ktorého prvky sú funkcie spojité aj so spojitými prvými deriváciami na uzavretom intervale <0,1> s obvyklou definíciou sčítania funkcií a násobenia funkcie skalárom. Nulovým prvkom je nulová funkcia.
Definujme $(u,v) = \int_0^1 u(x)v(x)dx + \int_0^1 u'(x)v'(x)dx.$

Ukážte, že týmto vzťahom je na LP M definovaný skalárny súčin.

5.3. Ak uvažujeme ten istý LP M ako v predchádzajúcom príklade a definujeme $(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx$. Ukážte, že tento vzťah nedefinuje skalárny súčin na M a zdôvodnite prečo.

5.4. Vysvetlite, čo znamená konvergencia postupnosti funkcií v priestore definovanom v príklade 2.

5.5. Nech x a y sú prvkami Hilbertovho priestoru H. Ukážte, že ak platí (x,h) = (y,h) pre všetky prvky h z H, tak x = y.

5.6. Ak x,y, sú prvkami reálneho Hilbertovho priestoru H a x je ortogonálne s y, tak $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2$. Ukážte aj opačné tvrdenie.
5.7 Nech x a y sú prvkami Hilbertovho priestoru H a $x \neq 0.$ Potom existuje $\lambda \in R.$ tak, že prvok x je ortogonálny na prvok $\lambda x + y$.

5.7. Dokážte, že norma je indukovaná skalárnym súčinom práve vtedy, keď platí rovnosť $\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

6. Operátory v Hilbertovom priestore

Priestory by sme mali, alebo aspoň maličkú časť z nich. A podobne ako v matematickej analýze, keď máme reálne čísla, začali sme budovať na nich funkcie. Teraz to len trošku zovšeobecníme. Miesto reálnych čísel máme nejaký Hilbertov priestor (jasné, že to môže byť aj ten náš R, ten do tohto celého pekne zapadá, ale nemusí to byť len on, pokojne to môže byť aj L_2 alebo nejaký iný) a vybudujeme na ňom analogické zobrazenie, ako sme urobili pri funkciách, akurát dostanú iné meno, všeobecnejšie.

Úvod

Najskôr motivácia...prečo a ako to bude fungovať... ráta sa s istými znalosťami pojmov z diferenciálnych rovníc, ale len základnými...

Budeme sa zaoberať rovnicou typu

(6.1) $Au = f$, kde

A – je určité zobrazenie, v aplikáciách najčastejšie diferenciálne,
f – je daný prvok, spravidla nejaká funkcia z niektorého Hilbertovho priestoru,
u – je hľadané riešenie.

Príklad 6.1:
Uvažujeme rovinnú oblasť G s hranicou Γ. Riešme na oblasti G Poissonovu rovnicu s homogénnou Dirichletovou podmienkou:

(6.2) $\Delta u(x,y) = f(x,y),$

(6.3) $u = 0 \quad na \quad \Gamma.$

Nech zatiaľ je funkcia f spojitá v uzavretej oblasti $\overline{G}$.
Nájsť tzv. **klasické riešenie** tohto problému znamená nájsť takú funkciu u(x,y), ktorá je v uzavretej oblasti $\overline{G}$ spojitá aj so svojimi deriváciami druhého rádu, v oblasti G spĺňa Poissonovu rovnicu v každom bode G a na hranici G je nulová. Keďže funkcia f je spojitá, riešenie hľadáme v množine funkcií spojitých až do druhých parciálnych derivácií v $\overline{G}$, teda je z priestoru $C^2(\overline{G})$ a navyše sa tieto funkcie na hranici rovnajú nule. Množina týchto funkcií tvorí lineárny priestor (pri obvyklej definícii sčítania funkcií a násobenia skalárom viď kapitola 1). Označme túto množinu M_1 . Takže úlohu môžeme preformulovať takto:
Máme riešiť rovnicu $\Delta u = f$ v lineárnom priestore M_1. O lineárnom priestore M_1 hovoríme ako o **definičnom obore** uvedeného zobrazenia Δ (tomuto zobrazeniu budeme hovoriť **operátor**). Na prvky tohto priestoru potom aplikujeme uvedený operátor, ktorý každej funkcii $u \in M_1$ priradí spojitú funkciu v vzťahom: $v = \Delta u$. Tieto funkcie v tvoria opäť lineárny priestor (to si ukážeme neskôr), označme ho N a budeme ho nazývať **obor hodnôt** daného operátora.

Operátor a jeho základné vlastnosti

Už zo strednej školy študent ovláda pojem funkcia (presnejšie reálna funkcia jednej reálnej premennej) ako špeciálny prípad zobrazenia z množiny reálnych čísel do množiny reálnych čísel. Teraz tento pojem rozšírime na pojem ľubovoľného operátora, ale všimnite si, že ak ovládate dobre pojem a základné vlastnosti funkcií, táto látka sa osvojuje oveľa jednoduchšie.

Definícia 6.1:
Nech sú dané dve množiny M_1 a M_2. Hovoríme, že na množine M_1 je definovaný **operátor A** zobrazujúci množinu M_1 do množiny M_2 ak je daný predpis, podľa ktorého je každému prvku $u \in M_1$ jednoznačne priradený určitý prvok $v \in M_2$.
Píšeme:

$$(6.4) \quad v = Au .$$

Množinu M_1 voláme **definičný obor** operátora A a označujeme ho $\mathbf{D_A}$. Množinu $N \subset M_2$, ktorú dostaneme zo vzťahu (6.4) pre všetky $u \in M_1$ nazývame **oborom hodnôt** operátora A. Označujeme ju $\mathbf{R_A}$.

Definícia 6.2.:
Ak platí $R_A = M_2$, hovoríme, že operátor A zobrazuje množinu M_1 **na** M_2 (**surjektívny operátor**, surjekcia).

Poznámka 6.1: (Ekvivalentná definícia)
Hovoríme, že operátor A zobrazuje množinu M_1 **na** M_2 ak ju zobrazuje do množiny M_2 a ku každému prvku $v \in M_2$ existuje prvok $u \in M_1$ tak, že Au = v.

V ďalšom sa predovšetkým sústredíme na diferenciálne operátory. Existujú ale aj iné operátory.

Príklad 6.2:
Príklad operátora, ktorý nie je diferenciálny je napríklad štvorcová matica n-tého stupňa, ktorá podľa predpisu $\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{u}$ priradí každému vektoru $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ...u_n)^T$ z lineárneho priestoru všetkých n-rozmerných vektorov vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ...v_n)^T$ z toho istého lineárneho priestoru. Ak je matica regulárna, je týmto vzťahom dané zobrazenie na (surjekcia).

Príklad 6.3:
Definičným oborom operátora Δ z príkladu 6.1 je lineárny priestor M_1 funkcií z $C^2(\overline{G})$ nulových na hranici G. Operátor zobrazuje M_1 do priestoru všetkých spojitých funkcií v $\overline{G}$. Zatiaľ nevieme odpovedať na otázku, či je to zobrazenie na (surjekcia). Vieme len, že tento problém je ekvivalentný úlohe, či existuje riešenie problému (6.2), (6.3) pre každú spojitú pravú stranu $f \in M_2$.

Pojem operátora máme a teraz analogicky, ako pri funkciách nasledujú jeho základné vlastnosti a vzťahy.

Definícia 6.3.:
O dvoch operátoroch A a B hovoríme, že **sa rovnajú** a zapisujeme A = B, ak sa rovnajú ich definičné obory a zároveň ak Au = Bu (táto rovnosť sa chápe v zmysle definície rovnosti prvkov v obore hodnôt) pre všetky u z definičného oboru.

Príklad 6.4:
Vezmeme operátor a definičný obor tohto operátora ako je v príklade 6.1. a označme ho A. Zrejme môžeme definovať ten istý operátor, označme ho B, len pre funkcie z $C^2(\overline{G})$. Potom tento nový operátor sa nerovná operátoru A, pretože sa nerovnajú ich definičné obory. V tomto prípade platí $M_1 \subset C^2(\overline{G})$ a táto inklúzia je ostrá. Zároveň pre každé $u \in M_1$ platí Au = Bu = Δu. V takomto prípade hovoríme
že operátor B **je rozšírením** operátora A.

Definícia 6.4:
Majme operátory A a B s definičnými obormi D_A resp. D_B. Ak platí: $D_A \subset D_B$ $D_A \neq D_B$ a zároveň Au = Bu pre každé $u \in D_A$, hovoríme, že **B je rozšírením operátora A.** Naopak, operátor A je **zúžením** operátora B.

Definícia 6.5:
Nech sú dané dva operátory A a B s definičnými obormi D_A, resp. D_B . **Súčet operátorov** je definovaný vzťahom

(6.5) $(A + B)u = Au + Bu$ a definičným oborom tohto operátora je $D_A \cap D_B$.

Súčin operátorov je definovaný vzťahom

(6.6) $(AB)u = A(Bu)$ a definičným oborom tohto operátora je D_{AB} množina tých prvkov u z D_B, pre ktoré je Bu z D_A.

Poznámka 6.2:
Vo všeobecnosti je $AB \neq BA$. Príkladom je operátor z príkladu 6.2, pretože súčin matíc nie je vo všeobecnosti komutatívny.

Definícia 6.6:
Ak platí BA = AB, tieto operátory nazývame navzájom **komutatívne.**

Definícia 6.7:
Operátor A sa nazýva **prostý** na svojom definičnom obore D_A, ak pre každé dva prvky $u_1 \neq u_2$ z D_A je $Au_1 \neq Au_2$. (**Injektívny operátor**, injekcia).

Definícia 6.8:
Nech operátor A zobrazuje množinu M_1 na množinu M_2 a nech je prostý (surjekcia + injkecia = bijekcia, **bijektívny operátor**). Operátor B, ktorý priradí prvku $v \in M_2$ práve ten prvok $u \in M_1$, pre ktorý platí Au = v, sa nazýva **inverzný operátor** k operátoru A a označuje $\mathbf{A^{-1}}$.

Tvrdenie 6.1:
Pre všetky $u \in M_1$ a pre všetky $v \in M_2$ platí:

(6.7) $A^{-1}Au = u, \quad AA^{-1}v = v.$

Dôkaz:
Označme Au =v. Potom platí: $A^{-1}v = u$. Z vlastnosti operátora A a inverzného operátora k nemu hneď máme:
$u = A^{-1}v = A^{-1}(Au) = A^{-1}Au$
a analogicky
$v = Au = A(A^{-1}v) = AA^{-1}v.$ □

Príklad 6.4:
Uvažujeme rovinnú oblasť G s hranicou Γ. Riešme na oblasti G Poissonovu rovnicu s homogénnou Dirichletovou podmienkou:

(6.2) $\Delta u(x, y) = f(x, y),$

(6.3) $u = 0 \quad na \quad \Gamma.$

Tento operátor je prostý.
Riešenie:
Označíme. Au =Δu s definičným oborom ako v príklade 6.1. Treba ukázať, že ak $u_1 \neq u_2 \Rightarrow Au_1 \neq Au_2$. Tento fakt sa dá ukázať nepriamo s využitím poznatku o jednoznačnej riešiteľnosti danej úlohy (poznatok z teórie parciálnych diferenciálnych rovníc). Ak by totiž platilo $Au_1 = Au_2$ mal by tento problém dve rôzne riešenia, čo z jednoznačnej riešiteľnosti nie je pravda.

Lineárne operátory

Definícia 6.9:
Operátor A sa nazýva **lineárny**, ak je jeho definičným oborom lineárna množina D_A a platí: pre ľubovoľné prvky $u_1, u_2, \ldots u_n$ z D_A a pre ľubovoľné reálne čísla $a_1, a_2, \ldots a_n$

(6.8) $A(a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n) = a_1Au_1 + a_2Au_2 + \ldots + a_nAu_n.$

Ekvivalentná forma definície: Operátor A sa nazýva lineárny ak je jeho definičným oborom lineárny priestor D_A a platí:

(6.9) $A(au) = aAu, \quad \forall u \in D_A, \forall a \in R,$

(6.10) $A(u_1 + u_2) = Au_1 + Au_2, \forall u_1, u_2 \in D_A.$

Ekvivalencia týchto definícií je zrejmá. □

Príklad 6.5:

Operátor daný na lineárnom priestore $C^1(a,b)$ daný predpisom $Au = \frac{du}{dx}$ je lineárny operátor.

Riešenie:

Uvedomme si, že treba splniť dve podmienky: Definičný obor je lineárna množina, táto vlastnosť je zrejmá, lineárna kombinácia funkcií z $C^1(a,b)$ je opäť funkcia z $C^1(a,b)$. Vlastnosť (6.8) vyplýva ihneď z linearity derivácie.

Tvrdenie 6.2:

Nech A je lineárny operátor. Potom
a) jeho obor hodnôt R_A je lineárny priestor,
b) nulový prvok z D_A sa zobrazí na nulový prvok v R_A,
c) ak existuje jeho inverzný operátor A^{-1}, tak je tiež lineárny.

Dôkaz:

a) treba ukázať, že pre ľubovoľné dva prvky w,z z R_A a pre ľubovoľné skaláry a, b z R aj lineárna kombinácia aw +bz z R_A .
Ak w,z sú z R_A, potom ale musia existovať nejaké prvky u, v z D_A tak, že platí Au = w a súčasne Av = z. A je lineárny operátor, teda D_A je lineárna množina, a preto pre ľubovoľné skaláry a,b z R aj prvok au+bv je z D_A . Má preto zmysel prvok A(au+bv). Využijeme opäť linearitu A a dostávame:
$A(au + bv) = aAu + bAv = aw + bz$. Teda k prvku aw+bz existuje v D_A prvok au+bv, ktorý sa naň zobrazí z čoho máme, že aw +bz je z R_A .
b) Keďže A je lineárny operátor, pre ľubovoľný prvok u z D_A platí au je z D_A , pre ľubovoľný skalár a z R. Zároveň vieme, že nulový prvok z D_A sa dá vyjadriť ako akýkoľvek prvok z D_A vynásobený nulou. Ak označíme Au = v, máme:
$A(0) = A(0.u) = 0A(u) = 0v = 0.$
Pozor, tá prvá nula v tomto vzťahu je nulový prvok z D_A *(teda napríklad to môže byť nulová funkcia), tá druhá nula je nula ako skalár, teda obyčajná reálna nula. Označujeme ich rovnako a z kontextu má byť jasné, o akú „nulu“ ide, ale pre istotu občas na to upozorníme.*
c) ak exituje A^{-1}, tak A musí byť surjekcia z lineárnej množiny D_A na lineárnu množinu R_A a platí $D_{A^{-1}} = R_A$, $R_{A^{-1}} = D_A$, takže definičný obor A^{-1} je lineárny priestor podľa a). Ešte ukážeme vlastnosť linearity, Nech pre ľubovoľné dva prvky w,z z R_A existujú nejaké prvky u, v z D_A tak, že platí Au = w a A^{-1} w = u a súčasne Av = z a A^{-1}z = v. Potom využijúc vlastnosti linearity A dostávame

$$A^{-1}(aw + bz) = A^{-1}(aAu + bAv) = A^{-1}(A(au + bv))$$
$$= A^{-1}A(au + bv) = au + bv = aA^{-1}w + bA^{-1}z.$$

□

Veta 6.1:

Nech A je lineárny operátor s definičným oborom D_A a oborom hodnôt R_A. Potom k tomuto operátoru existuje inverzný operátor A^{-1} práve vtedy, ak platí

(6.11) $Au = 0 \text{ v } R_A \Rightarrow u = 0 \text{ v } D_A$.

Dôkaz:
Už z predchádzajúcej vety vieme, že nula sa zobrazí lineárnym operátorom na nulu. Teraz ukážeme, že na nulu sa zobrazí iba nula, žiaden iný prvok. Čo je vlastne jednoduché a súvisí s tým, že treba ukázať, že operátor A je prostý**.**
Treba dokázať ekvivalenciu.
Ak existuje inverzný operátor, tak pôvodný operátor je prostý, a preto sa na nulu môže zobraziť iba jediný prvok (nula).
Nech sa na nulu zobrazí iba nula. Treba ukázať, že potom je lineárny operátor A prostý, teda $\forall u,v \in D_A, u \neq v \Rightarrow Au \neq Av$. Nech teda máme dva rôzne prvky z D_A
Teda ich rozdiel je určite nenulový
$0 \neq u - v \Rightarrow 0 \neq A(u-v) = Au - Av \Rightarrow 0 \neq Au - Av \Rightarrow Au \neq Av$. □

Poznámka 6.3:
Ak A je lineárny operátor, splnenie vzťahu (6.11) stačí na existenciu inverzného operátora , čo oproti dôkazu bijekcie všeobecného operátora značne zjednodušuje situáciu pri lineárnych operátoroch.

Ďalšie dôležité operátory a ich vlastnosti

Lineárne operátory v Hilbertovom priestore hrajú v matematike významnú úlohu. Existujú však aj iné operátory, tiež veľmi dôležité, ktoré nemusia byť vo všeobecnosti lineárne. Uvedieme jeden dôležitý príklad.

Definícia 6.10:
Nech P je metrický priestor s metrikou ρ. Nech operátor A zobrazuje prvky tohto priestoru P opäť do priestoru P. Operátor A sa nazýva **kontraktívny v tomto priestore** ak existuje také číslo α, $0 < \alpha < 1$, že pre každú dvojicu prvkov x, y z P platí: $\rho(Ax, Ay) \leq \alpha\rho(x,y)$.

Veta 6.2.: Banachova veta o pevnom bode
Nech je A kontraktívny operátor v úplnom metrickom priestore P. Potom rovnica
x = Ax
má v priestore P práve jedno riešenie, to znamená, že existuje práve jeden prvok u z P, pre ktorý platí u = Au. Tento prvok možno získať ako limitu postupnosti prvku x_n z P,
$u = \lim_{n\to\infty} x_n$, kde
$x_{n+1} = Ax_n, n = 1,2,....,$
pričom prvok x_1 možno zvoliť ľubovoľne.

Poznámka 6.4:
Veta má veľmi dôležité miesto napríklad v numerických metódach, ale aj v lineárnej algebre pri riešení sústav lineárnych rovníc.

Ďalej sa budeme zaoberať operátormi definovanými na Hilbertovom priestore H a do toho istého Hilbertovho priestoru, teda na priestore s metrikou a normou indukovanou skalárnym súčinom.

Definícia 6.11:
Operátor **I** sa nazýva **jednotkový operátor**, ak priraďuje každému prvku $u \in D_I$ ten istý prvok. Operátor **O** nazývame **nulový operátor,** ak priraďuje každému prvku $u \in D_O$ nulový prvok priestoru H.

Pre jednotkový operátor teda platí: $Iu = u, \quad \forall u \in D_I$.

Pre nulový operátor platí: $Ou = 0, \quad \forall u \in D_O$.

Definícia 6.12:
Operátor A: H→H sa nazýva **spojitý v bode u_0** z D_A ak pre každú postupnosť prvkov $u_n \in D_A$, pre ktorú platí
$\lim_{n\to\infty} u_n = u_0$ v H (teda $\lim_{n\to\infty}\|u_n - u_0\| = 0$), platí
$\lim_{n\to\infty} A\,u_n = Au_0$ v H (teda $\lim_{n\to\infty}\|Au_n - Au_0\| = 0$).
Ak je operátor A spojitý v každom bode svojho definičného oboru D_A hovoríme, že je **spojitý v D_A**.

Definícia 6.13:
Operátor A sa nazýva **ohraničený** na svojom definičnom obore D_A, ak sa dá nájsť číslo $K \geq 0$ také, že pre všetky $u \in D_A$ platí

(6.12) $\|Au\| \leq K\|u\|$.

Najmenšie z čísel K (dá sa ukázať, že vždy existuje), pre ktoré platí vzťah (6.12) nazývame **norma** operátora A a označujeme ho $\|A\|$.
Preto platí

(6.13) $\|Au\| \leq \|A\|\|u\|$ pre každé u z D_A.

Uvedieme si teraz netriviálny a užitočný príklad ohraničeného operátora.

Príklad 6.6:
Nech je daná funkcia dvoch premenných K(s,x) definovaná a s kvadrátom integrovateľná na štvorci Q = <0,1> x <0,1>. Označme ďalej $\int_0^1\int_0^1 K^2(s,x)dxds = C^2$, C kladné.
V Hilbertovom priestore $L_2(0,1)$ nech je daný operátor A predpisom

(6.14) $Au = v = \int_0^1 K(s,x)u(x)dx$.

Tento integrál za daných predpokladov existuje a navyše funkcia v, ako funkcia premennej s je z priestoru $L_2(0,1)$. Navyše podľa Schwarzovej nerovnosti:

$v^2 = \left(\int_0^1 K(s,x)u(x)dx\right)^2 \leq \int_0^1 K^2(s,x)dx.\int_0^1 u^2(x)dx$ a teda

$$\int_0^1 v^2(s)ds \le \int_0^1 \left(\int_0^1 K^2(s,x)dx.\int_0^1 u^2(x)dx \right) ds = \int_0^1\int_0^1 K^2(s,x)dx.ds.\int_0^1\int_0^1 u^2(x)dxds$$

a z toho

$$\|v\|^2_{L_2(0,1)} \le C^2\|u\|^2_{L_2(0,1)} \Rightarrow \|Au\|_{L_2(0,1)} \le C\,\|u\|_{L_2(0,1)}.$$

Operátor (6.14) je teda v Hilbertovom priestore $L_2(0,1)$ ohraničený. Pre normu A platí $\|A\| \le C$.

Príklad 6.7:
V Hilbertovom priestore $L_2(0,1)$ uvažujme lineál $D_A = C^1(0,1)$ a na ňom definujeme operátor A predpisom
$Au = \dfrac{du}{dx}$. Tento operátor nie je na D_A ohraničený.
Riešenie:
Stačí ukázať, že neexistuje taká konštanta K, aby platilo

$$\|Au\|_{L_2(0,1)} \le K\|u\|_{L_2(0,1)} \quad \forall u \in D_A.$$

Ukážeme to tak, že nájdeme takú postupnosť $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvkov z D_A, ktorých norma obrazov to je $\{Au_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa bude so vzrastajúcim n zväčšovať, a teda nebude môcť byť ohraničená, hoci norma vzorov je pre všetky n ohraničená.
Stačí zvoliť napríklad $u_n(x) = \sin(n\pi x)$. Z toho, že funkcia sin je ohraničená, hneď máme ohraničenosť každého prvku tejto postupnosti v $L_2(0,1)$. Ďalej dostávame: $Au_n(x) = n\pi\cos(n\pi x)$ pre všetky n. Norma potom bude:
$\left(\int_0^1 (Au_n(x))^2\,dx\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 (n\pi\cos(n\pi x))^2\,dx\right)^{1/2} = n\pi\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Tá to norma, ako vidíme so vzrastajúcim n narastá, a teda nebude ohraničená rovnomerne pre všetky n. □

Veta 6.3:
Nech je A lineárny operátor v Hilbertovom priestore H, ktorý zobrazuje lineál $D_A \subset H$ do H. Ak je operátor na D_A ohraničený, potom je spojitý.
Dôkaz:
Lineárny operátor je ohraničený, teda platí (6.13). Máme ukázať, že je spojitý v D_A, teda pre každý bod u z D_A musí platiť:
ak $\lim_{n\to\infty}\|u_n - u\| = 0$, tak $\lim_{n\to\infty}\|Au_n - Au\| = 0$.
Odhadujme teda limitu:
$0 \le \lim_{n\to\infty}\|Au_n - Au\| = \lim_{n\to\infty}\|A(u_n - u)\| \le \lim_{n\to\infty} K\|u_n - u\| = 0$. Využili sme fakt, že A je lineárny operátor a je ohraničený. □

Veta 6.4:
Nech je A lineárny operátor v Hilbertovom priestore H, ktorý zobrazuje lineál $D_A \subset H$ do H spojitý v D_A, potom je ohraničený.
(Bez dôkazu)

Z uvedeného vyplýva, že máme smolu, pretože naše diferenciálne operátory sú síce lineárne príklad 6.5 a jeho zovšeobecnenia, ale nie sú ohraničené, príklad 6.7, a teda ani spojité, takže túto úžasnú vlastnosť nemajú, preto treba hľadať iné dobré vlastnosti, ktoré by mohli mať.

Vety o hustote

Nasledujúce dve podčasti vyzerajú, že celkom s daným problémom nesúvisia, ale ako sa neskôr ukáže, hrajú pre určenie vlastností diferenciálnych operátorov veľmi dôležitú úlohu.

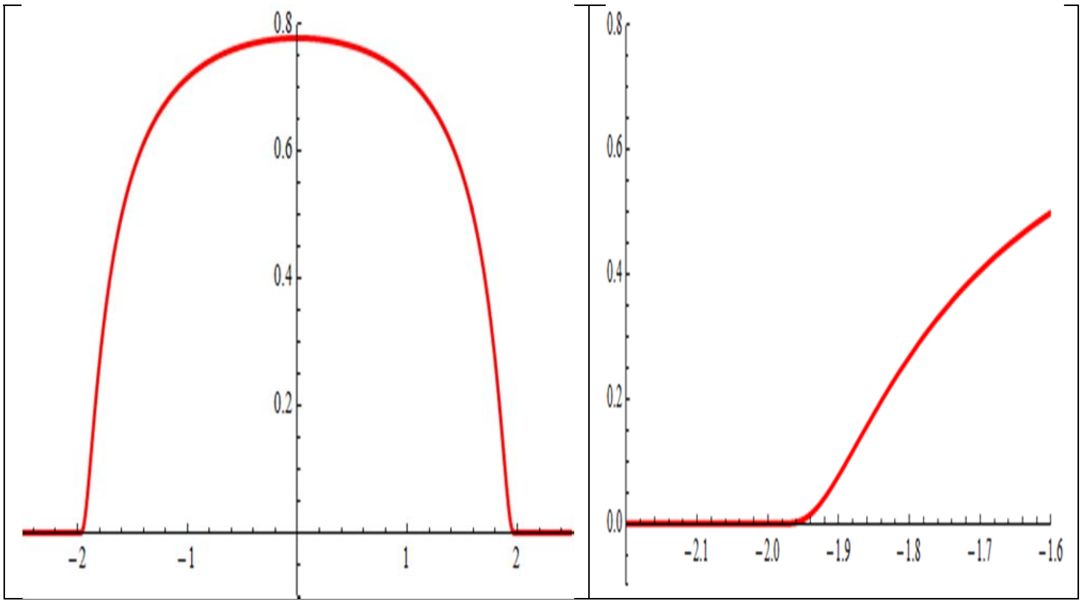
Označenia:
Už v predchádzajúcom texte sme používali nasledujúce označenia, alebo ich špeciálne prípady, takže si to teraz zhrnieme:
$C^k(\overline{G})$ – lineárny priestor všetkých spojitých reálnych funkcií definovaných na $\overline{G}$, ktoré sú spojité aj so všetkými svojimi deriváciami až do k-teho rádu včítane na $\overline{G}$.
$C^\infty(\overline{G})$ – lineárny priestor všetkých spojitých reálnych funkcií definovaných na $\overline{G}$, ktoré sú spojité spolu so všetkými deriváciami na $\overline{G}$.

Zavedieme teraz ešte jedno dôležité označenie
$C_0^\infty(G)$ - lineárny priestor tých funkcií z $C^\infty(\overline{G})$, ktoré sú rovné nule v určitom okolí hranice oblasti G. Často sa označujú aj ako $\mathscr{D}(G)$ a sú známe pod menom **funkcie s kompaktným nosičom v G.**
Nosičom funkcie $\varphi(x)$ - označujeme to supp φ, rozumieme uzáver (v priestore E_N) množiny tých bodov $x \in \overline{G}$ pre ktoré platí $\varphi(x) \neq 0$.
Teda $\varphi \in C_0^\infty(G)$ znamená, že $\varphi \in C^\infty(\overline{G})$ a $\operatorname{supp}\varphi \subset G$.

Príklad 6.8:
V jednodimenzionálnom prípade je funkcia s kompaktným nosičom v intervale (-2.5, 2.5) napríklad funkcia

$$u(x) = \begin{cases} e^{-1/(4-x^2)}, & x \in (-2,2), \\ 0, & inde. \end{cases}$$

Má spojité derivácie všetkých rádov a má kompaktný nosič. Na Obrázku 6.1 máme danú funkciu aj jej detail v okolí bodu -2, aby bolo lepšie vidieť, že funkcia je spojitá aj so svojimi všetkými deriváciami.

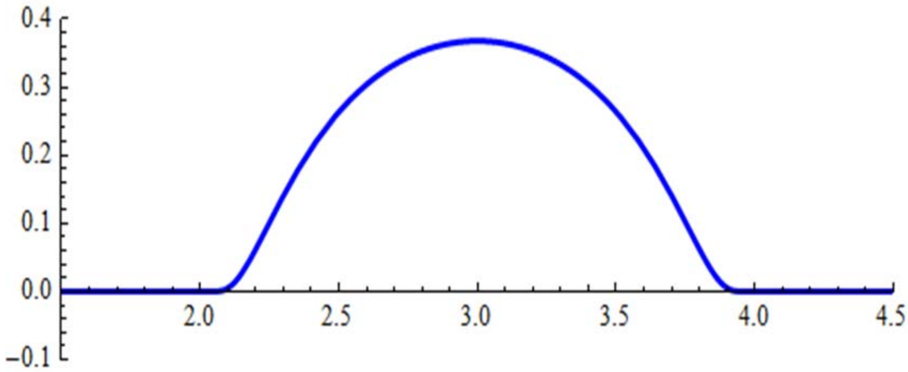


Obrázok 6.1

Všeobecnejšie: Uvažujeme funkciu $\psi(\rho,x,t)$ definovanú predpisom

$$\psi(\rho,x,t)=\begin{cases} e^{-1/(\rho^2-(x-t)^2)}, & |x-t|<\rho, \\ 0, & |x-t|\geq\rho, \end{cases}$$

kde ρ je pevne dané číslo. Na Obrázku 6.2 je $x=3, \quad \rho=1$.



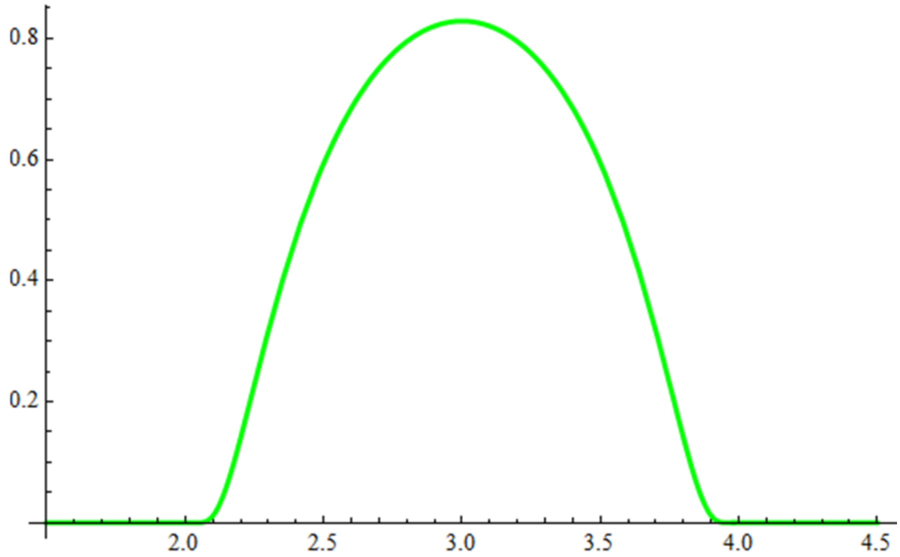
Obrázok 6.2

Dá sa ukázať, že pre každé reálne číslo x má uvedená funkcia ako funkcia premennej t všetky derivácie a je nenulová len v intervale $(x-\rho,x+\rho)$ (pozri Obrázok 6.2). Navyše, ak vypočítame plochu danú touto nezápornou funkciou:

(6.15) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\rho,x,t)dt=\int_{x-\rho}^{x+\rho}e^{-1/(\rho^2-(x-t)^2)}dt=\int_{-\rho}^{+\rho}e^{-1/(\rho^2-z^2)}dz=h(\rho)$, tento integrál nezávisí od premennej x, čiže plocha je len funkciou parametra ρ.

Vezmeme teraz $\varphi(\rho,x,t)=\dfrac{\psi(\rho,x,t)}{h(\rho)}$.

