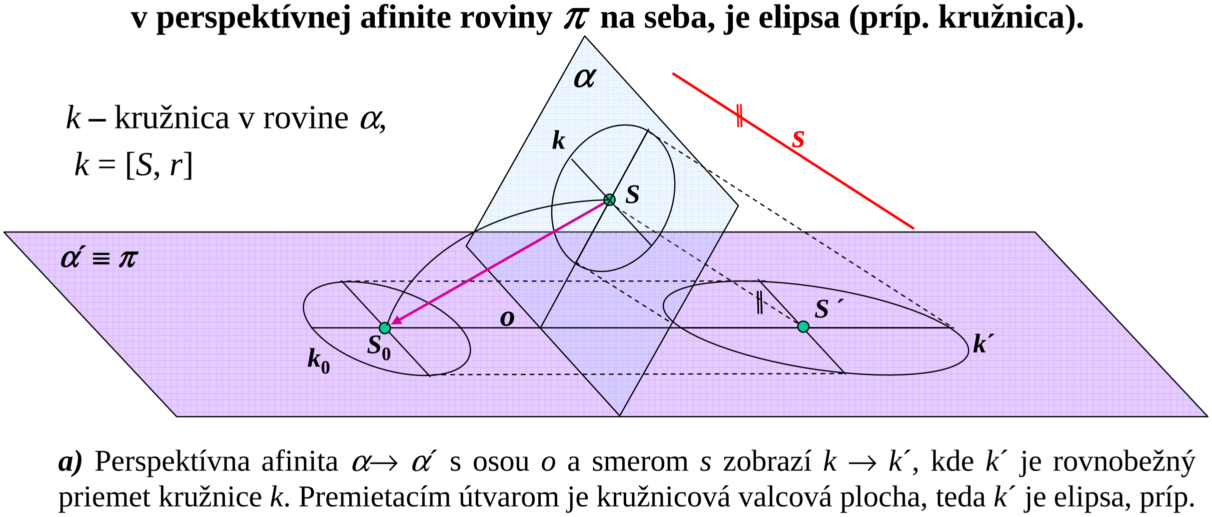
Margita Vajsáblová

Obraz kružnice v perspektívnej afinite

Obraz kružnice v perspektívnej afinite

***Veta 1*: Obrazom kružnice v perspektívnej afinite roviny α na rovinu α´, a tiež v perspektívnej afinite roviny π na seba, je elipsa (príp. kružnica).**

k – kružnica v rovine α,
$k = [S, r]$



a) Perspektívna afinita $\alpha \rightarrow \alpha'$ s osou *o* a smerom *s* zobrazí $k \rightarrow k'$, kde k' je rovnobežný priemet kružnice *k*. Premietacím útvarom je kružnicová valcová plocha, teda k' je elipsa, príp. kružnica.

b) Nech v otočení roviny α do α' okolo osi *o* je k_0 otočená poloha kružnice *k*.

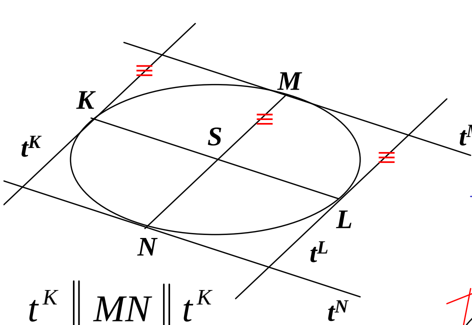
Potom rovnobežným priemetom perspektívnej afinity $\alpha \rightarrow \alpha'$ v smere SS_0 je **perspektívna afinita roviny $\pi \equiv \alpha'$ na seba, ktorá zobrazí $k_0 \rightarrow k'$, jej smer je S_0S'.**

Afinné vlastnosti elipsy

***Veta 2*:** Obrazom dotyčnice krivky v perspektívnej afinite je dotyčnica obrazu danej krivky.

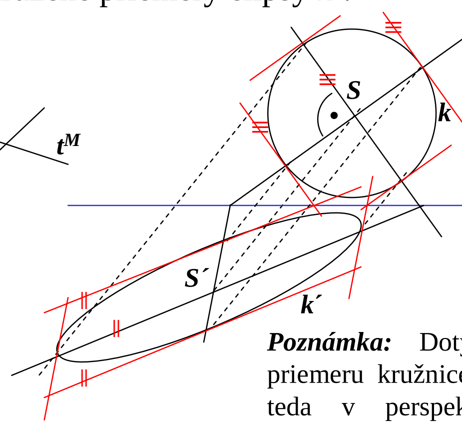
***Definícia 1*:** Združené priemery elipsy nazývame také dva priemery elipsy, pre ktoré platí, že dotyčnice v krajných bodoch jedného priemeru sú rovnobežné s priemerom k nemu združeným.

