

Margita Vajsáblová

Geometrické základy matematickej kartografie

- jednoduché kužeľové zobrazenia

Jednoduché kužeľové zobrazenia

Jednoduché kužeľové zobrazenia sú zobrazenia referenčnej guľovej plochy na kužeľovú plochu (obr. 1), pričom obraz prvkov referenčnej guľovej plochy je rozvinutý do roviny (obr. 2).

□ Obrazy poludníkov ležia na zväzku polpriamok, ktoré majú začiatok vo vrchole kužeľovej plochy. Obraz poludníka so zemepisnou dĺžkou V zvierá s obrazom nulového poludníka uhol ε , pre ktorý platí $\varepsilon = nV$, kde $0 < n < 1$.

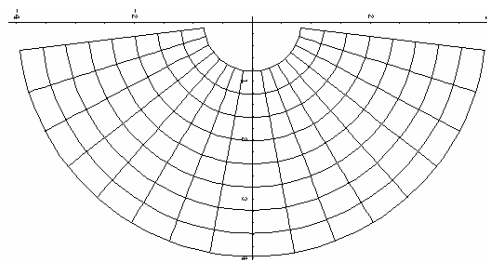
□ Rovnobežky sa zobrazujú do rovnobežkových kružníc kužeľovej plochy, teda po rozvinutí do oblúkov sústredných kružníc so stredom vo vrchole kužeľovej plochy.

□ Póly sa zobrazujú do bodu totožného s vrcholom kužeľa alebo do oblúka sústredného s obrazmi rovnobežkových kružníc.

Vajsáblová, M.: Metódy zobrazovania 139



Obr. 1



Obr. 2

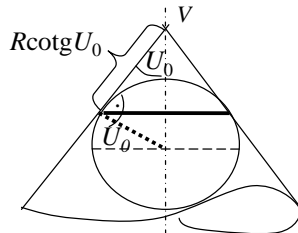
Poznámka: V tejto kapitole sa oboznámime s jednoduchými kužeľovými zobrazeniami v pólovej polohe, a to takými, ktorých obraz možno zostrojiť konštrukčne, príp. pomocou jednoduchých výpočtov.

Príklad kužeľového zobrazenia ekvidištančného na poludníkoch

Ptolemaiovo zobrazenie (90 – 168 n. l.), v literatúre nazývané aj jednoduché kužeľové zobrazenie Bonneovo (18.stor.). Ptolemaios ho použil na zobrazenie vtedy známeho sveta.

- Ptolemaiovo zobrazenie zachováva dĺžky na poludníkoch, ako aj dĺžky na jednej rovnobežke, napr. $U_0 = 45^\circ$, príp. $U_0 = 55^\circ$.

Zobrazovacie rovnice v polárnych súradniciach: $\rho = \rho_0 - R(U - U_0)$,
 $\varepsilon = nV$.

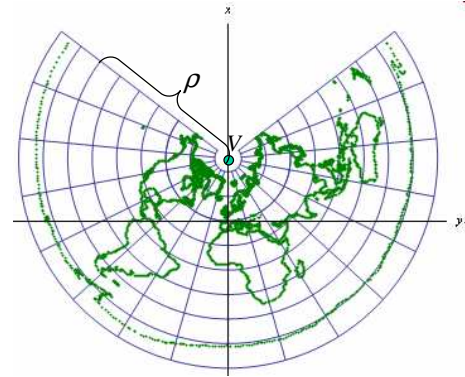


Obr. 3

Parametre (obr. 3):

$$\rho_0 = R \cotg U_0$$

$$n = \sin U_0$$



Obr. 4

Rozvinutie kužeľovej plochy dotykovej v rovnobežke U_0 :

- polomer rozvinutia základnej rovnobežky U_0 je ρ_0 ,
- uhol rozvinutia plochy je α : $\alpha = 360 \sin U_0$.

Na obr. 4 je obraz zemepisnej siete a hraníc svetadielov v Ptolemaiovom kužeľovom zobrazení ekvidištančnom na poludníkoch, kde $U_0 = 45^\circ$.

Kužeľové projekcie

Premietanie referenčnej guľovej plochy na súosú kužeľovú plochu cez stred premietania S .

