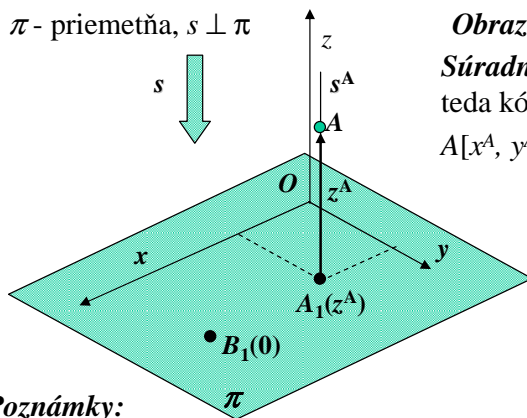


Kótované premietanie

Základné pojmy a obraz bodu v kótovanom premietaní

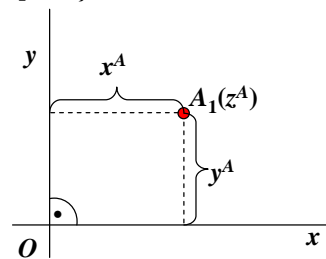
Definícia 1: Kótované premietanie je bijektívne zobrazenie, ktoré každému bodu z E_3 priradí jeho kolmý priemet do priemetne π spolu s reálnym číslom, ktoré nazývame kóta, jej absolútna hodnota je vzdialenosť bodu od priemetne.



Obraz bodu A: $\pi \cap s^A = A_1$, $z^A = |A, \pi|$

Súradnicová sústava (O, x, y, z): x, y ležia v π a $z \perp \pi$, teda kóta bodu je z^A .

$A[x^A, y^A, z^A] \rightarrow \{A_1[x^A, y^A], z^A\}$



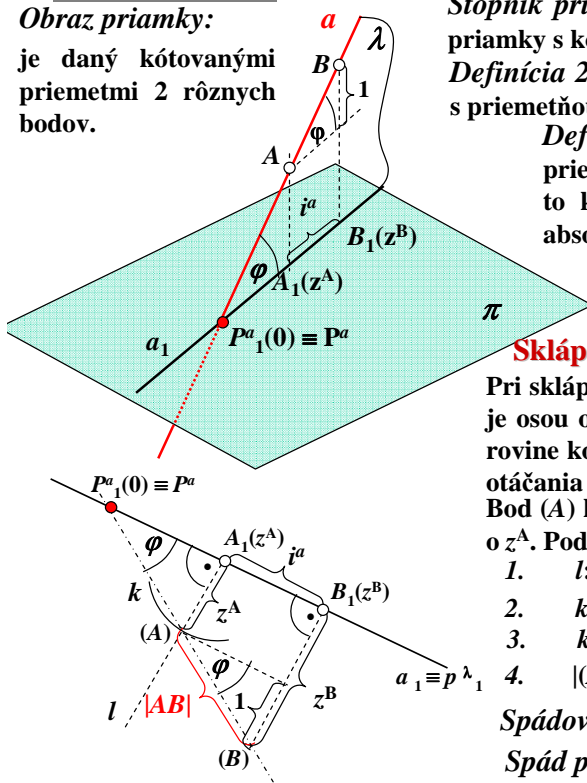
Poznámky:

- Priemetňa π rozdeľuje priestor na dva polpriestory. Kótam bodov jedného z nich pridelujeme kladné znamienko (tzv. body „nad“ priemeňou), opačnému záporné (tzv. body „pod“ priemeňou).
- Ak bod B leží v priemetni π , potom $z^B = 0$.
- V kótovanom premietaní je časté nahrádzať priemetňu ľubovoľnou rovinou, ktorá je s ňou rovnobežná $\pi \parallel \pi'(z^\pi)$, nazývaná porovnávacia rovina. V konštrukciách sa potom používajú relatívne kóty – orientované vzdialenosti od porovnávacej roviny.

Obraz priamky v kótovanom premietaní

Obraz priamky:

je daný kótovanými priemetmi 2 rôznych bodov.



Stopník priamky: $a \cap \pi = P^a$ ($z^P = 0$) – stopník priamky a , bod priamky s kótou 0.