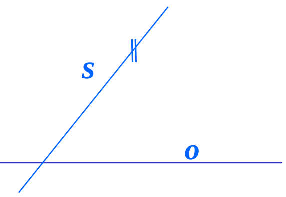
***Veta 3*:** Nech perspektívna afinita $\pi \to \pi$ (príp. $\alpha \to \alpha'$) zobrazí kružnicu k do elipsy k'. Potom obrazom ľubovoľných dvoch kolmých priemerov kružnice k sú združené priemery elipsy k'.



$$t^K \parallel MN \parallel t^K$$

$$t^M \parallel KL \parallel t^N$$





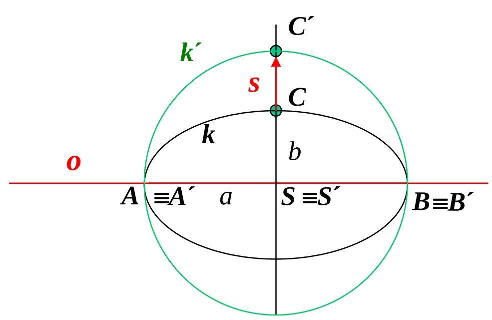
Poznámka: Dotyčnice v krajných bodoch priemeru kružnice sú kolmé na tento priemer, teda v perspektívne afinnom obraze sú rovnobežné s obrazom kolmého priemeru kružnice.

Špeciálne perspektívne afinity medzi kružnicou a elipsou

Majme elipsu k danú vrcholmi AB, CD:

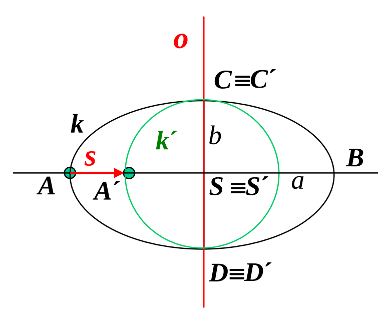
1) Perspektívna afinita roviny $\pi \to \pi$:

- os afinity $o = AB \Rightarrow A \equiv A´, B \equiv B´, S \equiv S´$,
- $k \to k´$, $k´$ je hlavná vrcholová kružnica $k´ = [S, r = a]$,
- $C \to C´$, smer $s = CC´ \perp o$,
- charakteristika $k = \dfrac{a}{b}$.



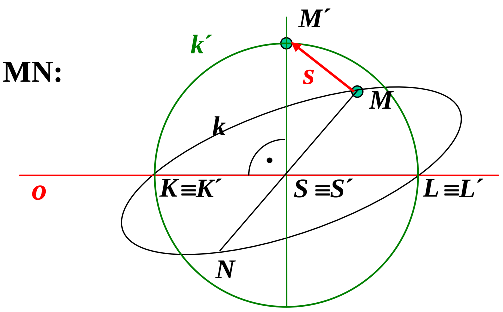
2) Perspektívna afinita roviny $\pi \to \pi$:

- os afinity $o = CD \Rightarrow C \equiv C´, D \equiv D´, S \equiv S´$,
- $k \to k´$, $k´$ je vedľajšia vrcholová kružnica $k´ = [S, \mathrm{r} = b]$,
- $A \to A´$, smer $s = AA´ \perp o$,
- charakteristika $k = \dfrac{b}{a}$.