Typy kužeľových projekcií:

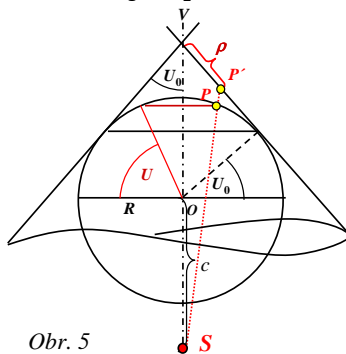
1. **Kužeľová projekcia s pevným stredom** – stred premietania S leží na zemskej osi (obr. 5).
2. **Kužeľová projekcia s pohyblivým stredom**

a) stred premietania S leží v rovine rovníka (obr. 6),

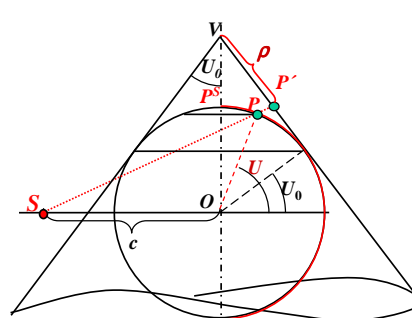
b) stred premietania S leží v rovine rovnobežkovej kružnice (obr. 7),

pričom stred S rotuje okolo zemskej osi a z každej polohy stredu S sa zobrazuje poludník ležiaci so stredom S v osovej rovine, ale v opačnej polovine vzhľadom na os.

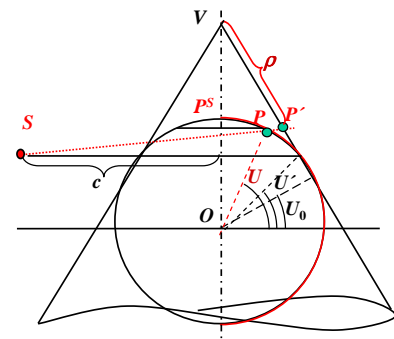
Kužeľová plocha sa dotýka referenčnej guľovej plochy v bodoch rovnobežkovej kružnice so zemepisnou šírkou U_0 , príp. je sečná – prienik guľovej plochy a kužeľovej plochy sú rovnobežkové kružnice s U_1 a U_2 .



Obr. 5



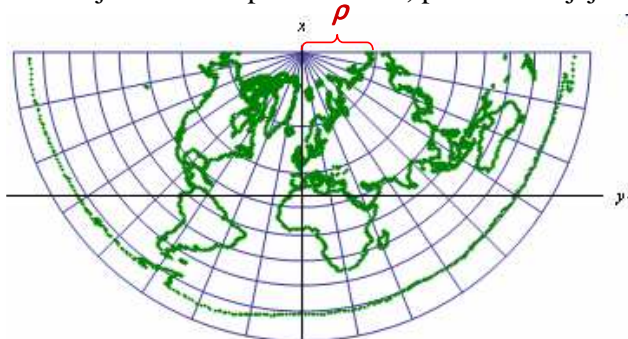
Obr. 6



Obr. 7

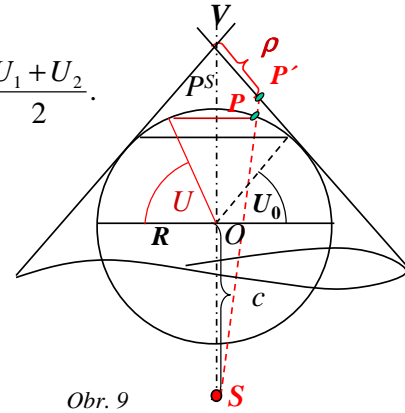
1. Kužel'ová projekcia s pevným stredom (na zemskej osi)

- Kónická perspektíva referenčnej guľovej plochy Γ na kužel'ovú plochu Φ súosú (sečnú v rovnobežkách s U_1, U_2 alebo dotykovú v základnej rovnobežke U_0) zo stredy S , ktorý leží na zemskej osi, $c = |SO|$ (obr. 9).
- Z dôvodu bijekcie sa zobrazuje iba časť guľovej plochy.
- Rovník a rovnobežkové kružnice sa zobrazujú do oblúkov sústredných kružníc so stredom vo vrchole kužel'ovej plochy (obr. 8).
- Pól sa zobrazuje do vrchola kužel'ovej plochy V .
- Poludníky sa zobrazujú do zväzku polpriamok s počiatkom vo vrchole V .
- Ak kužel'ová plocha je **dotyková**, potom uhol jej rozvinutia $\alpha = 360^\circ \sin U_0$, polomer rozvinutia základnej rovnobežky U_0 je $\rho_0 = R \cotg U_0$.
- Ak je kužel'ová plocha **sečná**, potom uhol jej rozvinutia:



Obr. 8

$$\alpha = 360^\circ \sin \frac{U_1 + U_2}{2}$$

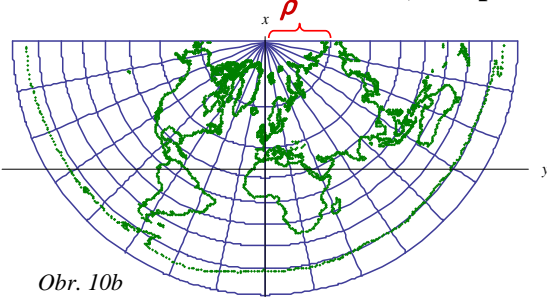


Obr. 9

Príklady kužel'ových projekcií s pevným stredom

Braunova stereografická kužel'ová projekcia (1867) (obr. 10a, b)

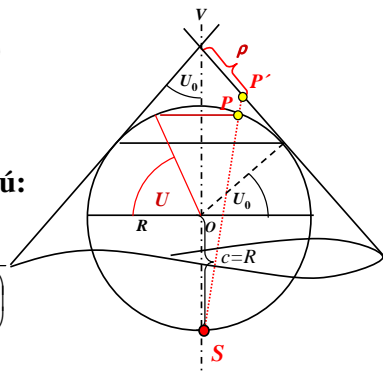
- stred S je južný pól, teda $c = R$, kužel'ová plocha dotyková v rovnobežke s $U_0 = 30^\circ$.
- zobrazovacie rovnice bodu $P[U, V]$ v polárnych súradniciach sú:



Obr. 10b

$$\rho = \frac{3R \sin(90^\circ - U)}{\sin\left(U_0 + \frac{90^\circ - U}{2}\right)}$$

$$\varepsilon = V \sin U_0$$



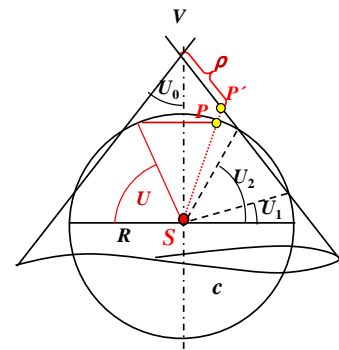
Obr. 10a

- severný pól sa zobrazí do vrcholu kužel'ovej plochy,
- južný pól a jeho blízke okolie sa nezobrazuje.

Murdochova 2. gnómonická kužel'ová projekcia (obr. 11)

- stred S je totožný so stredom sféry, teda $c = 0$,
- kužel'ová plocha je sečná v rovnobežkách s U_1 a U_2 ,
- zemepisná šírka U_0 základnej rovnobežky je určená:

$$U_0 = \frac{U_1 + U_2}{2}$$



Obr. 11

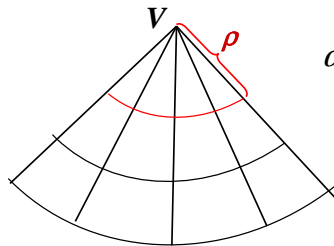
Kuželové projekcie s pohyblivým stredom v rovne rovnika

- Stredové premietanie referenčnej guľovej plochy Γ na kuželovú plochu Φ súosú (sečnú v rovnobežkách s U_1, U_2 alebo dotykovú v rovnobežke s U_0) zo stredy S , ktorý leží v rovne rovnika, rotuje okolo zemskej osi, $c = |SO|$ (obr. 13), pričom

- z každej polohy stredy je premietaný poludník, ktorý leží so stredom S v opačnej polrovine vzhľadom na os,
- vzor a obraz každého bodu ležia v tej istej polrovine vzhľadom na os.