Definícia 2: Spád priamky je tangens uhla, ktorý zvierajú priamka s priemetňou. $\angle(a, \pi) = \varphi$, $\varphi \neq 90^\circ$, potom $s^a = \text{tg } \varphi$.

Definícia 3: Interval priamky, ktorá nie je kolmá na priemetňu, je prevrátená hodnota jej spádu, graficky je to kótovaný priemet takej úsečky priamky a , ktorej absolútna hodnota rozdielu kót jej krajných bodov je 1.

Nech $a = AB$, $|z^A - z^B| = 1$,

potom $i^a = |A_1B_1| = 1/\text{tg } \varphi = 1/s^a$.

Sklápanie premietacej roviny priamky do priemetne

Pri sklápaní premietacej roviny priamky a , teda otáčaní o 90° , je osou otáčania priamka a_1 , kružnica otáčania bodu A leží v rovine kolmej na os otáčania, stredom otáčania je A_1 , polomer otáčania je kóta z^A .

Bod (A) leží na kolmici na a_1 v bode A_1 a je od neho vzdialený o z^A . Podobne sklópime bod B , potom $|(A)(B)| = |AB|$.

1. $l: A_1 \in l, l \perp a_1$,
2. $k = [A_1, r = z^A]$,
3. $k \cap l = (A)$.
4. $|(A)(B)| = |AB|$.

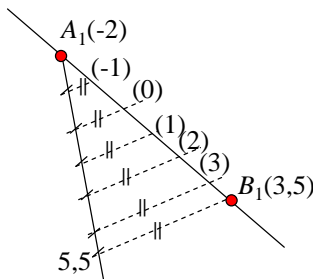
Spádový uhol priamky a : $\varphi = \angle(a, \pi) = \angle(a_1, (a))$.

Spád priamky: $s^a = \text{tg } \varphi$.

Interval priamky: $i^a = |A_1B_1| = 1/\text{tg } \varphi = 1/s^a$.

Stupňovanie priamky v kótovanom premietaní

Úloha: Na priamke $a = AB$ zostrojíte postupnosť bodov s celočíselnými kótami.

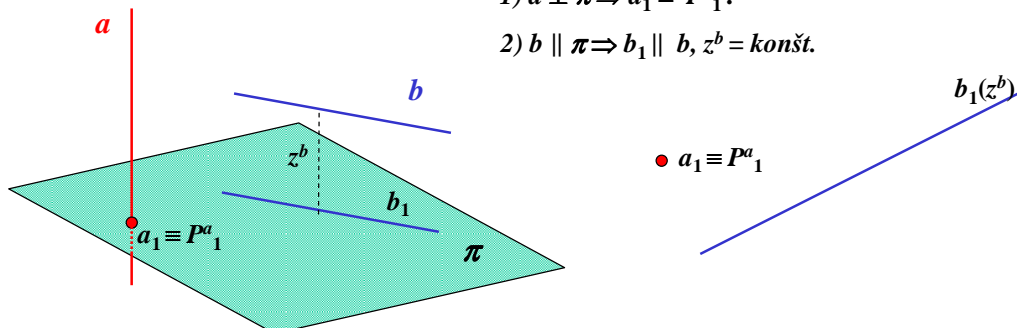


1. Bodom A_1 zostrojíme ľubovoľnú rôznoobežku s priamkou a .
2. Od bodu A_1 naniesieme taký počet zhodných úsečiek (dielikov), ktorý sa rovná absolútnej hodnote rozdielu kót bodov A, B .
3. Koncový bod spojíme s B_1 a v smere tejto spojnice premietneme všetky nanesené dieliky na priamku a_1 .

Obraz priamok v kótovanom premietaní

1) $a \perp \pi \Rightarrow a_1 \equiv P^a$.