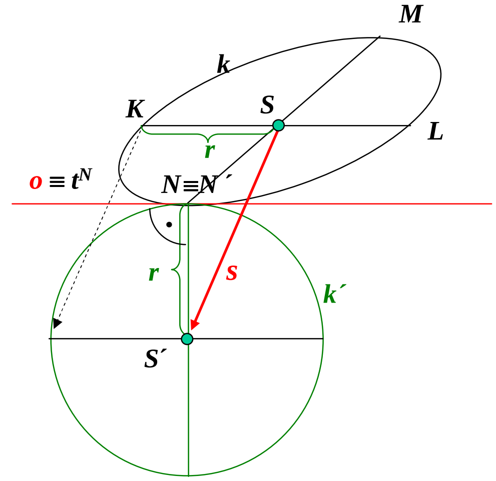
Špeciálne perspektívne afinity medzi kružnicou a elipsou

Majme elipsu *k* danú združenými priemermi KL, MN:



3) Perspektívna afinita roviny π→π:

- os afinity $o = KL \Rightarrow K \equiv K´, L \equiv L´, S \equiv S´$,
- $k \to k´$, $k´$ je kružnica $k´ = [S, r = |SK|]$,
- $M \to M´$, $SM´ \perp KL$, smer afinity je $s = MM´$.

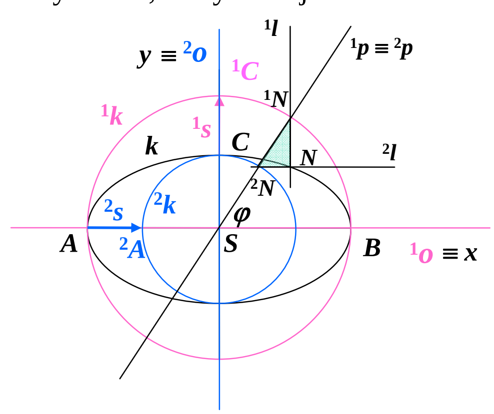


4) Perspektívna afinita roviny π→π:

- os afinity $o = t^N \Rightarrow N \equiv N´$,
- $KL \parallel o \Rightarrow k \to k´$, $k´$ je kružnica s polomerom $r = |SK|$,
- $MN \to M´N´$, $M´N´ \perp o$, $|S´N´| = r$,
- **$S \to S´$, smer afinity je $s = SS´$.**

Zástavková (trojuholníková) konštrukcia elipsy

Majme elipsu *k* danú vrcholmi *AB*, *CD*, zostrojte ľubovoľný bod *N*, ktorý na nej leží:



1) Perspektívna afinita roviny π→π:

- os afinity $^1o = AB \Rightarrow k \to {}^1k$, $^1k = [S, r = a]$,
- $C \to {}^1C$, smer $^1s \perp {}^1o$.

2) Perspektívna afinita roviny π→π:

- os afinity $^2o = CD \Rightarrow k \to {}^2k$, $^2k = [S, r = b]$,
- $A \to {}^2A$, smer $^2s \perp {}^2o$,

3) Zvolíme priamku $^1p \equiv {}^2p : S \in {}^1p \equiv {}^2p$,
$^1p \cap {}^1k = {}^1N$, $^2p \cap {}^2k = {}^2N$.

4) Zostrojíme priamky $^1l : {}^1N \in {}^1l$, $^1l \parallel {}^1s$,
$^2l : {}^2N \in {}^2l$, $^2l \parallel {}^2s$.

5) Bod N: $^1l \cap {}^2l = N$, N je bod elipsy.

Dôkaz:

$^1o \equiv x$, $^2o \equiv y$, $S[0, 0]$; $N\,[x^{1N}, y^{2N}]$,

$^1N \in {}^1k$: $\boxed{x = a \cos \varphi,}$ → teda $N\,[a \cos \varphi, b \sin \varphi]$

$y = a \sin \varphi$,

$^2N \in {}^2k$: $x = b \cos \varphi$,

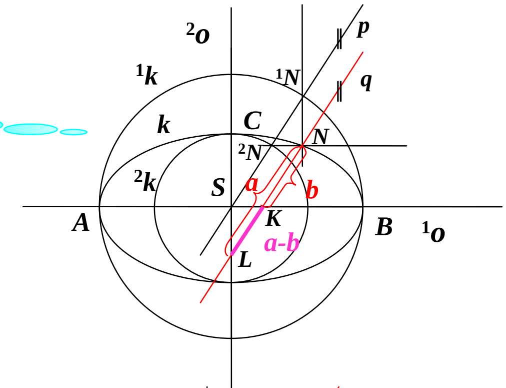
$\boxed{y = b \sin \varphi,}$

$\Rightarrow N \in k$: $x = a \cos \varphi$,
$y = b \sin \varphi$, čo je parametrické vyjadrenie elipsy.

