

**Margita Vajsáblová**

# **Geometrické základy matematickej kartografie – základné pojmy**

## **Matematická kartografia ako súčasť kartografie**

### **Úloha kartografie**

- Konštrukcia máp Zeme (príp. iných vesmírnych telies) a jej častí, na ktorých je zobrazený zemský povrch spolu s reálnymi objektmi a javmi.

### **Úloha matematickej kartografie**

- Zaoberá sa kartografickými zobrazeniami, teda zobrazeniami referenčnej plochy Zeme, vlastnosťami týchto zobrazení z hľadiska skreslení a geometrického tvaru obrazu zemepisnej siete na mape a dáva návod na praktické používanie týchto zobrazení.

## Čo hovorí história?

- **Prvá známa mapa** – Sumeri 5 000 p. n. l.
- **Staré Grécko** – glóbusy, mapy – použitie kužeľosečiek – **Hipparchos Rhodský** (180 – 125 p. n. l.), **Marinos z Tyly** (asi 1. stor. n. l.) ako prvý použil kartografické zobrazenie, vyznačil úplnú stupňovú zemepisnú sieť zobrazenú na valcovú plochu.
- **Ptolemaios** (165 – 85 p. n. l.) – vydal súbor kníh z oblasti geografie, astronomie a matematiky, položil základy sférickej trigonometrie, autor kužeľového kartografického zobrazenia a pod.
- 15. a 16. storočie – **rozvoj moreplavby**, podnietil rozvoj kartografie v ďalších storočiach.
- 17. a 18. storočie – **rozvoj tvorby kartografických zobrazení:**
- **Lambert** – zakladateľ KARTOGRAFIE, autor viacerých kartografických zobrazení,
- **Mercator** – autor viacerých zobrazení, napr. konformného zobrazenia guľovej plochy na valcovú plochu, v ktorom sa loxodrómy zobrazujú do priamok.
- V súčasnosti sa odbor matematická kartografia zaoberá kartografickými zobrazeniami z pohľadu skreslení.
- Mapovanie na Slovensku v súčasnosti využíva **Křovákovu** konformné kužeľové zobrazenie vo všeobecnej polohe na zobrazenie bodov Jednotnej trigonometrickej siete katastrálnej (nová realizácia JTSK 03). Vo vojenskom zoskupení NATO je používané Mercatorovo transverzálne valcové zobrazenie (UTM).

## Referenčné plochy Zeme

**Rovina** – používa sa pre veľmi malé územie okrúhleho tvaru s plochou do 200 km<sup>2</sup> (kruh s polomerom 8 km) a pre menej presné výpočty s plochou do 700 km<sup>2</sup> a polomerom do 15 km.

**Guľová plocha (sféra)** – používa sa v geodetických a topografických úlohách na kruhovom území s polomerom do 200 km, pri tvorbe máp malých mierok (1 : 10<sup>6</sup> a menej).

### Elipsoidy:

✓ *rotačný elipsoid,*

*Najznámejšie referenčné elipsoidy: Zachov, Besselov (1841), Hayfordov (1909), Krasovského (1940), IAG (1967), GRS 1980, WGS 84.*

✓ *trojosý elipsoid.*

**Poznámka:** V kartografických dielach je často prvým krokom transformácie zobrazenie bodov elipsoidu na guľovú plochu. Druhým krokom transformácie je kartografické zobrazenie bodov guľovej plochy. V nasledujúcich kapitolách budeme charakterizovať kartografické zobrazenia iba bodov *referenčnej guľovej plochy*.

## Súradnicové sústavy na referenčnej guľovej ploche

**Zemepisné súradnice  $U, V$**  (obr. 1)

- **Zemepisná šírka  $U \in \langle -90^\circ, 90^\circ \rangle$**  – uhol normály ku guľovej ploche v danom bode s rovinou rovníka (kladná na severnej polguli).

- **Zemepisná dĺžka  $V \in \langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$  alebo  $V \in \langle -180^\circ, 180^\circ \rangle$**  – uhol roviny, ktorá obsahuje zemskú os a daný bod s rovinou obsahujúcou os a bod so zemepisnou dĺžkou  $0^\circ$  (hvezdáreň Greenwich). Kladná orientácia zemepisnej dĺžky je v smere na východ.

**Priestorové pravouhlé súradnice**

Súradnicová sústava  $\{O, x, y, z\}$ , kde  $O$  je stred referenčnej guľovej plochy,  $z$  je zemská os.

