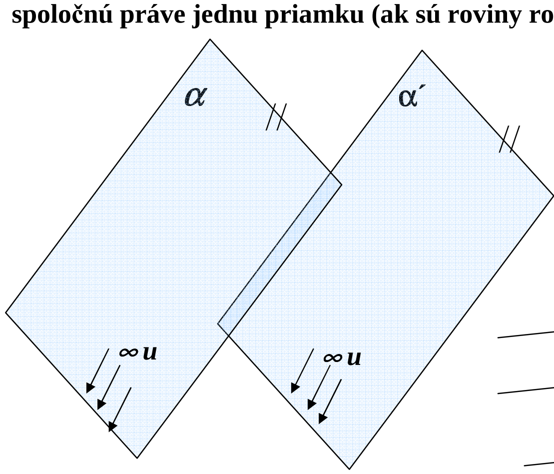
Margita Vajsáblová

Stredové premietanie

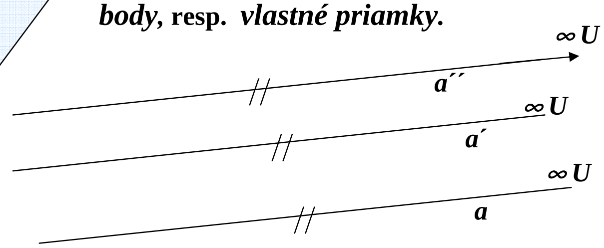
1. časť - polohové úlohy

Rozšírený Euklidovský priestor

- **V Euklidovskom priestore množinu všetkých navzájom rovnobežných priamok nazývame *smer* a množinu všetkých navzájom rovnobežných rovín nazývame *polohou*.**
- **Smer je určený jednou priamkou, poloha je určená jednou rovinou.**
- **Teda všetky navzájom rovnobežné priamky sú priamkami toho istého smeru, ktorý je niekedy výhodné nazývať *nevlastný bod* (označenie ∞*U*, ∞*V*, ...). Potom pre každé dve rôzne priamky v rovine môžeme povedať, že majú spoločný práve jeden bod (ak sú tieto priamky rovnobežné, majú spoločný nevlastný bod).**
- **Dve rovnobežné roviny majú spoločnú polohu, ktorú je niekedy výhodné nazývať *nevlastná priamka* (označenie ∞ *u*, ∞ *v*, ...). Potom pre každé dve rôzne roviny môžeme povedať, že majú spoločnú práve jednu priamku (ak sú roviny rovnobežné, majú spoločnú nevlastnú priamku).**

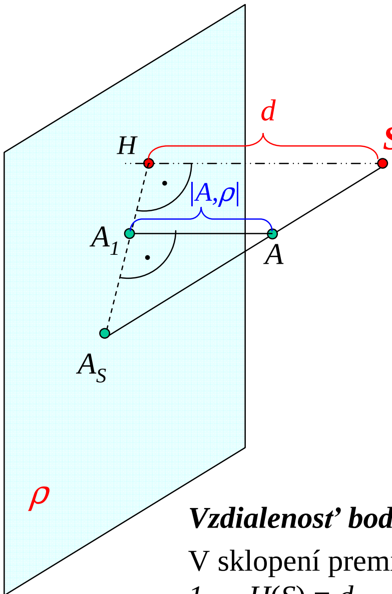


- **Euklidovský priestor doplnený o všetky nevlastné body a nevlastné priamky nazývame *rozšírený Euklidovský priestor* (označenie $\overline{E_3}$).**
- **Niekedy je výhodné rozlišovať body a priamky, ktoré nie sú nevlastné a nazývať ich *vlastné body*, resp. *vlastné priamky*.**



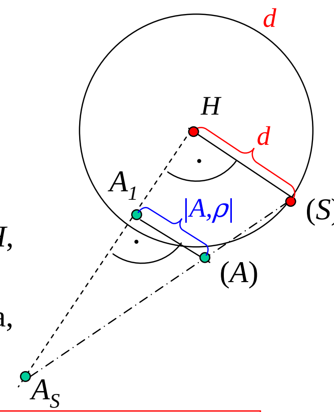
Stredové premietanie – základné pojmy

Definícia: Majme bod S a vlastnú rovinu ρ v $\overline{E_3}$, $S \notin \rho$. Zobrazenie, ktoré každému bodu $A \in \overline{E_3} - \{S\}$ priradí usporiadanú dvojicu $[A_1, A_S]$, kde A_1 je kolmý priemet bodu A do ρ a A_S je stredový priemet bodu A do ρ cez stred S, voláme stredové premietanie na priemetňu ρ.



Základné pojmy:

- *ρ – priemetňa* ,
- *S – stred premietania*,
- *H – hlavný bod –* kolmý priemet bodu S do ρ ,
- *$d = |S, \rho|$ – dištancia*,
- Stredové premietanie je určené: (H, d) *– prvky vnútornej orientácie*
- *$d = [H, r = d]$* – dištančná kružnica, pre jednoduchosť ju tiež budeme označovať *d*.