Táto funkcia je teda taká, že $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\rho, x, t)dt = 1$, a nazýva sa **regularizujúce jadro.** Na Obrázku 6.3 regularizujúce jadro pre parametre $x = 3, \quad \rho = 1$.



Obrázok 6.3

Uvažujme ľubovoľnú funkciu $u \in L_2(a,b)$ a predĺžme ju nulou na celý interval $(-\infty, \infty)$. Uvažujme integrál

$\mu(\rho, x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\varphi(\rho, x, t)dt$, kde ρ je kladné číslo.

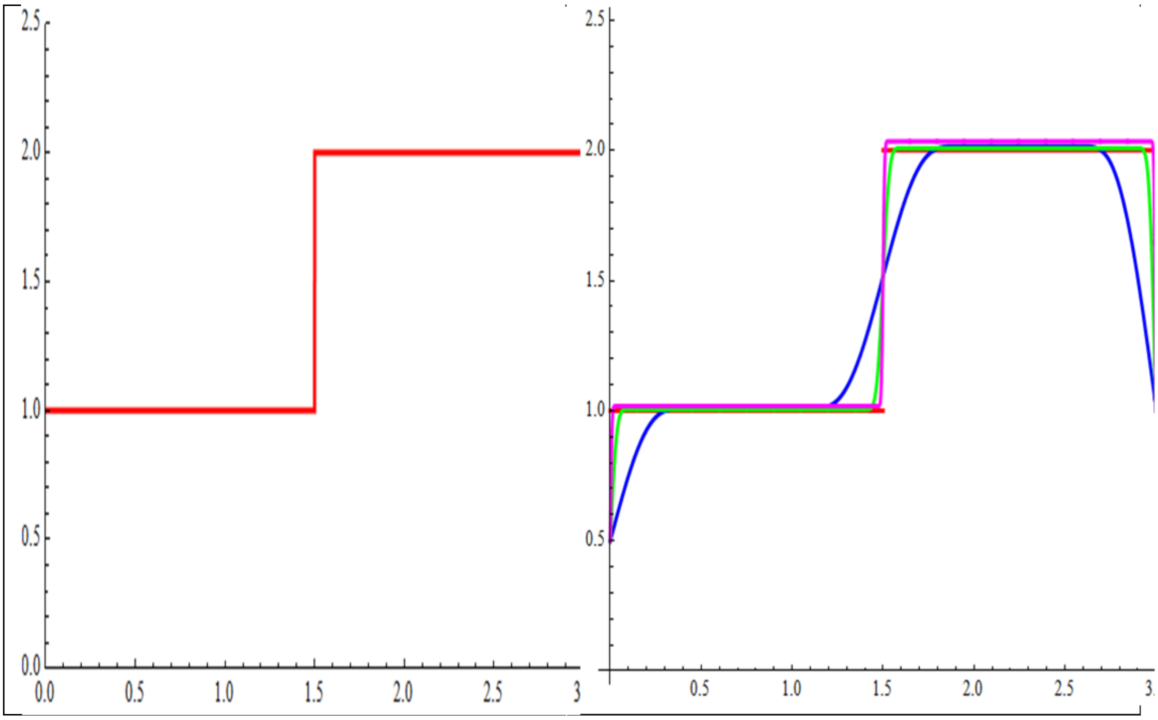
Z predchádzajúceho je zrejmé, že funkcia $\mu(\rho, x)$ bude nulová pre všetky x mimo intervalu (a-ρ, b +ρ). Z hladkosti funkcie φ plynie aj hladkosť funkcie μ a ak bude ρ dostatočne malé, bude sa na intervale (a,b) funkcia μ len málo líšiť od funkcie u.

Veta 6.5:
Funkcia $\mu(\rho, x)$ má v intervale $(-\infty, \infty)$ derivácie všetkých rádov pričom mimo intervalu (a-ρ, b +ρ) je táto funkcia nulová. Navyše platí:

(6.16) $\lim_{\rho \to 0} \mu(\rho, x) = u(x)$ v $L_2(a,b)$.

Bez dôkazu, pozri [K].

Namiesto dôkazu sme vo výpočtovom softvéri Mathematica pripravili Obrázok 6.4, na ľavom je po častiach konštantná funkcia a na pravom vidíme okrem nej aj funkcie $\mu(\rho, x)$ pre hodnoty parametrov ρ = 0,5, 0,2, 0,1. Z obrázku je pekne vidieť konvergenciu týchto funkcií k pôvodnej po častiach konštantnej funkcii.



Obrázok 6.4

Tvrdenie 6.3:
Nech $u \in L_2(a,b)$. Potom ku každému η>0 sa dá nájsť také δ>0, že platí:

$$(6.17)\quad \int_c^d u^2(x)dx < \eta, \quad pre \quad <c,d> \subset <a,b>, \quad |d-c| \le \delta.$$

Bez dôkazu, pozri [K].

Veta 6.6:
Lineárny priestor $C_0^\infty(a,b)$ je hustý v $L_2(a,b)$.
Bez dôkazu, pozri [K].

Poznámka 6.5:
Z uvedeného vyplýva, že každú funkciu $f \in L_2(a,b)$ môžeme s ľubovoľnou presnosťou aproximovať funkciami z lineárneho priestoru $C_0^\infty(a,b)$, ale tým skôr funkciami z lineárneho priestoru N, ktorý tvoria všetky funkcie spojité až do druhého rádu vrátane na intervale <a, b> a splňuje podmienky u(a) = u(b) = 0, pretože tento určite obsahuje všetky funkcie z $C_0^\infty(a,b)$ (je „väčší“). Toto platí aj pre lineárny priestor P, takých funkcií z lineárneho priestoru N, ktoré spĺňajú oveľa všeobecnejšie okrajové podmienky:

$c_1u'(a) + c_2u(a) = 0, \quad c_3u'(b) + c_4u(b) = 0,$ kde aspoň jedno číslo v každej z dvojíc $(c_1,c_2),(c_3,c_4)$ je nenulové.

Táto teória sa dá zovšeobecniť aj pre viacdimenzionálne oblasti, ale tieto musia mať isté vhodné vlastnosti, ktoré si ukážeme v nasledujúcej časti.

Definícia 6.12: (Oblasť s Lipschitzovskou hranicou)
Hovoríme, že ohraničená (vo všeobecnosti aj viacnásobne súvislá) oblasť G je **oblasť s Lipschitzovskou hranicou (**Obrázok 6.5 [R]), ak existujú kladné konštanty α, β a konečný počet karteziánskych systémov súradníc $x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, ..., x_N^{(r)}$, r = 1, 2, ..,m a m funkcií $a_r(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, ,...x_{N-1}^{(r)})$, spojitých v (N-1) otvorených kockách $K^{(r)}$: $\left|x_i^{(r)}\right| < \alpha$, i=1, 2, ...N-1, tak, že

a) každý bod hranice Γ sa dá vyjadriť aspoň v jednom z uvažovaných systémov súradníc v tvare: $x = [x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, ...x_{N-1}^{(r)}, a_r(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, ...x_{N-1}^{(r)})]$,

b) body $x = (x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, ..., x_N^{(r)})$, pre ktoré platí

$\left|x_i^{(r)}\right| < \alpha$, i=1, 2, ...N-1, a

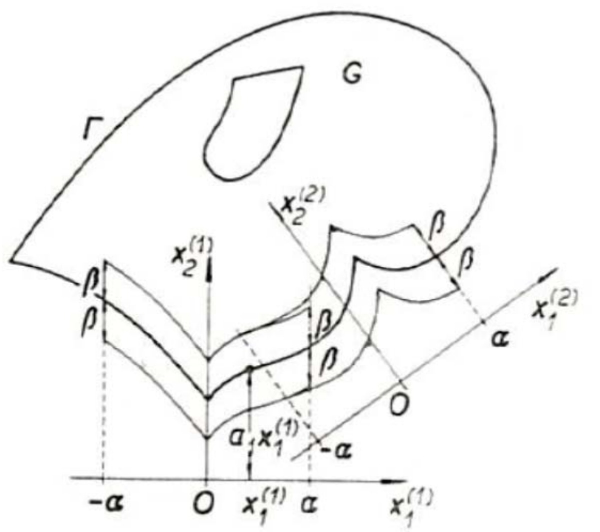
$a_r(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, ,...x_{N-1}^{(r)}) < x_N^{(r)} < a_r(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, ,...x_{N-1}^{(r)}) + \beta$, resp.

$a_r(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, ,...x_{N-1}^{(r)}) - \beta < x_N^{(r)} < a_r(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, ,...x_{N-1}^{(r)})$

ležia v G respektíve mimo $\overline{G}$.

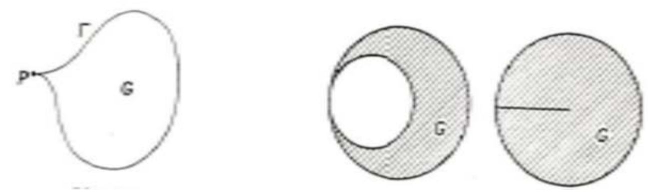
c) každá z funkcií $a_r(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, ...x_{N-1}^{(r)})$, r=1, 2, ..m je na kocke $K^{(r)}$: Lipschitzovská , to je existuje konštanta L taká, že pre každé dva body $(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, ..., x_{N-1}^{(r)})$, $(y_1^{(r)}, y_2^{(r)}, ..., y_{N-1}^{(r)})$, z tejto kocky platí:

$$| a_r(y_1^{(r)}, y_2^{(r)}, .., y_{N-1}^{(r)}) - a_r(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, ..., x_{N-1}^{(r)}) | \leq L\sqrt{(y_1^{(r)} - x_1^{(r)})^2 + ...(y_{N-1}^{(r)} - x_{N-1}^{(r)})^2}$$



Obrázok 6.5

Príklad 6.9:
Medzi oblasti s Lipschitzovskou hranicou patrí kruh, medzikružie trojuholník guľa, kocka.
Nepatria sem napr. oblasti s bodmi vratu - pozri Obrázok 6.6 [R]



Obrázok 6.6

Poznámka 6.6.: Obdobným spôsobom ako pri definícii oblasti s Lipschitzovskou hranicou môžeme definovať aj špeciálnejšie oblasti, kde kladieme požiadavky na funkcie a_r. Napríklad ak majú tieto spojité derivácie všetkých rádov, potom oblasť nazývame **oblasť s regulárnou hranicou** (alebo skoro všade regulárnou).

A teraz teda nasleduje zovšeobecnenie teórie o hustote pre viacdimenzionálne oblasti.

Veta 6.7:
Nech G je oblasť s Lipschitzovskou hranicou**.** Potom lineárny priestor $C_0^\infty(G)$ je hustý v $L_2(G)$.
Bez dôkazu, pozri [K].

Poznámka 6.7:
Analogický výsledok ako v jednodimenzionálnom prípade platí aj pre viacdimenzionálny prípad. Napríklad priestor M_1 z príkladu 6.1 je tiež hustý v $L_2(G)$ pretože obsahuje všetky funkcie z $C_0^\infty(G)$. To isté platí aj pre lineárny priestor R takých funkcií z $C^2(\overline{G})$, ktoré na hranici spĺňajú podmienku $\frac{\partial u}{\partial \nu} + cu = 0,$ kde ν je vektor vonkajšej normály k hranici Γ = ∂G, c je buď konštanta (aj nulová) alebo funkcia daná na hranici Γ.

Poznámka 6.8.:
Na uvažované funkcie možno klásť aj iné požiadavky. Napríklad aj lineárny priestor funkcií s kompaktným nosičom v intervale (a, b) takých , že

$$\int_a^b u(x)dx = 0$$

je hustý v priestore $\widetilde{L}_2(a,b)$ (v metrike $L_2(a,b)$) tých funkcií $f \in L_2(a,b)$, ktoré vyhovujú podmienke $\int_a^b f(x)dx = 0$.

Veta o divergencii a jej aplikácie

Cieľom našich ďalších úvah je, ako sme už povedali, zistiť aké iné dobré vlastnosti môžu mať diferenciálne operátory, zatiaľ len lineárne, keď už nie sú ohraničené. Tým vlastnostiam sa budeme venovať v nasledujúcej podčasti a vlastne aj v ďalších kapitolách.

Aby sme ich ale ukázali, na to nám bude treba nejaké poznatky z teórie matematickej analýzy, ktoré si teraz zhrnieme. Názov tejto podčasti by samozrejme mohol byť aj iný, veta, o ktorej chceme hovoriť má dosť veľa názvov v závislosti od dimenzie priestoru, na ktorom pracuje a je známa pod pojmami: Greenova veta, Gaussova-Ostrogradského veta, Gaussova veta, veta o divergencii a jej dôsledky pod názvom Greenova formula.

Veta vlastne hovorí o vzájomnom vzťahu toku vektorového poľa $\vec{F}$ uzavretou, jendoducho súvislou hladkou plochou ∂G s integrálom cez objem G touto plochou ohraničeným z divergencie daného vektorového poľa.
Oblasť, o ktorej budeme ďalej hovoriť nemôže byť ľubovoľná. Pôvodné vety sa v matematickej analýze sformulujú pre „pekné" oblasti s hladkou hranicou a funkcia má tiež dobré vlastnosti spojitosti a aj spojitosti svojich parciálnych derivácií. Veta však platí aj všeobecnejšie, čo sa týka aj oblasti a jej hranice aj funkcií.

Veta 6.8: Veta o divergencii (Gaussova veta....)
Nech $G \subset R^N$ je ohraničená oblasť s dostatočne hladkou hranicou ∂G a nech $\vec{n} = (n_1,...n_N)$ je jednotkový normálový vektor k tejto hranici orientovný smerom von. (vektor vonkajšej normály). Nech $\vec{F} = (F_1,...,F_N)$ je spojité vektorové pole so spojitými všetkými prvými deriváciam na G a nech $div\vec{F} = \nabla.\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$. Potom platí

$$\int_{\partial G} \vec{F}.\vec{n}\, ds = \int_G \nabla.\vec{F}\, dx. \qquad (6.18)$$

Z tejto základnej podoby vety o divergencii možno odvodiť veľmi užitočné formuly.
Napríklad, nech teraz je vektorová funkcia $\vec{F} = (F_1,...,F_N)$ taká, že okrem i-tej zložky sú všetky zložky nulové funkcie a pre i-tu zložku platí $F_i \neq 0$. Veta potom nadobudne pri predpokladoch predchádzajúcej vety podobu:

$$\int_{\partial G} F_i n_i ds = \int_G \frac{\partial F_i}{\partial x_i} dx .$$

Zvoľme teraz za funkciu $F_i = f.g$ súčin dvoch spojitých funkcií, ktoré majú spojité aj všetky prvé parciálne derivácie. Potom využijúc vlastnosti derivácie súčinu funkcií dostávame:

$$\int_{\partial G} fgn_i ds = \int_G \frac{\partial f}{\partial x_i} gdx + \int_G \frac{\partial g}{\partial x_i} fdx .$$

Výsledok zhrnieme do vety:
Veta 6.9: Greenova veta. Nech G je oblasť s Lipschitzovskou hranicou ∂G a nech funkcie f(x) a g(x) sú spojité včítane všetkých svojich prvých parciálnych derivácií v $\overline{G} = \partial G \cup G$. Potom platí:

(6.19) $\int\limits_G \frac{\partial f}{\partial x_i} g dx = \int\limits_\Gamma f g n_i ds - \int\limits_G f \frac{\partial g}{\partial x_i} dx$,

kde n_i je i-ta zložka vektora vonkajšej normály ku hranici.

Symetrické, pozitívne a pozitívne definitné operátory.

V tejto podkapitole sa teda definujú tie ďalšie pekné vlastnosti a na príkladoch ukážeme, že niektoré diferenciálne operátory ich majú.

Definícia 6.13:
Nech D_A je lineárny priestor hustý v H. Operátor **A lineárny v D_A** sa nazýva **symetrický**, ak pre každú dvojicu prvkov u, v z D_A platí:

(6.20) $(Au, v) = (u, Av)$.

Príklad 6.9:
Označme D_A lineárny priestor N, ktorý tvoria všetky funkcie spojité až do druhého rádu vrátane na intervale <a, b> a splňujú podmienky nulové okrajové podmienky:

$N = \{u \in C^2(< a, b >); u(a) = u(b) = 0\}$.

Z už povedaného je tento lineárny priestor hustý v **Hilbertovom priestore** $L_2(a, b)$. Na tomto lineárnom priestore definujeme operátor A vzťahom: Au = -u''. Tento operátor je symetrický.
Riešenie:
Treba ukázať vlastnosť (6.20) v priestore $L_2(a, b)$, teda platnosť rovnosti:
$\int\limits_a^b u'' v dx = \int\limits_a^b u v'' dx$. V dôkaze použijeme Greenovu vetu, ale v jednorozmernom prípade je to vlastne obyčajné per partes:

$$\int\limits_a^b -u'' v dx = -[u'v]_a^b + \int\limits_a^b u'v' dx = -[u'v]_a^b + [uv']_a^b - \int\limits_a^b uv'' dx = \int\limits_a^b u(-v'') dx,$$

kde nám hraničné členy vypadli, pretože obe funkcie spĺňajú nulové okrajové podmienky, keďže sú z D_A.

Definícia 6.14:
Operátor A sa nazýva **pozitívny** na svojom definičnom obore D_A, ak je symetrický a pre všetky u z D_A platí:

(6.21) $(Au, u) \geq 0, \quad ak \quad (Au, u) = 0 \Rightarrow u = 0 \quad v \quad D_A$.

Ak navyše existuje konštanta C>0, taká, že pre všetky u z D_A platí

(6.22) $(Au, u) \geq C^2 \|u\|^2$,

nazýva sa operátor **pozitívne definitný** v D_A.

Príklad 6.10:
Operátor z príkladu 6.9 je pozitívny.

Riešenie:
Tento operátor je, ako sme už ukázali, symetrický, takže stačí ukázať vlastnosť (6.21), teda $-\int_a^b u''u dx \geq 0$. Postupujeme ako v príklade 6.9:

$$\int_a^b -u''u dx = -[u'u]_a^b + \int_a^b (u')^2 dx = \int_a^b (u')^2 dx \geq 0,$$

kde sme opäť využili nulové okrajové podmienky. Druhá vlastnosť pozitivity platí z nasledujúcej úvahy: Ak je $\int_a^b (u')^2 dx = 0$ a vieme, že u je z N, potom musí byť funkcia na intervale <a, b> konštantná, ale keď že na jej okrajoch je nulová, musí byť táto konštanta nula.

Všimnite si navyše, akú podstatnú úlohu v tejto vlastnosti má to znamienko - pri druhej derivácii v operátore $Au = -u''$.

Príklad 6.11:
Operátor z príkladu 6.9 je pozitívne definitný.
Riešenie:
Z predchádzajúcich príkladov je jasné, že stačí dokázať vzťah (6.22).
Analogicky ako v príklade 6.10 dostávame
$\int_a^b -u''u dx = \int_a^b (u')^2 dx,$ stačí preto ukázať, že pre všetky $u \in N$ existuje kladná konštanta C², taká že platí $\int_a^b -u''u dx = \int_a^b (u')^2 dx \geq C^2 \int_a^b (u)^2 dx = C^2 \|u\|^2$. Využijeme nato Newtonov-Leibnizov vzorec a vlastnosti funkcií z N. Máme
$u(x) = \int_a^x u'(s) ds \Rightarrow u^2(x) = \left(\int_a^x u'(s) ds \right)^2 \leq \int_a^x (u'(s))^2 ds \int_a^x ds,$ kde sme v druhom kroku, využili Cauchyho-Schwarzovu nerovnosť pre funkciu u a v=1. Teraz, keďže na ľavej strane ide o integrály z nezáporných funkcií a $x \in < a, b >$, zväčšíme prvý integrál posunutím hornej hranice do bodu b a druhý integrál vypočítame:
$u^2(x) \leq (x-a) \int_a^b (u'(x))^2 dx$. Teraz nerovnosť zintegrujeme na celom intervale:

$$\int_a^b u^2(x) dx \leq \left(\int_a^b (x-a) dx \right) \int_a^b (u'(x))^2 dx = \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b (u'(x))^2 dx$$, z čoho hneď máme

$$\int_a^b (u'(x))^2 dx \geq \frac{2}{(b-a)^2} \int_a^b u^2(x) dx.$$

Naša vypočítaná konštanta teda je $C^2 = \dfrac{2}{(b-a)^2}$.

Samozrejme, nie je to tá najlepšia konštanta, akou sa dá uvedený integrál odhadnúť, ale pre nás bude zatiaľ postačujúca.

7. Funkcionály v Hilbertovom priestore Rieszova veta

V tejto časti budeme venovať osobitné miesto špeciálnemu typu operátorov a síce funkcionálom. Všimnite si hlavne príklad 7.1, veľmi užitočný ako aj Rieszova veta o reprezentácii, ktorá bude mať aj v ďalších dôkazoch veľký význam.

Definícia 7.1:
Operátor F, ktorý zobrazuje svoj definičný obor D_F do množiny reálnych (resp. komplexných) čísel sa nazýva **funkcionál** (reálny, resp. komplexný).

Budeme skúmať hlavne **reálne funkcionály**.
Funkcionál je špeciálnym prípadom operátora, a preto výsledky predchádzajúcej kapitoly platia v nezmenenej podobe aj pre funkcionály.

Definícia 7.2:
Reálny funkcionál F sa nazýva **lineárny**, ak je jeho definičným oborom D_F lineárny priestor a pre každé reálne čísla a_1, a_2, ...a_n a každé prvky u_1, u_2,..., u_n z D_F platí

(7.1) $F(a_1u_1 + a_2u_2 + ... + a_nu_n) = a_1Fu_1 + a_2Fu_2 + ... + a_nFu_n$.

Definícia spojitosti a ohraničenosti sú tiež podobné. Treba si len uvedomiť, že konvergencia $\lim_{n\to\infty} Fu_n = Fu$ znamená v tomto prípade konvergenciu postupnosti reálnych čísel.

Definícia 7.3:
Funkcionál F sa nazýva **spojitý v bode u_0** z D_F ak pre každú postupnosť prvkov $u_n \in D_F$, pre ktorú platí $\lim_{n\to\infty} u_n = u_0$ v H platí

(7.2) $\lim_{n\to\infty} F u_n = Fu_0$.

Ak je funkcionál F spojitý v každom bode svojho definičného oboru D_F, hovoríme. že je **spojitý** v D_F.

Definícia 7.4:
Funkcionál F sa nazýva **ohraničený** na svojom definičnom obore D_F, ak sa dá nájsť číslo $K \geq 0$ také. že pre všetky $u \in D_F$ platí

(7.3) $|Fu| \leq K\|u\|$.

Najmenšie z čísel K (vždy existuje), pre ktoré platí vzťah (7.3) nazývame **norma funkcionálu F** a označujeme $\|F\|$.

Príklad 7.1:
Nech v je určitý pevný prvok reálneho Hilbertovho priestoru H. Definujme

(7.4) $Fu = (u, v), \quad \forall u \in H$.

Vzťahom (7.4) je v H daný lineárny ohraničený funkcionál a jeho norma sa rovná norme prvku v.

Riešenie:

Tento funkcionál je definovaný na celom H, takže pre vlastnosť linearity stačí ukázať splnenie vzťahu (7.1). To je ale veľmi ľahké, pretože aj skalárny súčin má vlastnosť linearity:

$F(a_1u_1 + a_2u_2 + ... + a_nu_n) = (a_1u_1 + a_2u_2 + ... + a_nu_n, v) = a_1(u_1, v) + ... + a_n(u_n, v) =$
$a_1Fu_1 + a_2Fu_2 + ... + a_nFu_n$.

Teraz skúmajme jeho normu. Ohraničenie je dané Cauchy Schwarzovou nerovnosťou $Fu = (u,v) \leq \|u\|\|v\| \quad \forall u \in H$. Teda zatiaľ vieme, že $K \leq \|v\|$.

Treba si uvedomiť, že norma prvku v je pevné nezáporné reálne číslo.

Ak teraz do tejto rovnice dosadíme za ľubovoľný prvok u, práve prvok v, máme: $Fv = (v,v) = \|v\|^2 = \|v\|\|v\|$, a teda musí platiť $K = \|v\|$.

Veta 7.1:Rieszova veta

Každý lineárny ohraničený funkcionál F v Hilbertovom priestore H sa dá vyjadriť v tvare

(7.5) $\quad \mathrm{Fu} = (\mathrm{u}, \mathrm{v})$,

kde v je určitý prvok priestoru H, ktorý je týmto funkcionálom jednoznačne určený. Pritom platí:

(7.6) $\quad \|\mathrm{v}\| = \|\mathrm{F}\|$.

Dôkaz:

Načrtneme hlavnú myšlienku dôkazu, aby sme poukázali na jeden fakt, ktorý z toho vyplynie.

Uvažujme najskôr prípad, že F je taký funkcionál, ktorý všetky prvky zobrazí na nulu. V takom prípade stačí za prvok v zvoliť nulový prvok Hilbertovho priestoru H, pretože skalárny súčin z nulovým prvkom je vždy nula. Veľkosť normy je potom samozrejme nula.

Nech teraz F nezobrazí všetky prvky na nulu. Potom musí existovať v H prvok taký, že
$Fx = \alpha \neq 0$. Nech množina L je množina všetkých prvkov z H takých, že sa zobrazia funkcionálom F na nulu. Ľahko sa ukáže z vlastnosti linearitry F, že táto množina je lineárna množina. F je ohraničený funkcionál, takže sa ľahko ukáže, že L je podpriestor priestoru H s indukovanou metrikou priestoru H (cvičenie). Z predtým povedaného vieme, že celý priestor H môžeme rozložiť na podpriestory L a K, $H = L \oplus K$ tak, že všetky prvky priestoru K sú ortogonálne na všetky prvky priestoru L. Vezmeme prvok $y = \dfrac{x}{\alpha}$ z Hilbertovho priestoru H. Pre tento prvok zrejme platí: Fy=1 a teda y je z K. Nech teraz je u ľubovoľný prvok z H a označme $Fu = \beta$. Ak zapíšeme
$u = (u - \beta y) + \beta y$, potom $F(u - \beta y) = Fu - \beta Fy = 0$, a teda $(u - \beta y) \in L$, preto $\beta y \in K$.

Dostávame:

$$(u,y)=(u-\beta y+\beta y,y)=(u-\beta y,y)+(\beta y,y)=\beta\|y\|^2=\|y\|^2 Fu \Rightarrow$$

$$Fu=(u,\frac{y}{\|y\|^2}).$$

Hľadaným prvkom je teda prvok $v=\frac{y}{\|y\|^2}$. Treba už len ukázať, že takýto prvok je jediný a veľkosť jeho normy definuje práve normu F.
Jednoznačnosť:
Nech sú také prvky dva rôzne. Označme ich v a w, Pre každý platí
$Fu=(u,v);\quad Fu=(u,w)\Rightarrow(u,v-w)=0$ ak teraz za u zvolíme prvok v-w dostávame
$0=(v-w,v-w)\Rightarrow v-w=0\Rightarrow v=w$ v H, z čoho dostávame jednoznačnosť.
Ďalej vieme $|Fu|=|(u,v)|\le\|u\|\|v\|\Rightarrow\|F\|\le\|v\|$, ak teraz v tejto nerovnosti dosadíme za prvok u práve prvok v máme $|Fv|=|(v,v)|=\|v\|\|v\|\Rightarrow\|F\|=\|v\|$. □

Veta 7.2:
Lineárny funkcionál je v D_F spojitý práve vtedy, keď je ohraničený.
Dôkaz: vyplýva z platnosti tohto tvrdenia pre lineárne operátory.

Teraz si definujeme ešte jeden špeciálny funkcionál, ktorý bude mať v budúcnosti veľký význam.

Poznámka 7.1:
Nech A je pozitívny operátor v lineárnom priestore D_A, hustom v Hilbertovom priestore H. Nech f je prvok z H. Potom predpisom
$\mathrm{Fu}=(\mathrm{Au},\mathrm{u})-2(\mathrm{f},\mathrm{u})$
je daný funkcionál a nazývame ho **kvadratický** funkcionál, pretože

$$(A(au),au)=a^2(Au,u),\quad\forall a\in R.$$

Cvičenia:

6.1. Ukážte, že rozšírenie operátora z príkladu 6.9 na definičný obor $C^2(a,b)$ nie je symetrický operátor.

6.2. Definujme na Hilberovom priestore $L_2(G)$ lineárny priestor D_A ako množinu všetkých funkcií z $C^2(\overline{G})$, kde G je oblasť s Lipschitzovskou hranicou takých, že na hranici spĺňajú nulovu Dirichletovu podmienku. Ukážte, že operátor
$Au = -\Delta u$, (Δu je Laplaceov operátor) s týmto definičným oborom je symetrický operátor.

6.3.: Ukážte, že operátor z príkladu 6.2 je pozitívny.

6.4. Nech A je operátor s D_A, ktorý tvoria všetky funkcie spojité až do druhého rádu vrátane na intervale <a, b> a spĺňa podmienky
$u(a) = u(b) = 0$. Na tomto lineárnom priestore definujeme operátor A vzťahom:
$Au = -u'' + cu$. Pre aké $c \in R$ je operátor symetrický, pozitívny a pozitívne definitný?

6.5. Nech B je operátor s D_A, ktorý tvoria všetky funkcie spojité až do druhého rádu vrátane na intervale <a, b> a splňuje podmienky $u'(a) = u'(b) = 0$. Na tomto lineárnom priestore definujeme operátor A vzťahom
$Au = -u'' + cu$. Pre aké $c \in R$ je operátor symetrický, pozitívny a pozitívne definitný?

6.6. Opíšte operátor, ktorý prislúcha jednodimenzionálnej úlohe s Poissonovou rovnicou a Newtonovými okrajovými podmienkami. Aké vlastnosti má tento operátor?

7.1. Pre Hilbertov priestor $L_2(0,1)$ definujete pre funkciu $v(x) = 1$ na intervale <0,1> funkcionál G ako skalárny súčin v $L_2(0,1)$ s týmto prvkom. Ukážte jeho základné vlastnosti.

7.2 . Pre Hilbertov priestor $L_2(0,1)$ definujeme pre funkciu $v(x) = 1$ na intervale <0,1> funkcionál F takto: $Fu = \int_0^1 u^2(x)v(x)dx$. Ukážte jeho základné vlastnosti.

7.3. Pre Hilbertov priestor $L_2(0,1)$ definujme pre funkciu $v(x) = 1$ na intervale <0,1> funkcionál G ako v príklade 7.1. Ukážte jeho základné vlastnosti.

7.4. Je operátor T definovaný predpisom $Tf(x) = x\int_0^1 f(t)dt$ lineárny a spojitý ako operátor z $L_1(0,1)$ do $L_2(0,1)$?

7.5. Je operátor z príkladu 7.4. lineárny a spojitý ako operátor z $L_2(0,1)$ do $L_2(0,1)$?

7.6. Je funkcionál definovaný predpisom $Lf = \int_0^1 t^{-1/5} f(t)dt$ lineárny a spojitý na $L_2(0,1)$?

7.7. Je funkcionál definovaný predpisom $Lf = \int_0^1 f(t)dt$ lineárny a spojitý na C(< 0,1>)?

7.8. Je funkcionál definovaný predpisom $Lf = \int_0^1 tf(t^2)dt$ lineárny a spojitý na C(< 0,1>)?

7.9. Nech je zobrazenie A dané predpisom $Ax = \left(\int_0^1 x(t)dt, \int_0^1 tx(t)dt \right)$. Je A surjektívne zobrazenie?

7.10. Je zobrazenie f z C(< 0,1>) do C(< 0,1>), ktoré je dané predpisom f(x)(t) = $x^2(t)$ spojitým zobrazením? Dokážte.

8. Veta o minime kvadratického funkcionálu

V predchádzajúcej kapitole sme si zaviedli pojem a základné vlastnosti operátorov a funkcionálov v Hilbertovom priestore. Teraz by sme tie poznatky chceli využiť na hľadanie riešenia nejakého problému, ktorý možno modelovať istou diferenciálnou rovnicou a okrajovými podmienkami.

Budeme uvažovať Hilbertov priestor H a v ňom hustý lineárny priestor D_A. Na ňom uvažujeme pozitívny (alebo pozitívne definitný) operátor zobrazujúci D_A do H. Nech je daný prvok $f \in H$. **Hľadáme prvok** $u \in D_A$**,** ktorý spĺňa rovnicu

(8.1) $Au = f \quad v \quad H$.