Vzťah medzi zemepisnými súradnicami bodov guľovej plochy a ich pravouhlými súradnicami:

$$x = R \cos U \cos V$$

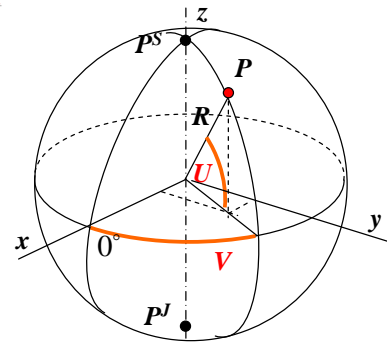
$$y = R \cos U \sin V$$

$$z = R \sin U$$

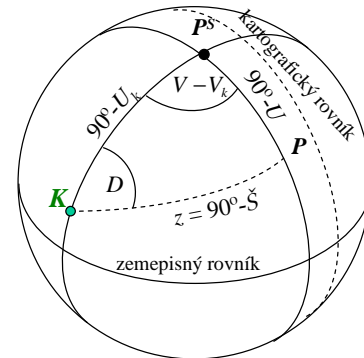
**Kartografické súradnice  $\check{S}, D$**  (obr. 2)

Kartografická šírka  $\check{S} \in \langle -90^\circ, 90^\circ \rangle$ ,

kartografická dĺžka  $D \in \langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$  alebo  $D \in \langle -180^\circ, 180^\circ \rangle$ , sú odvodené od kartografického pólu  $K [U_K, V_K]$ .



Obr. 1



Obr. 2

## Súradnicové sústavy v rovine obrazu

✓ **Pravouhlá súradnicová sústava** so začiatkom  $O$ , osami  $x, y$ , pravouhlé súradnice bodu  $P [x_P, y_P]$ .

✓ **Polárna súradnicová sústava** so začiatkom  $V [x_V, y_V]$ , polárne súradnice bodu  $P [\rho, \varepsilon]$ , kde  $\rho$  je vzdialenosť bodu  $P$  od  $V$ ,  $\varepsilon$  je polárny uhol určený od záporného smeru osi  $x$  (obr. 3), potom platí:

$$x_P = x_V - \rho \cos \varepsilon$$

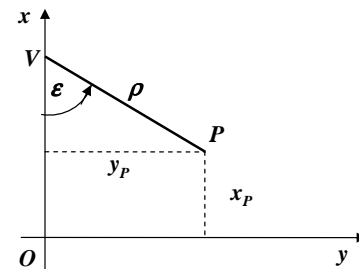
$$y_P = \rho \sin \varepsilon$$

kde  $\varepsilon \in \langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$  alebo  $\varepsilon \in \langle -180^\circ, 180^\circ \rangle$ .

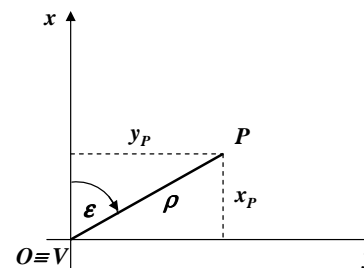
Stotožnením  $V \equiv O$ ,  $\varepsilon$  je určený od kladnej vetvy osi  $x$  (obr. 4), potom platí:

$$x_P = \rho \cos \varepsilon$$

$$y_P = \rho \sin \varepsilon$$

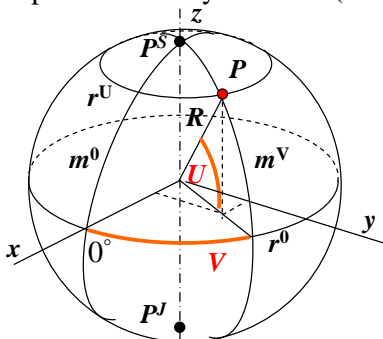


Obr. 3

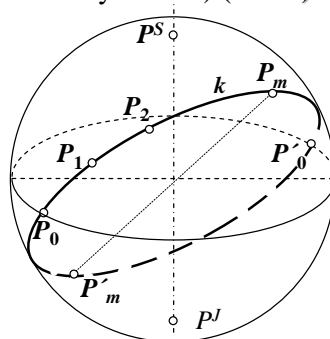


Obr. 4

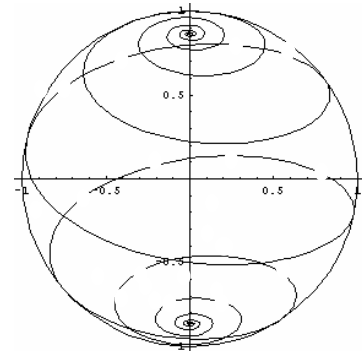
- **Zemské rovnobežky** – množiny bodov s konštantnou zemepisnou šírkou. Rovnobežku, ktorej body majú zemepisnú šírku  $U$ , budeme označovať  $r^U$ , (**zemský rovník**  $r^0$ ) (obr. 5).
- **Zemské poludníky** (meridiány) – množiny bodov s konštantnou zemepisnou dĺžkou. Poludník, ktorého body majú zemepisnú dĺžku  $V$ , budeme označovať  $m^V$  (obr. 5).
- **Póly:**  $P^S$  – severný,  $U = 90^\circ$ ,  $P^J$  – južný,  $U = -90^\circ$ ,  $V \in \langle -180^\circ, 180^\circ \rangle \Rightarrow$  póly sú singulárne body (rovnobežkové kružnice s nulovým polomerom) (obr. 5).
- **Zemepisná sieť** – rovnobežky a poludníky na referenčnej ploche vybrané v pravidelných intervaloch.
- **Geodetická čiara** (na referenčnej guľovej ploche nazývaná **ortodróma**) – najkratšia spojnica dvoch bodov  $P_1, P_2$  na referenčnej ploche (obr. 6).
- **Loxodróma** – krivka na referenčnej ploche, ktorá v celom svojom priebehu pretína poludníky pod konštantným uhlom (má konštantný azimut) (obr. 7).



