

Margita Vajsáblová

Geometrické základy fotogrametrie

- projektívne vlastnosti snímok

Základy projektívnej geometrie – Vajsáblová, M.: Metódy zobrazovania 66

dvoj pomer bodov na priamke a priamok jedného zväzku

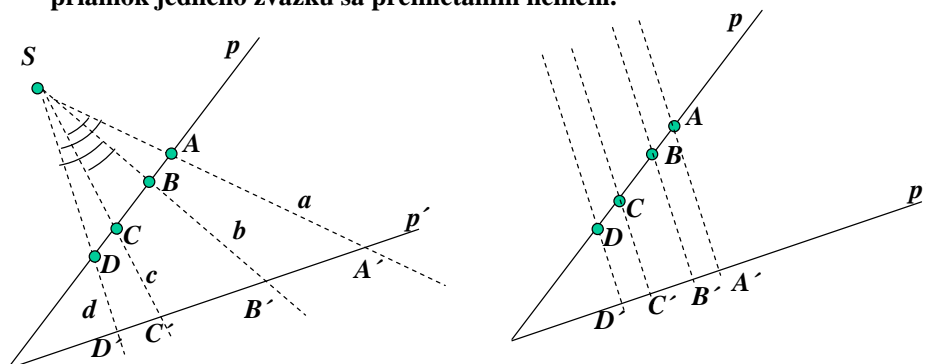
Definícia 4: Nech body $A, B, C, D, A \neq D, B \neq C, D$ ležia na jednej priamke. Potom **dvoj pomer** usporiadanej štvorice bodov A, B, C, D je číslo:

$$(A, B; C, D) = \frac{(A, B; C)}{(A, B; D)} = \frac{|\vec{AC}| |\vec{BD}|}{|\vec{BC}| |\vec{AD}|}.$$

Definícia 5: Nech priamky $a, b, c, d, a \neq d, b \neq c, d$ jedného zväzku (ležia v jednej rovine a prechádzajú jedným bodom). Potom **dvoj pomer usporiadanej štvorice priamok** a, b, c, d je číslo:

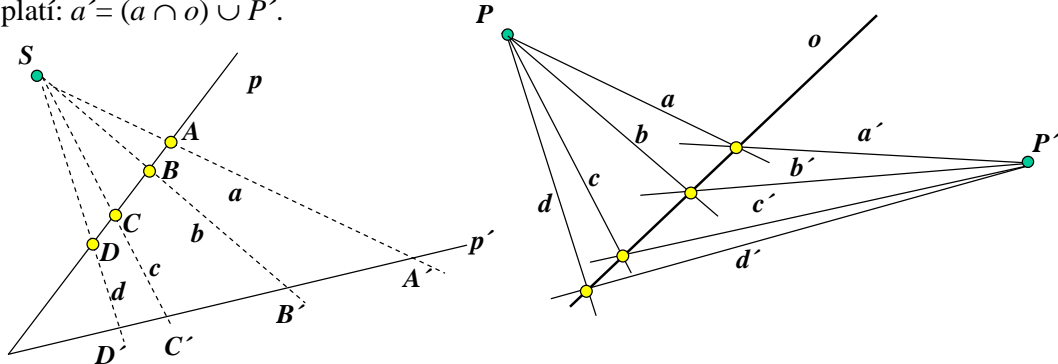
$$(a, b; c, d) = \frac{\sin \angle(a, c) \sin \angle(b, d)}{\sin \angle(b, c) \sin \angle(a, d)}.$$

Veta 2: Dvoj pomer usporiadanej štvorice bodov na priamke a dvoj pomer usporiadanej štvorice priamok jedného zväzku sa premietaním nemení.



Definícia: *Perspektívne zobrazenie bodového radu* priamky p na bodový rad priamky p' so stredom S ($S \notin p \cup p'$) je zobrazenie, ktoré každému bodu $A \in p$ priradí bod $A' = AS \cap p'$.

Definícia: *Perspektívne zobrazenie zväzku priamok* so stredom P na zväzok priamok so stredom P' s osou $(P \notin o, P' \notin o)$ je zobrazenie, ktoré každej priamke a zväzku P priradí priamku a' , pre ktorú platí: $a' = (a \cap o) \cup P'$.



Definícia: *Elementárnou perspektivitou bodového radu* p na zväzok priamok so stredom S je zobrazenie, ktoré každému bodu $A \in p$ priradí priamku $a = AS$.