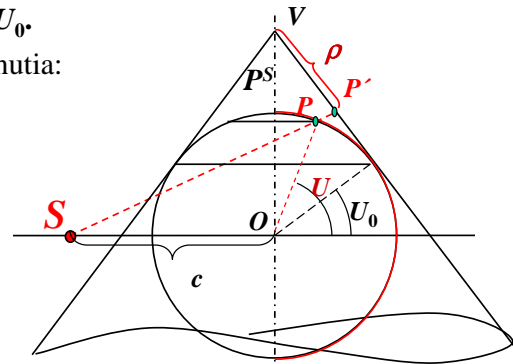
Obraz prvkov zemepisnej siete (obr. 12):

- Rovník a rovnobežkové kružnice sa zobrazujú do oblúkov sústredných kružníc so stredom vo vrchole V kuželovej plochy.
- Obrazy poludníkov ležia na zväzku polpriamok s počiatkom vo vrchole V .
- Ak kuželová plocha je **dotyková**, potom uhol jej rozvinutia $\alpha = 360^\circ \sin U_0$, polomer rozvinutia základnej rovnobežky U_0 je $\rho_0 = R \cotg U_0$.
- Ak je kuželová plocha **sečná**, potom uhol jej rozvinutia:



Obr. 12

$$\alpha = 360^\circ \sin \frac{U_1 + U_2}{2}$$



Obr. 13

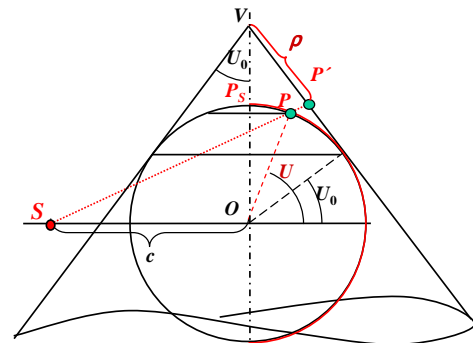
Zobrazovacie rovnice kuželových projekcií s pohyblivým stredom v rovne rovnika

Nech kuželová plocha je **dotyková** v rovnobežke U_0 , stred S v rovne rovnika $|SO| = c$ (obr. 14).

Zobrazovacie rovnice bodu $P[U, V]$ sú:

$$\rho = \frac{cR + R^2 \cos U - cR \sin U_0 \sin U}{\sin U_0 (R \cos(U - U_0) + c \cos U_0)}$$

$$\varepsilon = V \sin U_0$$



Obr. 14

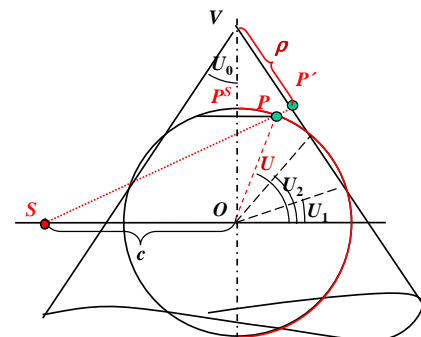
Nech kuželová plocha je **sečná** v rovnobežkách U_1 a U_2 , stred S v rovne rovnika $|SO| = c$ (obr. 15).

Základnú rovnobežku U_0 určujeme: $U_0 = \frac{U_1 + U_2}{2}$

Zobrazovacie rovnice bodu $P[U, V]$ sú:

$$\rho = \frac{cR(\cos(U_0 - U_1) - \sin U \sin U_0) + R^2 \cos U (\sin U_0 \sin U_2 + \cos U_0 \cos U_1)}{\sin U_0 (\cos(U - U_0) + c \cos U_0)}$$

$$\varepsilon = V \sin U_0$$



Obr. 15

Príklady kuželových projekcií s pohyblivým stredom v rovine rovníka

Stereografická kuželová projekcia s pohyblivým stredom v rovine rovníka

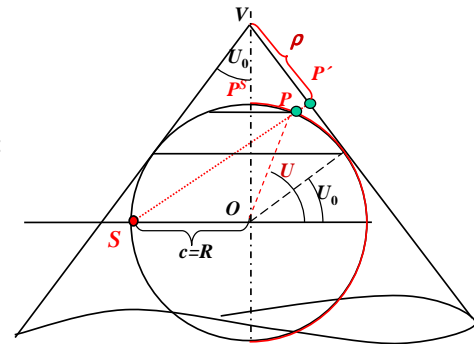
Stred S leží na guľovej ploche, teda $c = R$,