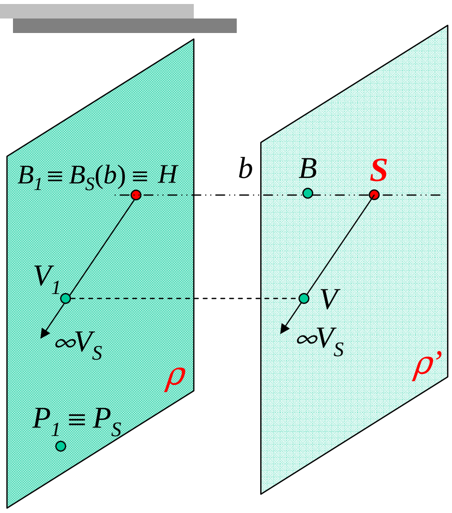
Obraz bodu: $A \rightarrow [A_1, A_S]$, $H \in A_1A_S$

Vzdialenosť bodu A od priemetne ρ:

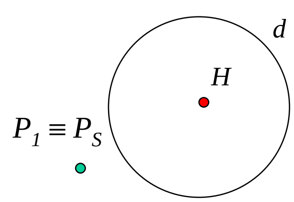
V sklopení premietacej roviny priamky SA do priemetne ρ :

1. $H(S) = d$,
2. $(A) \in (S)A_S$, $|A,\rho| = |(A)A_1|$.

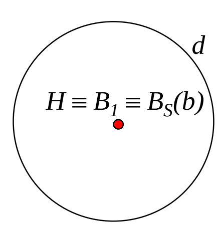
Stredové premietanie – obraz bodu



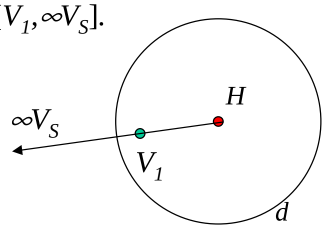
- Ak bod $P \in \rho$ potom $P_1 \equiv P_S$.



- Ak bod $B \in HS$, potom $B_1 \equiv B_S \equiv H$ a obraz bodu musí byť daný aj $b = |B, \rho|$.



- Nech bod $V \in \rho'$, kde ρ': $S \in \rho'$, $\rho' \parallel \rho$, potom $V \rightarrow [V_1, \infty V_S]$.

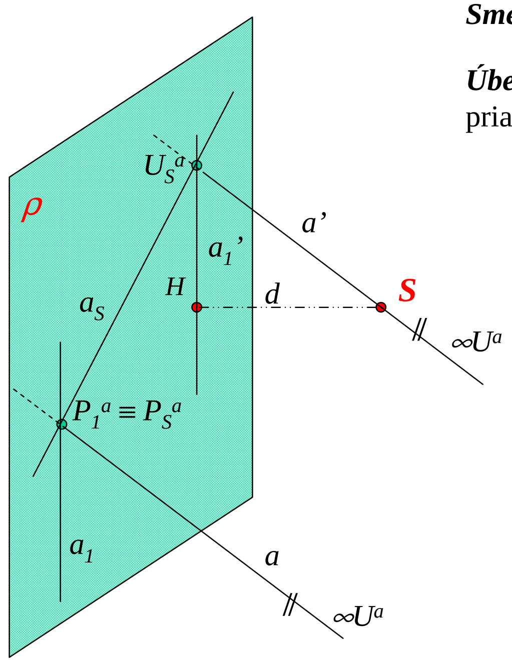


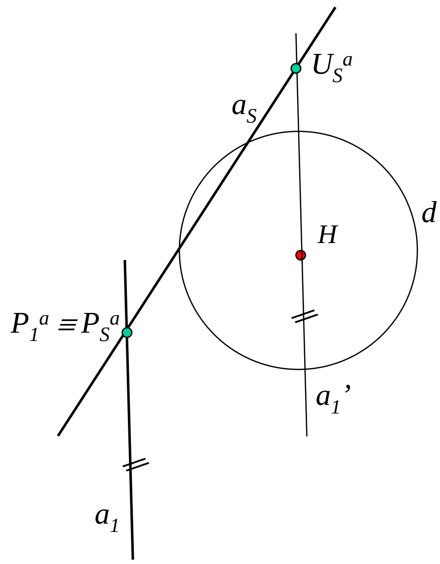
Stredové premietanie – obraz priamky

Stopník priamky *a: $a \cap \rho = P^a$, platí $P_1^a \equiv P_s^a$.*

Smerová priamka $a´$ priamky a : $S \in a´$, $a´ \parallel a$.

Úbežník priamky a je U_S^a: ak ∞U^a je nevlastný bod priamky a, , potom $U_S^a = a´ \cap \rho$, kde $S \in a´$, $a´ \parallel a$.