Týmto zápisom rozumieme, že rovnica je splnená v uvažovanom Hilbertovom priestore H, teda, že prvok **Au-f je nulový prvok v H**.

Veta 8.1:
Ak je A **pozitívny** operátor v D_A, potom má rovnica (8.1), pre $f \in H$ v H, nanajvýš jedno riešenie $u \in D_A$.
Dôkaz:
Budeme postupovať tak, ako sa spravidla pri dôkaze jednoznačnosti postupuje, teda sporom. Nech existujú dve riešenia uvedeného problému. Teda platí:

$$\exists u_1, u_2 \in H; \quad u_1 \neq u_2 \, v \quad H \quad \wedge \; Au_1 = f \wedge \quad Au_1 = f \, v \quad H\,.$$

A je ale pozitívny operátor, teda aj lineárny, odčítaním dvoch posledných rovníc preto platí
$Au_1 - Au_2 = 0 \Rightarrow A(u_1 - u_2) = 0$. Teraz stačí poslednú rovnicu skalárne vynásobiť prvkom $u_1 - u_2$. Potom z vlastnosti pozitívnosti (6.21) hneď máme: $u_1 = u_2$ v H. □

Veta 8.2: O minime kvadratického funkcionálu.
Nech A je **pozitívny** operátor v D_A, $f \in H$. Nech má rovnica (8.1) riešenie $u_0 \in D_A$ (teda $Au_0 = f$ v H). Potom kvadratický funkcionál

(8.2) $Fu = (Au, u) - 2(f, u)$

nadobúda v D_A minimum práve v prvku u_0 to jest pre všetky $u \in D_A$ platí $F(u) \geq F(u_0)$ pričom rovnosť nastáva len pre $u = u_0$.
Opačne: Nech funkcionál (8.2) nadobúda na D_A minimum v bode u_0. Potom u_0 je v H riešenie rovnice (8.1) (platí $Au_0 = f$ v H).
Dôkaz:
Tvrdenie je vlastne ekvivalencia, len je podrobne rozpísaná, aby si čitateľ uvedomil jej závažnosť, a teda ho dokážeme na dve strany.
$\Rightarrow$
Nech teda najskôr platí, že prvok u_0 je v H riešenie rovnice (8.1), teda platí $Au_0 = f$ v H.
Rozpíšme si hodnotu funkcionálu F v bode u:

$Fu = (Au,u) - 2(f,u) = (Au,u) - 2(Au_0,u) = (Au,u) - (Au_0,u) - (u,Au_0) =$
$(Au,u) - (Au_0,u) - (Au,u_0) \pm (Au_0,u_0) =$
$(A(u-u_0),u) - (A(u-u_0),u_0) + (Au_0,u_0) =$
$(A(u-u_0),u-u_0) - (Au_0,u_0),$

kde sme využili vlastnosť linearity a symetrie operátora A. Operátor A je ale pozitívny, teda z posledného riadku uvedeného odvodenia je hodnota Fu pre ľubovoľné u rozdiel dvoch nezáporných čísel.
Navyše z uvedeného platí:
$F(u_0) = -(Au_0,u_0)$ a pre každé u rôzne od u_0 je prvý člen rozdielu kladné číslo, z čoho hneď máme $\mathrm{F(u)} \geq \mathrm{F(u_0)}$ a rovnosť nastáva len pre u= u_0.

$\Leftarrow$

Nech teraz pre všetky $u \in D_A$ platí $\mathrm{F(u)} \geq \mathrm{F(u_0)}$, pričom rovnosť nastáva len pre u = u_0.
Treba ukázať, že pre prvok u_0 platí $Au_0 = f$ v H.

Zvolíme takýto postup: chceme využiť, že prvok je minimom funkcionálu, a teda ak hodnotu funkcionálu pre nejakú podmnožinu prvkov vyjadríme ako funkciu reálneho parametra napríklad t, budeme môcť využiť vedomosti o minime funkcie jednej premennej (parametra t).

Nerovnosť $\mathrm{F(u)} \geq \mathrm{F(u_0)}$ platí pre všetky $u \in D_A$ a teda aj pre prvok $u_0 + tv \in D_A$, kde $t \in R$ a $v \in D_A$ ľubovoľný (D_A je lineárna množina) . Preto
$F(u_0+tv) \geq F(u_0) \Rightarrow F(u_0+tv) - F(u_0) \geq 0.$
Podobne ako v predchádzajúcom prípade počítajme hodnotu $F(u_0+tv)$:
$F(u_0+tv) = (A(u_0+tv),u_0+tv) - 2(f,u_0+tv) =$
$(Au_0,u_0) + t(Av,u_0) + t(Au_0,v) + t^2(Av,v) - 2(f,u_0) - 2t(f,v) =$
$(Au_0,u_0) + 2t(Au_0,v) + t^2(Av,v) - 2(f,u_0) - 2t(f,v),$
kde sme opäť využili symetriu operátora A.
Prvok u_0 je pevne daný je to minimum funkcionálu a v je ľubovoľný, ale pevný prvok z definičného oboru operátora A. Vyjadrili sme teda hodnotu funkcionálu ako kvadratickú funkciu premennej t, ktorá nadobúda minimum pre t = 0 (v bode u_0). Nutnou podmienkou, aby kvadratická funkcia premennej t mala v tomto bode minimum

je to kvadratická rovnica premennej t a pri kvadráte je nezáporný koeficient z pozitívnosti operátora A

je, aby jej prvá derivácia (podľa t) bola nulová pre t = 0. Z toho hneď máme
$$\frac{d}{dt}F(u_0+tv) = 2(Au_0,v) + 2t(Av,v) - 2(f,v),$$
pre t = 0 bude
$$\left.\frac{d}{dt}F(u_0+tv)\right|_{t=0} = 2(Au_0,v) - 2(f,v), \text{ z čoho } 2(Av,u_0) - 2(f,v) = 0,$$
a teda

$(Au_0 - f, v) = 0.$

Teraz len uvážime, že ako prvok v bol zvolený ľubovoľný prvok z D_A, a teda táto rovnosť platí pre všetky prvky z hustej množiny (D_A je hustá v H z definície pozitívneho operátora). Potom podľa Vety 3.12 nutne $Au_0 = f$ v H.

Všimnite si v dôkaze vety, že všetky predpoklady sú naozaj nutné a postupne sme ich v dôkaze aj využili. □

Aký je prínos vety o minime kvadratického funkcionálu? Zatiaľ si treba uvedomiť, že veta nerieši problém existencie riešenia úlohy Au = f, hovorí len o tom, že pri uvedených predpokladoch je tento problém ekvivalentný hľadaniu minima kvadratického funkcionálu.
Teraz si ukážeme na príklade podobu tohto kvadratického funkcionálu pre rovnicu 4. rádu, ktorá pri istých zjednodušujúcich predpokladoch predstavuje ohyb prúta.

Príklad 8.1:
Uvažujme diferenciálnu rovnicu

(8.3) $(EIu'')'' = q$,

s okrajovými podmienkami

(8.4) $u(0) = u(l) = 0, \qquad u'(0) = u'(l) = 0$.

Predpokladajme, že funkcie E(x), I(x) sú na intervale $< 0, l >$, $\quad l > 0$ spojité až do derivácií druhého rádu vrátane a funkcia q je spojitá na intervale $< 0, l >$. Navyše nech platí (8.5) $E(x) > 0, \; I(x) > 0 \;\; v \;\; < 0, l >$.

Rovnica (8.3) predstavuje rovnicu pre priehyb osi prúta dĺžky *l* s modulom pružnosti E(x), momentom zotrvačnosti I(x) a s priečnym zaťažením q(x). Okrajové podmienky (8.4) znamenajú, že prút je na oboch koncoch votknutý.
Ak sú funkcie E a I na uvedenom intervale konštantné, rovnicu môžeme zapísať v tvare
$EIu^{(4)} = q$.

Zvoľme $H = L_2(0, l)$ a lineárny priestor D_A bude priestor všetkých spojitých funkcií až do štvrtého rádu vrátane, ktoré spĺňajú podmienky (8.4) . Z predchádzajúceho vieme, že tento lineál (lineárna množina) je hustý v $L_2(0, l)$. Na D_A definujme operátor predpisom

(8.6) $Au = (EIu'')''$.

Potom problém (8.4), (8.5) môžeme zapísať jedinou rovnicou

(8.7) $Au = q$.

Operátor A je pozitívny. (Ukážte - pozri cvičenia).
Definujme funkcionál

(8.8) $Fu = (Au, u) - 2(q, u) = \int_0^l EI(u'')^2 \, dx - 2\int_0^l qu dx.$

Z pohľadu fyziky tento funkcionál vyjadruje pri danom priehybe $u \in D_A$ dvojnásobnú celkovú potenciálnu energiu Lu uvažovaného prúta:

$$(8.9) \quad Fu = 2Lu = 2\left(\frac{1}{2}\int_0^1 EI(u'')^2\,dx - \int_0^1 qu\,dx)\right)$$

Pre tento funkcionál platí tvrdenie predchádzajúcej vety.
Toto tvrdenie neznamená nič iné len princíp minima potenciálnej energie známy z teórie pružnosti a ukazuje tesnú súvislosť tejto matematickej vety s variačným princípom mechaniky.

Poznámka 8.1:
Veta o minime kvadratického funkcionálu má podmienený charakter a nič nehovorí o existencii buď minima funkcionálu alebo o existencii riešenia úlohy.

9. Priestor H_A

Logicky by teraz mala nasledovať časť, ktorá nám pomôže k tomu, aby sme vedeli povedať niečo o tom, kedy takýto prvok, ktorý minimalizuje uvedený kvadratický funkcionál, existuje. Zrejme si len s pozitívnym operátorom nevystačíme...

Nech je v Hilbertovom priestore H **hustý** lineárny priestor D_A. Na ňom uvažujeme operátor A zobrazujúci D_A do H. Nech je A **pozitívne definitný** na D_A. To znamená symetrický a taký, že existuje konštanta C>0 tak, že platí

(9.1) $(Au,u) \geq C^2\|u\|^2, \quad \forall u \in D_A$.

Na lineárnom priestore D_A označme

(9.2) $(u,v)_A = (Au,v), \quad \forall u,v \in D_A$.

Tvrdenie 9.1:
Vzťah (9.2) definuje **skalárny súčin v D_A**.
Dôkaz:
Overíme vlastnosti skalárneho súčinu pre zobrazenie (9.2):
Symetria platí pretože operátor A je symetrický.
Linearita platí pretože operátor A je lineárny a pravá strana je pôvodný skalárny súčin.
Zostáva ukázať

$(u,u)_A \geq 0 \quad \wedge \quad (u,u)_A = 0 \Leftrightarrow u = 0 \quad v \quad H$.

$(u,u)_A = (Au,u) \geq C^2\|u\|^2 \geq 0$

$u = 0 \Rightarrow (Au,u) = 0 \Rightarrow (u,u)_A = 0$

$0 = (u,u)_A = (Au,u) \Rightarrow u = 0.$

Tu sme využili, že operátor A je pozitívne definitný a zároveň vidno, že ak uvedené zobrazenie (9.2) má byť skalárnym súčinom, je podmienka pozitívnej definitnosti nutná.□

Príklad 9.1:

V priestore $L_2(a,b)$ so skalárnym súčinom $(u,v) = \int_a^b u(x)v(x)dx$ uvažujme lineárny priestor všetkých funkcií $u \in C^2(<a,b>)$ takých, že platí: $u(a) = 0, \quad u(b) = 0$.

Na tomto lieárnom priestore definujme operátor A vzťahom

(9.3) $Au = -u''$.

V predchádzajúcich príkladoch sme ukázali, že na D_A je uvedený operátor pozitívne definitný a platí

(9.4) $(u,v)_A = (u',v')$.

Teda v tomto prípade, je nový skalárny súčin funkcií u a v daný ako pôvodný skalárny súčin derivácií u', v' týchto funkcií.
Z nového skalárneho súčinu môžeme hneď odvodiť normu a metriku:

(9.5) $\|u\|_A = (u,u)_A^{1/2}$

(9.6) $\rho_A(u,v) = \|u - v\|_A$.

Teda lineárny priestor D_A s daným skalárnym súčinom (9.2) a odvodenou metrikou (9.6) tvorí **unitárny priestor, označíme ho S_A.**
Navyše pre každý prvok $u \in D_A$ platí

(9.7) $\|u\|_A^2 \geq C^2\|u\|^2 \Rightarrow \|u\| \leq \frac{1}{C}\|u\|_A$,

kde konštanta C je konštanta z (9.1).
Zo vzťahu (9.7) dostávame:

Tvrdenie 9.2:
Ak pre postupnosť prvkov $\{u_n\}$ z D_A platí $\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n - u_0\|_A = 0$, potom tiež platí $\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n - u_0\| = 0$

Dôkaz:
Vyplýva hneď z (9.7) a z nezápornosti noriem:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}\|u_n - u_0\| \leq \frac{1}{C}\lim_{n\to\infty}\|u_n - u_0\|_A = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\|u_n - u_0\| = 0. \quad \square$$

Poznámka 9.1:
Analogické tvrdenie ako 9.2 platí aj pre cauchyovské postupnosti (pozri cvičenie), ale obrátené tvrdenie neplatí.

Poznámka 9.2:
Priestor S_A nemusí byť vo všeobecnosti úplný v metrike (9.6). Dá sa pridaním ideálnych elementov z neho urobiť úplný obal priestoru S_A. Označme tento priestor H_A.
Za vyššie uvedených predpokladov na operátor A sa dá ukázať, že priestor H_A sa dá zostrojiť z prvkov pôvodného priestoru H. (Konštrukcia priestoru H_A- pozri[R]).

Veta 9.1:
Nech A je **pozitívne definitný** operátor definovaný na lineárnom priestore D_A, hustom v Hilbertovom priestore H . Priestor H_A je **úplný priestor** v metrike danej konštrukciou priestoru (táto je indukovaná metrika zo skalárneho súčinu, ktorý je rozšírením skalárneho súčinu (9.2) na priestor s pridanými ideálnymi prvkami) a lineárny priestor D_A je v ňom **hustý.**
Pre takto vzniknutú novú metriku (budeme ju označovať opäť $\|.\|_A$) platí tiež vzťah (9.7).
Dôkaz: [R].

10. Existencia minima funkcionálu v H_A Zovšeobecnené riešenie

Nasledujúce úvahy sú veľmi podobné úvahám o rozšírení definičného oboru funkcie (v tomto prípade pôjde nie o funkciu, ale o funkcionál). Toto rozšírenie nám pomôže nájsť existenciu minima na tejto rozšírenej množine pre kvadratický funkcionál.

Z predchádzajúcich kapitol vieme, že pre kvadratický funkcionál

(10.1) $\mathrm{F}u = (\mathrm{A}u, u) - 2(f, u), \quad u \in D_A$,

kde A je pozitívny operátor, platí veta o minime, ktorá hovorí, že minimum tohto funkcionálu existuje práve vtedy, keď má rovnica

(10.2) $\mathrm{A}u = f$ v H riešenie a je to práve minimálny prvok daného funkcionálu.

Naviac vieme, že ak je operátor A je pozitívne definitný, dá sa skonštruovať Hilbertov priestor H_A, so skalárnym súčinom

(10.3) $(u, v)_A = (\mathrm{A}u, v), \quad u \in D_A, \quad v \in D_A$.

V tomto Hilbertovom priestore môžeme funkcionál F zapísať v tvare:

$$\mathrm{F}u = (u, u)_A - 2(f, u), \quad u \in D_A.$$

Ak je prvok $u \in H_A$, tak je tento prvok aj z H, skalárny súčin $(u, u)_A$ má zmysel aj pre prvky z H_A, nielen z D_A. Teda funkcionál F môžeme predpisom (10.4) **rozšíriť** na celý priestor H_A.

(10.4) $\mathrm{F}u = (u, u)_A - 2(f, u), \quad u \in H_A$.

Ukážeme, že takto rozšírený funkcionál nadobúda v priestore H_A svoje minimum u_0 a tento prvok je jednoznačne určený daným prvkom $f \in H$.
Ako už vieme z predchádzajúceho, pre pevné $f \in H$ je funkcionál (f,u) lineárny a ohraničený v H. Tento funkcionál je lineárny a ohraničený, ako vyplýva z vlastností skalárneho súčinu aj v H_A:

(10.5) $|(f, u)| \le \|f\|\|u\| \le \dfrac{\|f\|}{C}\|u\|_A$, kde C je konštanta z pozitívnej definitnosti operátora A.

Keďže H_A je Hilbertov priestor, podľa Rieszovej vety existuje prvok $u_0 \in H_A$, určený jednoznačne prvkom $f \in H$, taký, že platí:

(10.6) $(u_0, u)_A = (f, u), \quad \forall u \in H_A$. Pre funkcionál F preto máme:

(10.7) $\mathrm{F}u = (u, u)_A - 2(f, u) = (u, u)_A - 2(u_0, u)_A = \|u\|_A^2 - 2(u_0, u)_A \pm \|u_0\|_A^2 = \|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2$.

Z vlastnosti normy vyplýva:

$$\|u - u_0\|_A = 0 \Leftrightarrow u - u_0 = 0 \ \text{ v } \ H_A \quad \text{a} \quad \|u - u_0\|_A > 0 \ \text{ pre } \ u \ne u_0 \ \text{ v } \ H_A.$$

Z tohto je zrejmé, že funkcionál F nadobúda minimum práve v prvku u_0. Dokázali sme vetu

Veta 10.1:
Nech je A pozitívne definitný operátor na lineárnom priestore D_A, hustom v Hilbertovom priestore H. Nech H_A je Hilbertov priestor skonštruovaný v predchádzajúcej kapitole. Potom funkcionál F daný v H_A predpisom (10.4) nadobúda v H_A minimálnu hodnotu. Prvok u_0, ktorý toto minimum v H_A realizuje je daný jednoznačne vzťahom (10.6).

Všimnite si, že na existenciu minima sme použili Rieszovu vetu, ktorá síce zaručuje existenciu a jednoznačnosť uvedeného prvku, ale nič nehovorí o konštrukcii takéhoto prvku.

Definícia 10.1:
Prvok $\mathbf{u_0}$, ktorý v priestore H_A minimalizuje funkcionál (10.4) a ktorý je určený jednoznačne vzťahom (10.6), nazývame **zovšeobecneným riešením rovnice** Au = f.

Poznámka 10.1:
Veta 10.1 nedáva návod, ako toto riešenie skonštruovať, len tvrdí, že toto riešenie existuje.

Poznámka 10.2:
Z (10.6) hneď máme

$$(10.8)\quad \left|(u_0,u)_A\right| = \left|(f,u)\right| \le \frac{\|f\|}{C}\|u\|_A, \quad \forall u \in H_A .$$

Špeciálne pre $u=u_0$ máme

$$(10.9)\quad \|u_0\|_A^2 \le \frac{\|f\|}{C}\|u_0\|_A, \Rightarrow \|u_0\|_A \le \frac{\|f\|}{C}.$$

Táto rovnica vyjadruje spojitú závislosť zovšeobecneného riešenia na pravej strane f danej rovnice Au = f.
Ak sa teda pravé strany rovníc Au = f a Av = g málo líšia v norme priestoru H, potom aj ich zovšeobecnené riešenia u_0 a v_0 sa málo líšia v norme priestoru H_A. Uvedomme si, že tu podstatnou mierou využívame fakt, že operátor A je lineárny, pretože len tak platí
$(u_0,u)_A = (f,u) \wedge \ (v_0,u)_A = (g,u) \quad \forall u \in H_A \Rightarrow z_0 = u_0 - v_0$ je zovšeobecneným riešením rovnice

$$Az = f - g \Rightarrow (z_0,u)_A = (f-g,u) \qquad \forall u \in H_A \Rightarrow \|u_0 - v_0\|_A \le \frac{\|f-g\|}{C}$$

Táto poznámka má pre numerické riešenie úlohy veľký význam, pretože v praxi nemôžeme očakávať, že namerané dáta sú ozaj bezchybné. Teda pravá strana bude zrejme zaťažená nejakou chybou meranou v metrike H. Našťastie, potom aj zovšeobecnené riešenie bude zaťažené chybou meranou v metrike H_A, *ktorú vieme dopredu odhadnúť z vyššie uvedenej nerovnosti.*

Tento fakt sa dá využiť aj pri odhade chyby riešenia. Ak pre n-tú aproximáciu u_n z D_A platí $Au_n = f_n$, a prvok f_n sa málo líši od pôvodnej pravej strany f potom pre túto aproximáciu a zovšeobecnené riešenie u_0 platí:

$$(10.10) \quad \|u_n - u_0\|_A \le \frac{\|f_n - f\|}{C} = \frac{\|Au_n - f\|}{C}$$

Poznámka 10.2:
Ak vieme, že funkcionál F nadobúda svoje minimum v bode u_0 v H_A, potom sa táto minimálna hodnota rovná číslu:

$$(10.11) \quad \min_{u \in H_A} Fu = -\|u_0\|_A^2,$$

čo vyplýva zo vzťahu (10.7).

Definícia 10.2:
O postupnosti prvkov $\{u_n\}$ z H_A hovoríme, že je **minimalizujúca** pre funkcionál (10.1) alebo, že je **μ – postupnosť,** ak platí

$$(10.12) \quad \lim_{n\to\infty} Fu_n = -\|u_0\|_A^2.$$

Veta 10.2:
Ak je $\{u_n\}$ μ – postupnosť, potom platí

$$(10.13) \quad \lim_{n\to\infty} \|u_n - u_0\|_A = 0.$$

Naopak, ak platí (10.13) potom $\{u_n\}$ je μ – postupnosť.

Dôkaz:
Opäť ide vlastne o ekvivalenciu, takže dokážeme na obe strany.
$\{u_n\}$ μ – postupnosť, teda platí (10.12). Máme dokázať platnosť (10.13). Z (10.7) vieme, že $Fu = \|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2$, čo využijeme v nasledujúcej úprave:

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u_0\|_A = \lim_{n\to\infty} (F(u_n) + \|u_0\|_A^2) = \lim_{n\to\infty} F(u_n) + \|u_0\|_A^2 = -\|u_0\|_A^2 + \|u_0\|_A^2 = 0.$$

Teraz opačne, nech platí (10.13). Máme dokázať platnosť (10.12):

$$\lim_{n\to\infty} (F(u_n) = \lim_{n\to\infty} (\|u_n - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2) = -\|u_0\|_A^2. \ \square$$

Poznámka 10.3:
Zaviedli sme pojem zovšeobecneného riešenia rovnice Au = f. V špeciálnom prípade môže byť toto riešenie z D_A, čo je hlavne u diferenciálnych operátorov obdoba klasického riešenia. To, či zovšeobecnené riešenie u_0 z H_A je aj z D_A závisí hlavne od pravej strany f a vlastností operátora A.
Na príklade s Poissonovou diferenciálnou rovnicou s nulovými okrajovými podmienkami vidíme, že klasické riešenie (vyžadujeme spojitú funkciu na $\overline{G}$ so spojitými druhými deriváciami na G nie zmiešanými a splnenie okrajovej podmienky) sa líši od riešenia v D_A (vyžadujeme funkciu z $C^2(\overline{G})$ s nulovými okrajovými podmienkami).
Zovšeobecnené riešenie má vo všeobecnosti podstatne rozdielne vlastnosti, napríklad v tomto prípade sa vyžaduje len existencia derivácií prvého rádu a aj to len v tzv. zovšeobecnenom zmysle, ako uvidíme neskôr.

Poznámka 10.4:
Ak prvok **u_0 z D_A** minimalizuje funkcionál v H_A, potom tým skôr minimalizuje funkcionál v D_A a teda podľa vety o minime kvadratického funkcionálu je v H aj riešením rovnice Au = f.

Nasledujúce tvrdenie je veľmi dôležité pre to, aby štruktúra pojmu zovšeobecneného riešenia pekne zapadla do pojmu klasického riešenia. Z poznámky 10.4, vidíme, že ak zovšeobecnené riešenie je z D_A , tak presne toto je riešením aj klasickým. Teraz treba ešte ukázať, že ak úloha má zovšeobecnené riešenie, ktoré nie je z D_A, tak už nemôže mať klasické riešenie.

Veta 10.3:
Ak prvok **u_0 nie je z D_A** a minimalizuje funkcionál v H_A, potom rovnica Au = f nemôže mať riešenie v D_A.
Dôkaz :
Urobíme sporom.
Prvok u_0 nie je z D_A a minimalizuje funkcionál v H_A, teda platí:
$$\min_{u\in H_A} Fu = Fu_o = -\|u_0\|_A^2.$$
Nech teraz existuje prvok u_1 z D_A **,** ktorý je riešením rovnice Au=f.
Tento potom podľa vety o minime kvadratického funkcionálu je minimom funkcionálu F na množine D_A . Keďže ale D_A je podmnožinou H_A a u_0 nie je z D_A určite platí
$$Fu_1 - Fu_o = \|u_1 - u_0\|_A^2 := a > 0 \text{ s teda } Fu_o + a = Fu_1 .$$
Z hustoty množiny D_A v H_A vieme, že existuje postupnosť $\{u_n\}$ z D_A , konvergujúca k prvku u_0: $\lim_{n\leftarrow\infty}\|u_n - u_0\|_A = 0$. Musí preto existovať prvok z tejto postupnosti s dostatočne veľkým indexom, pre ktorý platí $\|u_n - u_0\|_A < \sqrt{\frac{a}{2}}$.
Počítajme a odhadujme teraz hodnotu funkcionálu F v tomto prvku:
$$Fu_n = \|u_n - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2 < \frac{a}{2} - \|u_0\|_A^2 < a - \|u_0\|_A^2 = Fu_0 + a = Fu_1 \Rightarrow Fu_n < Fu_1,$$ čo je spor s tým, že prvok u_1 z D_A minimalizuje kvadratický funkcionál F na D_A. □

Poznámka 10.5: Nehomogénne okrajové podmienky.
Vybudovaná teória predpokladá, že definičným oborom operátora A je lineárny priestor. Aj numerické metódy sú založené na hľadaní aproximácie riešenia v tvare lineárnej kombinácie prvkov z lineárneho priestoru D_A prípadne z lineárneho priestoru H_A.
V prípade homogénnych okrajových podmienok sme túto skutočnosť zahrnuli do definície lineárneho priestoru D_A.
Pre nehomogénne Dirichletove okrajové podmienky zahrnutie tejto podmienky do definície priestoru D_A bude znamenať, že D_A nie je lineárny priestor. To isté platí aj o podmienkach Newtonovho typu (pozri cvičenia).

Vynára sa preto otázka ako zahrnúť do takto vybudovanej teórie problémy s nehomogénnymi okrajovými podmienkami.
Prvá možnosť je previesť nehomogénny problém na problém s homogénnymi okrajovými podmienkami.

Príklad 10.1:
Uvažujme na oblasti G s hranicou Γ Dirichletov problém

(10.14) $-\Delta u = f \quad v \quad G, \qquad u = g \quad na \quad \Gamma .$

Nech vieme nájsť funkciu w spojitú na $\overline{G} = G + \Gamma$, ktorá spĺňa okrajovú podmienku $w = g$ na Γ a navyše $-\Delta w \in L_2(G)$. Potom riešenie problému (10.14) hľadáme v tvare

(10.15) $u = w + z ,$

kde z rieši nasledujúci problém:

(10.16) $-\Delta z = f + \Delta w \quad v \quad G, \qquad z = 0 \quad na \quad \Gamma$

Keďže pravá strana tohto problému je funkcia z $L_2(G)$, tomuto problému sme sa už venovali.

Príklad 10.2:
Zovšeobecnime úlohu z predchádzajúceho príkladu na operátor A pre nejaké nehomogénne okrajové podmienky. Pre jednoduchosť uvažujme základný Hilbertov priestor H = $L_2(G)$. Ak nájdeme funkciu w takú, že spĺňa dané okrajové podmienky a navyše $Aw \in H$, potom položiac h = f-Aw, kde $h \in H$, riešenie uvedeného problému hľadáme v tvare súčtu

(10.17) $u = w + z ,$

kde z rieši problém

(10.18) $Az = h \quad v \quad G, \qquad z = 0 \quad na \quad \Gamma .$

Vo všeobecnosti, ale nie je ľahké nájsť funkciu w. Jednoduchšie prípady pozri cvičenia.

Poznámka 10.6:
Nehomogénne okrajové podmienky, druhá formulácia. Vyjdeme z príkladu 10.1. Pre funkciu z (10.16) opäť platí, že D_A je lineárny priestor spojitých funkcií na $\overline{G}$ až do druhého rádu vrátane, ktoré spĺňajú homogénnu okrajovú podmienku. Pre operátor $Au = -\Delta u$ sme ukázali, že je pozitívny a platí

(10.19) $(Au, u) = \int_G \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx .$

Príslušný priestor H_A zhruba povedané tvoria funkcie rovné nule na hranici oblasti G, ktoré majú prvé parciálne derivácie integrovateľné s druhou mocninou v G. Príslušný kvadratický funkcionál

(10.20) $Gz = (z, z)_A - 2(f + \Delta w, z) = \int_G \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial z}{\partial x_i} \right)^2 dx - 2\int_G (f + \Delta w) z dx$

nadobúda v H_A minimum a prvok z_0 z H_A ,v ktorom sa to minimum nadobúda je zovšeobecneným riešením problému (10.16). Funkcia u_0 = w+z_0 je potom zovšeobecneným riešením problému (10.14). Pretože $z \in H_A$ spĺňa nulové okrajové podmienky a použitím Greenovej vety máme

(10.21) $\int_G \Delta wzdx = -\int_G \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_i}dx$,

preto funkcionál (10.20) môžeme napísať v tvare

(10.22) $Gz = \int_G \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2 dx - 2\int_G fzdx + 2\int_G \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_i}dx.$

Tento zápis dovoľuje zovšeobecniť požiadavky kladené na funkciu w. Zo vzťahu (10.22) je vidieť, že stačí zvoliť funkciu w tak, aby spĺňala okrajovú podmienku a a by mala parciálne derivácie prvého rádu integrovateľné v G s druhou mocninou. Okrem toho vieme, že skalárny súčin

(10.23) $(v,z)_A = \int_G \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_i}dx$

bol definovaný pre triedu funkcií, ktoré spĺňajú nulovú okrajovú podmienku. Vzťah (10.23) ale platí pre omnoho širšiu triedu funkcií, ktoré nemusia spĺňať danú homogénnu okrajovú podmienku. Tento integrál pre túto všeobecnejšiu triedu funkcií označíme

(10.24) $((v,z)) = \int_G \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_i}dx$

Teraz môžeme daný funkcionál napísať v tvare

(10.25) $Gz = ((z,z)) - 2(f,z) + 2((w,z)), \quad z \in H_A.$

Keď teraz do tohto tvaru dosadíme za z = u-w, dostaneme

(10.26) $G(u-w) = ((u,u)) - 2(f,u) - ((w,w)) + 2(f,w), \quad z \in H_A,$

teda môžeme rovno hľadať prvok u_0, ktorý minimalizuje funkcionál (10.26), alebo, čo je to isté, funkcionál

(10.27) $Fu = ((u,u)) - 2(f,u),$

pretože posledné dva členy (10.26) sa s meniacim sa u nemenia. Tento funkcionál má teda ten istý tvar, ako funkcionál pre homogénne okrajové podmienky. Rozdiel je v tom, že tento funkcionál neminimalizujeme v priestore H_A, ale v priestore dostatočne hladkých funkcií, ktoré spĺňajú nehomogénnu okrajovú podmienku.

Poznámka 10.7:
Z historického hľadiska vlastne bola táto úloha skúmaná ako prvá, keď sa riešenie Laplaceovej rovnice spolu s nehomogénnymi okrajovými podmienkami:

(10.28) $-\Delta u = 0, \quad v \quad G, \qquad u = g \quad na \quad \Gamma$

hľadalo ako minimalizujúci prvok Dirichletovho integrálu

$$(10.29) \quad ((u, u)) = \int_G \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx$$

na množine dostatočne hladkých funkcií spĺňajúcich okrajovú podmienku.