Definícia: *Elementárnou perspektivitou zväzku priamok* so stredom S na bodový rad priamky p je zobrazenie, ktoré každej priamke a zväzku S priradí bod $A = p \cap a$.

Definícia: Zobrazenie, ktoré je zložením konečného počtu perspektív nazývame *projektivita*.

Veta: *Projektívne zobrazenia zachovávajú dvojpomer usporiadanej 4-rice bodov na priamke, aj dvojpomer usporiadanej 4-rice priamok zväzku.*

Projektívne vlastnosti snímok

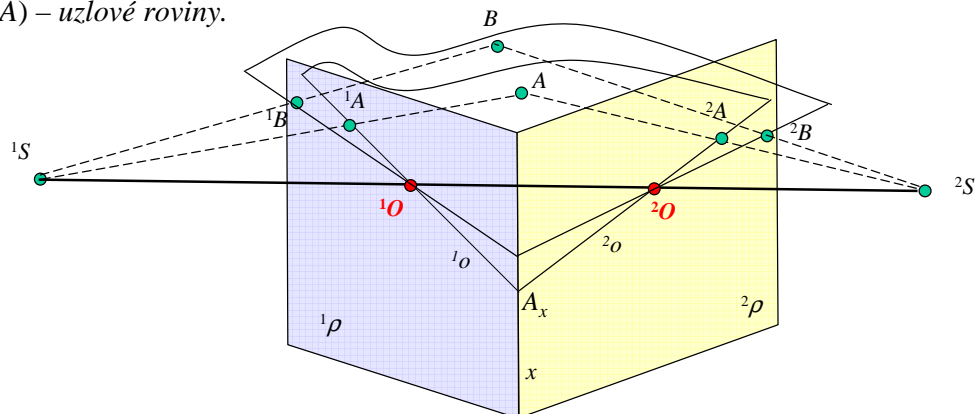
Nech ${}^1S, {}^2S$ sú projekčné centrá a ${}^1\rho, {}^2\rho$ (${}^1S \notin {}^1\rho, {}^2S \notin {}^2\rho$) – roviny snímky,

${}^1A, {}^2A$ – snímky bodu A .

${}^1O, {}^2O$ – uzlové body.

${}^1o, {}^2o$ nazývame *združené základné priamky* (uzlové lúče) a platí, ${}^1o \cap {}^2o = A_x \in x$. Bod A_x leží na troch priesečníciach rovín ${}^1\rho, {}^2\rho, \sigma^A = ({}^1S, {}^2S, A)$.

$\sigma^A = ({}^1S, {}^2S, A)$ – *uzlové roviny*.



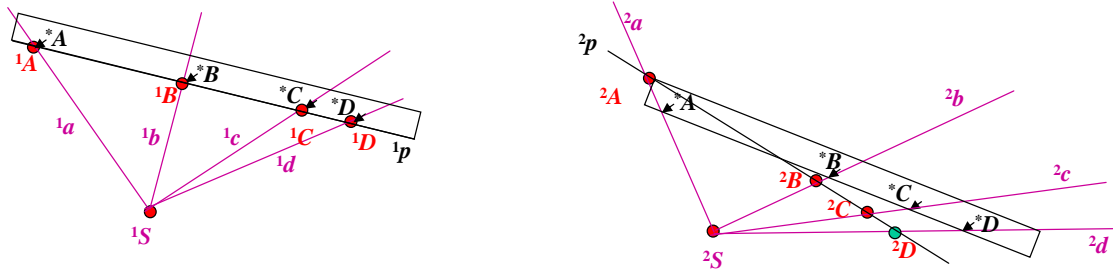
Veta: Medzi dvoma snímkami toho istého bodového radu je projektivita.

Veta: Medzi dvoma snímkami toho istého zväzku priamok je projektivita.

Veta: Združené základné priamky (uzlové priamky) sú vo vzťahu perspektivity.

Dané: štvorica bodov $^1A, ^1B, ^1C, ^1D$ na priamke 1p , body $^2A, ^2B, ^2C$ na priamke 2p .

Úloha: doplniť bod 2D na priamke 2p tak, aby platilo: $(^1A, ^1B; ^1C, ^1D) = (^2A, ^2B; ^2C, ^2D)$.