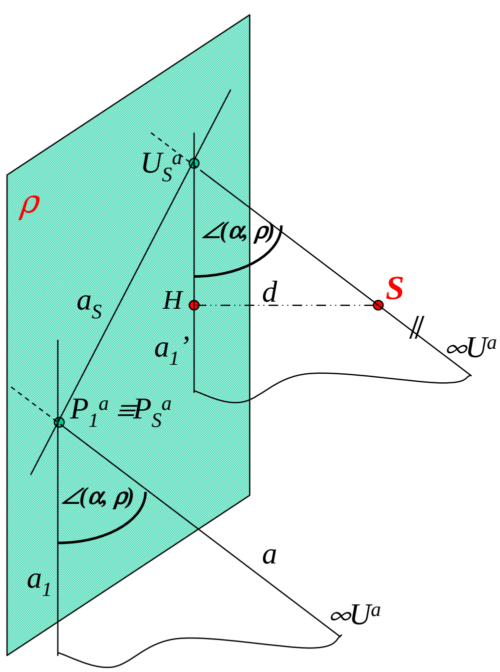


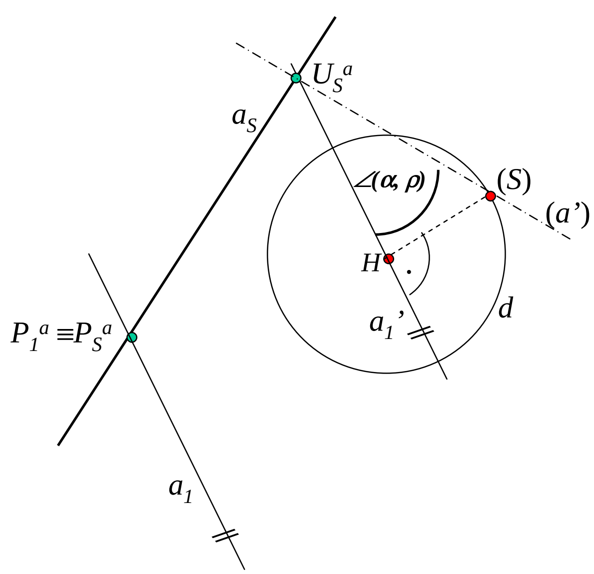


Uhol priamky s priemetňou

V stredovom premietaní sa uhol priamky s priemetňou rovná uhlu jej smerovej priamky s priemetňou: $\angle(a, \rho) = \angle(a', \rho)$

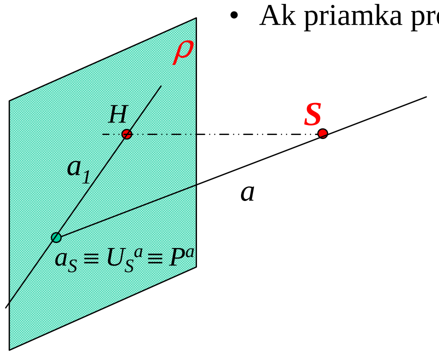
teda v sklopení: $\angle(a, \rho) = \angle((a'), a_1')$

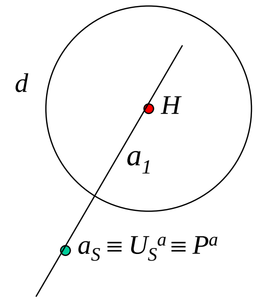




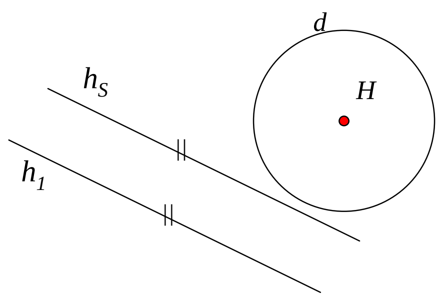
Stredové premietanie – obraz priamky

- Ak priamka prechádza bodom $S \in a$, potom $a_S \equiv U_S^a \equiv P_1^a$

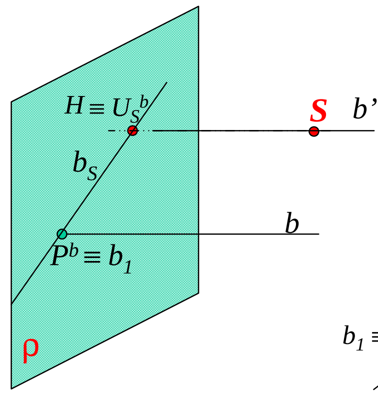


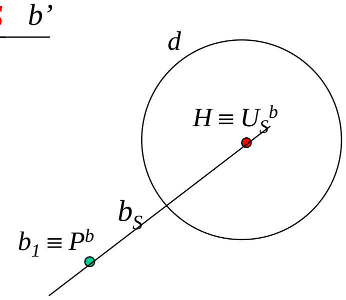


- Ak priamka $h \parallel \rho$ potom $h_1 \parallel h_S$.