- nech je kuželová plocha dotyková v rovnobežke U_0 ,

- zobrazovacie rovnice bodu $P[U, V]$ v polárnom tvare sú:

$$\rho = \frac{R + R \cos U - R \sin U_0 \sin U}{\sin U_0 (\cos(U - U_0) + \cos U_0)}$$

$$\varepsilon = V \sin U_0$$



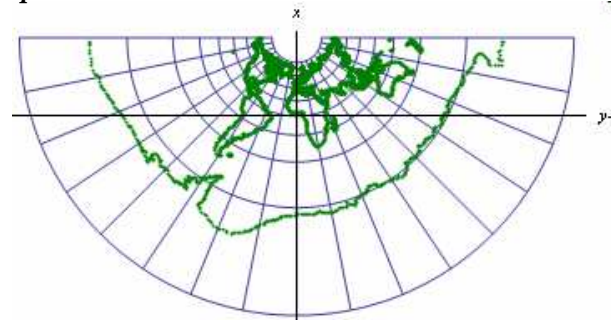
Obr. 16

• Pre $U_0 > 45^\circ$, príp. $U_0 < -45^\circ$, stanovujeme podmienku na zobrazovanie guľovej plochy v intervale:

$$\text{ak } U_0 > 0, \quad U \in \langle 2U_0 - 180^\circ, 90^\circ \rangle$$

$$\text{inak } U \in \langle 90^\circ, 2U_0 + 180^\circ \rangle.$$

Na obr. 17 je stereografická kuželová projekcia s $U_0 = 30^\circ$.



Obr. 17

Príklady kuželových projekcií s pohyblivým stredom v rovine rovníka

Gnómonická kuželová projekcia na dotykovú kuželovú plochu (obr. 18)

Stred S je totožný so stredom guľovej plochy, teda $c = 0$,

Nech kuželová plocha dotyková v rovnobežke U_0 , potom

zobrazovacie rovnice bodu $P[U, V]$ v polárnom tvare sú:

$$\rho = \frac{R \cos U}{\sin(U_0 + (90^\circ - U)) \sin U_0}$$

$$\varepsilon = V \sin U_0$$

• ak $U_0 > 0$, severný pól sa zobrazuje do vrcholu kuželovej plochy a vzhľadom na kompaktnosť obrazu možno zobrazovať body referenčnej guľovej plochy z určitého intervalu zemepisnej šírky, a to:

$$U \in \langle U_0 - 90^\circ, 90^\circ \rangle,$$

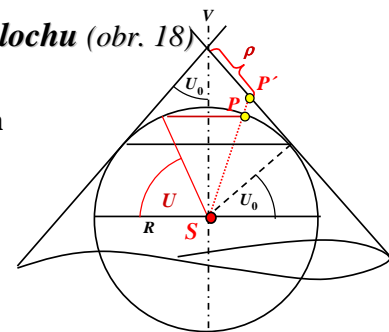
$$\text{ak } U_0 < 0, \text{ potom } U \in \langle -90^\circ, U_0 + 90^\circ \rangle.$$

Kuželová projekcia s pohyblivým stredom v rovine rovníka na sečnú kuželovú plochu

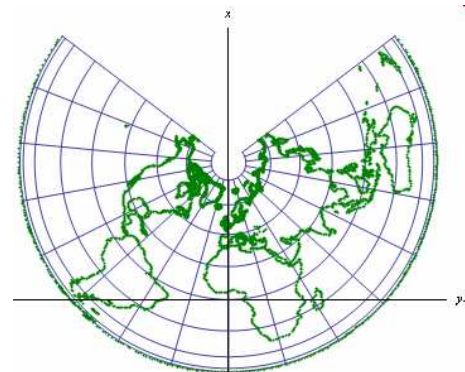
Stred S v rovine rovníka $|SO| = c$,

kuželová plocha sečná v rovnobežkách U_1 a U_2 .

Na obr. 19: $c = 2R$, $U_1 = 20^\circ$, $U_2 = 70^\circ$.