Zvolíme zväzok priamok so stredom 1S ($^1a = ^1S^1A, ^1b = ^1S^1B, ^1c = ^1S^1C, ^1d = ^1S^1D$) a zväzok 2S ($^2a = ^2S^2A, ^2b = ^2S^2B, ^2c = ^2S^2C$).

Cez priamku 1p preložíme průžok papiera a označíme body $^*A = ^1A, ^*B = ^1B, ^*C = ^1C, ^*D = ^1D$.

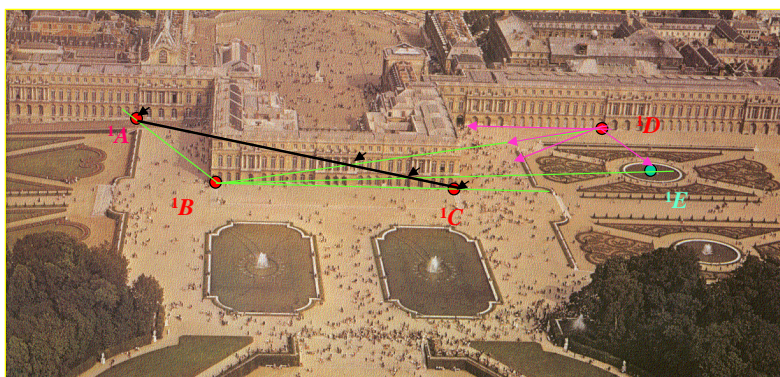
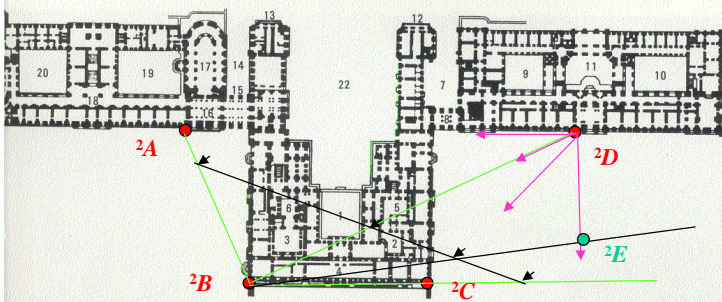
Průžok preložíme cez zväzok 2S tak, aby $^*A \in ^2a, ^*B \in ^2b, ^*C \in ^2c$.

Priamka $^2d = ^*D^2S$, potom $^2D = ^2d \cap ^2p$.

Doplnenie prvkov do snímky pomocou průžkovej metódy

Dané: dve snímky rovinného 4-uholníka $^1A^1B^1C^1D, ^2A^2B^2C^2D$ a bod 1E .

Úloha: doplniť 2E – obraz bodu E na druhej snímke.

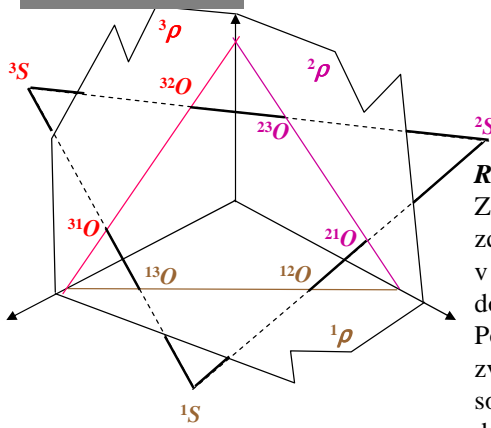


1. Na prvej snímke zostrojíme zväzok priamok so stredom 1B . Dvoj pomer priamok ($^1a = ^1B^1A, ^1c = ^1B^1C, ^1d = ^1B^1D, ^1e = ^1B^1E$) preniesieme průžkom papiera na druhú snímku príslušného zväzku a dostaneme priamku 2e .

2. Podobne zostrojíme na prvej snímke zväzok priamok so stredom 1D . Dvoj pomer priamok ($^1a' = ^1D^1A, ^1c' = ^1D^1C, ^1b' = ^1D^1B, ^1e' = ^1D^1E$) preniesieme průžkom papiera na druhú snímku príslušného zväzku a dostaneme priamku $^2e'$.

3. Bod 2E bude ležať v priesečníku priamok 2e a $^2e'$.

Vzťah medzi 3 snímkami objektov



Dané: všetky uzlové body $^{12}O, ^{13}O, ^{21}O, ^{23}O, ^{31}O, ^{32}O$, 3 snímky dvojice bodov $^1A, ^1B, ^2A, ^2B, ^3A, ^3B$ a dve snímky útvaru U (napr. bod C).