- Ak priamka $b \perp \rho$, potom $U_S^b \equiv H$ a $b_1 \equiv P_1^b$



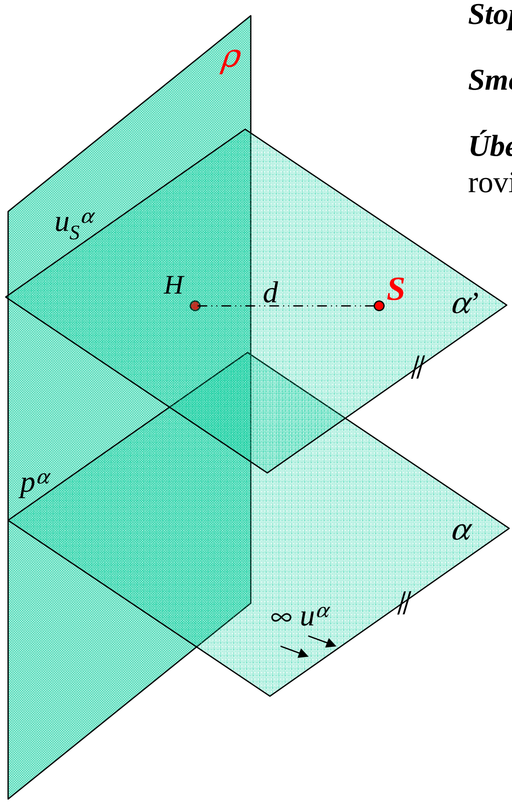


Stredové premietanie – obraz roviny

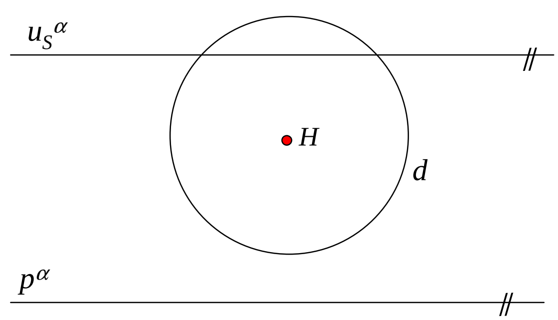
Stopa roviny α: $\alpha \cap \rho = p^\alpha$, platí $p_1^\alpha \equiv p_s^\alpha$.

Smerová rovina α' roviny α : $S \in \alpha'$, $\alpha' \parallel \alpha$.

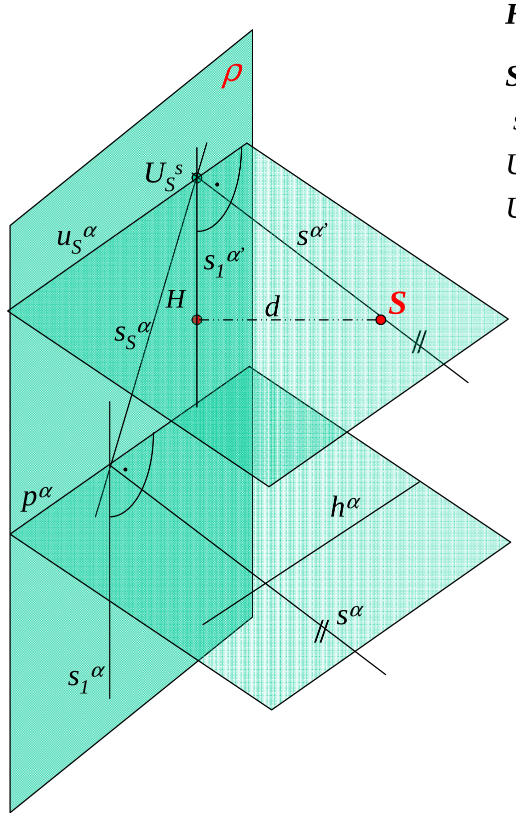
Úbežnica roviny α je u_S^α: ak $\infty\, u^\alpha$ je nevlastná rovina roviny α, , potom $u_S^\alpha = \alpha' \cap \rho$, kde $S \in \alpha'$, $\alpha' \parallel \alpha$.