2) $b \parallel \pi \Rightarrow b_1 \parallel b, z^b = \text{konšt.}$

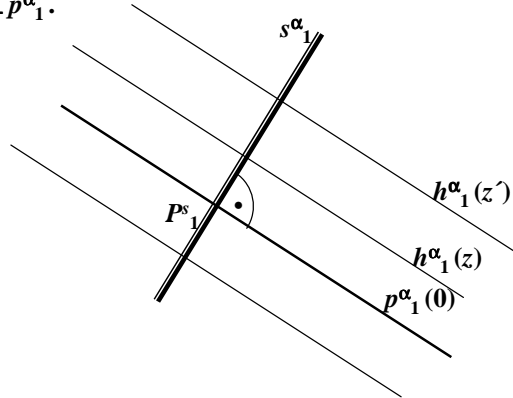
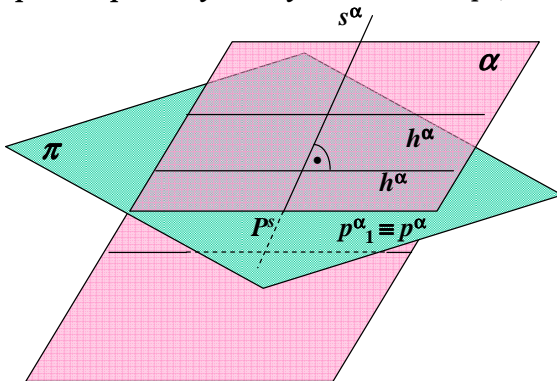


Obraz roviny v kótovanom premietaní

Stopa roviny α : $\alpha \cap \pi = p^\alpha$.

Hlavné priamky roviny α : $h^\alpha \parallel \pi \Rightarrow h^{\alpha_1} \parallel p^{\alpha_1}, z^h = \text{konšt.}$

Spádové priamky roviny α : $s^\alpha \perp h^\alpha (p^\alpha) \Rightarrow s^{\alpha_1} \perp p^{\alpha_1}$.



Definícia 4: Spád roviny sa rovná spádu jej spádovej priamky.

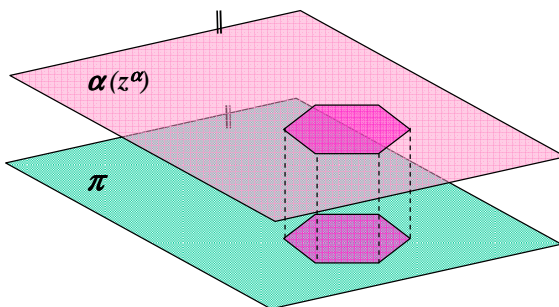
Definícia 5: Interval roviny sa rovná intervalu jej spádovej priamky.

Definícia 6: Vystupňovanú spádovú priamku roviny nazývame *spádové merítko roviny*.

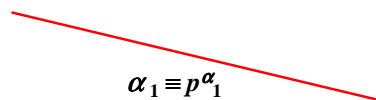
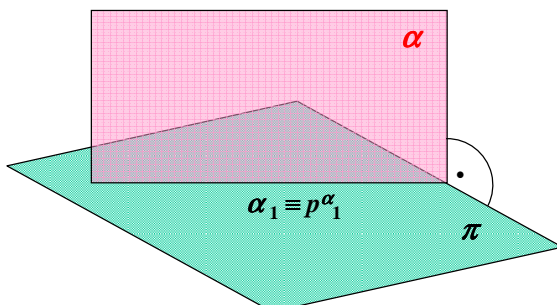
Poznámka: Rovina v kótovanom premietaní býva daná: - 3 nekolineárnymi bodmi,
- 2 rôznymi priamkami,
- spádovou priamkou.

Špeciálne roviny v kótovanom premietaní

1) $\alpha \parallel \pi \Rightarrow z^\alpha = \text{konšt.}$, rovinné útvary sa premietajú do zhodných.

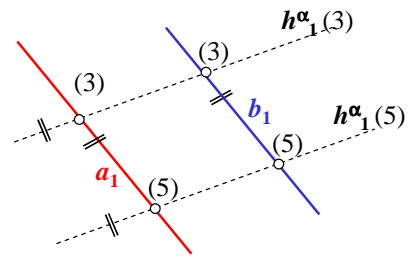


3) $\alpha \perp \pi \Rightarrow \alpha_1 \equiv p^{\alpha_1}$.