Nuž a teraz nastáva chvíľa, kedy by nás zaujímalo, ako to riešenie (o ktorom vieme zistiť, či existuje a je jednoznačné) nájsť, prípadne, čo sa stáva oveľa častejšie, ako nájsť nejakú jeho vhodnú aproximáciu. Ako sa v ďalšom ukáže, je niekoľko metód hľadania tohto riešenia, aj keď tu spomenieme len tri z nich o ďalších sa môže čitateľ dozvedieť z množstva ďalších kníh venovaných tejto problematike.

Cvičenia:

8.1. Ukážte pozitívnosť operátora z príkladu 8.1.

8.2. Pre Poissonovu rovnicu s Dirichletovými okrajovými podmienkami definujte operátor A , D_A. Definujte príslušný kvadratický funkcionál a presvedčte sa, že platia predpoklady vety o minime kvadratického funkcionálu.

8.3 . Nech A je operátor z D_A , ktorý tvoria všetky funkcie spojité až do druhého rádu vrátane na intervale <a, b> a spĺňa podmienky
u(a) = u(b) = 0. Na tomto lineárnom priestore definujeme operátor A vzťahom:
Au = -u'' +cu. Pre aké $c \in R$ je operátor pozitívny? Definujte príslušný kvadratický funkcionál.

8.4 . Nech A je operátor z D_A , ktorý tvoria všetky funkcie spojité až do druhého rádu vrátane na intervale <0, 1> a spĺňa podmienky $u'(0) = u'(1) = 0$
Na tomto lineárnom priestore definujeme operátor A vzťahom:
Au=-u'' +cu. Pre aké $c \in R$ je operátor pozitívny? Definujte príslušný kvadratický funkcionál.

8.5. Definujme priestor X ako priestor dva krát spojite diferencovateľných funkcií na intervale <0, 1> , ktoré spĺňajú homogénne Dirichletove okrajové podmienky a priestor Y budú tvoriť spojité funkcie na intervale <0, 1>. Operátor A definujeme predpisom Ax = x''. Existuje k operátoru A inverzný operátor? Ak áno nájdite jeho predpis.

9.1. Dokážte: Ak je postupnosť prvkov $\{u_n\}$ cauchyovská v S_A, potom je $\{u_n\}$ cauchyovská aj v H.

10.1. Pre Poissonovu rovnicu a nehomogénne Dirichletove okrajové podmienky zahrnutie tejto podmienky do definície preistoru D_A znamená, že D_A nie je lineárny priestor. Dokážte. To isté platí aj o podmienkach Newtonovho typu.

10.2. Na priestore $L_2(0,1)$, je daná Poissonova rovnica a nehomogénne okrajové podmienky: $u(0) = -2, \quad u(1) = 3$. Hľadajte riešenie úlohy v tvare súčtu funkcií, kde jedna spĺňa okrajové podmienky a druhá rieši Poissonovu rovnicu s homogénnymi okrajovými podmienkami.

11. Metóda ortonormálnych radov

Nech je v Hilbertovom priestore H **hustý** lineárny priestor D_A. Na ňom uvažujeme operátor A zobrazujúci D_A do H. Nech je A **pozitívne definitný** na D_A. Nech H_A má taký význam, ako v predchádzajúcich kapitolách.
Ďalej budeme predpokladať, že Hilbertov priestor **H_A je separabilný**. Dá sa ukázať, napr. v [Mi], že k tomu je postačujúce, aby priestor H bol separabilný.

Keďže je priestor separabilný, tak obsahuje spočítateľnú množinu prvkov hustú v danom priestore. Navyše v tomto priestore podľa Vety 5.4 existuje spočítateľná báza, to jest spočítateľný systém nezávislých prvkov $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$, ktorý je úplný v tomto priestore, teda taký, že pre každý prvok u z H a pre každé ε>0 sa dajú nájsť čísla $a_k^{(i)}$ tak, že platí:

$$(11.1) \quad \rho(u, \sum_{k=1}^{i} a_k^{(i)} \varphi_k) < \varepsilon.$$

Ak máme hustú množinu, táto báza sa dá vytvoriť z prvkov práve tejto množiny a dokonca sa dá vytvoriť ortonormálna.

Nech je teda $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$ **ortonormálna báza v priestore H_A**. Hľadané zovšeobecnené riešenie je prvok z priestoru H_A, a teda ho môžeme vyjadriť ako lineárnu kombináciu bázy v tvare Fourierovho radu:

$$(11.2) \quad u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k, \; a_k = (u_0, \varphi_k)_A, \quad k = 1,2,...,n,...$$

Z konštrukcie prvku u_0 ako zovšeobecneného riešenia úlohy Au = f vieme, že platí

$$(11.3) \quad (u_0, \varphi_k)_A = (f, \varphi_k).$$

Teda koeficienty vieme narátať jednoduchým spôsobom.
Konvergencia uvedeného radu v priestore H_A priamo vyplýva z konvergencie Fourierových radov a konvergencia v priestore H zase z odhadu noriem priestorov H a H_A.

Veta 11.1:
Nech A je pozitívne definitný operátor na lineárnom priestore D_A hustom v separabilnom priestore H. Nech prvok f je z H. Nech $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$ je ortonormálna báza v priestore H_A. Potom zovšeobecnené riešenie u_0 rovnice Au=f je dané radom (11.2) s koeficientmi (11.3). Tento rad konverguje k zovšeobecnenému riešeniu v priestore H aj priestore H_A.
Dôkaz:
Ihneď vyplýva z kapitoly o Fourierových radoch. □

Poznámka 11.1:
Uvedomme si, že treba zvoliť bázu v priestore H_A a ťažkosť tejto metódy je práve v nájdení uvedenej ortonormálnej bázy.

Príklad 11.1:
Riešme metódou ortonormálnych radov problém

$$-u'' = x \quad v \quad <0,1>, \qquad u(0) = u(1) = 0 .$$

Náš základný priestor je priestor $L_2(0,1)$. Operátor je definovaný ako $Au = -u''$. Jeho definičný obor spĺňa okrajové podmienky a ako v predchádzajúcich kapitolách vieme skonštruovať jeho rozšírenie na priestor H_A . Riešenie budeme hľadať v priestore H_A v tvare nekonečného radu pri vhodnej voľbe bázy:

$$\varphi_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi n}\sin n\pi x, \qquad n = 1,2,...,...$$

Treba ukázať, že tento systém funkcií je v priestore H_A ortonormálny. Uvedomme si, že skalárny súčin funkcií v priestore H_A , kde $Au = -u''$ je definovaný ako (pozri príklad 9.1.):

$$(u,v)_A = (u',v') = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx.$$

Takže máme:

$$\int_0^1 \varphi_n'(x)\varphi_m'(x)dx = \frac{\sqrt{2}}{\pi n}\frac{\sqrt{2}}{\pi m}\pi n\pi m\int_0^1 \cos n\pi x\cos m\pi x dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$$

Koeficienty radu teraz podľa (11.3) budú $a_n = \frac{\sqrt{2}}{\pi n}\int_0^1 x\sin n\pi x dx = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2 n^2}(-1)^{n+1}$

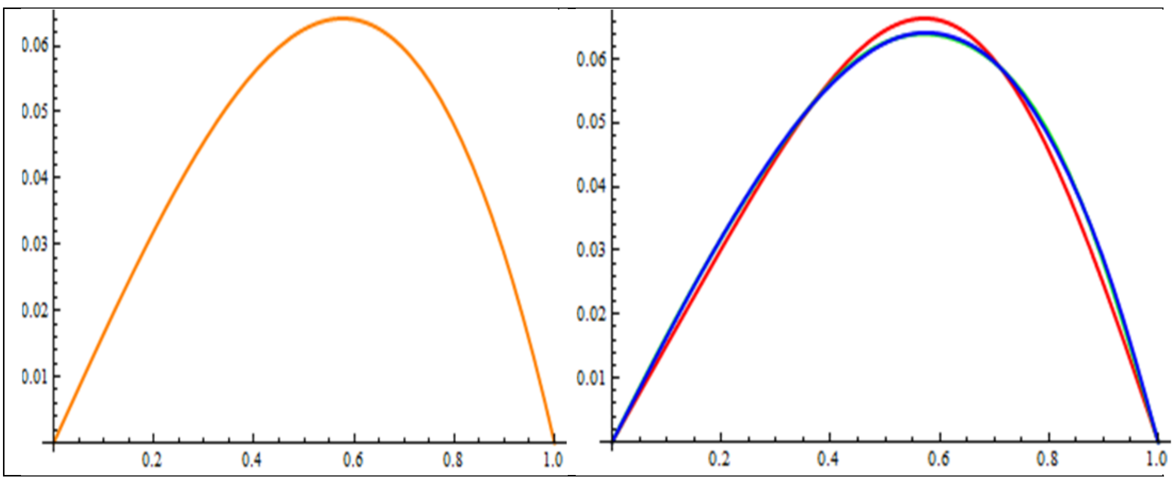
a teda príslušný rad má tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x) = \frac{2}{\pi^3 n^3}(-1)^{n+1}\sin n\pi x.$$

Zvolili sme takýto Dirichletov problém zámerne, pretože sa veľmi jednoducho dá nájsť jeho presné riešenie, ktorým je funkcia

$$u(x) = \frac{1}{6}x(1-x^2).$$

Na Obrázku 9.1. vidno túto funkciu (vľavo) a jej aproximácie vytvorené 2,5 a 10 členmi Fourierovho radu (vpravo).



Obrázok 9.1.

Poznámka 11.2:
Treba si uvedomiť, že nie vždy je potrebné len tak málo členov radu na dobrú aproximáciu, v tomto prípade ide o pekný príklad. Všimnime si, že uvedené riešenie je aj klasickým riešením daného problému.

12. Ritzova metóda

Táto metóda vychádza z iných princípov ako metóda ortonormálnych radov a nepredpokladá existenciu ortonormálnej bázy, ale opäť predpokladá, že priestor je separabilný a má teda bázu.

Nech je opäť daný separabilný Hilbertov priestor H a na D_A ktorý je v H hustý lineárny priestor, je definovaný pozitívne definitný operátor A. Nech H_A je separabilný Hilbertov priestor skonštruovaný ako v predchádzajúcich kapitolách.
V tomto priestore uvažujeme bázu

(12.1.) $\varphi_1, \varphi_2, ...\varphi_n, ...$

Vo všeobecnosti nemusí byť táto báza ortogonálna. Proces ortogonalizácie je veľmi prácny a v praktických prípadoch sa využíva len pre špeciálne typy úloh.

Z predchádzajúceho už vieme, že zovšeobecnené riešenie rovnice

(12.2) $\mathrm{Au} = \mathrm{f}$

je práve ten prvok u_0 z H_A, ktorý minimalizuje funkcionál

(12.3) $\mathrm{Fu} = (\mathrm{u}, \mathrm{u})_\mathrm{A} - 2(\mathrm{f}, \mathrm{u})$

a teda, pre ktorý platí

(12.4) $\mathrm{Fu}_0 = \min\limits_{\mathrm{u} \in \mathrm{H}_\mathrm{A}} \mathrm{Fu}$.

Zvoľme prirodzené číslo n a hľadajme aproximáciu u_n prvku u_0 v tvare

(12.5) $\mathrm{u}_\mathrm{n} = \sum\limits_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{a}_\mathrm{k} \varphi_\mathrm{k}$,

kde φ_k pre k = 1, 2, ...n sú prvky bázy (12.1). Koeficienty a_k sú zatiaľ neznáme reálne konštanty. Tieto určíme z podmienky

(12.6) $\mathrm{Fu}_\mathrm{n} = \min\limits_{v_n \in H_{A_n}} Fv_n$

kde H_{A_n} označuje množinu všetkých možných lineárnych kombinácií z (12.5). Chceme teda, aby medzi všetkými aproximáciami tvaru

(12.7) $v_\mathrm{n} = \sum\limits_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} b_\mathrm{k} \varphi_\mathrm{k}$,

kde b_k sú ľubovoľné reálne konštanty, nadobúdal funkcionál ako funkcia n-premenných najmenšiu hodnotu práve pre aproximáciu (12.5). Určenie takýchto konštánt je jednoduché. Ak našu aproximáciu (12.7) dosadíme do kvadratického funkcionálu (12.3), máme

(12.8) $Fv_n = (\sum\limits_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} b_\mathrm{k}\varphi_\mathrm{k}, \sum\limits_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} b_\mathrm{k}\varphi_\mathrm{k})_A - 2(f, \sum\limits_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} b_\mathrm{k}\varphi_\mathrm{k}) =$

$b_1^2(\varphi_1, \varphi_1)_A + b_1 b_2(\varphi_1, \varphi_2)_A + ... + b_1 b_n(\varphi_1, \varphi_n)_A + ...$

$b_1 b_n(\varphi_n, \varphi_1)_A + b_n b_2(\varphi_n, \varphi_2)_A + ... + b_n^2(\varphi_n, \varphi_n)_A -$

$2b_1(f, \varphi_1) - 2b_2(f, \varphi_2) - .... - 2b_n(f, \varphi_n).$

Keď vezmeme do úvahy symetriu skalárneho súčinu, môžeme vzťah upraviť

(12.9) $Fv_n = b_1^2(\varphi_1,\varphi_1)_A + 2b_1b_2(\varphi_1,\varphi_2)_A + \dots + 2b_1b_n(\varphi_1,\varphi_n)_A + \dots + b_n^2(\varphi_n,\varphi_n)_A -$

$2b_1(f,\varphi_1) - 2b_2(f,\varphi_2) - \dots - 2b_n(f,\varphi_n).$

Pretože skalárne súčiny vo vzťahu (12.9) sú pevné čísla, je tento funkcionál kvadratickou funkciou n- premenných b_1, b_2,....,b_n. Aby táto funkcia nadobúdala minimum (*bude to minimum, lebo pri kvadratickom člene je nezáporný koeficient*) v bode
$(a_1,a_2,...,a_n)$, je nutné aby boli splnené rovnice:

(12.10) $$\left.\frac{\partial Fv_n}{\partial b_1}\right|_{b_1=a_1,\dots,b_n=a_n} = 0,\dots,\left.\frac{\partial Fv_n}{\partial b_n}\right|_{b_1=a_1,\dots,b_n=a_n} = 0,$$

Z čoho máme:

(12.11) $$\begin{aligned}
&2a_1(\varphi_1,\varphi_1)_A + 2a_2(\varphi_1,\varphi_2)_A + \dots + 2a_n(\varphi_1,\varphi_n)_A - 2(f,\varphi_1) = 0,\\
&2a_1(\varphi_1,\varphi_2)_A + 2a_2(\varphi_2,\varphi_2)_A + \dots + 2a_n(\varphi_2,\varphi_n)_A - 2(f,\varphi_2) = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&2a_1(\varphi_1,\varphi_{n1})_A + 2a_2(\varphi_2,\varphi_n)_A + \dots + 2a_n(\varphi_n,\varphi_n)_A - 2(f,\varphi_n) = 0.
\end{aligned}$$

a po úprave máme:

(12.12) $$\begin{aligned}
&a_1(\varphi_1,\varphi_1)_A + a_2(\varphi_1,\varphi_2)_A + \dots + a_n(\varphi_1,\varphi_n)_A = (f,\varphi_1),\\
&a_1(\varphi_1,\varphi_2)_A + a_2(\varphi_2,\varphi_2)_A + \dots + a_n(\varphi_2,\varphi_n)_A = (f,\varphi_2),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&a_1(\varphi_1,\varphi_n)_A + a_2(\varphi_2,\varphi_n)_A + \dots + a_n(\varphi_n,\varphi_n)_A = (f,\varphi_n).
\end{aligned}$$

Výsledná sústava je sústava n- rovníc o n neznámych a_1, a_2,...a_n. Pretože prvky $\varphi_1,\varphi_2,...\varphi_n$ sú lineárne nezávislé, determinant tejto sústavy je Grammov determinant a teda je rôzny od nuly. Z tohto faktu vyplýva, že uvedená sústava má jediné riešenie. Dá sa ukázať, (forma $\sum_{i,j=1}^{n}(\varphi_i,\varphi_j)_A b_i b_j$ je za uvažovaných predpokladov pozitívne definitná), že získaný extrém je ostré minimum.

Poznámka 12.1:
Špeciálne, ak je báza (12.1) ortonormálna v H_A, jej prvky označme $\tilde{\varphi}_1,\tilde{\varphi}_2,\dots$, potom riešenie je veľmi jednoduché a platí:

(12.13) $$\begin{aligned}
&a_1 = (f,\tilde{\varphi}_1),\\
&a_2 = (f,\tilde{\varphi}_2),\\
&\dots\dots\dots,\\
&a_n = (f,\tilde{\varphi}_n),
\end{aligned}$$

A teda riešenie je tvaru

(12.14) $$u_n = \sum_{k-1}^{n} (f, \widetilde{\varphi}_k)\widetilde{\varphi}_k .$$

Ako vidieť z tohto posledného vzťahu, nejde o nič iné, ako o koeficienty získané predchádzajúcou metódou, keď báza bola ortonormálna.

Veta 12.1:
Nech A je pozitívne definitný operátor na lineárnom priestore D_A hustom v separabilnom Hilbertovom priestore H a nech $f \in H$. Nech ďalej $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n \ldots$ je báza v priestor H_A. Potom Ritzova postupnosť $\{u_n\}$ s konštantami a_1, a_2,...a_n danými pre každé pevné n sústavou (12.12), konverguje v H_A k zovšeobecnenému riešeniu u_0 rovnice Au = f.
Dôkaz:
Postup dôkazu je založený na poznámke 12.1. Stačí len previesť bázu z predpokladu vety Grammovým-Schmidtovým ortogonalizačným procesom na ortonormálnu bázu, kde potom platí (12.14) a konvergencia takéhoto radu vyplýva priamo z konvergencie Fourierových radov a konštrukcie priestoru H_A. V ďalšom si len treba uvedomiť, že proces Gramm-Schmidtovej ortogonalizácie vlastne len vytvára prvky ortonormálnej bázy ako istú lineárnu kombináciu prvkov pôvodnej bázy.
Podrobnejší dôkaz pozri [R]. □

Poznámka 12.2:
Dá sa ukázať, že aj keď Ritzova postupnosť konverguje k zovšeobecnenému riešeniu u_0 v H_A, nemusí platiť, že Au_n konverguje k f v H. Preto pre odhad chyby je veľmi dôležitý správny výber bázy.
Bázu v priestore H_A možno vzhľadom na hustotu D_A v H_A zvoliť aj z prvkov priestoru D_A. Potom sústava (12.12) bude mať tvar:

(12.14) $$\begin{aligned}
&a_1(A\varphi_{1,}\varphi_1) + a_2(A\varphi_{1,}\varphi_2) + \ldots + a_n(A\varphi_{1,}\varphi_n) = (f, \varphi_1),\\
&a_1(A\varphi_{1,}\varphi_2) + a_2(A\varphi_{2,}\varphi_2) + \ldots + a_n(A\varphi_{2,}\varphi_n) = (f, \varphi_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&a_1(A\varphi_{1,}\varphi_n) + a_2(A\varphi_{2,}\varphi_n) + \ldots + a_n(A\varphi_{n,}\varphi_n) = (f, \varphi_n).
\end{aligned}$$

Všimnite si, že sústava je rozmeru nxn, teda čím presnejšie chcem aproximovať hľadané riešenie, tým väčšiu sústavu musím riešiť a teda rýchle a efektívne riešenie lineárnych sústav rovníc je pre „numerika" kľúčová záležitosť.

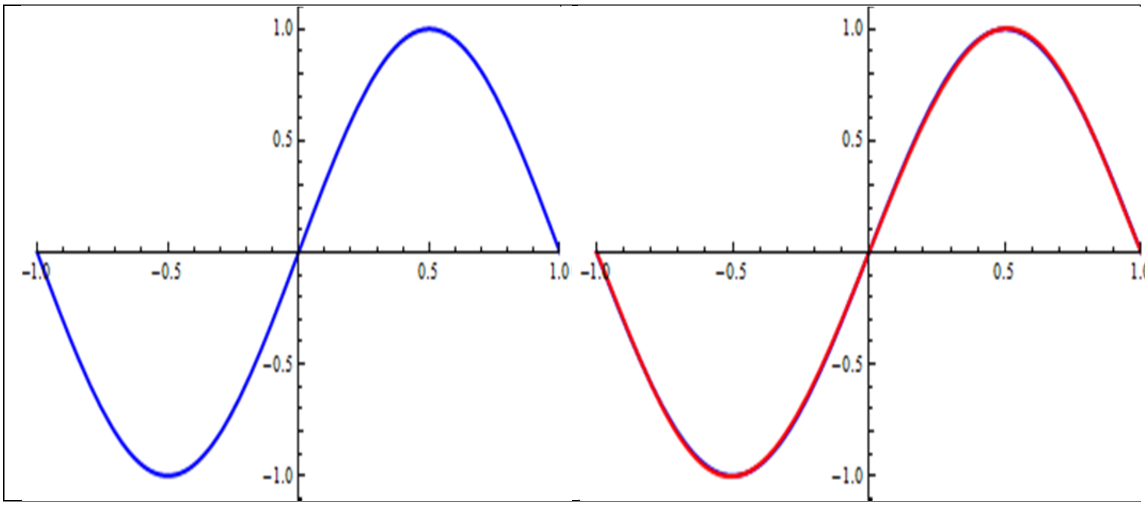
Príklad 12.1:
Riešme pomocou Ritzovej metódy problém
$-u'' + u = (1+\pi^2)\sin(\pi x),$
$u(-1) = u(1) = 0.$
Riešenie:
Daný príklad sme vybrali tak, aby sme vedeli presné riešenie úlohy, ktorou je funkcia $\sin(\pi x)$ a mohli ho v závere porovnať s numerickým riešením.
Základný lineárny priestor bude $L_2(-1,1)$. Operátor A definujeme ako $Au = -u'' + u$ na lineárnej množine D_A všetkých do druhého rádu spojitých funkcií spĺňajúcich okrajové podmienky, čo je hustá množina v $L_2(-1,1)$. Tento operátor je

na tejto množine pozitívne definitný (pozri cvičenie 6.4). Za prvky bázy zvolíme podľa [R]
$\varphi_1(x) = 1 - x^2, \varphi_2(x) = x(1-x^2), \quad \varphi_3(x) = x^2(1-x^2), \quad \varphi_n(x) = x^{n-1}(1-x^2)...$
Aproximáciu riešenia hľadáme v tvare
$u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \varphi_k(x)$, kde koeficienty získame riešením (12.4), pričom pre koeficienty matice **A** a koeficienty pravej strany **b** platí

$$a_{ij} = (A\varphi_k(x), \varphi_l(x)) = -\int_{-1}^{1} \varphi_k''(x)\varphi_l(x)dx + \int_{-1}^{1} \varphi_k(x)\varphi_l(x)dx$$

$$b_i = (1+\pi^2)(\sin(\pi x), \varphi_l(x)) = (1+\pi^2)\int_{-1}^{1} \sin(\pi x)\varphi_l(x)dx$$

Výsledky sme zrealizovali vo výpočtovom systéme Mathematica pre rozmer matice 3 a 7.
Na ľavom Obrázku 12.1 je presné riešenie a na pravom obidve numerické riešenia. Čitateľ môže vidieť dosiahnutie veľmi dobrej zhody už aj pre takúto jednoduchú aproximáciou, pretože ide o pekné, hladké, presné riešenie.



Obrázok 12.1

Poznámka 12.3:
Nehomogénne okrajové podmienky. Pre jednoduchý problém Dirichletových nehomogénnych okrajových podmienok hľadáme zovšeobecnené riešenie opäť v tvare súčtu

(12.15) $u_0 = w + z_0$,

kde w je funkcia, ktorá spĺňa nehomogénnu okrajovú podmienku. Riešenie z_0 potom hľadáme ako v predchádzajúcej kapitole ako minimum v H_A funkcionálu

(12.16) $Gz = ((z,z)) - 2(f,z) + 2((w,z))$

Ak hľadáme minimum Ritzovou metódou výsledná sústava bude mať tvar:

$$
\begin{aligned}
(12.17)\quad & a_1(\varphi_{1,}\varphi_1)_A + a_2(\varphi_{1,}\varphi_2)_A + \ldots + a_n(\varphi_{1,}\varphi_n)_A = (f,\varphi_1) - ((w,\varphi_1)),\\
& a_1(\varphi_{1,}\varphi_2)_A + a_2(\varphi_{2,}\varphi_2)_A + \ldots + a_n(\varphi_{2,}\varphi_n)_A = (f,\varphi_2) - ((w,\varphi_2)),\\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
& a_1(\varphi_{1,}\varphi_n)_A + a_2(\varphi_{2,}\varphi_n)_A + \ldots + a_n(\varphi_{n,}\varphi_n)_A = (f,\varphi_n) - ((w,\varphi_n)).
\end{aligned}
$$

13. Galerkinova metóda

Princíp tejto metódy je založený na úplne inej myšlienke, ako je princíp Ritzovej metódy, ktorý vychádza z hľadania minima kvadratického funkcionálu. Ako sa neskôr ukáže, pri istých predpokladoch je to tá istá metóda, ale pozor, Galerkinova metóda je vo svojej podstate úplne všeobecnou metódou na riešenie operátorovej rovnice, opäť ale založená na existencii bázy v Hilbertovom priestore.

Uvažujme bázu v separabilnom Hilbertovom priestore H:

(13.1.) $\varphi_1, \varphi_2, ... \varphi_n, ...$

Pretože je to báza platí :

Tvrdenie 13.1:
Ak pre danú bázu a ľubovoľný prvok u z Hilbertovho priestoru H platí

(13.1) $(u, \varphi_k) = 0, \quad \forall\, k = 1,2,... \Rightarrow u = 0 \quad v \quad H.$

Dôkaz:
Je založený na tvrdení Vety 3.12, ktorá hovorí, že ak je množina hustá v H a nejaký prvok je ortogonálny ku každému prvku tejto množiny, tak je to prvok nulový v H. Stačí zobrať za danú množinu množinu všetkých lineárnych kombinácií danej bázy. Veľmi jednoducho sa dokáže (pozri cvičenie), že ide o hustú množinu v H a navyše ak platí (13.1), potom aj skalárny súčin prvku u s ľubovoľnou lineárnou kombináciou bázy dáva z linearity skalárneho súčinu nulu, takže prvok u musí byť nutne nulový. □

Nech je v H daná rovnica

(13.2.) $Au = f.$

Ak nájdeme také u_0 z D_A, že platí:

(13.3) $(Au_0 - f, \varphi_k) = 0, \quad \forall\, k = 1,2,...$

Potom podľa (13.1) máme $Au_0 - f = 0$ v H, takže u_0 z D_A je riešením rovnice (13.2) v H
Táto jednoduchá úvaha tvorí základnú myšlienku Galerkinovej metódy.

Predpokladajme, že báza a definičný obor operátora A sú také, že každá lineárna kombinácia $\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k$ patrí do D_A a hľadáme približné riešenie u_n rovnice (13.2) v tvare

(13.4) $u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k ,$

Kde n je ľubovoľné, ale pevne zvolené prirodzené číslo a a_k sú zatiaľ neznáme konštanty.
Tieto určíme z podmienky

(13.5) $(Au_n - f, \varphi_k) = 0, \qquad k = 1,2,...,n.$

Táto podmienka predstavuje n rovníc o n neznámych. Ak operátor A je lineárny, nadobudne tvar

(13.6) $(a_1 A\varphi_1 + ... a_n A\varphi_n - f, \varphi_k) = 0, \quad k = 1,2,..,n.$

Podrobnejšie

$$(13.7)\quad \begin{aligned} &a_1(A\varphi_1, \varphi_1) + a_2(A\varphi_2, \varphi_1) + ... + a_n(A\varphi_n, \varphi_1) = (f, \varphi_1),\\ &a_1(A\varphi_1, \varphi_2) + a_2(A\varphi_2, \varphi_2) + ... + a_n(A\varphi_n, \varphi_2) = (f, \varphi_2),\\ &...,\\ &a_1(A\varphi_1, \varphi_n) + a_2(A\varphi_2, \varphi_n) + ... + a_n(A\varphi_n, \varphi_n) = (f, \varphi_n). \end{aligned}$$

Ak je navyše tento operátor pozitívny (teda aj symetrický) a použijeme už skôr zavedený skalárny súčin, môžeme sústavu (13.7) zapísať v tvare

$$(13.8)\quad \begin{aligned} &a_1(\varphi_1, \varphi_1)_A + a_2(\varphi_1, \varphi_2)_A + ... + a_n(\varphi_1, \varphi_n)_A = (f, \varphi_1),\\ &a_1(\varphi_1, \varphi_2)_A + a_2(\varphi_2, \varphi_2)_A + ... + a_n(\varphi_2, \varphi_n)_A = (f, \varphi_2),\\ &...,\\ &a_1(\varphi_1, \varphi_n)_A + a_2(\varphi_2, \varphi_n)_A + ... + a_n(\varphi_n, \varphi_n)_A = (f, \varphi_n). \end{aligned}$$

Tento je zhodný s tvarom sústavy pre Ritzovu metódu. Znamená, že ak sú splnené predpoklady pre konvergenciu Ritzovej postupnosti, sú splnené aj predpoklady pre konvergenciu Galerkinovej postupnosti, z čoho plynie nasledujúca veta:

Veta 13.1:
Nech A je pozitívne definitný operátor na lineárnom priestore D_A hustom v separabilnom Hilbertovom priestore H a nech $f \in H$. Nech ďalej $\varphi_1 \in D_A, ... \varphi_n \in D_A ...$ tvoria bázu v priestor H_A. Potom Galerkinova postupnosť $u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k$ s konštantami $a_1, a_2, ... a_n$ danými pre každé pevné n podmienkou (13.5), konverguje v H_A k zovšeobecnenému riešeniu u_0 rovnice Au=f.

Poznámka 13.1:
V prípade pozitívne definitných operátorov sú Ritzova aj Galerkinova metóda totožné, ale vo všeobecnosti je Galerkinova metóda omnoho širšia. Metóda ako taká nekladie žiadne obmedzenia na operátor A a dá sa použiť pri veľmi všeobecných operátoroch. Osobitne ale treba vyšetriť problém riešiteľnosti sústavy a konvergencie Galerkinovej postupnosti k riešeniu.

Príklad 13.1:
Riešte úlohu o priehybe votknutého nehomogénneho prúta premenného prierezu dĺžky *l* namáhaného priečnym zaťažením q (pozri [R]).
Riešenie:
Matematicky sa daná úloha sformuluje ako rovnica štvrtého rádu s homogénnymi okrajovými podmienkami:
$(E(x)I(x)u'')'' = q(x),$
$u(0) = u'(0) = u(l) = u'(l) = 0.$

alebo ekvivalentne hľadaním minima „funkcionálu energie”, ktorý vyjadruje celkovú potenciálnu energiu namáhaného prútu.

$$\frac{1}{2}\int_0^l EIu''^2 dx - \int_0^l qudx.$$

Funkcia E je funkcia modulu pružnosti materiálu a funkcia I je moment zotrvačnosti prierezu vzhľadom k ohybovej osi a funkcia q predstavuje priečne zaťaženie. Predpokladáme, že funkcie E a I sú spojité až do druhých derivácií včítane a funkcia zaťaženia q je spojitá funkcia na intervale < 0, l >. Ak budeme hľadať riešenie Galerkinovou metódou, kde aproximácia riešenia bude v tvare: $u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k$, kde bázové funkcie spĺňajú okrajové podmienky našej úlohy, potom neznáme koeficienty a_k
môžeme vypočítať ako riešenie sústavy rovníc

$$a_1\int_0^l (EI\varphi_1'')''\varphi_1 dx + a_2\int_0^l (EI\varphi_2'')''\varphi_1 dx + ... + a_n\int_0^l (EI\varphi_n'')''\varphi_1 dx = \int_0^l q\varphi_1 dx,$$

$$a_1\int_0^l (EI\varphi_1'')''\varphi_2 dx + a_2\int_0^l (EI\varphi_2'')''\varphi_2 dx + ... + a_n\int_0^l (EI\varphi_n'')''\varphi_2 dx = \int_0^l q\varphi_2 dx$$

....,

$$a_1\int_0^l (EI\varphi_1'')''\varphi_n dx + a_2\int_0^l (EI\varphi_2'')''\varphi_n dx + ... + a_n\int_0^l (EI\varphi_n'')''\varphi_n dx = \int_0^l q\varphi_n dx$$

Ak by sme úlohu riešili ako minimum uvedeného funkcionálu, dostávame sústavu

$$a_1\int_0^l EI\varphi_1''^2 dx + a_2\int_0^l EI\varphi_1''\varphi_2'' dx + ... + a_n\int_0^l EI\varphi_1''\varphi_n'' dx = \int_0^l q\varphi_1 dx,$$

$$a_1\int_0^l EI\varphi_1''\varphi_2'' dx + a_2\int_0^l E\varphi_2''^2 dx + ... + a_n\int_0^l EI\varphi_2''\varphi_n'' dx = \int_0^l q\varphi_2 dx,$$

....,

$$a_1\int_0^l EI\varphi_1''\varphi_n'' dx + a_2\int_0^l E\varphi_2''\varphi_n'' dx + ... + a_n\int_0^l EI\varphi_n''^2 dx = \int_0^l q\varphi_n dx$$

Tieto sústavy sú formálne rôzne, veď aj vychádzajú z iných matematických princípov, v skutočnosti sú totožné za predpokladov, že použitá báza spĺňa okrajové podmienky úlohy, pretože ako vieme, platí:

$$\int_0^l (EI\varphi_i'')''\varphi_k dx = \left[\left(EI\varphi_i''\right)'\varphi_k\right]_0^l - \int_0^l (EI\varphi_i'')'\varphi_k' dx =$$

$$-\left[EI\varphi_i''\varphi_k'\right]_0^l + \left[\left(EI\varphi_i''\right)'\varphi_k\right]_0^l + \int_0^l EI\varphi_i''\varphi_k\ dx = \int_0^l EI\varphi_i''\varphi_k\ dx.$$

Cvičenia:

11.1. Riešte metódou ortonormálnych radov problém

$-\Delta u = x^2 \quad v \quad <0,\pi>, \qquad u(0) = u(\pi) = 0$.