Platí: $u_S^\alpha \parallel p^\alpha$



Stredové premietanie – obraz roviny



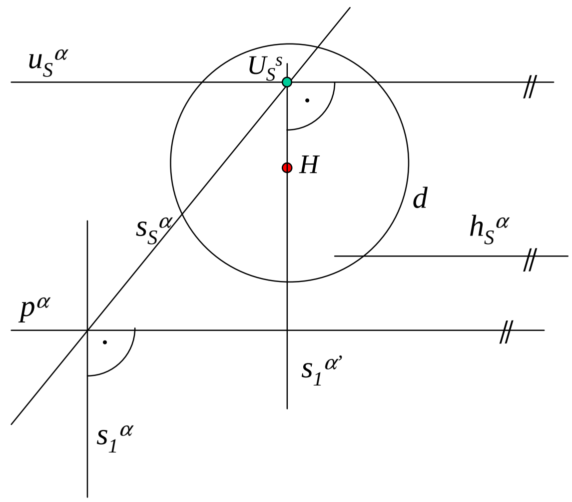
Hlavné priamky roviny α: $h^\alpha \parallel \rho$, platí $h^\alpha \parallel p^\alpha \parallel u_S^\alpha$

Spádové priamky roviny α: $s^\alpha \perp h^\alpha$ (p^α)

$s_1^\alpha \perp p^\alpha$,

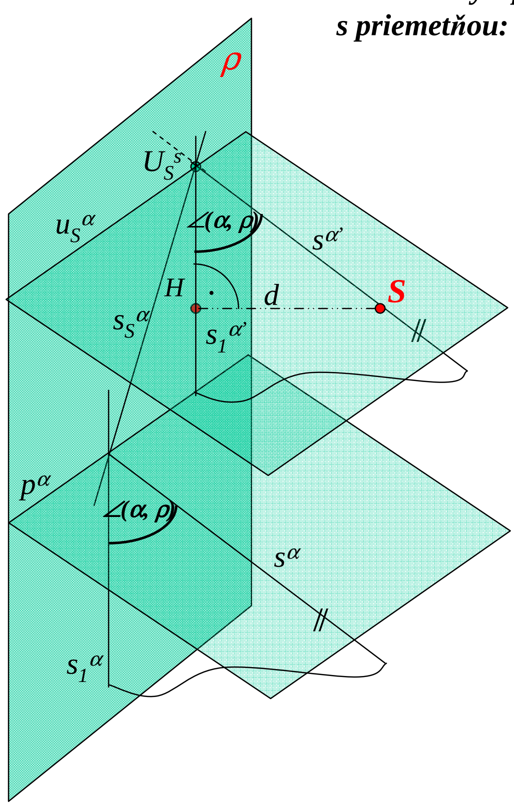
$U_S^s \in s_S^\alpha$, kde $U_S^s = s^{\alpha'} \cap u_S^\alpha$, $S \in s^{\alpha'}$, $s^{\alpha'} \parallel s^\alpha$

U_S^s – hlavný úbežník roviny α.



Uhol roviny s priemetňou

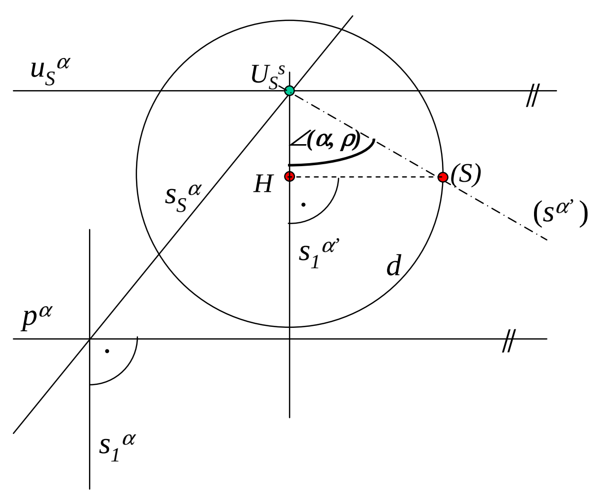
Uhol roviny s priemetňou sa rovná uhlu jej spádovej priamky s priemetňou: $\angle(\alpha, \rho) = \angle(s^\alpha, \rho)$



V stredovom premietaní platí:

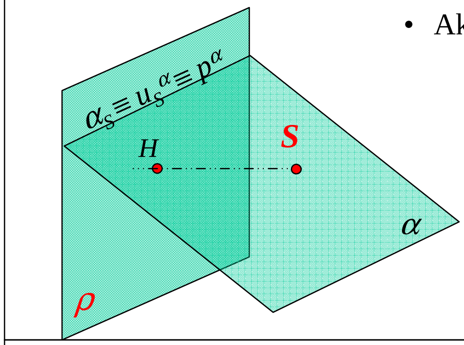
$\angle(s^\alpha, \rho) = \angle(s^{\alpha'}, \rho)$,

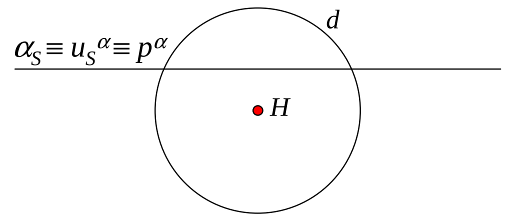
teda v sklopení: $\angle(\alpha, \rho) = \angle((s^{\alpha'}), s_1^\alpha)$