Obr. 5



Obr. 6



Obr. 7

# Kartografické zobrazenie

**Kartografické zobrazenie určuje matematický vzťah medzi zemepisnými súradnicami odpovedajúcich si bodov na referenčnej ploche a súradnicami v rovine obrazu.**

### Referenčná guľová plocha

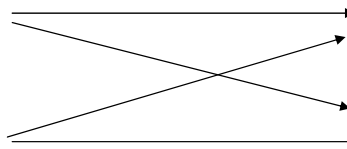
- zemepisné súradnice  $[U, V]$

- kartografické súradnice  $[\check{S}, D]$

### Rovina obrazu

$[x, y]$  – pravouhlé súradnice

$[\rho, \varepsilon]$  – polárne súradnice



**Poznámka:** Ďalej budeme uvažovať zobrazenia referenčnej guľovej plochy s použitím zemepisných súradníc  $U, V$ .

## Klasifikácia kartografických zobrazení

### 1. Podľa vlastností kartografických skreslení

- a) **ekvidištančné** – zachováva dĺžky určitej sústavy čiar,  
 b) **ekvivalentné** – zachováva obsahy (plochy),  
 c) **konformné** – zachováva uhly,  
 d) **kompenzačné (vyrovnávacie)** – skreslenie uhlov a obsahov má strednú mieru.

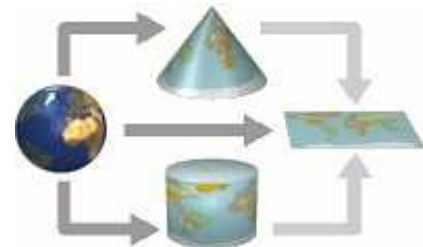
## Klasifikácia kartografických zobrazení

### 2. Podľa plochy, na ktorú zobrazujeme

a) zobrazenia **na guľovú plochu**,

b) **jednoduché** zobrazenia, na rozvinuteľné plochy (obr. 8):

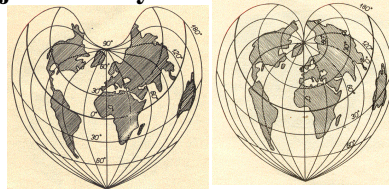
- azimutálne – na rovinu,
- valcové (cylindrické) – na valcovú plochu,
- kužeľové (kónické) – na kužeľovú plochu,



Obr. 8

c) **nepravé** – základné charakteristiky jednoduchých zobrazení sú zachované, iné zmenené:

- pseudokónické (obr. 9),
- pseudoazimutálne (obr. 10),
- pseudocylindrické (obr. 11),



Obr. 9

Obr. 10

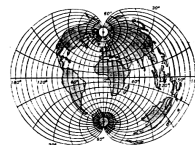


Obr. 11

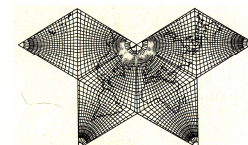
d) **polykónické** – na nekonečný počet kužeľových plôch (obr. 12),

e) **polyedrické** – mnohostenové (obr. 13),

f) **neklasifikované**.



Obr. 12

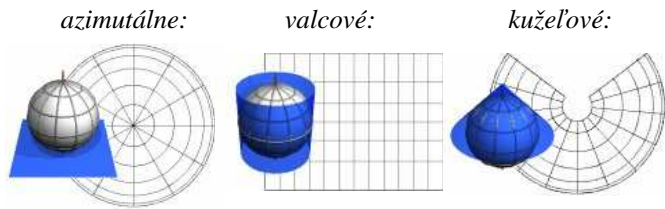


Obr. 13

## 3. Jednoduché zobrazenia rozdeľujeme podľa polohy osi plochy, na ktorú zobrazujeme

### a) pólová (normálna) poloha (obr. 14)

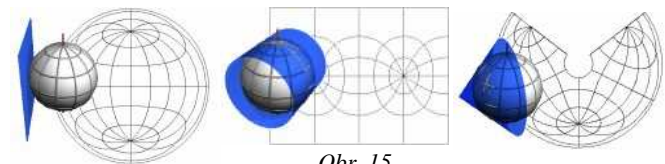
– os plochy je totožná so zemskou osou, v azimutálnych zobrazeniach je rovina rovnobežná s rovinou rovníka,



Obr. 14

### b) rovníková (transverzálna) poloha (obr. 15)

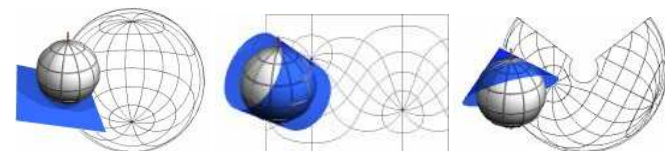
– os plochy je v rovine rovníka, v azimutálnych zobrazeniach je rovina rovnobežná so zemskou osou,



Obr. 15

### c) všeobecná poloha (obr. 16) – neplatí

a), b).



Obr. 16