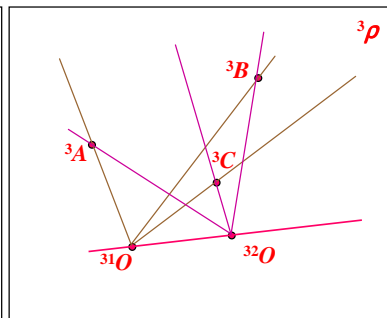
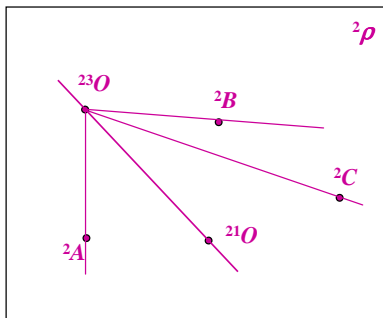
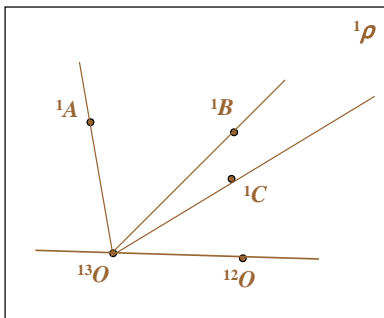
Úloha: Doplňť 3. snímku útvaru U .

Riešenie:

Z 1. snímky preniesieme dvojpomer projektívneho zväzku združených základných priamok bodov A, B, C a 2S so stredom v uzlovom bode ^{13}O do jeho 3. snímky, teda do zväzku ^{31}O doplníme priamku prechádzajúcu bodom 3C .

Podobne z 2. do 3. snímky preniesieme dvojpomer projektívneho zväzku združených základných priamok bodov A, B, C a 1S so stredom v uzlovom bode ^{23}O , teda na 3. snímke zostrojíme druhú združenú základnú priamku bodu C .

Bod 3C je na prieniku oboch jeho združených základných priamok.



Projektívne vlastnosti snímky – metóda projektívnych sietí

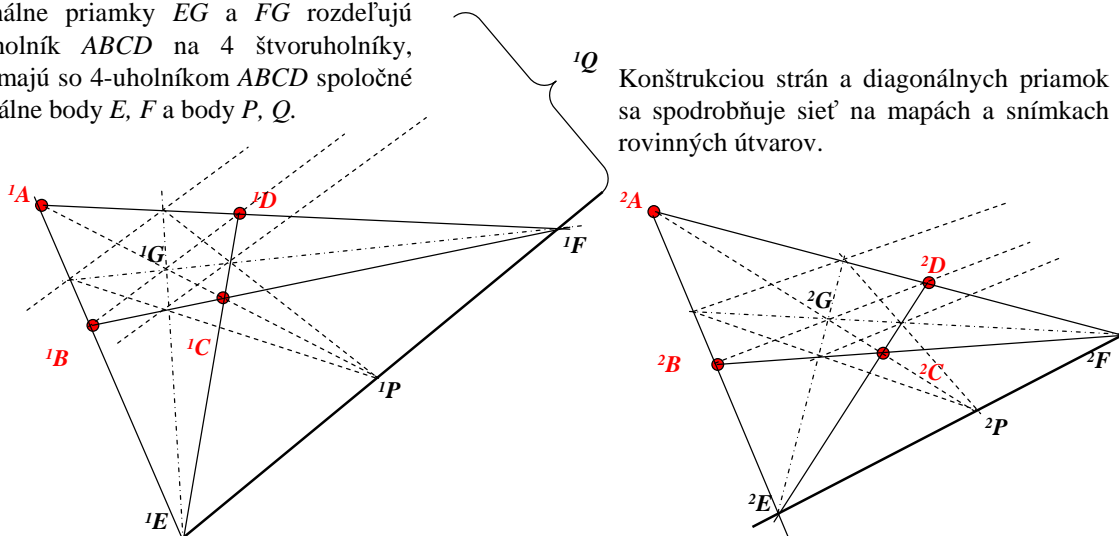
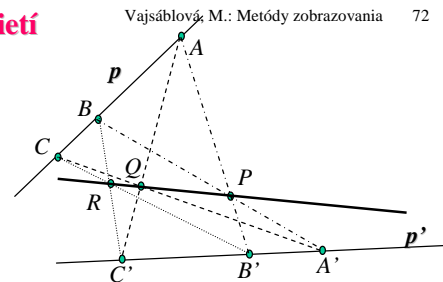
Veta Pappova:

Nech body A, B, C sú 3 rôzne body priamky p a A', B', C' sú tri rôzne body priamky p' a žiadny z týchto bodov nie je priesečníkom priamok p a p' . Potom body $P = AB \cap A'B$, $Q = AC \cap A'C$, $R = BC \cap B'C$ sú kolineárne (ležia na jednej priamke.)