11.2. Riešte metódou superpozície a metódou ortonormálnych radov problém

$-\Delta u = x \quad v \quad <0,\pi>, \qquad u(0) = 1, \quad u(\pi) = 3$.

12.1.: Riešte Ritzovou metódou problém

$-\Delta u = x^2 \quad v \quad <2,5>, \qquad u(2) = u(5) = 0$,

kde za prvky bázy zvolíme $\varphi_n(x) = \sin\dfrac{n\pi(x-2)}{3}$.

13.1. Uvažujme bázu v separabilnom Hilbertovom priestore H: $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, \ldots$
Ukážte, že množina všetkých lineárnych kombinácií danej bázy je hustá množina v H.

13.2. Nech je daná u ∊ $C^2(\Omega)$, ktorá je nulová na hranici Ω a nech je dané ε ľubovoľné kladné. Dokážte nerovnosť $\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \le \varepsilon \int_\Omega (\Delta u)^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon}\int_\Omega u^2 dx.$

14. Friedrichsova nerovnosť. Poincarého nerovnosť

V predchádzajúcich kapitolách sme sa už venovali aj základným numerickým metódam, ktoré môžeme použiť na riešenie nášho problému opísaného nejakou diferenciálnou rovnicou a okrajovou podmienkou. Všetky metódy predpokladali, že riešenie daného problému, aspoň teda to zovšeobecnené existuje a je jediné. Ako už vieme z predchádzajúceho, na to stačí, aby operátor A, ktorý prislúcha danému problému opísaného nejakou diferenciálnou rovnicou a okrajovou podmienkou bol pozitívne definitný. Potom zovšeobecnené riešenie existuje a je jediné v tzv. energetickom priestore H_A. Teraz sa k otázke, kedy a ktorý operátor je pozitívne definitný chceme vrátiť pre širší okruh problémov, nielen Poissonovu rovnicu s homogénnou Dirichletovou podmienkou v jednodimenzionálnom priestore. Nato nám bude slúžiť táto kapitola a nerovnosti v nej prezentované.

Nech je v N- rozmernom euklidovskom priestore daná oblasť G s Lipschitzovskou hranicou Γ. Nech je daný Hilbertov priestor $L_2(G)$ s obvyklou definíciou skalárneho súčinu, normy a metriky:

$$(14.1)\quad (u,v)=\int_G u(x)\,v(x)\,dx,\ \ \|u\|=\sqrt{\int_G u^2(x)\,dx},\ \ \rho(u,v)=\sqrt{\int_G (u(x)-v(x))^2\,dx}\,.$$

Označme $M = C^1(\overline{G})$.

Veta 14.1: (Friedrichsova nerovnosť)
Nech G je oblasť s Lipschitzovskou hranicou**.** Potom existujú nezáporné konštanty c_1, c_2 závislé od uvažovanej oblasti, ale nezávislé od funkcií z M tak, že platí:

$$(14.2)\quad \int_G u^2(x)\,dx \le c_1\sum_{k=1}^{n}\int_G\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx + c_2\int_\Gamma u^2(s)\,ds,\quad \forall u\in M.$$

V jednorozmernom prípade sa uvedená Friedrichsova nerovnosť dá zapísať v niektorom z týchto tvarov:

$$(14.2)\quad \int_a^b u^2(x)dx \le c_1\int_a^b u'^2(x)dx + c_2u^2(a)$$

$$(14.3)\quad \int_a^b u^2(x)dx \le c_1\int_a^b u'^2(x)dx + c_2u^2(b)$$

$$(14.4)\quad \int_a^b u^2(x)dx \le c_1\int_a^b u'^2(x)dx + c_2(u^2(a)+u^2(b))$$

Dôkaz:
Vetu dokážeme len v jednorozmernom prípade pre jeden prípad. Viacrozmerný prípad je analogický, ale technicky oveľa zložitejší**.**
Dôkaz urobíme podrobne pre nerovnosť (14.3).

Zvoľme $g(x)=\cos\dfrac{\pi(x-a)}{4(b-a)}$ a $v=\dfrac{u}{g}, \Rightarrow u = gv$.

Máme

$$u'^2 = (gv)'^2 = g^2 v'^2 + (v^2 g g')' - v^2 g g''.$$

Z toho

(14.5) $(v^2 g g')' - v^2 g g'' \le u'^2$.

Integráciou (14.5) dostávame

(14.6) $\left[v^2 g g'\right]_a^b - \int_a^b v^2 g g'' dx \le \int_a^b u'^2 dx$.

Upravíme

$$v^2 g g'' = -\frac{\pi^2}{16(b-a)^2} u^2 \quad , \quad \left[v g g'\right]_a^b = -\frac{\pi}{4(b-a)} u^2(b).$$

Po dosadení máme

$$\frac{\pi^2}{16(b-a)^2} \int_a^b u^2 dx \le \int_a^b u'^2 dx + \frac{\pi}{4(b-a)} u^2(b)$$

a z toho

(14.7) $\int_a^b u^2 dx \le c_1 \int_a^b u'^2 dx + c_2 u^2(b), \quad c_1 = \frac{16(b-a)^2}{\pi^2}, \quad c_2 = \frac{4(b-a)}{\pi}$.

Na dôkaz (14.2) stačí zvoliť $g(x) = \cos\frac{\pi(x-b)}{4(b-a)}$ a nerovnosť (14.4) je dôsledkom predchádzajúcich dvoch. Získané odhady sa v tomto prípade dajú jednoducho zlepšiť (pozri [R]). □

Poznámka 14.1:
Ak funkcie z lineálu (lineárnej množiny) spĺňajú ďalšie podmienky, napríklad ak označíme M_1 lineál tých funkcií z M, pre ktoré platí $u(a) = u(b) = 0$, potom odhad (14.4) bude tvaru

(14.8) $\int_a^b u^2(x) dx \le c_1 \int_a^b u'^2(x) dx, \ u \in M_1$.

Hodnota c_1 sa v tomto prípade dá stanoviť optimálne ako $c_1 = \frac{(b-a)^2}{\pi^2}$.

Veta 14.2: (Poincarého nerovnosť)
Nech G je oblasť s Lipschitzovskou hranicou**.** Potom existujú nezáporné konštanty c_3, c_4 závislé od uvažovanej oblasti, ale nezávislé od funkcií z M tak, že platí:

(14.3) $\int_G u^2(x) dx \le c_3 \sum_{k=1}^{n} \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx + c_4 \left(\int_G u(x) dx\right)^2 \quad \forall u \in M.$

Dôkaz:
Opäť urobíme v jednodimenzionálnom prípade.
Nech u je ľubovoľná funkcia definovaná na intervale <a, b> patriaca M. Potom platí

$$u(x_2)-u(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}u'(x)dx\,.$$

Z toho

$$u^2(x_2)+u^2(x_1)-2u(x_1)u(x_2)=\left[\int_{x_1}^{x_2}u'(x)dx\right]^2.$$

Využijúc Cauchyho -Schwarzovu nerovnosť dostávame:

$\left[\int_{x_1}^{x_2}u'(x)dx\right]^2\le\left|\int_{x_1}^{x_2}1^2dx\right|\left|\int_{x_1}^{x_2}u'^2(x)dx\right|$ a teda odhadnúc prvý integrál na pravej strane máme

$$u^2(x_2)+u^2(x_1)-2u(x_1)u(x_2)\le(b-a)\int_{x_1}^{x_2}u'^2(x)dx\le(b-a)\int_a^b u'^2(x)dx\,.$$

Nerovnosť zintegrujeme na intervale <a,b> najskôr pre x_1 a potom pre x_2 :

$$(b-a)\int_a^b u^2(x_2)dx_2+(b-a)\int_a^b u^2(x_1)dx_1-2\int_a^b u(x_1)dx_1\int_a^b u(x_2)dx_2\le(b-a)^3\int_a^b u'^2(x)dx.$$

Z toho

$$\int_a^b u^2(x)dx\le\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b u'^2(x)dx+\frac{1}{b-a}\left(\int_a^b u(x)dx\right)^2,$$

kde nerovnosť získame označením $c_3=\dfrac{(b-a)^2}{2},\ \ c_4=\dfrac{1}{b-a}$. □

15. Obyčajné diferenciálne rovnice s okrajovými podmienkami

Takže získané nerovnosti z predchádzajúcej časti nám teraz môžu pomôcť určiť, kedy je operátor pozitívne definitný. V tejto kapitole sa sústredíme na obyčajné diferenciálne rovnice a ich okrajové úlohy pre operátory 2. rádu. Je to tak preto, lebo tieto problémy modelujú (zatiaľ v jednorozmernom prípade) veľmi veľa dôležitých úloh z praxe, napríklad rovnicu potenciálu, stacionárne lineárne vedenie tepla, jednoduchý model ustáleného stavu prúdenia podzemnej vody a iné.

Rovnica druhého rádu

Uvažujme ODR druhého rádu tvaru

(15.1.) $-(\mathrm{pu}')' + \mathrm{ru} = \mathrm{f}, \quad \mathrm{f} \in \mathrm{L}_2(\mathrm{a},\mathrm{b})$, $\mathrm{p(x)}, \mathrm{p}'(\mathrm{x}), \mathrm{r(x)}$ sú spojité funkcie v <a,b,>,

(15.2.) $p(x) \geq p_0 > 0, \quad r(x) \geq 0 \quad v \quad < a, b >.$

Okrajové podmienky sú tvaru:

(15.3) $\alpha \mathrm{u}'(\mathrm{a}) - \beta \mathrm{u}(\mathrm{a}) = 0, \quad \gamma \mathrm{u}'(\mathrm{b}) + \delta \mathrm{u}(\mathrm{b}) = 0,$

kde $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ sú nezáporné reálne čísla také, že žiadna z dvojíc α,β a γ,δ nemá obe čísla zároveň nulové.

Rozoberieme jednotlivé prípady okrajových podmienok.

1. Dirichletove okrajové podmienky:

(15.4) $\mathrm{u(a)} = \mathrm{u(b)} = 0$.

Označme M_1 lineárny priestor všetkých spojitých funkcií so spojitými deriváciami až do druhého rádu na intervale <a, b>, ktoré navyše spĺňajú okrajové podmienky (15.4).

Označme A_1 operátor definovaný na M_1 takto:

(15.5) $\mathrm{A}_1\mathrm{u} = -(\mathrm{pu}')' + \mathrm{ru}, \quad \mathrm{u} \in \mathrm{M}_1$.

Tvrdenie 15.1:
Operátor A_1 je pri splnení podmienky (15.2) na M_1 pozitívne definitný.
Dôkaz:
Z predchádzajúcich častí vyplýva, že M_1 je hustá množina v základnom priestore $L_2(a,b)$. Treba ukázať, že operátor je lineárny, symetrický a pozitívne definitný.
Linearita je ponechaná ako cvičenie.
Symetria: $\forall u, v \in M_1$ platí

$$(A_1u,v)=\int_a^b(-(pu')'+ru)vdx=\left[-pu'v\right]_a^b+\int_a^b pu'v'dx+\int_a^b ruvdx=\int_a^b pu'v'dx+\int_a^b ruvdx,$$

z čoho hneď dostávame symetriu operátora.
Pozitívna definitnosť: využijeme vlastnosť funkcií p a r (15.2):

$$(A_1u,u)=\int_a^b(-(pu')'+ru)udx=\int_a^b pu'^2dx+\int_a^b ru^2dx\geq p_0\int_a^b u'^2dx.$$

Teraz využijeme Friedrichsovu nerovnosť, ktorú sme dokázali v predchádzajúcej časti konkrétne vzťah (14.8) a dostávame:

$$(A_1u,u)\geq p_0\int_a^b u'^2dx\geq\frac{p_0}{c_1}\int_a^b u^2dx=\frac{p_0}{c_1}\|u\|^2.$$

Konštanta pozitívnej definitnosti sa teda v tomto prípade rovná $C^2=\dfrac{p_0}{c_1}$. □

2. Neumannove okrajové podmienky:

(15.6) $u'(a)=u'(b)=0$.

Označme M_2 lineárny priestor všetkých spojitých funkcií so spojitými deriváciami až do druhého rádu na intervale <a, b>, ktoré navyše spĺňajú okrajové podmienky (15.6). Označme operátor A_2 operátor definovaný na LP M_2 takto:

(15.7) $A_2u=-(pu')'+ru,\quad u\in M_2$.

Tvrdenie 15.2:
Operátor A_2 je pri splnení podmienky (15.2) na M_2 symetrický. Ak navyše platí

(15.8) $r(x)\geq r_0>0$.

Potom je operátor A_2 pozitívne definitný.
Dôkaz:
Z predchádzajúcich častí vyplýva, že M_2 je hustá množina v základnom priestore $L_2(a,b)$. Treba ukázať, že operátor je lineárny (pozri predchádzajúci prípad), symetrický a za predpokladu (15.8) aj pozitívne definitný.
Symetria: $\forall u,v\in M_2$ platí

$$(A_2u,v)=\int_a^b(-(pu')'+ru)vdx=\left[-pu'v\right]_a^b+\int_a^b pu'v'dx+\int_a^b ruvdx=\int_a^b pu'v'dx+\int_a^b ruvdx,$$

z čoho hneď dostávame symetriu operátora. □

Všimnite si, že teraz sa nám hraničný člen vynuloval vďaka derivácii funkcie u na rozdiel od predchádzajúceho prípadu, kde to bolo pre funkciu v.

Pozitívna definitnosť: využijeme vlastnosť funkcií p a r (15.2) a (15.8):

$$(A_2u,u)=\int_a^b(-(pu')'+ru)udx=\int_a^b pu'^2dx+\int_a^b ru^2dx\geq p_0\int_a^b u'^2dx+r_0\int_a^b u^2dx\geq r_0\int_a^b u^2dx.$$

Teda dostávame:

$$(A_2 u, u) \geq r_0 \int_a^b u^2 dx = r_0 \|u\|^2 .$$

Konštanta pozitívnej definitnosti sa teda v tomto prípade rovná $C^2 = r_0$. Ale pozor, na rozdiel od prvého prípadu pre Dirichletovu okrajová podmienku, sme pre tento výsledok museli zosilniť podmienku pre funkciu r (15.8).

Poznámka 15.1.: Tvrdenie 15.2 sa dá dokázať aj za slabších predpokladov pre funkciu r. Stačí predpokladať, že funkcia r je spojitá a nezáporná na intervale <a, b,> a je ostro kladná aspoň v jednom bode tohto intervalu.

Teraz sa budeme zaoberať prípadom, keď nie je splnená podmienka (15.8).

Poznámka 15.2:
Uvažujme osobitne prípad $r(x) \equiv 0$ na intervale <a, b>. Máme teda riešiť úlohu

(15.9) $-(pu')' = f, \quad u'(a) = 0, \quad u'(b) = 0.$

V tomto prípade sa dá ľahko ukázať, že na LP M_2 nie je operátor A_2 ani pozitívny (pozri cvičenie).

Predpokladajme, že táto úloha má na M_2 riešenie $u \in M_2$. Zintegrovaním našej rovnice na intervale <a, b> hneď máme

$-\int_a^b (pu')' dx = \int_a^b f(x) dx$ z čoho $-[pu']_a^b = \int_a^b f(x) dx$ a z okrajových podmienok máme

(15.10) $\int_a^b f(x) dx = 0.$

Ak teda má mať úloha (15.9) riešenie, musí nutne platiť (15.10). Toto je teda **nutná podmienka riešenia** uvedeného problému.

Označme $\widetilde{L}_2(a,b)$ priestor všetkých funkcií z $L_2(a,b)$, takých, že spĺňajú podmienku (15.10). Dá sa ukázať, že $\widetilde{L}_2(a,b)$ je lineárny podpriestor priestoru $L_2(a,b)$ a teda je sám Hilbertovým priestorom.

Tvrdenie 15.3.:
Nech $\widetilde{M}_2$ je lineárna množina tých funkcií z M_2, ktoré spĺňajú (15.10). Táto lineárna množina je hustá v $\widetilde{L}_2(a,b)$. Na ňom, potom definujeme operátor $\widetilde{A}_2$ predpisom

(15.11) $\widetilde{A}_2 u = -(pu')', \quad u \in \widetilde{M}_2 .$

Potom je operátor $\widetilde{A}_2$ pozitívne definitný.
Dôkaz:
Z predchádzajúcich častí vyplýva, že $\widetilde{M}_2$ je hustá množina v základnom priestore $L_2(a,b)$. Treba ukázať, že operátor je lineárny (pozri predchádzajúci prípad), symetrický a aj pozitívne definitný.
Symetria: $\forall u, v \in \widetilde{M}_2$ platí

$$(\widetilde{A}_2 u, v) = -\int_a^b (pu')'v dx = \left[-pu'v\right]_a^b + \int_a^b pu'v'dx = \int_a^b pu'v'dx,$$

z čoho hneď dostávame symetriu operátora analogicky ako v predchádzajúcom prípade.
Pozitívna definitnosť: využijeme vlastnosť (15.10) funkcií z $\widetilde{\mathrm{M}}_2$. Pre takéto funkcie má Poincarého nerovnosť tvar:

$\int_a^b \mathrm{u}^2(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} \le \mathrm{c}_3 \int_a^b (u'(x))^2 dx \qquad \forall \mathrm{u} \in \widetilde{\mathrm{M}}_2$. Ak ešte využijeme vlastnosti funkcie p máme

$$(\widetilde{A}_2 u, u) = \int_a^b pu'^2 dx \ge \frac{p_0}{c_3} \int_a^b u^2 dx.$$

Teda dostávame:

$$(\widetilde{A}_2 u, u) \ge \frac{p_0}{c_3} \int_a^b u^2 dx = \frac{p_0}{c_3} \|u\|^2.$$

Konštanta pozitívnej definitnosti sa teda v tomto prípade rovná $C^2 = \dfrac{p_0}{c_3}$. □

3. Newtonove okrajové podmienky:

(15.11) $\mathrm{u}'(\mathrm{a}) - \beta \mathrm{u}(\mathrm{a}) = 0, \quad \mathrm{u}'(\mathrm{b}) + \delta \mathrm{u}(\mathrm{b}) = 0, \quad \beta > 0, \quad \delta > 0$.

Označme M_3 lineárny priestor všetkých spojitých funkcií so spojitými deriváciami až do druhého rádu na intervale <a, b>, ktoré navyše spĺňajú okrajové podmienky (15.11).
Označme operátor A_3 operátor definovaný na LP M_3 takto:

(15.12) $\mathrm{A}_3 \mathrm{u} = -(\mathrm{pu}')' + \mathrm{ru}, \quad \mathrm{u} \in \mathrm{M}_3$.

Tvrdenie 15.3:
Operátor A_3 je pri splnení podmienky (15.2) na M_3 pozitívne definitný.
Dôkaz:
Z predchádzajúcich častí vyplýva, že M_3 je hustá množina v základnom priestore $L_2(a,b)$. Treba ukázať, že operátor je lineárny (pozri predchádzajúce prípady), symetrický a pozitívne definitný.
Symetria: $\forall u, v \in M_3$ platí *(pozor, opäť využijeme okrajové podmienky, aj keď teraz trošku inak)*

$$(A_3 u, v) = \int_a^b (-(pu')' + ru)v dx = \left[-pu'v\right]_a^b + \int_a^b pu'v'dx + \int_a^b ruvdx =$$

$$p(b)\delta u(b)v(b) + p(a)\beta u(a)v(a) + \int_a^b pu'v'dx + \int_a^b ruvdx,$$

z čoho hneď dostávame symetriu operátora.
Pozitívna definitnosť: využijeme vlastnosť funkcií p (15.2) :

$$(A_3u,u) = p(b)\delta u^2(b) + p(a)\beta u^2(a) + \int_a^b pu'^2 dx + \int_a^b ru^2 dx \geq$$

$$p_0(\delta u^2(b) + \beta u^2(a) + \int_a^b u'^2 dx).$$

Teraz využijeme Friedrichsovu nerovnosť, ktorú sme dokázali v predchádzajúcej časti konkrétne vzťah (14.4) a dostávame:

$$(A_3u,u) \geq p_0\left(\min\{\beta,\delta\}\left(u^2(b) + u^2(a)\right) + \int u'^2 dx\right) \geq \min\left\{\frac{p_0}{c_1}, \frac{p_0 \min\{\beta,\delta\}}{c_2}\right\}\|u\|^2.$$

Konštanta pozitívnej definitnosti sa teda v tomto prípade rovná $C^2 = \min\left\{\frac{p_0}{c_1}, \frac{p_0 \min\{\beta,\delta\}}{c_2}\right\}$. □

4. Zmiešané okrajové podmienky:

(15.13) $u(a) = 0, \ u'(b) = 0$.

Označme M_4 lineárny priestor všetkých spojitých funkcií so spojitými deriváciami až do druhého rádu na intervale <a, b>, ktoré navyše spĺňajú okrajové podmienky (15.13).
Označme operátor A_4 operátor definovaný na LP M_4 takto:

(15.14) $\mathrm{A}_4\mathrm{u} = -(\mathrm{pu}')' + \mathrm{ru}, \quad \mathrm{u} \in \mathrm{M}_4$.

Tvrdenie 15.4:
Operátor A_4 je pri splnení podmienky (15.2) na M_4 pozitívne definitný.
Dôkaz:
Z predchádzajúcich častí opäť vyplýva, že M_4 je hustá množina v základnom priestore $L_2(a,b)$. Treba ukázať, že operátor je lineárny (pozri predchádzajúce prípady), symetrický a pozitívne definitný.
Symetria: $\forall u, v \in M_4$ platí *(opäť využijeme okrajové podmienky, aj keď teraz na každej strane pre inú funkciu, pretože máme na jednej strane Dirichletovu a na strane druhej Neumannovu podmienku).*

$$(A_4u,v) = \int_a^b (-(pu')' + ru)v dx = \left[-pu'v\right]_a^b + \int_a^b pu'v'dx + \int_a^b ruvdx = \int_a^b pu'v'dx + \int_a^b ruvdx,$$

z čoho hneď dostávame symetriu operátora.
Pozitívna definitnosť: využijeme vlastnosť funkcií p (15.2) :

$$(A_4u,u) = \int_a^b pu'^2 dx + \int_a^b ru^2 dx \geq \int_a^b pu'^2 dx \geq p_0 \int_a^b u'^2 dx.$$

Teraz opäť využijeme Friedrichsovu nerovnosť, analogicky ako pri Dirichletových podmienkach, ale teraz konkrétne vzťah (14.2) a dostávame:

$$(A_4u,u) \geq p_0 \int_a^b u'^2 dx \geq \frac{p_0}{c_1} \int_a^b u^2 dx = \frac{p_0}{c_1}\|u\|^2.$$

Konštanta pozitívnej definitnosti sa teda v tomto prípade rovná $C^2 = \frac{p_0}{c_1}$. □

5.Všeobecné okrajové podmienky tvaru (15.3):

Označme M lineárny priestor všetkých spojitých funkcií so spojitými deriváciami až do druhého rádu na intervale <a, b>, ktoré navyše spĺňajú okrajové podmienky (15.3). Označme operátor A definovaný na LP M takto:

(15.15) $Au = -(pu')' + ru, \quad u \in M$

Tvrdenie 15.4:

Operátor A je pri splnení podmienky (15.2), v prípade $\beta = 0 \;\; a \;\; \delta = 0$ ak navyše platí (15.8) na M pozitívne definitný.

Dôkaz:

Analogicky ako v ostatných prípadoch je M hustá množina v základnom priestore $L_2(a,b)$. Treba ukázať, že operátor je lineárny (pozri predchádzajúce prípady), symetricky a pozitívne definitný. Predpokladajme, že $\alpha \neq 0 \;\; a \;\; \beta \neq 0$. Ak nie, dostávame jeden z predchádzajúcich prípadov.

Symetria: $\forall u, v \in M_3$: platí

$$(Au,v) = \int_a^b (-(pu')' + ru)v dx = \left[-pu'v\right]_a^b + \int_a^b pu'v'dx + \int_a^b ruvdx =$$

$$\frac{\delta}{\gamma} p(b)u(b)v(b) + \frac{\beta}{\alpha} p(a)u(a)v(a) + \int_a^b pu'v'dx + \int_a^b ruvdx,$$

z čoho hneď dostávame symetriu operátora.

Pozitívna definitnosť: využijeme vlastnosť funkcií p (15.2) :

$$(A\,u,u) = \frac{\delta}{\gamma} p(b)u^2(b) + \frac{\beta}{\alpha} p(a)u^2(a) + \int_a^b pu'^2 dx + \int_a^b ru^2 dx \geq$$

$$p_0\left(\frac{\delta}{\chi} u^2(b) + \frac{\beta}{\alpha} u^2(a) + \int_a^b u'^2 dx\right).$$

Teraz využijeme Friedrichsovu nerovnosť, ktorú sme dokázali v predchádzajúcej časti konkrétne vzťah (14.4) a dostávame:

$$(A\,u,u) \geq p_0\left(\min\{\frac{\beta}{\alpha},\frac{\delta}{\gamma}\}\left(u^2(b) + u^2(a)\right) + \int u'^2 dx\right) \geq \min\left\{\frac{p_0}{c_1}, \frac{p_0 \min\{\frac{\beta}{\alpha},\frac{\delta}{\gamma}\}}{c_2}\right\}\|u\|^2.$$

Konštanta pozitívnej definitnosti sa teda v tomto prípade rovná

$$C^2 = \min\left\{\frac{p_0}{c_1}, \frac{p_0 \min\{\frac{\beta}{\alpha},\frac{\delta}{\gamma}\}}{c_2}\right\}. \;\; \square$$

Teraz ešte skonštruujeme príslušné kvadratické funkcionály pre jednotlivé prípady. Funkcionál na H_A pre jednotlivé prípady je tvaru

1. $\alpha = 0, \gamma = 0$ $\qquad F_1 u = \int_a^b pu'^2 dx + \int_a^b ru^2 dx - 2\int_a^b fudx$
2. $\alpha = 0, \gamma > 0$ $\qquad F_2 u = \int_a^b pu'^2 dx + \int_a^b ru^2 dx - 2\int_a^b fudx + \frac{\delta}{\gamma} p(b)u^2(b)$
3. $\alpha > 0, \gamma = 0$ $\qquad F_3 u = \int_a^b pu'^2 dx + \int_a^b ru^2 dx - 2\int_a^b fudx + \frac{\beta}{\alpha} p(a)u^2(a)$
4. $\alpha > 0, \gamma > 0$ $\qquad F_4 u = \int_a^b pu'^2 dx + \int_a^b ru^2 dx - 2\int_a^b fudx + \frac{\beta}{\alpha} p(a)u^2(a) + \frac{\delta}{\gamma} p(b)u^2(b)$

Tvrdenie 15.5:
Zovšeobecnené riešenie $u_0(x)$ problému (15.1),(15.4) je funkcia spojitá na <a, b>, ktorá má skoro všade deriváciu $u_0'(x) \in L_2(a,b)$. Minimalizujúca postupnosť $\{u_n(x)\}, u_n \in M$ zostrojená niektorou z metód z kapitoly 14. konverguje rovnomerne k **$u_0(x)$** v <a,b,> a postupnosť $\{u_n'(x)\}$ konverguje k $u_0'(x)$ v $L_2(a,b)$.

Dôkaz:
Z predchádzajúcich vyšetrovaní už vieme, že

$\|u\|_A^2 = (A_1 u, u) = \int_a^b pu'^2 dx + \int_a^b ru^2 dx.$ Preto pre približné riešenia dostávame

$\|u_m - u_n\|_A^2 = \int_a^b p(u_m' - u_n')^2 dx + \int_a^b r(u_m - u_n)^2 dx.$ Keďže postupnosť približných riešení je v priestore H_A konvergentná a teda aj cauchyovská, a preto platí

$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \|u_m - u_n\|_A^2 = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \left(\int_a^b p(u_m' - u_n')^2 dx + \int_a^b r(u_m - u_n)^2 dx \right) = 0,$ z čoho vzhľadom na podmienku (15.2) dostávame

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \left(\int_a^b (u_m' - u_n')^2 dx \right) = 0. \tag{15.16}$$

Tento výsledok znamená, že postupnosť $\{u_n'(x)\}$ je v priestore $L_2(a,b)$ cauchyovská a vzhľadom na úplnosť tohto priestoru aj konvergentná. To znamená, že existuje nejaká funkcia, ktorú označíme
$v_0(x) \in L_2(a,b),$ že platí

$$\lim_{n\to\infty} u_n' = v_0(x) \qquad v \qquad L_2(a,b). \tag{15.17}$$

Z okrajových podmienok a z faktu, že postupnosť $\{u_n(x)\}, u_n \in M$ máme

$u_n(x) = \int_a^x u'_n(t)dt \qquad \forall n = 1,2,..$ z čoho použitím Cauchyho-Schwarzovej nerovnosti máme

$$\left(u_m(x) - u_n(x)\right)^2 = \left(\int_a^x (u'_m - u'_n)dt\right)^2 \le \int_a^x 1^2\, dt \int_a^x (u'_m - u'_n)^2\, dt \le (b-a)\int_a^b (u'_m - u'_n)^2\, dt.$$

Táto nerovnosť vzhľadom na (15.16) je vlastne Cauchyho-Bolzanovo kritérium rovnomernej konvergencie postupnosti $\{u_n(x)\}, u_n \in M$ v intervale <a,b>. Keďže uvedená postupnosť je postupnosť spojitých funkcií, z rovnomernej konvergencie tejto postupnosti dostávame, že aj limitná funkcia u(x) je spojitá na intervale <a, b>. Z jednoznačnosti riešenia úlohy a z jednoznačnosti limity dostávame, že $u(x) = u_0(x)$ v $L_2(a,b)$. Teda aj zovšeobecnené riešenie je spojitou funkciou na <a, b>. Z uvedených faktov dostávame $\lim_{n\to\infty} u_n = u_0(x)$ rovnomerne v <a, b>.