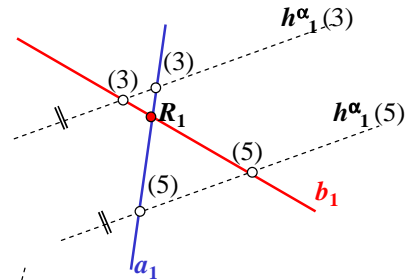


Vzájomná poloha 2 priamok v kótovanom premietaní

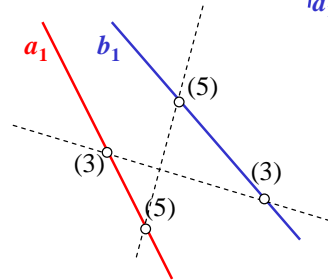
1) **Rovnobežné priamky** a, b , $a \parallel b$ nie sú kolmé na priemetňu $\pi \Rightarrow$ existuje rovina $\alpha(a, b)$, teda spojnice bodov priamok a a b s rovnakými kótami ležia na hlavných priamkach roviny α .



2) **Rôznobežné priamky** a, b , $a \cap b = R \Rightarrow a_1 \cap b_1 = R_1$, a, b nie sú kolmé na priemetňu $\pi \Rightarrow$ existuje rovina $\alpha(a, b)$, teda spojnice bodov priamok a a b s rovnakými kótami ležia na hlavných priamkach roviny α .

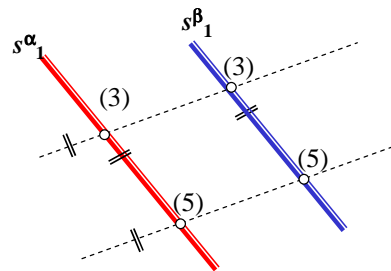
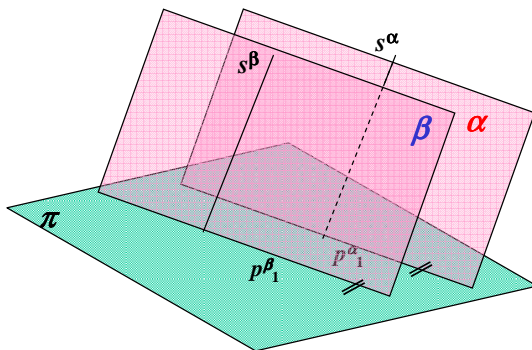


3) **Mimobežné priamky** a, b , neplatí 1), 2).

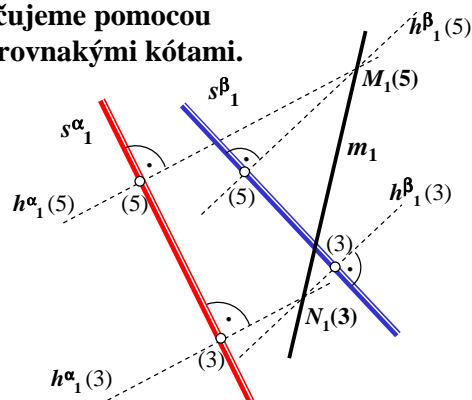
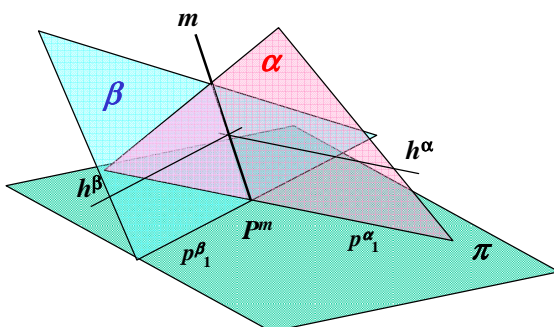


Vzájomná poloha 2 rovín v kótovanom premietaní

1) **Rovnobežné roviny:** $\alpha \parallel \beta \Rightarrow s^\alpha \parallel s^\beta$.



2) **Rôznobežné roviny:** $\alpha \cap \beta = m \Rightarrow$ priamku m určíme pomocou priesečníkov hlavných priamok roviny α a β s rovnakými kótami.