Rozdielová (prúžková) konštrukcia elipsy

- Zostrojme priamku q: $N \in q$, $q \parallel p$.
- Nech $q \cap {}^1o = K$ a $q \cap {}^2o = L$.

Aké sú dĺžky úsečiek *NK* a *NL* ?

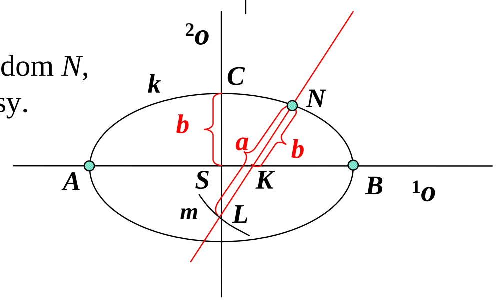


Z rovnobežníka $SKN\,{}^2N$ vyplýva, e $|NK| = b$,
z rovnobežníka $SLN\,{}^1N$ vyplýva, že $|NL| = a$.

Teda dĺžka úsečky KL je rozdielom hlavnej a vedľajšej polosi: $|KL| = a - b$,

Postup rozdielovej konštrukcie

Majme elipsu k danú vrcholmi AB a ľubovoľným bodom N, ktorý na nej leží. Určte dĺžku vedľajšej polosi b elipsy.



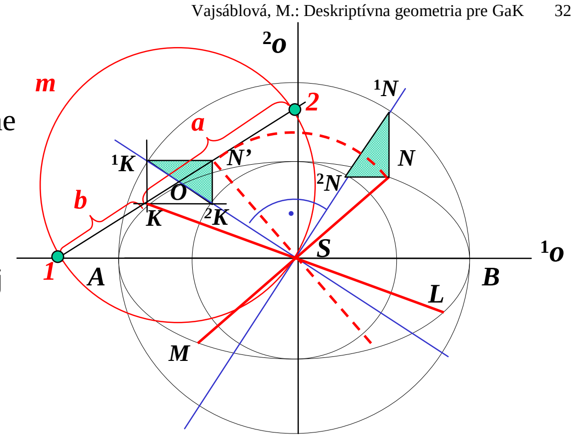
1) Zostrojíme kružnicu $m = [N, r = a]$.

2) $m \cap {}^2o = L$.

3) $NL \cap {}^1o = K$.

4) $|NK| = b$.

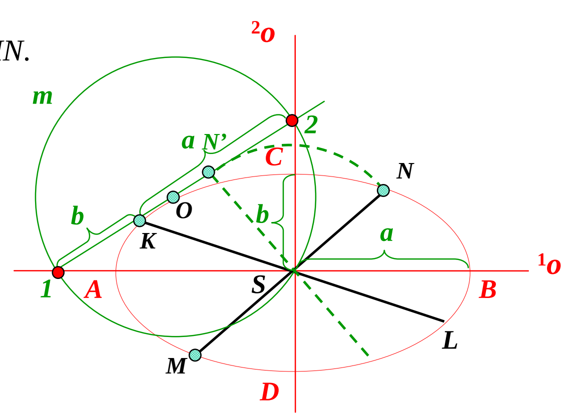
Rytzova konštrukcia



- Pomocou zástavkovej konštrukcie zostrojíme združené priemery KL, MN elipsy.
- $\Delta K\,{}^1K\,{}^2K$ doplníme na obdĺžnik $K\,{}^1K\,{}^2K\,N'$.
- $\Delta {}^1K\,{}^2K\,N' \cong \Delta {}^1N\,{}^2N\,N$ a sú otočené o 90° okolo S.
- Body 1, 2 sú priesečníky osí a Thalesovej kružnice m, ktorej stred je O =stred KN'.
- Z lichobežníka $1K\,{}^2KS$ vyplýva, že $|1K| = b$,
také platí, že $|2K| = |{}^1KS| = a$.

Postup Rytzovej konštrukcie

Majme elipsu k danú združenými priemermi KL, MN. Zostrojte osi elipsy.



1) Otočíme N o 90° do N'.

2) O: stred KN'.

3) Zostrojíme kružnicu $m = [O, r = |OS|]$.

4) $m \cap KN' = \{1, 2\}$.

5) $1S = {}^1o$, $2S = {}^2o$, ***hlavná os je v ostrom uhle priemerov** KL, MN.*

6) $|1K| = b$, $|2K| = a$.