Označme teraz

(15.18) $\qquad V_0(x) = \int_a^x v_o(t)dt,$

kde $v_0(x) \in L_2(a,b)$ je limitou postupnosti derivácií z (15.17), takže platí $V'_o(x) = v_0(x),$ skoro všade v <a, b>. Ďalej platí

$u_n(x) - V_0(x) = \int_a^x (u'_n(t) - v_o(t))dt.$ Opäť využitím Cauchyho-Schwarzovej nerovnosti dostávame

$\left(u_n(x) - V_0(x)\right)^2 \le (b-a)\int_a^x (u'_n(t) - v_o(t))^2\, dt$ pre každé x z v <a,b>. Z konvergencie (15.17) a získanej nerovnosti hneď dostávame

(15.19) $\qquad \lim_{n\to\infty} u_n = V_0(x)$ rovnomerne v <a, b>, preto $u_0(x) = V_0(x)$ v <a, b>. Zo vzťahu (15.18) teda máme $u'_0(x) = v_0(x)$ skoro všade v <a, b>. □

Poznámka 15.3.: Stabilné a nestabilné okrajové podmienky.
Pri skúmaní okrajových podmienok sme videli, že Dirichletove homogénne okrajové podmienky nám pri dôkaze pozitívnosti pomohli a nemali sme s nimi také ťažkosti, aké sme dostali pri Neumanových podmienkach. Tento rozdiel sa bližšie vysvetlí v ďalších kapitolách. Teraz si len povieme, že pre rovnicu druhého rádu sa podmienky, kde sa vyskytuje len hodnota riešenia (teda Dirichletove) nazývajú stabilné okrajové podmienky a ostatné sa nazývajú nestabilné okrajové podmienky.
Všeobecne: Pre rovnicu 2k-teho rádu (k=1, 2 ,...) sa podmienky, v ktorých sa vyskytuje nanajvýš hodnota (k-1) derivácie nazývajú **stabilné okrajové podmienky** a podmienky, kde sa vyskytujú hodnoty derivácie k-teho rádu sa nazývajú **nestabilné okrajové podmienky**.

Poznámka 15.4.: Nehomogénne okrajové podmienky. Sú podmienky typu

(15.16) $\alpha u'(a) - \beta u(a) = K, \quad \gamma u'(b) + \delta u(b) = L,$ kde K a L sú dané reálne čísla.

Daný problém môžeme obvyklým spôsobom previesť na problém s homogénnymi okrajovými podmienkami alebo minimalizovať funkcionály

1. $\alpha = 0, \gamma = 0$ $\quad F_1 u = \int_a^b p u'^2 dx + \int_a^b r u^2 dx - 2\int_a^b f u dx$
2. $\alpha = 0, \gamma > 0$ $\quad F_2 u = \int_a^b p u'^2 dx + \int_a^b r u^2 dx - 2\int_a^b f u dx + \frac{\delta}{\gamma} p(b) u^2(b) - \frac{2L}{\gamma} p(b) u(b)$
3. $\alpha > 0, \gamma = 0$ $\quad F_3 u = \int_a^b p u'^2 dx + \int_a^b r u^2 dx - 2\int_a^b f u dx + \frac{\beta}{\alpha} p(a) u^2(a) + \frac{2K}{\alpha} p(a) u(a)$
4. $\alpha > 0, \gamma > 0$ $\quad F_4 u = \int_a^b p u'^2 dx + \int_a^b r u^2 dx - 2\int_a^b f u dx + \frac{\beta}{\alpha} p(a) u^2(a) + \frac{\delta}{\gamma} p(b) u^2(b) + \frac{2K}{\alpha} p(a) u(a) - \frac{2L}{\gamma} p(b) u(b)$

na množine dostatočne hladkých funkcií spĺňajúcich dané stabilné okrajové podmienky (a podmienku (15.10) v prípade, že je $r(x) \equiv 0, \delta = 0, \beta = 0$).

16. Parciálne diferenciálne rovnice druhého rádu s okrajovými podmienkami

Teraz sa budeme zaoberať parciálnymi diferenciálnymi rovnicami a okrajovými úlohami s týmito rovnicami, teda prejdeme do viacdimenzionálneho priestoru. Hranica oblasti teda nebude už len dva koncové body nejakej úsečky ako v jednodimenzionálnom prípade, ale celá krivka, v prípade 2D alebo nejaká plocha v 3D. Tieto musia mať isté pekné vlastnosti, ktoré sme už definovali a takúto oblasť nazývame oblasť s *Lispchitzovskou hranicou.*
Budeme ďalej potrebovať Greenovu vetu na dôkaz pozitívnej definitnosti operátora a podstatne aj dve odvodené nerovnosti z kapitoly 14. Navyše, sa budeme musieť obmedziť len určité typy diferenciálnych rovníc, ako sa uvádza hneď v prvej definícii.

Nech G je n-rozmerná oblasť s Lispchitzovskou hranicou Γ. Uvažujme rovnicu

$$(16.1)\quad -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f,\ \ a_{ij}(x) = a_{ji}(x),$$

kde koeficienty rovnice a_{ij}, b_i, c sú spojité funkcie v $\overline{G}$, a $f \in L_2(G)$.

Definícia 16.1:
O rovnici **(16.1)** hovoríme, že **je rovnomerne eliptická** v G a o príslušnom diferenciálnom operátore danom ľavou stranou tejto rovnice hovoríme, že je **rovnomerne eliptický v G,** ak existuje taká konštanta $p > 0$, že pre každý reálny vektor $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ platí pre všetky x z G jeden z nasledujúcich vzťahov:

$$(16.2.)\quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\alpha_i\alpha_j \geq p\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2,$$

$$(16.3.)\quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\alpha_i\alpha_j < -p\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2.$$

Konštanta p nezávisí ani na x z G ani na reálnych vektoroch.

Príklad 16.1:
Jednoduchý príklad je Poissonova rovnica, ktorá je hneď z definície rovnomerne eliptická v každej oblasti.

Príklad 16.2:
Rovnica $-(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = 0$, je rovnomerne eliptická v každej oblasti G ktorá leží v pravej polrovine to je , kde $x > 0$ a má od osi y kladnú vzdialenosť k.

Riešenie:
Uvedomme, si že pri zápise (16.1) platí

$$a_{11} = x, \quad a_{22} = 1, \quad a_{12} = a_{21} = 0 \quad \Rightarrow \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\alpha_i\alpha_j = x\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \geq \min\{k,1\}\sum_{i=1}^{2}\alpha_i^2,$$

teda hodnota p z (16.2) bude $\min\{k,1\}$.

Poznámka 16.1:
Ak vynásobíme rovnicu (16.1) koeficientom -1, rovnica sa nezmení, len koeficienty zmenia znamienko. Preto musíme v definícii rovnomernej eliptičnosti uvažovať obe podmienky (16.2) aj (16.3). Teda ak rovnica spĺňa podmienku (16.3) prenásobením koeficientom -1 ju zmeníme na rovnicu spĺňajúcu vzťah (16.2). Preto budeme v ďalšom uvažovať len podmienku (16.2) ako podmienku rovnomernej eliptičnosti rovnice.

Uvažujme v oblasti G s hranicou Γ rovnicu (hovoríme, že je v divergentnom tvare):

$$(16.4)\quad -\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+cu=f,\ \ a_{ij}(x)=a_{ji}(x),$$

kde koeficienty rovnice a_{ij} a všetky ich parciálne derivácie prvého rádu ako aj funkcia c sú spojité funkcie v $\overline{G}$, a $f\in L_2(G)$.
Nech v G platí:

$$(16.5.)\quad \sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\alpha_i\alpha_j\geq p\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2,$$

a

$$(16.6)\quad c(x)\geq 0.$$

Potom uvedená rovnica **je rovnomerne eliptická v G**.
Tento fakt sa ukáže veľmi jednoducho, keď si uvedomíme, že platí:

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)=-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j},$$ takže vlastne ide o rovnicu (16.1)

kde sú koeficienty b_i dané špeciálne, ale to na eliptičnosti nič nemení.

K rovnici (16.4) budeme uvažovať tri základné typy okrajových podmienok:
Dirichletove:

$$(16.7)\quad u=0\ \text{ na }\ \Gamma,$$

Neumannove:

$$(16.8)\quad Nu=0\ \text{ na }\ \Gamma,$$

Newtonove:

$$(16.9)\quad Nu+\sigma(S)u=0\ \text{ na }\ \Gamma,\ \ \sigma(S)\geq\sigma_0>0,$$ kde

$$(16.10)\quad Nu=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\nu_i,$$ kde ν_i je i-ta zložka jednotkového vektora vonkajšej normály ku hranici Γ. Bod na hranici budeme zvyčajne označovať znakom S, aby sme ho rozlíšili do bodu vo vnútri oblasti.

Výraz (16.10) sa často nazýva **derivácia podľa konormály**. Pre Poissonovu rovnicu dostávame **deriváciu podľa vonkajšej normály**.

Označme teraz postupne M_1, M_2, M_3 lineárne priestory všetkých funkcií spojitých spolu so všetkými parciálnymi deriváciami prvého a druhého rádu na $\overline{G}$, ktoré spĺňajú okrajové podmienky (16.7) alebo (16.8), resp. (16.9). Všetky tieto lineárne priestory sú v $L_2(G)$ husté. Na nich definujme operátory pre k = 1, 2, 3:

$$(16.11)\quad A_k u = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + cu\,.$$

Symetria.

Ukážeme, že každý z týchto operátorov je na príslušnom lineárnom priestore symetrický. Na tento dôkaz využijeme opäť Greenovu vetu. Jej použitím pre jednotlivé operátory s prihliadnutím na okrajové podmienky dostávame

$$(16.12)\quad (A_1 u, v) = \int_G \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_G cuvdx,$$

$$(16.13)\quad (A_2 u, v) = \int_G \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_G cuvdx,$$

$$(16.14)\quad (A_3 u, v) = \int_G \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_G cuvdx + \int_\Gamma \sigma uvds.$$

Z vlastnosti koeficientov $a_{ij} = a_{ji}$ hneď dostávame vlastnosť symetrie.

Pozitívna definitnosť.

1. Dirichletova okrajová podmienka

Zo vzťahu (16.12) hneď máme:

$$(16.15)\quad (A_1 u, u) = \int_G \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \int_G cu^2 dx.$$

Využijúc podmienky (16.5) a (16.6) dostávame:

$(A_1 u, u) \geq p \sum_{i=1}^{n} \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \geq \frac{p}{c_1} \|u\|^2$, kde sme v poslednej nerovnosti využili Friedrichsovu nerovnosť (pre nulovú funkciu na hranici). Z tohto vzťahu hneď dostávame po uvážení okrajových podmienok pozitívnosť operátora A_1 ako aj jeho pozitívnu definitnosť.

Zovšeobecnené riešenie u_0, problému $A_1 u = f$, minimalizuje kvadratický funkcionál

$$(16.16)\quad F_1 u = \int_G \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx + \int_G cu^2 dx - 2\int_G fudx\,.$$

2. Newtonova okrajová podmienka

Zo vzťahu (16.14) hneď máme:

$$(16.17)\quad (A_3 u, u) = \int_G \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \int_G cu^2 dx + \int_\Gamma \sigma u^2 ds.$$

Podobne ako pre Dirichletovu podmienku odhadneme

$$(A_3u,u) \geq p\sum_{i=1}^{n}\int_G\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx + \sigma_0\int_\Gamma u^2 ds \geq C^2\|u\|^2, \quad \text{kde} \quad C^2 = \min\left\{\frac{p}{c_1}, \frac{\sigma_0}{c_2}\right\}.$$

Zovšeobecnené riešenie u_0, problému $A_2u = f$, minimalizuje kvadratický funkcionál

$$(16.18) \quad F_3u = \int_G\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}dx + \int_G cu^2dx + \int_\Gamma \sigma u^2 ds - 2\int_G fudx.$$

3. Neumannova okrajová podmienka

Zo vzťahu (16.13) hneď máme:

$$(16.19) \quad (A_2u,u) = \int_G\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx + \int_G cu^2dx.$$

Nech navyše platí

(16.20) $c(x) \geq c_0 > 0$ v G. Potom

$$(A_2u,u) \geq p\sum_{i=1}^{n}\int_G\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx + c_0\int_G u^2 dx \geq c_0\|u\|^2,$$

teda operátor A_2 je na M_2 **pozitívne definitný.**
Zovšeobecnené riešenie u_0, problému $A_3u = f$, minimalizuje kvadratický funkcionál

$$(16.21) \quad F_3u = \int_G\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}dx + \int_G cu^2dx - 2\int_G fudx.$$

Ak platí $c(x) \equiv 0$ v $\overline{G}$, operátor A_2 **nie je na M_2 pozitívny**.

Podobne ako pre obyčajné diferenciálne rovnice predpokladajme, že $u \in M_2$ je riešením problému

$$(16.22) \quad A_2u = -\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = f, \quad v \quad G, \quad Nu = 0 \quad \text{na} \quad \Gamma.$$

Zintegrovaním tejto rovnice na oblasti G dostávame

$$(16.23) \quad \int_G f(x)dx = 0.$$

Analogicky ako pre prípad Neumanových podmienok pri ODR, uvažujme priestor $\widetilde{L}_2(G)$ všetkých funkcií z $L_2(G)$, pre ktoré platí vzťah (16.23). V tomto priestore uvažujme lineárny priestor $\widetilde{M}_2$ tých funkcií z LP M_2, ktoré spĺňajú podmienku (16.23). Tento LP je hustý v $\widetilde{L}_2(G)$. Na ňom uvažujme operátor

$$(16.24) \quad \widetilde{A}_2u = -\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right), \quad u \in \widetilde{M}_2.$$

Pre tento operátor na $\widetilde{M}_2$ platí

$$(16.25) \quad (\widetilde{A}_2u,v) = \int_G\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx,$$

odkiaľ vzhľadom na vlastnosti koeficientov hneď dostávame že operátor $\widetilde{A}_2$ je symetrický.

Ďalej platí:

$$(16.26)\quad (\widetilde{A}_2\, u,u)=\int_G \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx \ge p\int_G \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx \ge C^2\int_G u^2(x)dx,$$

$$p>0,\ \ C^2=\frac{p}{c_3},$$

kde sme v poslednej nerovnosti použili Poincarého nerovnosť. Z tohto vzťahu hneď máme pozitívnu definitnosť operátora $\widetilde{A}_2$.

Poznámka 16.1:
Zovšeobecnené riešenie u_0 teda existuje práve vtedy, keď pravá strana patrí do $\widetilde{L}_2(G)$, teda spĺňa podmienku (16.23). Funkcie z priestoru $H_{\widetilde{A}_2}$ spĺňajú podmienku (16.23), ale vo všeobecnosti nespĺňajú okrajové podmienky Nu = 0.

Príslušný funkcionál má tvar

$$(16.27)\quad \widetilde{F}_2 u=\int_G \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}dx-2\int_G fu dx.$$

Poznámka 16.2:
Ak je $u_0 \in D_{\widetilde{A}_2}$ zovšeobecneným riešením problému (16.22), potom aj u_0+k, kde k je ľubovoľná konštanta je riešením tohto problému. Ak u_0 nepatrí do definičného oboru operátora, potom riešenie u_0+k, je riešenie v určitom zovšeobecnenom zmysle.

4. Zmiešané okrajové podmienky

Sú podmienky, kde hranica oblasti je rozdelená na niekoľko častí a na každej časti hranice je daný iný typ okrajovej podmienky.
Napríklad: Nech $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$, na hranici Γ_1 je daná Dirichletova a na hranici Γ_2 Neumannova podmienka. Pri tomto prípade ale budeme pre dôkaz pozitívnej definitnosti potrebovať trošku modifikovanú Friedrichsovu nerovnosť, takže sa tejto úlohe budeme venovať podrobne neskôr.

5. Nehomogénne okrajové podmienky

Analogicky, ako pre obyčajné diferenciálne rovnice aj vo viacdimenzionálnom prípade môžu byť okrajové podmienky nehomogénne:

Dirichletove:

$$(16.28)\quad u=g(S)\ \ na\ \ \Gamma,$$

Neumannove:

$$(16.29)\quad Nu=h(S)\ \ na\ \ \Gamma,$$

Newtonove:

$$(16.30)\quad \mathrm{Nu}+\sigma(S)\mathrm{u}=k(S)\ \ \text{na}\ \ \Gamma,\ \ \sigma(S)\ge\sigma_0>0.$$

Podobne ako v kapitole 15. aj tu sa minimalizačné funkcionály zmenia a budú mať tvar:
Pre Dirichletove podmienky

$$Fu = \int_G \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx + \int_G cu^2 dx - 2\int_G fudx.$$

Pre Neumannove podmienky

$$Fu = \int_G \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx + \int_G cu^2 dx - 2\int_G fudx - 2\int_\Gamma h\,u\,dS.$$

Pre Newtonove podmienky

$$Fu = \int_G \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx + \int_G cu^2 dx + \int_\Gamma \sigma u^2 ds - 2\int_G fudx - 2\int_\Gamma kudS.$$

Poznámka 16.1.:
Pre Neumannove podmienky v prípade, že je funkcia c nulová opäť postupujeme ako pri homogénnych okrajových podmienkach, len s tým rozdielom, že podmienka (16.23) bude mať tvar:

$$\int_G f(x)\,dx + \int_\Gamma h(S)\,dS = 0.$$

Cvičenia:

15.1. Označme M_1 lineárny priestor všetkých spojitých funkcií so spojitými deriváciami až do druhého rádu na intervale <a, b>, ktoré navyše spĺňajú okrajové podmienky (15.4).

Označme A_1 operátor definovaný na M_1 takto: $A_1 u = -(pu')' + ru, \;\; u \in M_1$.

Ukážte, že daný operátor je lineárny.

15.2. Uvažujme úlohu

$$-(pu')' = f, \;\; u'(a) = 0, \;\; u'(b) = 0.$$

Označme M_2 lineárny priestor všetkých spojitých funkcií so spojitými deriváciami až do druhého rádu na intervale <a, b>, ktoré navyše spĺňajú uvedené okrajové podmienky. Ukážte, že na LP M_2 nie je operátor A_2 ani pozitívny.

15.3. Uvažujme úlohu

$$-(x^2u')' + xu = (x-1), \;\; u(2) = 0, \;\; u(3) = 0.$$

Definujte operátor úlohy a jeho definičný obor.
Pomocou viet, dokázaných v kapitole 15. zistite, či operátor je pozitívne definitný a zostrojte k nemu zodpovedajúci kvadratický funkcionál.

15.4. Uvažujme úlohu

$$-(xu')' + x^2u = (x-2)x(x-1), \;\; u'(1) = 0, \;\; u'(2) = 0.$$

Definujte operátor úlohy a jeho definičný obor.
Pomocou viet, dokázaných v kapitole 15. zistite, či operátor je pozitívne definitný a zostrojte k nemu zodpovedajúci kvadratický funkcionál.

15.5. Uvažujme úlohu

$$-((x+1)^2u')' + xu = x, \;\; u(0) = 1, \;\; u(3) = 3.$$

Pomocou metódy superpozície preformulujte daný nehomogénny problém a pre modifikovanú úlohu definujte príslušný operátor a jeho definičný obor.
Pomocou viet, dokázaných v kapitole 15. zistite, či operátor je pozitívne definitný a zostrojte k nemu zodpovedajúci kvadratický funkcionál.

15.6. Uvažujme úlohu

$$-(x^4u')' + x^2u = (x-2)x, \;\; u'(1) - u(1) = 0, \;\; u'(2) + 2u(2) = 0.$$

Definujte operátor úlohy a jeho definičný obor.
Pomocou viet, dokázaných v kapitole 15. zistite, či operátor je pozitívne definitný a zostrojte k nemu zodpovedajúci kvadratický funkcionál.

16.1. Uvažujme úlohu

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (xy+1)\,\mathrm{u} = xy, \qquad (x,y) \in G; \qquad G =< 0,2 > \times < 1,3 >,$$

$$u(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in \partial G.$$

Definujte operátor úlohy a jeho definičný obor.
Pomocou viet, dokázaných v kapitole 16., zistite, či operátor je pozitívne definitný a zostrojte k nemu zodpovedajúci kvadratický funkcionál.

16.2. Uvažujme úlohu

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + xy\,\mathrm{u} = x - y, \qquad (x,y) \in G; \qquad G =< 1,2 > \times < 1,2 >,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \qquad (x,y) \in \partial G,$$

kde vektor ν je jednotkový vektor vonkajšej normály ku hranici oblasti.
Definujte operátor úlohy a jeho definičný obor.
Pomocou viet, dokázaných v kapitole 16. zistite, či operátor je pozitívne definitný a zostrojte k nemu zodpovedajúci kvadratický funkcionál.

17. Priestor $L_2(\Gamma)$

V tejto časti nadviažeme na definíciu oblasti s Lipschitzovskou hranicou, ktorú sme definovali v časti 6 a ukážeme si ďalšie užitočné vlastnosti takejto oblasti ako aj možnosť zavedenia Hilbertovho priestoru na hranici tejto oblasti.
Nech je teda G vo všeobecnosti nejaká n- dimenzionálna oblasť s Lipschitzovskou hranicou a túto hranicu budeme označovať Γ.

Tvrdenie 17.1:
Lipschitzovská hranica má skoro všade vonkajšiu normálu. Súradnice jednotkového vektora vonkajšej normály $\nu_1(S), \nu_2(S), ..., \nu_{N-1}(S)$, sú ohraničené merateľné funkcie. Funkcie a_r z definície sú Lipschitzovsky spojité, to je majú skoro všade ohraničené prvé parciálne derivácie. Tento fakt umožňuje zaviesť plošný integrál na takejto hranici.

Náčrt dôkazu:
Uvažujme r-tý súradnicový systém súradníc a príslušnú N-1 rozmernú kocku na ktorej je funkciou a_r charakterizovaná časť hranice oblasti, označme ju $\Gamma^{(r)}$. Plošný element dS nad elementom $dx_1^{(r)} dx_2^{(r)} ... dx_{N-1}^{(r)}$ je

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial a_r}{\partial x_1^{(r)}}\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial a_r}{\partial x_{N-1}^{(r)}}\right)^2} dx_1^{(r)} dx_2^{(r)} ... dx_{N-1}^{(r)}.$$

Ak je na $\Gamma^{(r)}$ daná funkcia $u(S) = u(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, ... x_{N-1}^{(r)}, a_r(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, ... x_{N-1}^{(r)}))$ merateľná na $K^{(r)}$, definujme

$$\int_{\Gamma^{(r)}} u(s) dS =$$

$$\int_{K^{(r)}} u((x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, ... x_{N-1}^{(r)}, a_r(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, ... x_{N-1}^{(r)})) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial a_r}{\partial x_1^{(r)}}\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial a_r}{\partial x_{N-1}^{(r)}}\right)^2} dx_1^{(r)} dx_2^{(r)} ... dx_{N-1}^{(r)}.$$

Integrál na pravej strane berieme v Lebesgueovom zmysle. Pre spojité funkcie je táto definícia zhodná s bežnou definíciou plošného integrálu (v prípade, že ide o trojdimenzionálny prípad je hranica oblasti G naozaj plocha, a teda je to plošný integrál, ako ho poznáme z matematickej analýzy, vo všeobecnom prípade ide o N-1 dimenzionálnu nadplochu) .
Integrál $\int_{\Gamma} u(S) ds$ nedefinujeme ako súčet integrálov $\int_{\Gamma^{(r)}} u(S) ds$ cez všetky r. Definícia sa urobí pomocou tzv. rozkladu jednotky: Označíme V_r β –okolie z definície Lipschitzovskej hranice. Všetky množiny V_r pre r = 1, 2, .., m tvoria systém otvorených množín pokrývajúci hranicu Γ. Dá sa ukázať, že možno nájsť také funkcie $\varphi_r(x)$ s kompaktným nosičom vo V_r, že platí: $\sum_{r=1}^{m} \varphi_r(x) = 1, \forall x \in \Gamma$. Označme $u_r(S) = u(S)\varphi_r(x)$ a definujme $\int_{\Gamma} u(S) dS = \sum_{r=1}^{m} \int_{\Gamma^{(r)}} u_r(S) dS.$

Takýmto spôsobom môžeme aj definovať mieru ľubovoľnej hranice ak v integrále položíme u(S) =1.

Definícia 17.1:
Ak navyše existuje konečný integrál $\int_\Gamma u^2(S)ds$, hovoríme, že **funkcia je integrovateľná s druhou mocninou na Γ.**

Potom obvyklým spôsobom definujeme integrál súčinu funkcií integrovateľných na hranici s druhou mocninou:

(17.14) $$(u,v)_\Gamma = \int_\Gamma u(S)v(S)dS,$$

normu

(17.15) $$\|u\|_\Gamma = \left(\int_\Gamma u^2(S)dS\right)^{1/2}$$

a metriku z nej odvodenú.

(17.16) $$\rho_\Gamma(u,v) = \left(\int_\Gamma (u(S)-v(S))^2 dS\right)^{1/2}.$$

Dá sa ukázať, že takýto funkcionálny priestor **je Hilbertov priestor a označíme ho** $L_2(\Gamma)$.

18. Sobolevove priestory $W_2^k(G)$

Teraz sa opäť trošku vrátime do teórie funkcionálnych priestorov a vybudujeme si ďalšie veľmi potrebné priestory. Prečo? Vybudovali sme si pekný Hilbertov priestor $L_2(G)$*, ale keď sme začali pátrať po existencii riešenia úloh, ktoré nás zaujímali, museli sme si vybudovať nový priestor, označili sme ho vo všeobecnosti* H_A*, pretože sa dá vybudovať pre ľubovoľný Hilbertov priestor H, ale zase úzko súvisí s operátorom A. Už tu sme ale videli, že prvky tohto priestoru musia mať dané derivácie v nejakom rozumnom zmysle, pretože tieto sa vyskytovali v definícii skalárneho súčinu nového priestoru. Navyše, aplikovaním Greenovej vety sme videli, že ak bol operátor druhého rádu, tak boli pre skalárny súčin potrebné derivácie len prvého rádu. Pri operátore štvrtého rádu sme potrebovali v skalárnom súčine derivácie druhého rádu. Teraz tento fakt zovšeobecníme. Celá teórie dostane ucelený charakter.*

Uvažujme opäť oblasť G s Lipschitzovskou hranicou Γ. Označme $C^\infty(\overline{G})$ lineárny priestor spojitých funkcií so spojitými deriváciami všetkých rádov v uzavretej oblasti $\overline{G}$. Ďalej označme $C_0^\infty(\overline{G})$ LP všetkých funkcií z $C^\infty(\overline{G})$ s kompaktným nosičom v G.
Navyše v kapitole 6. v časti sme si hovorili (nedokázali sme si tento fakt) o tom, že lineárny priestor $C_0^\infty(G)$ je hustý v $L_2(G)$. Tento priestor bude hrať aj v ďalšom dôležitú úlohu.

Definícia 18.1.:
Nech k je celé nezáporné číslo. Symbolom

(18.1) $(u,v)_{W_2^k(G)},\quad u,v\in C^\infty(\overline{G})$

budeme rozumieť súčet skalárnych súčinov (v $L_2(G)$) funkcií u a v a ich derivácií podľa tých istých premenných až do rádu k vrátane.

Príklad 18.1.:
N = 1:

$$(18.2)\quad (u,v)_{W_2^1(a,b)} = (u,v)_{L_2(a,b)} + (u',v')_{L_2(a,b)} = \int_a^b uv\,dx + \int_a^b u'v'\,dx.$$

$$(18.3)\quad (u,v)_{W_2^2(a,b)} = (u,v)_{L_2(a,b)} + (u',v')_{L_2(a,b)} + (u'',v'')_{L_2(a,b)} =$$

$$\int_a^b uv\,dx + \int_a^b u'v'\,dx + \int_a^b u''v''\,dx.$$

N = 2: vynecháme označenie oblasti G

$$(18.4)\quad (u,v)_{W_2^1} = (u,v)_{L_2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)_{L_2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2},\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)_{L_2} =$$

$$\int_G uv\,dx + \int_G \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1}dx + \int_G \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}dx = \int_G uv\,dx + \int_G \nabla u \nabla v\,dx.$$

Všimnime si, že ten posledný zápis s použitím nabla operátora je veľmi užitočný, pretože značne sprehľadňuje situáciu, najmä pri viacrozmerných úlohách.

Všeobecný N-rozmerný prípad.
Označme i vektor tzv. multiindex : $i=(i_1,i_2,...,i_N)$, kde zložky sú celé nezáporné čísla (teda niektoré môžu byť aj nulové).
Označíme:

$$D^i u=\frac{\partial^{i_1+i_2+...+i_N}u}{\partial x_1^{i_1}....\partial x_N^{i_N}}$$ alebo ak označíme

$|i|=i_1+i_2+...+i_N$, potom

$$D^i u=\frac{\partial^{|i|}u}{\partial x_1^{i_1}....\partial x_N^{i_N}}.$$

Príklad 18.2.:
V tomto prípade definujeme

(18.5) $$(u,v)_{W_2^k}=\sum_{|i|\le k}\int_G D^i u D^i v dx,\quad u,v\in C^\infty(\overline{G}).$$

Sumácia cez $|i|\le k$ znamená, že treba vyčerpať všetky navzájom rôzne vektory $i=(i_1,i_2,...,i_N)$, pre ktoré platí $|i|=i_1+i_2+...+i_N\le k$.

Príklad 18.3.:
Špeciálne

$$(u,v)_{W_2^1}=\sum_{|i|\le 1}\int_G D^i u D^i v dx=\int_G uvdx+\int_G \nabla u\nabla vdx,\quad u,v\in C^\infty(\overline{G}).$$

Tvrdenie 18.1:
Vzťahom (18.5) je na LP $C^\infty(\overline{G})$ definovaný skalárny súčin.
Dôkaz: Ponechávame ako cvičenie.
Obvyklým spôsobom potom definujeme normu a metriku odvodenú od tohto skalárneho súčinu.

Definícia 18.2.:
Vzťah

(18.6) $\|u\|_{W_2^k}=\sqrt{(u,u)_{W_2^k}},\quad u\in C^\infty(\overline{G})$ definuje normu

(18.7) $\rho(u,v)_{W_2^k}=\|u-v\|_{W_2^k},\quad u,v\in C^\infty(\overline{G})$ definuje metriku.

Takže LP $C^\infty(\overline{G})$ sa stáva metrickým priestorom, označme ho $S_2^k(G)$, stručne S_2^k. Tento priestor je unitárny so skalárnym súčinom (18.5), normou (18.6) a metrikou (18.7).

Poznámka 18.1:
Druhá mocnina normy funkcie u z $C^{\infty}(\overline{G})$ v priestore $S_2^k(G)$ je teda súčet druhých mocnín noriem funkcie u a všetkých jej parciálnych derivácií do k-teho rádu včítane v priestore $L_2(G)$. Odtiaľ ihneď dostávame

$$\rho^2(u,v)_{W_2^k} = \|u-v\|^2_{W_2^k} = \sum_{|i|\le k}\rho^2(D^i u, D^i v)_{L_2}.$$

Konvergencia v priestore $S_2^k(G)$ teda znamená:

(18.8) $\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n - u\|^2_{W_2^k} = \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{|i|\le k}\|D^i u_n - D^i u\|^2_{L_2} = 0$, odkiaľ plynie:

Tvrdenie 18.2.:
Postupnosť $\{u_n\}$ konverguje v priestore $S_2^k(G)$ k prvku u práve vtedy, keď konverguje postupnosť $\{u_n\}$ a postupnosti príslušných derivácií $\{D^i u_n\}$, $|i| \le k$, k funkcii u a k jej deriváciám $D^i u$ v priestore $L_2(G)$.

Tvrdenie 18.3.:
Postupnosť $\{u_n\}$ je cauchyovská v priestore $S_2^k(G)$ práve vtedy, keď postupnosť $\{u_n\}$ a postupnosti príslušných derivácií $\{D^i u_n\}$, $|i| \le k$, sú cauchyovské v priestore $L_2(G)$.
Obe tvrdenia uvádzame bez dôkazu, pretože plynú priamo z definície.

Poznámka 18.2:
Pre k = 0 dostávame skalárny súčin, normu a metriku priestoru $L_2(G)$.

Teraz si uvedieme jeden zaujímavý poznatok, ktorý bude hrať dôležitú úlohu.

Poznámka 18.3:
Nech u je z $S_2^k(G)$ a nech φ je **funkcia s kompaktným nosičom** v G. Podľa Greenovej vety pre každé j, $1 \le j \le N$ platí

(18.9) $$\int_G \frac{\partial u}{\partial x_j}\varphi dx = -\int_G u\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}dx$$

Všeobecne dostávame

(18.10) $$\int_G D^i u\varphi dx = (-1)^{|i|}\int_G u D^i\varphi dx, \quad \varphi \in C_0^{\infty}(G), \quad u \in S_2^k(G).$$

Preberme teraz otázku úplnosti priestoru $S_2^k(G)$. Tento priestor nemusí byť vo všeobecnosti úplný priestor.
Pre prípad k = 0 úplný priestor, ktorý obsahuje $S_2^k(G)$ je práve priestor $L_2(G)$.