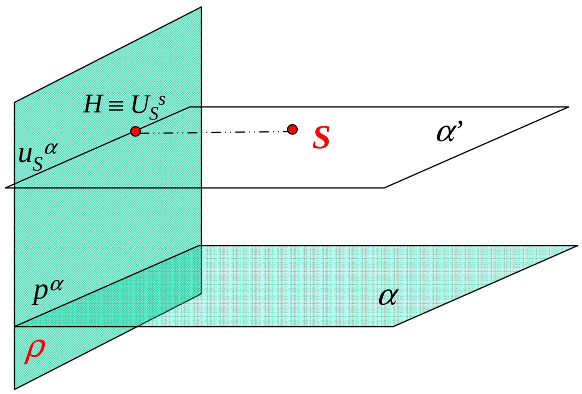
Stredové premietanie – obraz roviny

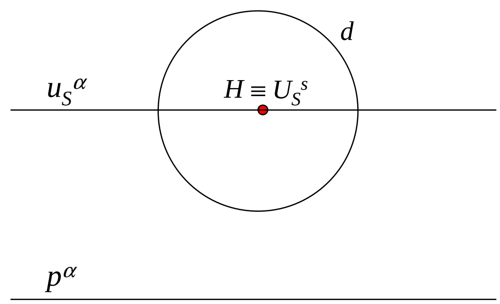
- Ak bod S leží v rovine α, $S \in \alpha$, potom $\alpha_S \equiv u_S^{\alpha} \equiv p^{\alpha}$





- Ak rovina $\alpha \perp \rho$, potom $H \in u_S^{\alpha}$

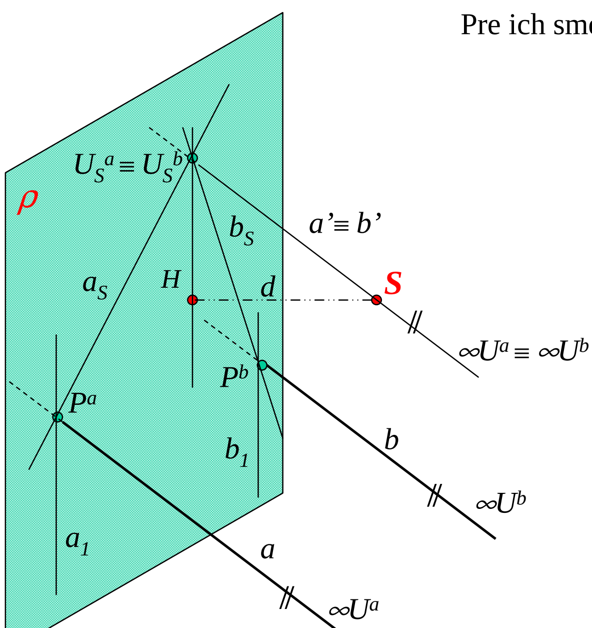


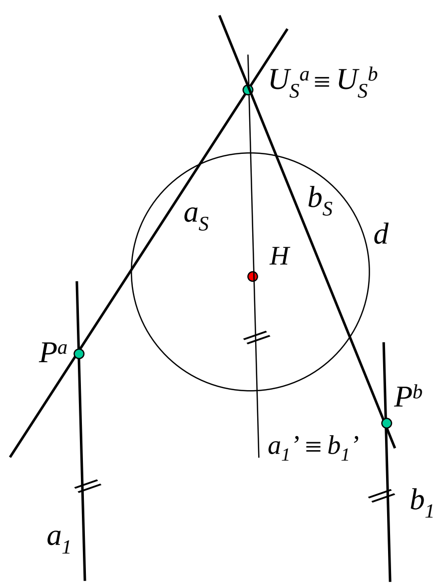


Vzájomná poloha 2 priamok v stredovom premietaní

1. Rovnobežné priamky $a \parallel b$, potom platí $U_S^a \equiv U_s^b$.

Pre ich smerové priamky platí $a' \equiv b'$.