Obr. 18



Obr. 19

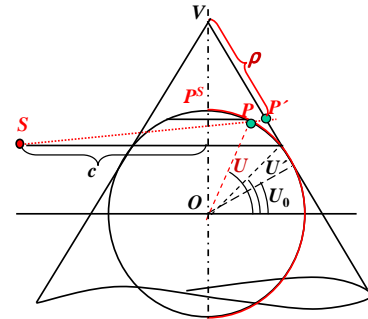
Kužel'ové projekcie s pohyblivým stredom v rovine rovnobežkovej kružnice

Kužel'ová plocha dotyková v rovnobežke U_0 , stred S v rovine rovnobežkovej kružnice U' , $|S, o| = c$ (obr. 20).

Zobrazovacie rovnice bodu $P[U, V]$ sú:

$$\rho = \frac{R \sin U_0 \sin U' \cos U - R \cos U + c \sin U_0 \sin U - c \sin U_0 \sin U'}{\sin U_0 (\sin U_0 \sin U' - \cos(U_0 - U))}$$

$$\varepsilon = V \sin U_0$$



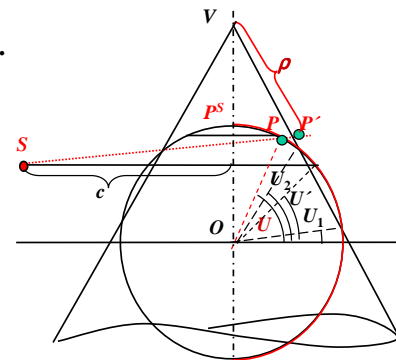
Obr. 20

Kužel'ová plocha sečná v rovnobežkách U_1, U_2 , stred S v rovine rovnobežkovej kružnice U' , $|S, o| = c$ (obr. 21).

Zobrazovacie rovnice bodu $P[U, V]$ sú:

$$\rho = \frac{R \sin(U_2 - U_1)(R \cos U + c) + R \sin U_0(R \cos U \sin U' + c \sin U)}{\sin U_0 \cos U_0(R \cos U + c) - R \sin^2 U_0(\sin U - \sin U')}$$

$$\varepsilon = V \sin U_0$$

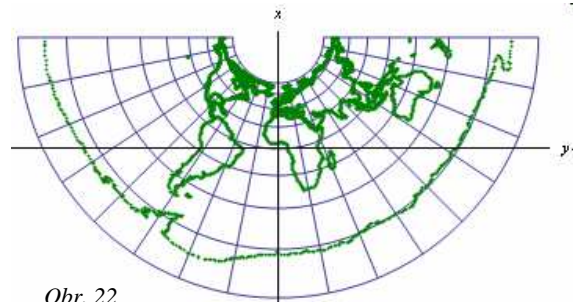


Obr. 21

Príklady kužel'ových projekcií s pohyblivým stredom v rovine rovnobežkovej kružnice

Kužel'ová plocha dotyková v rovnobežke U_0 , stred S v rovine rovnobežkovej kružnice U' , $|S, o| = c$.

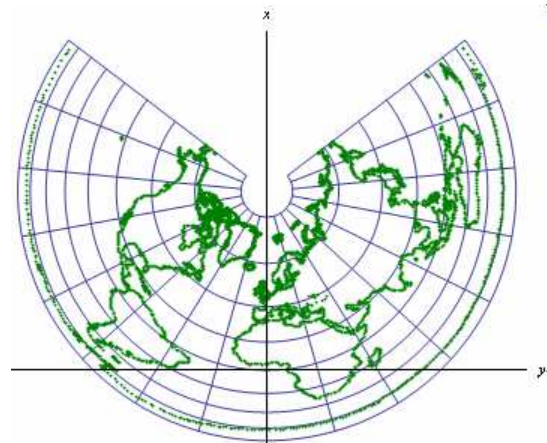
Na obr. 22: $c = 2R$, $U' = 15^\circ$, $U_0 = 30^\circ$



Obr. 22

Kužel'ová plocha sečná v rovnobežkách U_1, U_2 , stred S v rovine rovnobežkovej kružnice U' , $|S, o| = c$.

Na obr. 23: $c = 2R$, $U' = 15^\circ$, $U_1 = 20^\circ$, $U_2 = 70^\circ$



Obr. 23