V ňom navyše je LP $C^{\infty}(\overline{G})$ hustý. V tomto prípade sa skalárny súčin (18.5) rozšíri prirodzeným spôsobom z priestoru $C^{\infty}(\overline{G})$ na priestor $L_2(G)$, ktorý je úplný.
V prípade k>0 sa ale skalárny súčin (18.5) nedá prirodzeným spôsobom rozšíriť na všetky funkcie z $L_2(G)$, pretože nie všetky funkcie z tohto priestoru majú (aspoň v nejakom rozumnom zmysle) požadované derivácie. Avšak aj v tomto prípade sa dá vytvoriť úplný priestor.
Vytvorenie úplného priestoru je analogické budovaniu priestoru H_A.
Uvažujme ľubovoľnú postupnosť $\{u_n\}$ cauchyovskú v $S_2^k(G)$. Sú možné tieto dva prípady:
a) postupnosť $\{u_n\}$ je v priestore $S_2^k(G)$ konvergentná, teda konverguje aj spolu s postupnosťami jej príslušných derivácií v priestore $L_2(G)$.
b) postupnosť $\{u_n\}$ nie je v priestore $S_2^k(G)$ konvergentná. Ale keďže je cauchyovská, je aj každá z postupností $\{D^i u_n\}$, $|i| \le k$, cauchyovská v $L_2(G)$. Toto je ale úplný priestor, a teda každá z týchto postupností má v ňom určitú limitu, označme ju $v^{(i)}$:

(18.11) $\lim\limits_{n\to\infty} D^i u_n = v^{(i)}$ v $L_2(G)$.

Pre $|i| = 0$, označíme príslušnú limitu u:

(18.12) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ v $L_2(G)$.

O funkciách $v^{(i)}$, $|i| \ge 1$ nemôžeme teraz tvrdiť, že sú deriváciami limitnej funkcie u, lebo o nej vieme zatiaľ len to, že patrí do $L_2(G)$.
Tieto funkcie nazveme **zovšeobecnenými deriváciami funkcie u.** Keďže $\{u_n\}$ je v $S_2^k(G)$, z Greenovej vety pre každé i, $1 \le |i| \le k$ a pre každé $\varphi \in C_0^{\infty}(G)$ platí

(18.13) $\int\limits_G D^i u_n \varphi dx = (-1)^{|i|} \int\limits_G u_n D^i \varphi dx$.

Ak teraz v tomto vzťahu prejdeme k limite, dostávame:

(18.14) $\int\limits_G v^{(i)} \varphi dx = (-1)^{|i|} \int\limits_G u D^i \varphi dx, \quad 1 \le |i| \le k, \quad \varphi \in C_0^{\infty}(G).$

Takto teda definujeme zovšeobecnené derivácie funkcie u. Zostáva vyšetriť otázku, či môže nastať prípad, kedy dve cauchyovské postupnosti $\{u_n\}$ a $\{\tilde{u}_n\}$, ktoré majú tú istú limitu (18.12) majú rôzne limity (18.11)? To by totiž znamenalo, že tá istá funkcia by mala rôzne zovšeobecnené derivácie.
Ukážeme sporom:
Nech máme cauchyovskú postupnosť $\{u_n\}$ v priestore $S_2^k(G)$, pre ktorú platí (18.11) a (18.12) a postupnosť $\{\tilde{u}_n\}$ v priestore $S_2^k(G)$, pre ktorú platí (18.12) a pre derivácie platí

(18.15) $\lim\limits_{n\to\infty} D^i \tilde{u}_n = \tilde{v}^{(i)}$ v $L_2(G)$, $1 \le |i| \le k$.

Podobne ako v predchádzajúcej úvahe aj pre tieto derivácie máme:

(18.16) $\int_G \tilde{v}^{(i)} \varphi dx = (-1)^{|i|} \int_G u D^i \varphi dx, \quad 1 \le |i| \le k, \quad \varphi \in C_0^\infty(G).$

Teraz pre pevné i, $1 \le |i| \le k$, odčítame (18.16) od (18.14) a máme:

(18.17) $\int_G (v^{(i)} - \tilde{v}^{(i)}) \varphi dx = 0, \quad \varphi \in C_0^\infty(G).$

Tento vzťah ale platí pre každú funkciu $\varphi \in C_0^\infty(G)$ a LP $C_0^\infty(G)$ je hustý v priestore $L_2(G)$, z toho okamžite dostávame:

(18.18) $\tilde{v}^{(i)} = v^{(i)}$, pre každé i, $1 \le |i| \le k$.

Zovšeobecnené derivácie sú teda určené jednoznačne. Budeme pre ne používať ten istý symbol ako pri klasických deriváciách to jest $D^i u$. Z definície ihneď vyplýva, že $D^i u \in L_2(G)$.

Veľmi jednoduchou úvahou sa dá presvedčiť, že ak funkcia u je dostatočne hladká pojem zovšeobecnenej a klasickej derivácie splývajú.

Ak pridáme k prvkom priestoru $S_2^k(G)$ všetky limitné funkcie z (18.12) dostaneme určitý lineárny priestor, ktorý označíme E_k a na ňom definujeme

(18.19) $(u, v)_{W_2^k} = \sum_{|i| \le k} \int_G D^i u D^i v dx, \quad u, v \in E_k$.

Tento je rozšírením skalárneho súčinu definovaného vzťahom (18.5). Tento príslušný unitárny priestor je úplný, teda Hilbertov priestor.

Definícia 18.3:

Hilbertov priestor , ktorého prvky tvoria prvky LP E_k a v ktorom je skalárny súčin definovaný vzťahom (18.19), nazveme priestorom $W_2^k(G)$, stručne W_2^k. Z jeho konštrukcie plynie, že

- LP $C^\infty(\overline{G})$ je v $W_2^k(G)$ **hustý**,
- norma a metrika sa definuje vzťahmi (18.6), (18.7),
- platí vzťah (18.8),
- dá sa ukázať, že priestor $W_2^k(G)$ je **separabilný.** Príkladom spočítateľnej hustej množiny v $W_2^k(G)$ je množina všetkých polynómov v N premenných s racionálnymi koeficientami.

Poznámka 18.4:

Konštrukciu Hilbertovho priestoru $W_2^k(G)$ možno urobiť aj inak. Najskôr sa definujú zovšeobecnené derivácie a potom sa zavedie skalárny súčin, na základe ktorého sa konštruuje unitárny priestor a ukáže sa, že je to priestor úplný. Pre oblasti s Lipschitzovskou hranicou sa ukáže, že obe tieto konštrukcie vedú k tomu istému funkcionálnemu priestoru.

Poznámka 18.5:

Pre k=0 platí $W_2^0(G) = L_2(G)$. Pre k>0 tvoria prvky priestoru $W_2^k(G)$ tie prvky z $L_2(G)$, ktoré majú zovšeobecnené derivácie v zmysle predchádzajúcej definície, do k-teho rádu včítane.

Tvrdenie 18.4:
Ak prvok $u \in W_2^k(G)$, potom platí

1. $u \in W_2^n(G), \quad 0 \leq n \leq k;$
2. ich zovšeobecnené derivácie $D^i u, |i| < k$, patria do priestoru $W_2^{k-|i|}(G)$ a platí $D^i(D^j u) = D^{i+j}u$, kde i+j je súčet týchto vektorov.

Poznámka 18.6:
Ak sme v jednorozmernom prípade N = 1, potom funkcia $u \in W_2^1(a, b)$ je funkcia absolútne spojitá. Skoro všade v (a, b) existuje $u'(x)$, ktorá je skoro všade rovná zovšeobecnenej derivácii. Funkcia, ktorá má v nejakom bode skok, teda nemôže byť z priestoru $W_2^1(a, b)$.

19. Stopy funkcií z priestoru $W_2^k(G)$ Priestor $\dot{W}_2^k(G)$ Zovšeobecnená Friedrichsova a Poincarého nerovnosť

Pre každú funkciu spojitú v $\overline{G} = G \cup \Gamma$ a tým skôr pre funkcie z $C^\infty(\overline{G})$ sú jednoznačne dané hodnoty tejto funkcie na hranici Γ oblasti G. Funkciu u(S) , $S \in \Gamma$ budeme nazývať **stopa funkcie** u z $C^\infty(\overline{G})$ na Γ. Táto je na hranici Γ spojitá a teda integrovateľná s druhou mocninou, a preto platí

(19.1) $u(x) \in C^\infty(\overline{G}) \Rightarrow u(S) \in L_2(\Gamma).$

Rozšírenie pojmu stopy funkcie aj na funkcie, ktoré nie sú z LP $C^\infty(\overline{G})$ nie je úplne jednoduchá záležitosť, keď si uvedomíme, že pre funkcie z priestoru $L_2(G)$, je hranica Γ množina miery nula, a teda žiadne bodové rozšírenie nie je možné. Toto rozšírenie umožňuje nasledujúca veta:

Veta 19.1:
Nech G je oblasť s Lipschitzovskou hranicou. Potom existuje, a to práve jeden, ohraničený lineárny operátor T, ktorý zobrazuje priestor $W_2^1(G)$ do priestoru $L_2(\Gamma)$ tak, že pre u(x) z $C^\infty(\overline{G})$ je Tu(x) = u(S).
Na základe tejto vety je každej funkcii z $W_2^1(G)$ priradená určitá funkcia z $L_2(\Gamma)$, **stopa** na hranici Γ.
Toto zobrazenie má rozumné vlastnosti:

- funkciám z $C^\infty(\overline{G})$ priraďuje ich stopu na Γ.
- T je spojitý a teda dvom „blízkym“ funkciám vo $W_2^1(G)$ priradí dve „blízke“ funkcie v $L_2(\Gamma)$.
- z hustoty LP $C^\infty(\overline{G})$ vo $W_2^1(G)$ vyplýva, že stopu funkcie nepatriacej do $C^\infty(\overline{G})$ možno pokladať za limitu v priestore $L_2(\Gamma)$ postupnosti stôp $u_n(S)$ funkcií $u_n(x)$ z $C^\infty(\overline{G})$ a konvergujúcich vo $W_2^1(G)$ k uvažovanej funkcii u z $W_2^1(G)$.
- ak je u spojitá v $\overline{G}$ stopa je daná jej hodnotami na hranici.

Poznámka 19.1:
Ak je funkcia u z $W_2^2(G)$, potom aj táto funkcia aj všetky jej parciálne derivácie patria do $W_2^1(G)$. Z vety 19.1 potom dostávame, že nielen samotná funkcia u, ale aj všetky jej parciálne derivácie majú stopy na hranici Γ.
Všeobecne: ak je funkcia $u \in W_2^k(G)$, potom všetky jej derivácie $D^i u$ pre $|i| \le k-1$ sú z $W_2^1(G)$ V tomto zmysle každej tejto derivácii $D^i u(x)$ zodpovedá stopa funkcie $D^i u(S)$ z $L_2(\Gamma)$. Túto funkciu potom nazývame **stopa funkcie $D^i u(x)$.**

Poznámka 19.2:
Pretože hranica Γ je Lipschitzovská, normála k nej existuje skoro všade a definícia stôp funkcie umožňuje definovať pojem derivácie funkcie $u \in W_2^k(G)$ pre $k \geq 2$ podľa normály:

$$(19.2.)\quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_j}(S)\nu_j(S), \quad u \in W_2^k(G), \quad k \geq 2\,.$$

Poznámka 19.3:
Dá sa veta 19.1. obrátiť? Je každá funkcia $v(S) \in L_2(\Gamma)$ stopou nejakej funkcie $u \in W_2^1(G)$? Toto tvrdenie neplatí.
Platí ale, že stopy funkcií, ktoré patria do priestoru $W_2^1(G)$ sú v $L_2(\Gamma)$ husté.

Veta 19.2: (Friedrichsova nerovnosť)
Nech G je oblasť s Lipschitzovskou hranicou. Potom existuje konštanta $k_1>0$ závislá len od danej oblasti a taká, že pre každú funkciu $u \in W_2^1(G)$ platí:

$$(19.3)\quad \|u\|^2_{W_2^1(G)} \leq k_1 \left\{ \sum_{k=1}^{n} \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx + \int_\Gamma u^2(s)\,ds \right\}$$

V prvom integrály sú zovšeobecnené derivácie a v druhom stopa funkcie u.
Táto veta môže mať aj všeobecnejší tvar:

Veta 19.3:
Nech G je oblasť s Lipschitzovskou hranicou Γ a Γ_1 je jej časť majúca kladnú Lebesgueovu mieru, $m\Gamma_1 > 0$. Potom existuje konštanta $k_2>0$ závislá len od danej oblasti a na Γ_1 a taká, že pre každú funkciu $u \in W_2^1(G)$ platí:

$$(19.4)\quad \|u\|^2_{W_2^1(G)} \leq k_2 \left\{ \sum_{k=1}^{n} \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx + \int_{\Gamma_1} u^2(s)\,ds \right\}$$

Veta 19.4.:
Nech G je oblasť s Lipschitzovskou hranicou. Potom existuje konštanta $k_3>0$ závislá len od danej oblasti a taká, že pre každú funkciu $u \in W_2^2(G)$ platí:

$$(19.5)\quad \|u\|^2_{W_2^2(G)} \leq k_3 \left\{ \sum_{|i|=2} \int_G (D^i u)^2\,dx + \int_\Gamma u^2(s)\,ds \right\}$$

Veta 19.5: (Poincarého nerovnosť)
Nech G je oblasť s Lipschitzovskou hranicou. Potom existuje konštanta $k_4>0$ závislá len od danej oblasti a taká, že pre každú funkciu $u \in W_2^k(G)$ platí:

$$(19.6)\quad \|u\|^2_{W_2^k(G)} \leq k_4 \left\{ \sum_{|i|=k} \int_G (D^i u)^2\,dx + \sum_{|i|<k} \left(\int_G D^i u\,dx \right)^2 \right\}.$$

Špeciálne pre k = 1 máme

$$(19.7)\quad \|u\|^2_{W_2^1(G)} \leq k_4 \left\{ \sum_{j=1}^{n} \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 dx + \left(\int_G u\,dx \right)^2 \right\}.$$

Poznámka 19.3:
V predchádzajúcej kapitole sme definovali priestor $S_2^k(G)$, ktorého prvky sú funkcie z LP $C^\infty(\overline{G})$ s príslušným skalárnym súčinom $(u,v)_{W_2^k}$ a ním indukovanou normou a metrikou.
Teraz označme priestor $D_2^k(G)$ priestor s tým istým skalárnym súčinom, ale s prvkami z LP $C_0^\infty(G)$, teda s prvkami s kompaktným nosičom v G. Zúplnením priestoru $S_2^k(G)$ sme vytvorili Hilbertov priestor $W_2^k(G)$. Ak analogicky prevedieme zúplnenie priestoru $D_2^k(G)$, dostaneme opäť Hilbertov priestor, ktorý bude podpriestorom priestoru $W_2^k(G)$. Tento priestor označíme $\dot{W}_2^k(G)$. Funkcie tohto priestoru sa vyznačujú vlastnosťou, že sa „rovnajú nule na hranici Γ vrátane derivácií až do rádu k-1“:

(19.8) $D^i u(S) = 0 \quad \text{na} \quad \Gamma, \quad |i| \le k-1, \quad u \in \dot{W}_2^k(G)$.

Tieto vzťahy chápeme v zmysle stôp funkcie. Platí aj tvrdenie v istom zmysle obrátené, ktoré je sformulované v nasledujúcej vete:

Veta 19.6:
Nech G je oblasť s Lipschitzovskou hranicou Γ. Potom

$$(19.9) \quad \left\{ v; v \in W_2^1(G), v = 0 \quad na \quad \Gamma \quad (v \quad zmysle \quad stop) \right\} = \dot{W}_2^1(G)$$

$$(19.10) \quad \left\{ v; v \in W_2^2(G), D^i v = 0 \quad na \quad \Gamma \quad (v \quad zmysle \quad stop \quad pre \quad |i| \le 1) \right\} = \dot{W}_2^2(G)$$

Poznámka 19.4:
Pre $u \in \dot{W}_2^k(G)$ prejde tvrdenie (19.3) Friedrichsovej nerovnosti do tvaru:

$$(19.11) \quad \|u\|^2_{\dot{W}_2^1(G)} \le k_1 \sum_{k=1}^{n} \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx$$

a analogicky pre vzťah (19.5) máme:

$$(19.12) \quad \|u\|^2_{\dot{W}_2^2(G)} \le k_3 \sum_{|i|=2} \int_G (D^i u)^2 dx$$

20. Eliptické diferenciálne operátory rádu 2k Slabé riešenie eliptických rovníc

V zmysle symboliky z predchádzajúcich kapitol definujeme operátor 2k-teho rádu. Nech sú dané funkcie $a_{ij}(x)$, definované v oblasti G a N-rozmerné vektory **i, j** (multiindexy) s celočíselnými, nezápornými prvkami a platí:

$|i| = i_1 + i_2 + ... + i_N$, $|j| = j_1 + j_2 + ... + j_N$. Potom symbolom

$$\text{(20.1)} \quad A = \sum_{|i|,|j| \le k} (-1)^{|i|} D^i (a_{ij} D^j)$$

je definovaný operátor rádu 2k.
Ak sú v oblasti G funkcie a_{ij} ako aj u dostatočne hladké, môžeme aplikovať operátor A na funkciu u v klasickom zmysle a dostávame:

$$\text{(20.2)} \quad Au = \sum_{|i|,|j| \le k} (-1)^{|i|} D^i (a_{ij} D^j u) = \sum_{|i|,|j| \le k} (-1)^{|i|} \frac{\partial^{|i|}}{\partial x_1^{i_1} ... \partial x_N^{i_N}} (a_{i_1 ... i_N j_1 ... j_N}(x) \frac{\partial^{|j|} u}{\partial x_1^{j_1} ... \partial x_N^{j_N}}).$$

Pre k = 1 dostávame operátor druhého rádu

$$\text{(20.3)} \quad Au = -\sum_{|i|=1,|j|=1} D^i (a_{ij} D^j u) - \sum_{|i|=1,|j|=0} D^i (a_{ij} u) + \sum_{|i|=0,|j|=1} a_{ij} D^j u + a_{00} u.$$

Príklad 20.1:
Pre N = 2, a k = 1 ak platí

$a_{ij} = 1$ pre $i = (1,0), j = (1,0)$ a $i = (0,1), j = (0,1)$

$a_{ij} = 0$ v ostatných prípadoch, dostávame - Laplaceov operátor Δ.
Dá sa dostať aj iným spôsobom.

Príklad 20.2:
Pre N = 2, a k = 2 ak platí

$a_{ij} = 1$ pre $i = (2,0), j = (2,0)$ a $i = (0,2), j = (0,2)$

$a_{ij} = 2$ pre $i = (1,1), j = (1,1)$
$a_{ij} = 0$ v ostatných prípadoch dostávame biharmonický operátor

$$Au = \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} = \Delta^2 u .$$

Dá sa dostať aj iným spôsobom

Definícia 20.1:
Hovoríme, že operátor (20.1) je eliptický v bode
$P(x) = P(x_1, x_2, ..., x_N)$ ak pre každý nenulový vektor $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N)$ platí:

$$\text{(20.4)} \quad \sum_{|i|,|j|=k} a_{ij}(P) \xi_i \xi_j \ne 0, \text{ kde } \xi_i = \xi_1^{i_1} ... \xi_N^{i_N}, \ \xi_j = \xi_1^{j_1} ... \xi_N^{j_N}.$$

Hovoríme, že tento operátor **je rovnomerne eliptický v oblasti G**, ak existuje také číslo c>0, závislé len od danej oblasti a koeficientoch daného operátora a_{ij}, že pre skoro každý bod $P(x_1, x_2, ..., x_N)$ z G a každý nenulový vektor $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N)$ platí:

$$(20.5)\quad \sum_{|i|,|j|=k} a_{ij}(P)\xi_i\xi_j \geq c|\xi|^{2k},\ \text{kde}\ |\xi|^2 = \xi_1^2 + ... + \xi_N^2 .$$

Príklad 20.3:
Operátor $-\Delta$ z príkladu 20.1 je rovnomerne eliptický v každej oblasti G a pre všetky dimenzie N.

Príklad 20.4:
Biharmonický operátor Δ^2 z príkladu 20.2 je rovnomerne eliptický v každej oblasti G a pre všetky dimenzie N.

Príklad 20.5:
Operátor

$$A = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\left(1 + x_1^2\right)\frac{\partial}{\partial x_1}\right] - 3\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

nie je eliptický v žiadnom bode oblasti G.

Teraz budeme definovať pojem slabého riešenia eliptickej rovnice.
Začneme príkladom Poissonovej rovnice.
Klasickým riešením rovnice

$$(20.6)\quad -\Delta u = f$$

rozumieme funkciu $u \in C^2(G)$ pre $f \in C(G)$, takú, ktorá spĺňa Poissonovu rovnicu (20.6) v každom bode oblasti G.
Teraz prenásobíme rovnicu (20.6) ľubovoľnou hladkou funkciou φ s kompaktným nosičom v G a po zintegrovaní cez oblasť G dostávame:

$$(20.7)\quad -\int_G \varphi\Delta u dx = \int_G f\varphi dx.$$

Použijeme Greenovu vetu ako v predchádzajúcich kapitolách, ale pre funkcie z iných priestorov:

$$(20.8)\quad \int_G b\frac{\partial c}{\partial x_i}dx = \int_\Gamma bc\nu_i dS - \int_G \frac{\partial b}{\partial x_i}cdx,\ \ b,c \in W_2^1(G).$$

Platnosť tohto vzťahu sa ľahko overí limitným prechodom so základnými znalosťami konštrukcie priestorov $W_2^k(G)$. V tomto prípade sa teda parciálne derivácie vystupujúce vo vzťahu (20.8) chápu ako zovšeobecnené derivácie a hodnoty funkcií b a c na hranici sú príslušné stopy týchto funkcií.
Využijúc vzťah (20.8) pre všetky parciálne derivácie vo vzťahu (20.7), dostaneme

$$(20.9)\quad \sum_{i=1}^{N}\int_G \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx = \int_G \varphi f dx,\ \ \forall\varphi \in C_0^\infty(G).$$

Hovoríme, že pre funkciu u(x) je **splnená integrálna identita (20.9).**

Ak ale pravá strana rovnice f nie je z priestoru $C(G)$, nemá rovnica klasické riešenie. Preto sa budeme zaoberať otázkou, ako zovšeobecniť riešenie aj pre tieto prípady, napríklad pre pravú stranu $f \in L_2(G)$. Ak pre pravú stranu platí táto podmienka, pravá strana integrálnej rovnice (20.9) má zmysel. Ľavá strana tejto identity má zmysel napríklad pre funkcie $u \in W_2^1(G)$, kde príslušné derivácie sú definované v zovšeobecnenom zmysle.

Definícia 20.2:
Nech $u \in W_2^1(G)$, $f \in L_2(G)$. Ak pre funkciu u je splnená podmienka (20.9), hovoríme, že táto funkcia je **slabým riešením rovnice (20.6).**
Tento pojem je definovaný rozumne, pretože navyše platí, že ak $u \in C^2(G)$ a $f \in C(G)$, potom jednoducho obráteným postupom z integrálnej identity (20.9) dostaneme

$$(20.10) \quad \int_G (\Delta u + f)\varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(G).$$

Pretože priestor $C_0^\infty(G)$ je hustý v priestore $W_2^1(G)$ dostávame odtiaľ

$$(20.11) \quad \Delta u + f = 0 \quad v \quad L_2(G).$$

Ak ale je $u \in C^2(G)$ a $f \in C(G)$, potom funkcia $\Delta u + f$ je spojitá v G, a teda platí

$$-\Delta u = f \quad v \quad G.$$

Ak využijeme príklad 20.1, môžeme Poissonovu rovnicu zapísať v tvare:

$$(20.12) \quad \sum_{|i|,|j|\le 1} (-1)^{|i|} D^i (a_{ij} D^j u) = f$$

a integrálna identita (20.9) bude

$$(20.13) \quad \sum_{|i|,|j|\le 1} \int_G a_{ij} D^i\varphi D^j u dx = \int_G \varphi f dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(G).$$

Ak navyše použijeme na pravej strane zápis v tvare skalárneho súčinu, máme:

$$(20.14) \quad \sum_{|i|,|j|\le 1} \int_G a_{ij} D^i\varphi D^j u dx = (f,\varphi) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(G).$$

Poznámka 20.1.: Podobne ako pri Poissonovej rovnici platí, že ak koeficienty rovnice a riešenie spĺňajú predpoklady hladkosti, je dané slabé riešenie aj klasickým riešením.
Podobne môžeme definovať aj slabé riešenie všeobecného operátora 2k-teho rádu.

Definícia 20.3.: Nech $f \in L_2(G)$ a funkcie a_{ij} sú všetky ohraničené merateľné funkcie v G. Funkciu $u \in W_2^k(G)$ nazývame **slabé riešenie rovnice**

$$(20.15) \quad Au = f,$$

kde operátor A je definovaný vzťahom (20.1), ak platí

$$(20.16) \quad \sum_{|i|,|j|\le k} \int_G a_{ij} D^i\varphi D^j u dx = (f,\varphi) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(G).$$

21. Formulácia problému s okrajovými podmienkami

Stabilné a nestabilné okrajové podmienky

Na formuláciu tohto problému použijeme teóriu vybudovanú v kapitole o stopách funkcie. Z tejto časti vieme, že ak funkcia $u \in W_2^1(G)$ má na Γ stopu u(S), potom táto funkcia spĺňa na Γ okrajovú podmienku u = u(S) v zmysle stôp. Tento pojem, podobne ako v predchádzajúcej kapitole umožní formulovať riešenie okrajového problému ďaleko všeobecnejšie ako v klasickom zmysle.

Príklad 21.1:
Ak A je operátor druhého rádu a treba riešiť okrajový problém
Au = f v G a u = g(S) na Γ, kde $g \in L_2(\Gamma)$,
potom riešenie nech je taká funkcia $u \in W_2^1(G)$, ktorá je slabým riešením danej rovnice v zmysle definície (20.3) a ktorá má na Γ stopu g(S).
Ak navyše $u \in W_2^2(G)$ má na Γ stopu nie len táto funkcia ale aj jej zovšeobecnené parciálne derivácie. Okrem toho, ak hranica oblasti G je Lipschitzovská, existuje skoro všade vektor vonkajšej normály , takže môžeme hovoriť aj o derivácii podľa vonkajšej normály a o Neumanovej okrajovej podmienke (uvažovanej opäť v zmysle stôp).

Poznámka 21.1:
Z predchádzajúcej časti vieme, že ak je operátor A 2k-teho rádu je riešenie $u \in W_2^k(G)$. Špeciálne pre operátor druhého rádu je riešenie $u \in W_2^1(G)$. Zobrazenie, ktoré priraďuje takejto funkcii stopu na hranici je spojité. Odtiaľ hneď dostávame, že ak konverguje postupnosť funkcií $u_n \in W_2^1(G)$ v tomto priestore k funkcii u, potom aj postupnosť ich stôp $u_n(S) \in L_2(\Gamma)$ konverguje v priestore $L_2(\Gamma)$ k stope limitnej funkcie $u(S) \in L_2(\Gamma)$.
Teda ak všetky funkcie postupnosti spĺňajú okrajovú podmienku

$u_n(S) = g(S)$ na Γ (v zmysle stôp),

potom aj ich limitná funkcia spĺňa okrajovú podmienku

(21.1) $u(S) = g(S)$ na Γ (v zmysle stôp).

Podmienku (21.1) voláme preto **stabilná okrajová podmienka.**

Poznámka 21.2:
Analogicky pre operátor štvrtého rádu, bude riešenie $u \in W_2^2(G)$ a stabilné okrajové podmienky budú v tomto prípade typu:

$$u = g_0(S), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = g_1(S), \quad \text{na} \quad \Gamma.$$

Definícia 21.1:
Pre operátor 2k-teho rádu budeme pod pojmom **stabilné okrajové podmienky** rozumieť okrajové podmienky obsahujúce danú funkciu a jej derivácie do k-1 radu vrátane.
Podmienky, ktoré obsahujú derivácie vyšších rádov než k-1 nazveme **nestabilné okrajové podmienky.**

Príklad 21.2:
Nestabilná okrajová podmienka pre Poissonovu rovnicu je Neumanova podmienka.

Cvičenie 20.2.: Uvažujme jednorozmerný prípad, teda máme funkcie jednej premennej. Nech je daná funkcia:

$$u(x) = 1 - x^2, \quad x \in < -1,1 > .$$

Uvažujme postupnosť párnych funkcií na intervale <-1, 1>, ktoré sú na intervale <0, 1> tvaru:

$$u_n(x) = \begin{cases} 1 - x^2, \quad x \in < 0, 1 - \frac{1}{n} >, \\ \frac{1}{n} + (n-1)(1-x)^2, \quad x \in < 1 - \frac{1}{n}, 1 > . \end{cases}$$

Ukážte, že všetky tieto funkcie sú na intervale <-1, 1> spojité aj so svojimi deriváciami prvého rádu. Ďalej ukážte, že v priestore $W_2^1(-1,1)$ postupnosť funkcií u_n konverguje k funkcii u. Ukážte konvergenciu hodnôt postupnosti funkcií na hranici a tiež fakt, že derivácie týchto postupností na hranici nekonvergujú k hodnotám derivácií funkcie u na hranici.

Príklady slabých riešení pre okrajové úlohy.

Príklad 21.3:
Uvažujme Poissonovu rovnicu s Dirichletovou okrajovou podmienkou:

$$(21.1) \quad -\Delta u = f, \quad u = g(S) \quad \text{na} \quad \Gamma .$$

Klasické riešenie tohto problému predpokladá, že funkcie v probléme spĺňajú podmienky: $f \in C(\overline{G}), \quad g \in C(\Gamma)$. Riešenie je funkcia $u \in C^2(\overline{G})$.

Podľa vyššie uvedenej teórie budeme formulovať slabé riešenie tohto problému.
Označme priestor V priestor s metrikou priestoru W_2^1, ktorý spĺňa v zmysle stôp homogénnu Dirichletovu okrajovú podmienku: $v = 0 \quad \text{na} \quad \Gamma$.

Ako už bolo povedané, v tomto prípade je $V = \dot{W}_2^1$ z minulej kapitoly.
Ľubovoľnou funkciou $v \in V$ teraz prenásobme rovnicu vo vzťahu (21.1) a zintegrujeme cez oblasť G. Dostaneme:

$$(21.2) \quad -\int_G v\Delta u dx = \int_G vf dx,$$

Použijúc teraz Greenovu vetu, máme ($v \in V$, teda má parciálne derivácie v zovšeobecnenom zmysle):

(21.3) $\sum_{i=1}^{N} \int_G \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_G fvdx$ alebo zjednodušený zápis:

$$\int_G \nabla u . \nabla v dx = \int_G fvdx.$$

Vzťah (21.3) má zmysel, ak pre funkcie platí: $u \in W_2^1(G)$ a $f \in L_2(G)$.
Pojem slabého riešenia teraz môžeme definovať nasledujúcim spôsobom:

Definícia 21.2:
Nech funkcia g(S) je stopa niektorej funkcie $w \in W_2^1(G)$ a nech $f \in L_2(G)$. Označme

$$V = \left\{ v; v \in W_2^1(G), v = 0 \quad \text{na} \quad \Gamma \quad \text{v} \quad \text{zmysle} \quad \text{stop} \right\}.$$

Funkciu $u \in W_2^1(G)$ nazveme **slabé riešenie problému (21.1**) ak platí:

(21.4) $u - w \in V$,

(21.5) $\sum_{i=1}^{N} \int_G \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_G fvdx \quad \forall v \in V$.

Takto definované slabé riešenie je v súlade s vyššie uvedenou všeobecnou definíciou slabého riešenia, pretože ľubovoľná funkcia $\varphi \in C_0^\infty(G)$ je funkcia z V, a teda platí identita (21.5) aj pre takéto funkcie.
Ak je u slabé riešenie a samotné u a funkcia f spĺňajú isté podmienky hladkosti, potom sa spätným postupom dá ukázať, že je to aj klasické riešenie.
Splnenie okrajovej podmienky zaručuje vzťah (21.4). Priama definícia funkcie u, aby spĺňala hodnotu funkcie g na hranici, nie je možná, ako sme sa zmienili v kapitole o stopách funkcie v poznámke 19.3.

Príklad 21.4:
Uvažujme Poissonovu rovnicu s Neumannovou okrajovou podmienkou:

(21.6) $-\Delta u = f, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = h(S) \quad \text{na} \quad \Gamma$.