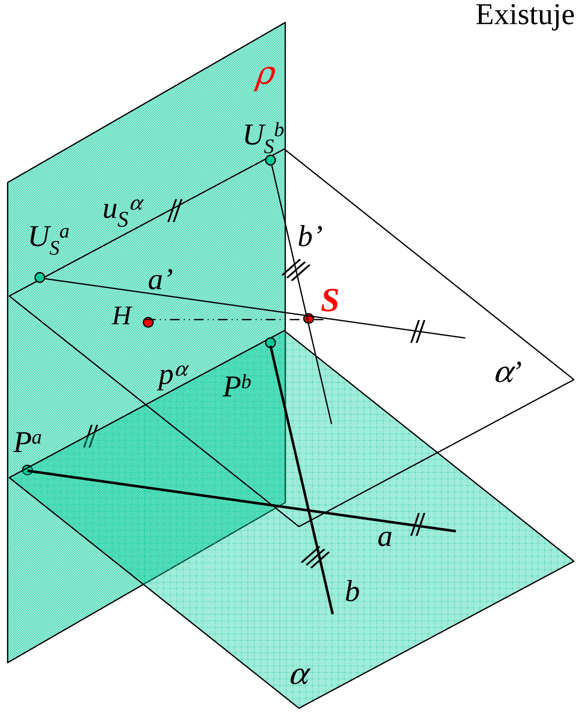


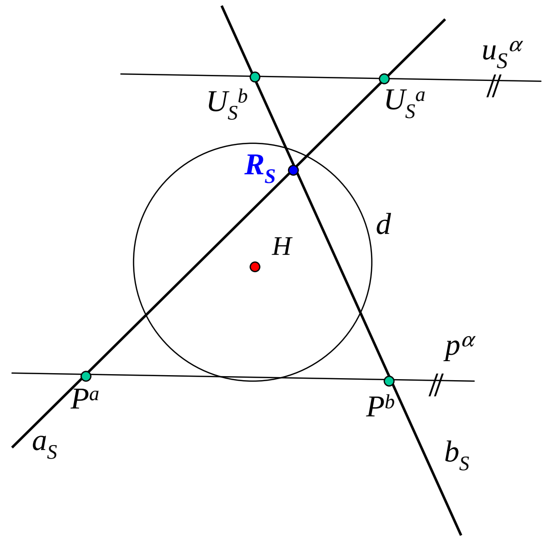


Vzájomná poloha 2 priamok v stredovom premietaní

2. Rôznobežné priamky a ✕b, potom platí $P^aP^b \parallel U_S^aU_s^b$.

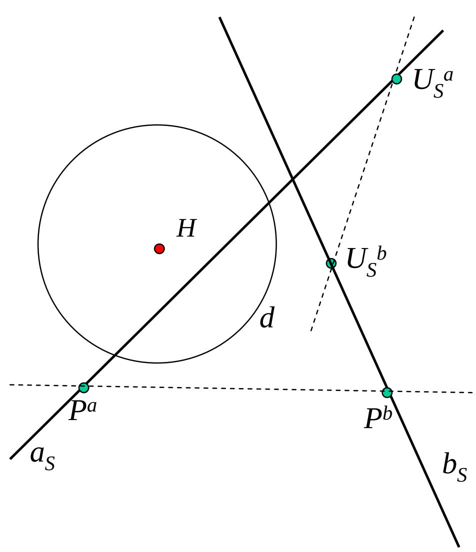
Existuje rovina $\alpha(a, b)$, $p^\alpha = P^aP^b$, $u_S^\alpha = U_S^aU_s^b$.





Vzájomná poloha 2 priamok v stredovom premietaní

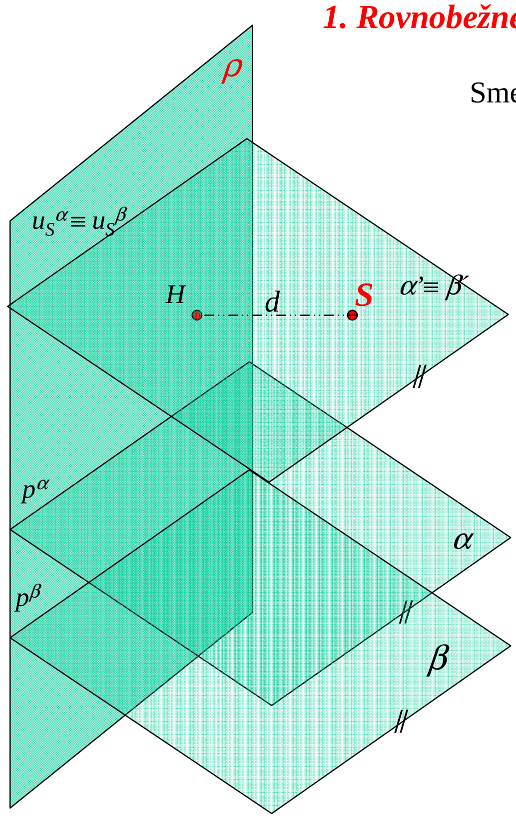
3. Mimobežné priamky a, b – neplatia pravidlá pre rovnobežné a rôznobežné priamky.

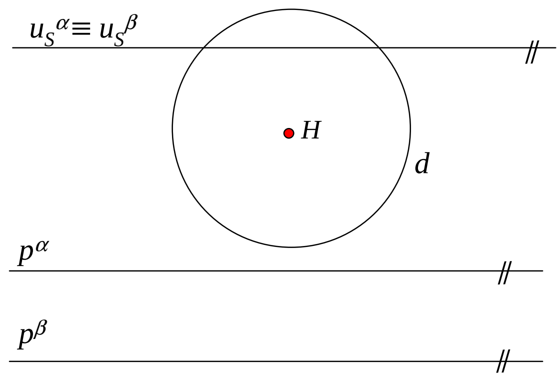


Vzájomná poloha 2 rovín v stredovom premietaní

1. Rovnobežné roviny $\alpha \parallel \beta$, potom platí $u_S^{\alpha} \equiv u_S^{\beta}$.

Smerové roviny sú totožné $\alpha' \equiv \beta'$.