Dané sú dve snímky rovinného 4-uholníka: $^1A^1B^1C^1D, ^2A^2B^2C^2D$.

Zostrojíme diagonálne body $^1E, ^1F, ^1G, ^2E, ^2F$ a 2G štvoruho na oboch snímkach a body P, Q , ktoré sú priesečníky strán prechádzajúcich bodom G s diagonálnou priamkou EF .

Diagonálne priamky EG a FG rozdeľujú štvoruholník $ABCD$ na 4 štvoruholníky, ktoré majú so 4-uholníkom $ABCD$ spoločné diagonálne body E, F a body P, Q .



Konstruáciou strán a diagonálnych priamok sa spodrobňuje sieť na mapách a snímkach rovinných útvarov.

Ďalšie pojmy z projektívnej geometrie

Definícia: *Štvorroh* je geometrický útvar pozostávajúci zo 4 bodov A, B, C, D (vrcholy), z ktorých žiadne tri nie sú kolineárne a zo šiestich priamok, ktoré sú nimi určené (strany).

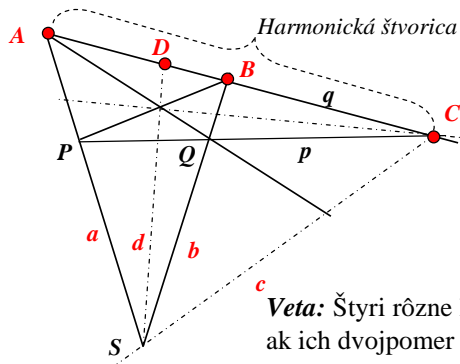
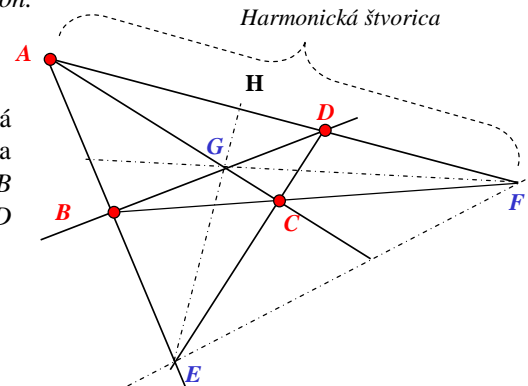
Strany štvorrohu, ktoré sa nepretínajú vo vrchole nazývame *protiľahlé strany* a ich priesečníky E, F, G sú *diagonálne body* štvorrohu.

Štvorroh doplnený o diagonálne body nazývame *úplný štvorroh*.

Veta: Diagonálne body štvorrohu nie sú kolineárne, ich spojnice sú strany diagonálneho trojuholníka.

Definícia: *Harmonická štvorica bodov* je taká usporiadaná štvorica bodov A, B, C, D , pre ktoré platí, že sú kolineárne a po dvojiciach rôzne a existuje taký štvorroh $ABPQ$, že A a B sú jeho vrcholy, C je jeho diagonálny bod ($C = AB \cap PQ$) a D je priesečník zvyšnej diagonálnej priamky so stranou AB .

Poznámka: Duálny pojem k pojmu štvorroh je *štvorstran*.



Definícia: *Harmonická štvorica priamok* je taká usporiadaná štvorica priamok a, b, c, d , pre ktoré platí, že sú po dvojiciach rôzne, patria jednému zväzku a existuje taký štvorstran $abpq$, že a, b sú jeho strany, c je jeho diagonála ($c = (a \cap b) \cup (p \cap q)$) a d je určená bodom $(a \cap b)$ a priesečníkom zvyšných dvoch diagonálnych priamok štvorstranu $abpq$.

Veta: Štyri rôzne kolineárne body A, B, C, D tvoria harmonickú štvoricu práve vtedy, ak ich dvojpomer $(A, B; C, D) = -1$.