V tomto prípade je okrajová podmienka nestabilná, preto priestor V, kde by sme kládli podmienky na splnenie stabilnej okrajovej podmienky bude rovný W_2^1.
Klasické riešenie tohto problému predpokladá, že funkcie v probléme spĺňajú podmienky: $f \in C(\overline{G}), \quad h \in C(\Gamma)$. Riešenie je funkcia $u \in C^2(\overline{G})$.

Podľa vyššie uvedenej teórie budeme formulovať slabé riešenie tohto problému.
Ľubovoľnou funkciou $v \in V$ teraz prenásobme rovnicu vo vzťahu (21.6) a zintegrujeme cez oblasť G. Dostaneme:

(21.7) $-\int_G v \Delta u dx = \int_G vfdx,$

použijúc teraz Greenovu vetu máme ($v \in V$, teda má parciálne derivácie v zovšeobecnenom zmysle):

(21.8) $\sum_{i=1}^{N}\int_G \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx = \int_G fvdx + \int_\Gamma vh(S)dS$ alebo zjednodušený zápis:

$$\int_G \nabla u.\nabla vdx = \int_G fvdx + \int_\Gamma v(S)h(S)dS.$$

Vzťah (21.8) má zmysel ak pre funkcie platí: $u \in W_2^1(G)$, $f \in L_2(G)$ a $h(S) \in L_2(\Gamma)$. Pojem slabého riešenia teraz môžeme definovať nasledujúcim spôsobom:

Definícia 21.3:
Nech $f \in L_2(G)$ a $h(S) \in L_2(\Gamma)$.
Funkciu $u \in W_2^1(G)$ nazveme **slabé riešenie problému (21.6),** ak platí:

(21.9) $\sum_{i=1}^{N}\int_G \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx = \int_G fvdx + \int_\Gamma vh(S)dS \quad \forall v \in W_2^1(G).$

Zásadný rozdiel v definícii slabého riešenia v tomto príklade a v príklade predchádzajúcom je v zahrnutí okrajovej podmienky, keďže Dirichletova podmienka je podmienka pre túto rovnicu stabilná a Neumanova podmienka je pre Poissonovu rovnicu podmienka nestabilná.

Príklad 21.5:
Uvažujme Poissonovu rovnicu s Newtonovou okrajovou podmienkou:

(21.10) $-\Delta u = f, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u = h(S) \quad na \quad \Gamma.$

V tomto prípade je okrajová podmienka opäť nestabilná, preto priestor V, kde by sme kládli podmienky na splnenie stabilnej okrajovej podmienky bude rovný W_2^1.
Klasické riešenie tohto problému predpokladá, že funkcie v probléme spĺňajú podmienky: $f \in C(\overline{G}), \quad h,\sigma \in C(\Gamma)$. Riešenie je funkcia $u \in C^2(\overline{G})$.

Podľa vyššie uvedenej teórie budeme formulovať slabé riešenie tohto problému.
Ľubovoľnou funkciou $v \in V$ teraz prenásobme rovnicu vo vzťahu (21.6), zintegrujeme cez oblasť G. Dostaneme:

(21.11) $-\int_G v\Delta udx = \int_G vfdx,$

použijúc teraz Greenovu vetu máme ($v \in V$, teda má parciálne derivácie v zovšeobecnenom zmysle):

(21.12) $\sum_{i=1}^{N}\int_G \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx + \int_\Gamma \sigma(S)u(S)v(S)dS = \int_G fvdx + \int_\Gamma vh(S)dS,$

alebo zjednodušený zápis:

$$\int_G \nabla u.\nabla vdx + \int_\Gamma \sigma(S)u(S)v(S)dS = \int_G fvdx + \int_\Gamma v(S)h(S)dS.$$

Vzťah (21.12) má zmysel ak pre funkcie platí: $u \in W_2^1(G)$, $f \in L_2(G)$ a $h \in L_2(\Gamma)$ a pre funkciu σ treba predpokladať aspoň, že je to ohraničená, merateľná funkcia na Γ. Pojem slabého riešenia teraz môžeme definovať nasledujúcim spôsobom:

Definícia 21.4:
Nech $f \in L_2(G)$ a $h \in L_2(\Gamma)$ a σ je ohraničená, merateľná funkcia na Γ.

Funkciu $u \in W_2^1(G)$ nazveme **slabé riešenie problému (21.10),** ak platí:

$$(21.13)\quad \sum_{i=1}^{N} \int_G \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx + \int_\Gamma \sigma uv dS = \int_G fv dx + \int_\Gamma vh dS \quad \forall v \in W_2^1(G).$$

Na ľavej strane tejto integrálnej identity je integrál po hranici chápaný v zmysle stôp funkcií u a v. Toto zobrazenie je ale ohraničené preto platí:

$\|v\|_{L_2(\Gamma)} \le c\|v\|_{W_2^1(G)}$, $\|u\|_{L_2(\Gamma)} \le c\|u\|_{W_2^1(G)}$. Ak teraz je funkcia σ ohraničená merateľná funkcia na Γ $|\sigma(S)| \le m$, zo Schwartzovej nerovnosti hneď máme:

$$\left|\int_\Gamma \sigma vu dS\right| \le c_1\|u\|_{W_2^1(G)}\|v\|_{W_2^1(G)}, \quad c_1 = mc^2.$$

Príklad 21.6:
Uvažujme teraz rovnicu s biharmonickým operátorom a okrajovou podmienkou:

$$(21.14)\quad \Delta^2 u = f,\ \ u = g(S)\ \ na\ \ \Gamma,\ \ Mu = h(S)\ \ na\ \ \Gamma,$$

$$Mu = \sigma\Delta u + (1-\sigma)\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2},\quad 0 \le \sigma < 1.$$

Klasické riešenie tohto problému predpokladá, že funkcie v probléme spĺňajú podmienky: $f \in C(\overline{G})$, $g \in C(\Gamma)$. Riešenie je funkcia $u \in C^4(\overline{G})$.

Podľa vyššie uvedenej teórie budeme formulovať slabé riešenie tohto problému. Označme priestor V priestor s metrikou priestoru W_2^2, ktorý spĺňa v zmysle stôp homogénnu Dirichletovu okrajovú podmienku: $v = 0$ na Γ.

Ľubovoľnou funkciou $v \in V$ teraz prenásobme rovnicu vo vzťahu (21.10) a zintegrujeme cez oblasť G. Dostaneme:

$$(21.15)\quad \int_G v\Delta^2 u dx = \int_G vf dx,$$

Využijeme biharmonický rozklad operátora v dvojdimenzionálnej oblasti:

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} =$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \sigma\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\left[(1-\sigma)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right] + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \sigma\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right).$$

Použijúc teraz Greenovu vetu, máme ($v \in V$, teda má parciálne derivácie v zovšeobecnenom zmysle):

(21.16) $\int\limits_G v\Delta^2 u dx =$

$$\int\limits_G \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \sigma \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right) + 2(1-\sigma)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \sigma \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) \right] dx -$$

$$\int\limits_\Gamma vNudS - \int\limits_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \nu} MudS,$$

kde $\mathrm{Nu} = -\dfrac{\partial}{\partial \nu}(\Delta \mathrm{u}) + (1-\sigma)\dfrac{\partial}{\partial \mathrm{S}}\left[\dfrac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}_1^2}\nu_1\nu_2 - \dfrac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}_1 \partial \mathrm{x}_2}\left(\nu_1^2 - \nu_2^2\right) - \dfrac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}_2^2}\nu_1\nu_2 \right].$

Využijúc teraz okrajové podmienky, dostaneme

(21.17) $$\int\limits_G \left[\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}_1^2}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial \mathrm{x}_1^2} + \sigma \frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial \mathrm{x}_2^2} \right) + 2(1-\sigma)\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}_1 \partial \mathrm{x}_2}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial \mathrm{x}_1 \partial \mathrm{x}_2} + \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}_2^2}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial \mathrm{x}_2^2} + \sigma \frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial \mathrm{x}_1^2} \right) \right] \mathrm{dx} =$$

$$\int\limits_G \mathrm{vfdx} + \int\limits_\Gamma \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \nu}\mathrm{h(S)\,dS}, \quad \mathrm{v} \in \mathrm{V}.$$

Pojem slabého riešenia teraz môžeme definovať nasledujúcim spôsobom:

Definícia 21.5:
Nech funkcia g(S) je stopa niektorej funkcie $\mathrm{w} \in \mathrm{W}_2^2(\mathrm{G})$ a nech $\mathrm{h(S)} \in \mathrm{L}_2(\Gamma)$ a $\mathrm{f} \in \mathrm{L}_2(\mathrm{G})$. Označme $\mathrm{V} = \left\{ \mathrm{v}; \mathrm{v} \in \mathrm{W}_2^2(\mathrm{G}), \mathrm{v} = 0 \ \text{ na } \ \Gamma \ \text{ v zmysle stop} \right\}$.

Funkciu $\mathrm{u} \in \mathrm{W}_2^2(\mathrm{G})$ nazveme **slabé riešenie problému (21.10)** ak platí:

(21.18) $u - w \in V$

a pre každé $\forall \mathrm{v} \in \mathrm{V}$ je splnená podmienka (21.17).

Slabé riešenie okrajových úloh – všeobecný prípad

Budeme uvažovať všeobecný operátor 2k-teho rádu, ako bol definovaný vo vzťahu (20.1) v predchádzajúcej časti. Vyššie sme si opísali okrajové podmienky a rozdelili sme ich do dvoch typov. Nech teda platí, že máme okrajový problém s operátorom 2k-teho rádu a nech je úloha taká, že je daných μ okrajových podmienok stabilných a k-μ nestabilných okrajových podmienok.
Označme stabilné okrajové podmienky takto:

(21.19) $$\frac{\partial^{s_1} u}{\partial \nu^{s_1}} = g_{s_1}, \quad \frac{\partial^{s_2} u}{\partial \nu^{s_2}} = g_{s_2}, \ldots \frac{\partial^{s_\mu} u}{\partial \nu^{s_\mu}} = g_{s_\mu}.$$

Ostatné podmienky označme:

(21.20) $\dfrac{\partial^{t_1} u}{\partial \nu^{t_1}} = g_{t_1}, \ \dfrac{\partial^{t_2} u}{\partial \nu^{t_2}} = g_{t_2}, \ldots \dfrac{\partial^{t_{k-\mu}} u}{\partial \nu^{t_{k-\mu}}} = g_{t_{k-\mu}}.$

Príklad 21.7:
V príklade 21.3 teda máme k = 1, $\mu = 1$, $s_1 = 0$, k- $\mu = 0$. V príklade 21.4 máme k = 1, $\mu = 0$, $t_1 = 1$, k- $\mu = 1$. V príklade 21.6 máme k = 2, $\mu = 1$, $s_1 = 0$, k- $\mu = 1$,$t_1 = 1$.

Môžeme však mať aj všeobecnejšie okrajové podmienky ako Dirichletove, a preto budeme uvažovať, za predpokladu na určitú hladkosť hranice, stabilné okrajové podmienky tvaru

(21.21) $B_1 u = \dfrac{\partial^{s_1} u}{\partial \nu^{s_1}} + F_1 u = g_1(S),$

....

$$B_\mu u = \frac{\partial^{s_\mu} u}{\partial \nu^{s_\mu}} + F_\mu u = g_\mu(S),$$

kde operátory F_l (l = 1, 2, ..., μ) sú lineárne operátory rádu nanajvýš (k-1), ktorých členy obsahujú v lokálnom vyjadrení derivácie podľa vonkajšej normály len tých rádov, ktoré odpovedajú niektorému z čísel $t_1, \ldots t_{k-\mu}$.

Príklad 21.8:
Pre operátor štvrtého rádu predpíšeme podmienky:

$\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + u = g(S), \qquad \Delta u = h(S) \qquad$ na $\qquad \Gamma.$

Prvá z týchto podmienok je pre daný operátor stabilná druhá nie.
Máme: $\mu = 1$, $s_1 = 1$, k- $\mu = 1$, $t_1 = 0$. Navyše, podľa označenia vo vzťahu (21.7) máme $B_1 u = \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + F_1 u,\ \ F_1 u = u,$ čo je derivácia podľa vonkajšej normály zodpovedajúca $t_1 =$ 0.

Definícia 21.6:
Podpriestor všetkých funkcií $v \in W_2^k(G)$ spĺňajúcich homogénne okrajové podmienky (21.7) teda podmienky tvaru

(21.22) $B_1 = 0, B_2 = 0, \ldots B_\mu = 0 \ \ na \ \ \Gamma$ označíme V.

Pre vhodnejší zápis slabého riešenia vo všeobecnom prípade zavedieme ešte nasledujúce označenie:

(21.23) $A(u,v) = \sum_{|i|,|j \le k|} \int_G a_{ij} D^i v D^j u dx.$

Pre tento výraz zrejme platí, že je lineárny v oboch premenných:
$A(v, c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 A(v, u_1) + c_2 A(v, u_2)$
$A(c_1 v_1 + c_2 v_2, u) = c_1 A(v_1, u) + c_2 A(v_2, u).$
Preto ju nazveme **bilineárnou formou** operátora A.

Príklad 21.9:
Pre Laplaceov operátor s koeficientami ako v príklade 21.3. má v dvojdimenzionálnom priestore príslušná bilineárna forma tvar:

$$A(u,v)=\int_G\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)dx$$

a príslušná integrálna identita (21.3) sa teda bude dať zapísať v tvare:

$$(21.24)\quad \mathcal{A}(u,v)=(f,v),\quad v\in V.$$

Definícia 21.7: (prvá predbežná definícia slabého riešenia okrajového problému).
Nech je dané:

- Oblasť G s Lipschitzovskou hranicou (prípadne aj s niektorými podmienkami hladkosti)
- operátor $A=\sum_{|i|,|j|\le k}(-1)^{|i|}D^i(a_{ij}D^j)$ s ohraničenými Lebesgueovsky merateľnými kladnými koeficientami a_{ij}
- príslušná bilineárna forma $A(u,v)=\sum_{|i|,|j\le k|}\int_G a_{ij}D^ivD^judx$
- funkcia $f\in L_2(G)$
- operátory $B_1,...B_\mu,\ \ \mu\le k$
- podpriestor $V=\left\{v;v\in W_2^k(G),B_1v=0,...B_\mu v=0\ \ \text{na}\ \ \Gamma\right\}$
- $g_1\in L_2(\Gamma),...,g_\mu\in L_2(\Gamma)$
- funkcia $w\in W_2^k(G)$, pre ktorú platí: $B_1w=g_{1,}...,B_\mu w=g_{\mu,}$ na Γ v zmysle stôp
- funkcie $h_1\in L_2(\Gamma),...,h_{k-\mu}\in L_2(\Gamma)$

Funkciu $u\in W_2^k(G)$ nazveme **slabé riešenie problému s okrajovými podmienkami** daného vyššie opísanými dátami ak platí:

- $u-w\in V$
- $A(v,u)=(v,f)+\sum_{l=1}^{k-\mu}\int_\Gamma\frac{\partial^{t_l}v}{\partial\nu^{t_l}}h_lds$ platí pre každé $v\in V$.

Interpretácia zmiešaných podmienok:

Príklad 21.10:
Uvažujme opäť Poissonovou rovnicu, ale tentokrát so zmiešanými okrajovými podmienkami: Na časti hranice Γ_1 je predpísaná Dirichletova podmienka a na časti hranice Γ_2 je predpísaná Neumannova podmienka.

V tomto prípade máme: $A(v,u)=(v,f)+\int_{\Gamma_2}vhdS\ \ \forall v\in V$ a priestor V vyberáme ako:

$V = \left\{ v; v \in W_2^1(G), v = 0, \text{ na } \Gamma_1 \right\}$ Dirichletovu podmienku potom charakterizujeme funkciou $w \in W_2^1(G)$, pre ktorú v zmysle stôp platí $w = g(S)$ na Γ_1.

Poznámka 21.3:
Analogicky sa zmení priestor V a definícia slabého riešenia aj pre všeobecný prípad.

Poznámka 21.4.:
Z príkladu 21.4 vyplýva, že na zachytenie takéhoto typu okrajových podmienok (nestabilných), musíme v integrálnej identite doplniť ďalší člen definovaný na hranici Γ, označíme ho a(v,u).

Definícia 21. 5:
Nech je a(u,v) výraz definovaný na hranici Γ, pre ktorý platí:

- a(v,u) je bilineárny výraz premenných u a v.
- existuje konštanta c_1, ktorá je nezávislá od funkcií $u, v \in W_2^k(G)$ tak, že platí: $|a(v,u)| \le c_1 \|u\|_{W_2^k(G)} \|v\|_{W_2^k(G)}$.

Výraz a(v,u) nazývame **hraničná bilineárna forma.**

Zavedieme ešte označenie: $((v,u)) = A(v,u) + a(v,u)$.
Tento výraz je bilineárna forma v premenných u a v. Z vyššie uvedených predpokladov vyplýva:

$$|((v,u))| \le K \|u\|_{W_2^k(G)} \|v\|_{W_2^k(G)}, \quad v, u \in W_2^k(G).$$

Vo všeobecnom prípade nech platí:

Definícia 21.6: (definícia slabého riešenia okrajového problému).
Nech je dané:

- Oblasť G s Lipschitzovskou hranicou (prípadne aj s niektorými podmienkami hladkosti)
- operátor $A = \sum_{|i|,|j| \le k} (-1)^{|i|} D^i (a_{ij} D^j)$ s ohraničenými lebesgueovsky merateľnými koeficientami a_{ij}
- bilineárna forma $((v,u)) = A(u,v) + a(v,u)$, pre ktorú platí:

  $|((v,u))| \le K \|u\|_{W_2^k(G)} \|v\|_{W_2^k(G)}, \quad v, u \in W_2^k(G)$, K>0
- funkcia $f \in L_2(G)$
- operátory $B_{11}, \dots B_{1\mu_1}, \dots . B_{r1}, \dots B_{r\mu_r}$ na jednotlivých častiach hranice Γ: Γ_1, $\Gamma_2, \dots . \Gamma_r$

  podpriestor $V = \left\{ v; v \in W_2^k(G), B_{11} v = 0, \dots B_{r\mu_r} v = 0 \text{ na } \Gamma \right\}$
- $g_{p1} \in L_2(\Gamma_p), \dots, g_{p\mu_p} \in L_2(\Gamma_p), \quad p = 1, \dots, r$

- funkcia $w \in W_2^k(G)$, pre ktorú na častiach hranice Γ_p, $p = 1, ...r$ platí: $B_{p1}w = g_{p1},..., B_{p\mu_p}w = g_{p\mu_p}$, v zmysle stôp
- funkcie $h_{pl} \in L_2(\Gamma_p)$, $p = 1,2,..,r$, $l = 1,...k - \mu_p$

Funkciu $u \in W_2^k(G)$ nazveme **slabé riešenie problému s okrajovými podmienkami** daného vyššie opísanými dátami ak platí:

- $u - w \in V$
- $((v,u)) = (v,f) + \sum_{p=1}^{r}\sum_{l=1}^{k-\mu_p}\int_{\Gamma_p}\frac{\partial^{t_{pl}} v}{\partial \nu^{tp_l}} h_{pl} ds$ platí pre každé $v \in V$.

Cvičenia:

18.1. Ukážte, že vzťahom (18.5) je na LP $C^{\infty}(\overline{G})$ definovaný skalárny súčin.

20.1. Definujte podobným spôsobom slabé riešenie pre rovnicu s biharmonickým operátorom.

22. Existencia slabého riešenia Laxova-Milgramova veta

Veta 22.1: Laxova- Milgramova veta
Nech je H Hilbertov priestor so skalárnym súčinom (v,u). Nech B(v,u) je bilineárna forma definovaná pre u,v z H a taká, že existujú konštanty K>0 a α>0 nezávislé od u a v tak, že pre každé $v \in H$, $u \in H$ platí:

(22.1) $B(v,u) \le K\|v\|\|u\|$

(22.2) $B(v,v) \ge \alpha\|v\|^2$.

Potom sa dá každý lineárny funkcionál F, ohraničený na H vyjadriť v tvare

(22.3) $Fv = B(v,z), \quad v \in H$,

kde z je prvok priestoru H, jednoznačne určený funkcionálom F. Pritom platí:

(22.4) $\|z\| \le \dfrac{\|F\|}{\alpha}$, kde $\|F\|$ je norma funkcionálu F.

Dôkaz:
Je založený na Rieszovej vete. Podľa nej možno každý lineárny ohraničený funkcionál v H jednoznačne reprezentovať skalárnym súčinom, teda aj pre funkcionál F z vety platí, že existuje jediný prvok t z priestoru H, pre ktorý platí:

$$Fv = (v,t), \quad v \in H \qquad \wedge \qquad \|t\| = \|F\|.$$

Stačí preto ukázať, že každému $t \in H$ možno jednoznačne priradiť také $z \in H$, že platí

(22.5) $(v,t) = B(v,z), \quad \forall\, v \in H \qquad \wedge \qquad \|z\| \le \dfrac{\|t\|}{\alpha}$.

Stačí preto ukázať (22.5).

Dôkaz urobíme tak, že najskôr skonštruujeme operátor opačný, ktorý každému z priradí t. O tomto ukážeme že je lineárny a bijektívny na H, a teda má inverzný operátor.

Majme teda nejaké $z \in H$ pevné. Potom forma B(v,z) predstavuje podľa predpokladov vety lineárny ohraničený funkcionál v H. Opäť z Rieszovej vety máme existenciu jediného takého $t \in H$, že použijúc ohraničenosť (22.1) platí:

(22.6) $B(v,z) = (v,t), \quad \forall\, v \in H \qquad \wedge \qquad \|t\| \le K\|z\|$.

Takýmto spôsobom sme každému $z \in H$ priradili jednoznačne prvok $t \in H$, teda sme v priestore H definovali operátor, nazveme ho C, daný vzťahom Cz = t. Tento operátor z H do H je zrejme lineárny, pretože ak pre dva prvky $z_1, z_2 \in H$ podľa Rieszovej vety existujú jednoznačne dva prvky $t_1, t_2 \in H$ tak, že

$$B(v,z_1)=(v,t_1),\ \ B(v,z_2)=(v,t_2) \qquad \Rightarrow B(v,c_1z_1+c_2z_2)=(v,c_1t_1+c_2t_2) \qquad \forall c_1,c_2\in R.$$

Z toho teda platí $C(c_1z_1+c_2z_2)=c_1Cz_1+c_2Cz_2$. Navyše je tento operátor ohraničený ako hneď vyplýva zo vzťahu (22.6): $\|Cz\|=\|t\|\le K\|z\|$. Jeho obor hodnôt označme $L\subset H$. Keďže je C lineárny operátor, je L lineárna množina, na ktorej je definovaná metrika indukovaná metrikou Hilbertovho priestoru H. Ukážeme teraz, že C je injektívny operátor. K tomu z linearity operátora C stačí ukázať, že na nulový prvok priestoru L sa zobrazí nulový prvok priestoru H.

Nech teda Cz = 0. Z toho teda máme $\mathrm{B}(\mathrm{v},\mathrm{z})=(\mathrm{v},0)=0,\ \ \forall\, \mathrm{v}\in\mathrm{H}$. Odtiaľ pre v = z

máme $\alpha\|z\|^2\le \mathrm{B}(z,\mathrm{z})=(z,0)=0,\ \ \Rightarrow z=0.$

Operátor C je teda prostý, preto k nemu existuje inverzný operátor C^{-1}, ktorý je z vlastností lineárnych operátorov tiež lineárny a navyše aj ohraničený, pretože platí:

(22.7) $$\alpha\|z\|^2\le \mathrm{B}(z,\mathrm{z})=(z,t)\le\|z\|\|t\|\Rightarrow\|z\|\le\frac{\|t\|}{\alpha}\Rightarrow\left\|C^{-1}\right\|\le\frac{1}{\alpha}.$$

Teraz ukážeme, že L je úplný priestor. Nech je postupnosť $\{t_n\}$ cauchyovská v L. Keďže $L\subset H$ a H je úplný priestor, táto postupnosť má v ňom limitu: $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=t,\ \ t\in H$. Treba ukázať, že $t\in L$ teda, že existuje $z\in H$ také, že Cz=t. Posupnosť $\{t_n\}$ je ale z L teda pre každý jej prvok t_n musí existovať prvok z_n v H, tak, že platí $Cz_n = t_n$. Ukážeme teraz, že aj postupnosť obrazov je cauchyovská v H: $\|z_n-z_m\|=\left\|C^{-1}t_n-C^{-1}t_m\right\|=\left\|C^{-1}(t_n-t_m)\right\|\le\left\|C^{-1}\right\|\|t_n-t_m\|$. Z ohraničenosti operátora C^{-1} máme, že ak je postupnosť $\{t_n\}$ cauchyovská v L, potom je aj $\{z_n\}$ cauchyovská v H a z úplnosti H je tam aj konvergentná. Existuje teda jej limita $z\in H$: $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z,\ \ z\in H.$

Zo spojitosti operátora C ale dostávame $Cz=\lim\limits_{n\to\infty}Cz_n$ a z toho hneď máme:

$t=\lim\limits_{n\to\infty}t_n=\lim\limits_{n\to\infty}Cz_n=Cz$ a teda $t\in L$. L je teda podpriestor H. Teraz ukážeme, že L =H.

Toto ukážeme sporom: Nech $L\ne H$. H sa teda dá napísať ako ortogonálny rozklad $H=L\oplus K$, kde každý prvok z K je kolmý na L . Existuje teda nenulový prvok $w\in K$, ktorý je ortgonálny ku každému prvku z L, teda platí $(w,t)=0, t\in L$. Vieme ale, že $w\in H$, a teda mu zodpovedá nejaký prvok $t_0\in L$, tak že $Cw=t_0\Rightarrow B(v,w)=(v,t_0),\ \ \forall v\in H$. Zvolíme teraz v = w a dostávame: $\alpha\|w\|^2\le B(w,w)=(w,t_0)=0$, pretože $t_0\in L$ a z toho w = 0, čo je spor. Dokázali sme teda, že operátor C je na H bijektívny a teda pre každý prvok $t\in H$ existuje jenodznačne určený prvok $z\in H$, že Cz = t , a teda $B(v,z)=(v,t)$. Zároveň ale z (22.7) máme aj odhad na normu prvku y a teda platnosť (22.6). □

Riešme teraz otázku existencie slabého riešenia okrajovej úlohy. Z predchádzajúcej časti vieme, že pre operátor a okrajové podmienky ako boli definované vyššie, slabé riešenie je funkcia $\mathrm{u}\in \mathrm{W}_2^{\mathrm{k}}(\mathrm{G})$ taká, že platí

- $u - w \in V$,
- $((v,u)) = (v,f) + \sum_{p=1}^{r} \sum_{l=1}^{k-\mu_p} \int_{\Gamma_p} \frac{\partial^{t_{pl}} v}{\partial \nu^{tp_l}} h_{pl} ds$ pre všetky $v \in V$.
- Posledný vzťah môžeme zjednodušene zapísať v tvare

(22.5) $((v,u)) = (v,f) + \kappa(v,h), \quad \forall v \in V \quad \text{kde} \quad \kappa(v,h) = \sum_{p=1}^{r} \sum_{l=1}^{k-\mu_p} \int_{\Gamma_p} \frac{\partial^{t_{pl}} v}{\partial \nu^{tp_l}} h_{pl} ds$.

Definícia 22.1:
Nech sú dané bilineárne forma ((v,u)) a priestor V ako v predchádzajúcej časti. Forma ((v,u)) sa nazýva V-eliptická, ak existuje konštanta α>0 taká, že pre každé $v \in V$ platí:

(22.6) $((v,v)) \ge \alpha \|v\|_V^2$.

Veta 22.2:
Nech je daný problém s okrajovými podmienkami tak, ako bol definovaný v predchádzajúcej časti. Ak je forma ((v,u)) V–eliptická, má daný problém práve jedno slabé riešenie $u \in W_2^k(G)$ a existuje kladná konštanta c nezávislá od funkcií f,w a h_{pl} tak, že platí:

(22.7) $\|u\|_{W_2^k(G)} \le c\left(\|f\|_{L_2(G)} + \|w\|_{W_2^k(G)} + \sum_{p=1}^{r} \sum_{l=1}^{k-\mu_p} \|h_{pl}\|_{L_2(\Gamma_p)} \right)$.

Dôkaz: pozri [R]

Príklad 22.1:
Ukážeme, ako to funguje pre Poissonovu diferenciálnu rovnicu s Dirichletovými okrajovými podmienkami ako v príklade 21.3. V príklade 21.3 a definícii 21.2 sme definovali pojem slabého riešenia pre takúto úlohu. Z neho vieme:

Nech funkcia g(S) je stopa niektorej funkcie $w \in W_2^1(G)$ a nech $f \in L_2(G)$. Označme

$$V = \left\{ v; v \in W_2^1(G), v = 0 \;\; na \;\; \Gamma \;\; v \;\; zmysle \;\; stop \right\} = \dot{W}_2^1(G).$$

Funkciu $u \in W_2^1(G)$ nazveme slabým riešením ak platí:

$$u - w \in V, \quad \int_G \nabla u \nabla v dx = \int_G f v dx \quad \forall v \in V.$$

V tomto prípade teda je bilineárna forma tvaru

$$((u,v)) = \int_G \nabla u \nabla v dx \quad \forall u, v, \in V.$$

Z definície 20.1 a príkladu 20.3. vieme, že Laplaceov operátor je rovnomerne eliptický, čo v tomto prípade hneď implikuje V-elipticitu bilineárnej formy v tvare:

$$((u,u)) = \int_G (\nabla u)^2 dx \ge \|u\|_V \quad \forall u \in V.$$

Z tvaru bilineárnej formy je hneď jasná aj jej ohraničenosť v priestore V.
Nech je teraz funkcionál F z Lax-Milgramovej vety definovaný pre tento prípad takto

$$Fv = \int_G fv dx - ((v,w)) = (f,v) - ((v,w)) \quad \forall v \in V$$

Vzhľadom na to, že $f \in L_2(G)$ a vidíme, že prvý člen funkcionálu je obyčajný skalárny súčin v $L_2(G)$ a druhá časť je bilinárna forma, tento funkcionál spĺňa vlastnosti z Laxovej-Milgramovej vety. Podľa Laxovej-Milgramovej existuje teda jediný prvok $z \in V$, tak, že platí

$((v,z)) = (f,v) - ((v,w)) \quad \forall v \in V$ alebo

$((v,z+w)) = (f,v) \quad \forall v \in V$.

Ak teraz definujeme $u(x) = z(x) + w(x)$, takáto funkcia je **jediné slabé riešenie** problému (21.1) v zmysle definície 20.1.

Literatúra

1. [K] KUFNER, A. – FUČÍK, S. – JOHN, O.: *Function spaces*. 1. vyd. Praha Academia, 1977. ISBN 90-286-0015-9
2. [L] LJUSTERNIK, L. A. – SOBOLEV, B. I.: *Elementy funkcionalnogo analiza*. 2.vyd. Moskva: Nauka, 1965.
3. [NR] NEUBRUNN, T. – RIEČAN, B.: *Miera a integrál.* 1. Vyd. Bratislava: Veda, 1981.
4. [M] MIŠÍK, L.: *Funkcionálna analýza*. 1. vyd. Bratislava: Alfa, 1989. ISBN 80-05-00117-7
5. [Mi] MICHLIN, S. M.: *Variačné metódy v matematickej fyzike*, 1. vyd. Bratislava: Alfa, 1974. ISBN 63-063-75
6. [R] REKTORYS, K.: *Variační metódy v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky*. 1. vyd. Praha: SNTL, 1974. ISBN 04-003-74

Citácie:

Tu sú mená tých, ktorých slová som použila v učebnici alebo ma naučili základom tejto krásnej vedy. Patrí im moja vďaka za to, čo ma v živote naučili z matematiky, ale aj mimo nej...nie sú tu všetci, je ich ešte oveľa viac...

Angela Handlovičová

F Prof. RNDr. Ján Filo CSc
K Prof. RNDr. Jozef Kačur DrSc.
M Doc. RNDr. Ladislav Mišík CSc.
N Prof. RNDr. Tibor Neubrunn, DrSc.
S Prof. RNDr. Valter Šeda, DrSc.
V Doc. RNDr. Jozef Vencko, CSc.

Obsah

ISBN 978-80-227-4559-8