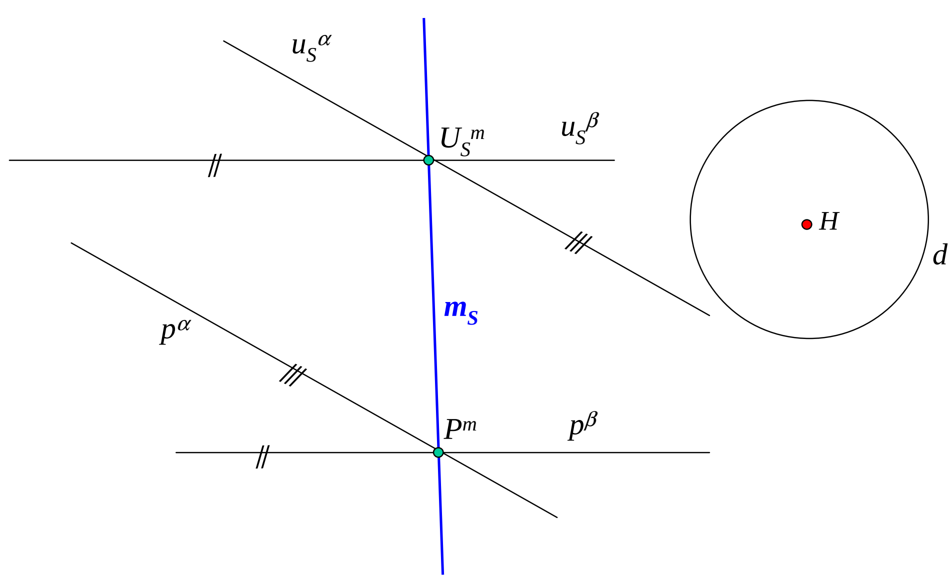




Vzájomná poloha 2 rovín v stredovom premietaní

2. Rôznobežné roviny $\alpha \cap \beta = m$, potom $P^m = p^{\alpha} \cap p^{\beta}$, $U_S^m = u_S^{\alpha} \cap u_S^{\beta}$

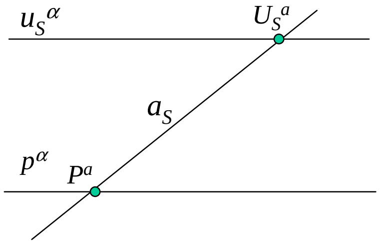
(ak m nie je rovnobežné s ρ).



Vzájomná poloha priamky a roviny v stredovom premietaní

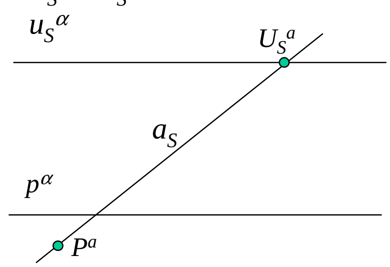
1. Priamka a leží v rovine α,

potom $P^a \in p^\alpha$, $U_S^a \in u_S^\alpha$.

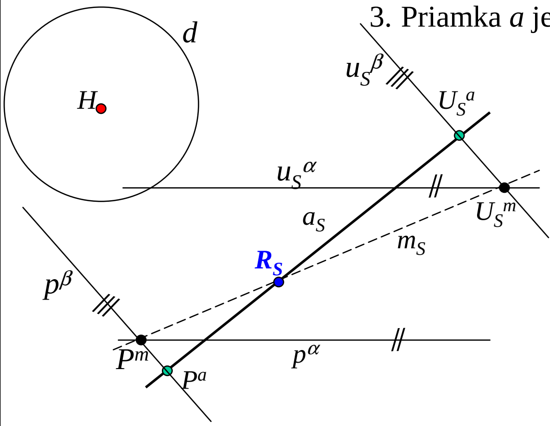


2. Priamka a je rovnobežná s rovinou α

potom $U_S^a \in u_S^\alpha$.



3. Priamka a je rôznobežná s rovinou α, teda $a \cap \alpha$ = R:



Riešenie v stredovom premietaní $a \cap \alpha$:

✓**Ľubovoľná rovina β(p^β, u_S^β), $a \subset \beta$:** $P^a \in p^\beta$, $U_S^a \in u_S^\beta$

✓**$\alpha \cap \beta = m$:** $P^m = p^\alpha \cap p^\beta$, $U_S^m = u_S^\alpha \cap u_S^\beta$, $m_S = P^m U_S^m$

✓**$a_S \cap m_S = \mathrm{R}_S \Rightarrow \mathrm{R} = a \cap \alpha$**