Vzájomná poloha priamky a roviny v kótovanom premietaní

Všeobecný postup $a \cap \alpha$:

1. Priamkou a preložíme ľubovoľnú rovinu β : $a \subset \beta$.
2. Nech m je priesečnica rovín α a β : $\alpha \cap \beta = m$.
3. Podľa vzájomnej polohy priamok a a m určíme vzájomnú polohu priamky a a roviny α :

$$a, a \equiv m \Rightarrow a \subset \alpha$$

$$b, a \parallel m \Rightarrow a \parallel \alpha$$

$$c, a \cap m = R \Rightarrow R = a \cap \alpha$$

Postup v kótovanom premietaní, dané je $a(A, B)$, $\alpha(s^\alpha)$, určte $a \cap \alpha$:

1. β : $a \subset \beta$ - ľub. $A \in h^\beta(z^A)$, $B \in h^\beta(z^B)$.

2. $\alpha \cap \beta = m$, $m = MN$, kde:

$$M = h^\alpha(z^A) \cap h^\beta(z^A), N = h^\alpha(z^B) \cap h^\beta(z^B),$$

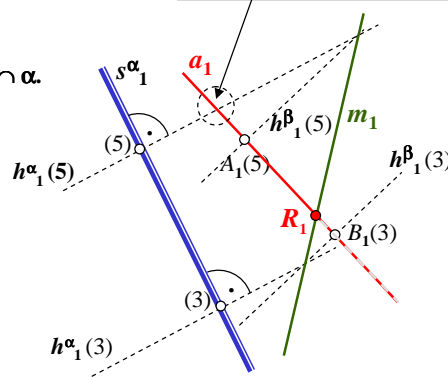
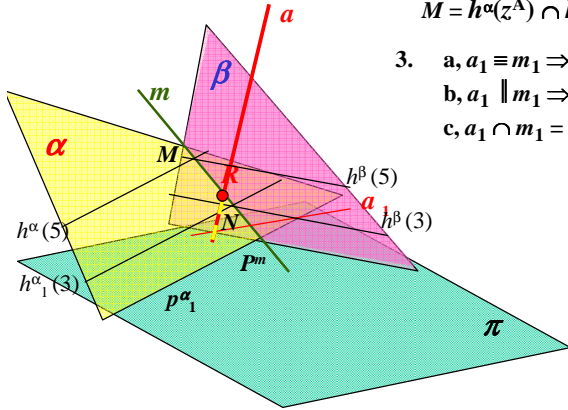
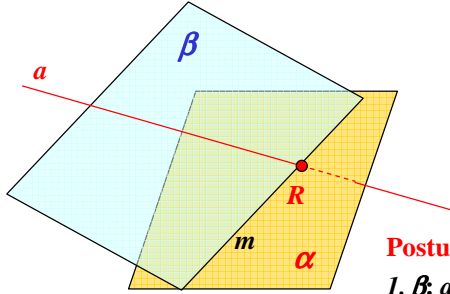
3. a, $a_1 \equiv m_1 \Rightarrow a \subset \alpha$

b, $a_1 \parallel m_1 \Rightarrow a \parallel \alpha$

c, $a_1 \cap m_1 = R_1 \Rightarrow R = a \cap \alpha$.

Viditeľnosť:

$$z^\alpha = 5 < z^a \Rightarrow R_1 A_1 \text{ vidieť}$$



Priamka kolmá na rovinu v kótovanom premietaní

Dôsledok vety o kolmom priemete pravého uhla hovorí, že kolmý priemet kolmice na rovinu je kolmý na hlavné priamky roviny, a teda na stopu roviny, a teda nech priamka $k \perp \alpha$, potom v kótovanom premietaní platí:

$$k_1 \perp p^{\alpha_1} (h^{\alpha_1}), \text{ tiež } k_1 \equiv s^{\alpha_1}$$

Kolmica na rovinu je kolmá aj na spádové priamky roviny, a teda nech $k_1 \equiv s^{\alpha_1}$, potom platí, že ležia v spoločnej premietacej rovine λ a v jej sklopení platí:

$$(k) \perp (s^\alpha)$$

