TEÓRIA GRAFOV

MARTIN KNOR

Recenzenti: Doc. RNDr. Marián Klešč, PhD.
RNDr. Martin Mačaj, PhD.

Schválilo vedenie Stavebnej fakulty STU dňa 2. 3. 2007 pre 1. ročník MPM.

ISBN 978-80-227-2879-9

Doc. RNDr. Martin Knor, PhD.

TEÓRIA GRAFOV

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave vo Vydavateľstve STU, Bratislava, Vazovova 5, v roku 2008.

Edícia skrípt

Rozsah 98 strán, 54 obrázkov, 3 tabuľky, 6,728 AH, 6,891 VH, 1. vydanie, edičné číslo 5379, vydané v elektronickej forme;
umiestnenie na http://www.svf.stuba.sk

85 – 244 – 2008

ISBN 978-80-227-2879-9

Predhovor

Tento učebný text je určený študentom prvého ročníka stavebnej fakulty Slovenskej technickej univerzity, študujúcim odbor Aplikovaná matematika. Predstavuje spísané a po formálnej stránke značne rozšírené prednášky z predmetu „Teória grafov“.

Štruktúra tohoto textu je upravená tak, že každá kapitola tvorí jednu prednášku. Čitateľovi predkladáme 11 kapitol, čo je podľa našich skúseností maximálny možný počet prednášok, ktorý sa dá stihnúť počas 13-týždňového semestra. Keďže v „zlých rokoch“ sa často nestihne ani 11 prednášok, tak pomocou tejto učebnice si študenti môžu doplniť svoje vedomosti samoštúdiom.

Po obsahovej stránke je učebnica mimoriadne homogénna. Po úvodných dvoch kapitolách, kde v prvej stručne prejdeme základy kombinatoriky a v druhej zadefinujeme pojem grafu, sa venujeme najdôležitejším oblastiam teórie grafov, aby sme skončili problematikou zložitosti algoritmov. Tu treba zdôrazniť, že výber tém v tretej až desiatej kapitole bol podmienený očakávaným profilom absolventa smeru Matematicko-počítačové modelovanie. Teda sústredili sme sa jednak na základné metódy používané v teórii grafov (pozri dôkaz Oreho vety, vety o piatich farbách, Tuttovej vety, Ramseyovej a Erdösovej vety), ako aj na rôznorodé aplikácie. Venujeme sa úlohe o maximálnom toku, matroidom, zaoberáme sa priraďovacím problémom. Na viacerých miestach uvádzame algoritmy v pseudokóde. Hoci sa zložitosti venujeme až v záverečnej kapitole, často hneď pri formulovaní problému uvádzame, či ide o ľahký (čiže patriaci do triedy P), alebo ťažký (patriaci len do triedy NP) problém.

Treba podotknúť, že práve vďaka rôznorodým aplikáciám každý text venovaný teórii grafov nutne obsahuje množstvo definícií. Z toho dôvodu sme na záver textu pripojili rozsiahly index, ako aj stručný prehľad označení.

Učebnica by mala slúžiť nielen ako doplnok rovnomennej prednášky, ale aj ako sprievodný text k cvičeniam. Preto sme na koniec každej kapitoly zaradili množstvo cvičení. Pri niektorých z nich sú návody na riešenie a tie ťažšie sú označené hviezdičkou.

Záverom tohoto úvodu chcem poďakovať recenzentom doc. RNDr. Mariánovi Kleščovi, PhD. a RNDr. Martinovi Mačajovi, PhD. za cenné pripomienky, ktorými zlepšili čitateľnosť a štruktúru textu. Tiež chcem poďakovať Ing. Eve Lučanskej za jazykovú úpravu.

Autor

1 ZÁKLADY KOMBINATORIKY

Sčítavací a násobiaci princíp

V tejto úvodnej kapitole si zopakujeme základné princípy z kombinatoriky, ktoré budeme v ďalšom využívať.

Definícia. Systém $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ tvorený k neprázdnymi množinami je **rozkladom množiny** S ak platí, že $S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k$ a pre každé $i \neq j$ je splnené $S_i \cap S_j = \emptyset$.

Tvrdenie 1.1 (**sčítavací princíp**). *Ak systém $S_1, S_2, \ldots, S_k$ tvorí rozklad množiny S, tak počet prvkov v S je určený súčtom počtov prvkov v S_i, kde $i = 1, 2, \ldots, k$.*

Príklad. Počet študentov na stavebnej fakulte môžeme určiť tak, že zistíme, koľko je študentov na všetkých študijných zameraniach, a potom tieto čísla sčítame.

Tvrdenie 1.2 (**násobiaci princíp**). *Ak sú $A_1, A_2, \ldots, A_k$ množiny majúce postupne $a_1, a_2, \ldots, a_k$ prvkov, tak počet usporiadaných k-tic prvkov, kde prvý prvok je z A_1, druhý je z A_2, ... , k-ty je z A_k, je $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$.*

Príklad. Koľko nepárnych čísel medzi 1 000 a 9 999 má všetky cifry navzájom rôzne?

Riešenie. Číslo medzi 1 000 a 9 999 možno chápať ako usporiadanú štvoricu. Preto budeme voliť postupne jednotky, tisícky, stovky a desiatky. Keďže čísla majú byť nepárne, tak máme päť možností na voľbu jednotiek: 1, 3, 5, 7 a 9. Na voľbu tisícok však máme nie deväť možností, ale už len osem, lebo všetky cifry musia byť navzájom rôzne. Podobne na voľbu stoviek máme osem možností a na voľbu desiatok sedem. Podľa násobiaceho princípu máme spolu $5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 2\,240$ možností.

Permutácie, variácie a kombinácie

Definícia. **Permutácia** n-prvkovej množiny je ľubovoľné usporiadanie prvkov tejto množiny do postupnosti.

Veta 1.3. *Počet permutácií n-prvkovej množiny je* $n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$.

Dôkaz. Zjavne na výber prvého prvku máme n možností, na výber druhého máme $n-1$ možností, ..., až na výber posledného n-tého prvku máme už len jedinú možnosť. Teda podľa násobiaceho princípu máme $n!$ permutácií. $\square$

Poznamenajme, že $0! = 1$, čo zodpovedá predstave, že existuje jediné usporiadanie prvkov prázdnej množiny.

Príklad. Známa je hra, pozostávajúca zo škatuľky 4×4, v ktorej je 15 štvorčekov 1×1 očíslovaných číslami $1, 2, \ldots, 15$ a jedno políčko je prázdne. Teraz nás nebude zaujímať, čo je cieľom tejto hry. Stačí nám vedieť, že škatuľka je vždy natočená tak, že názov hry je uvedený hore a štvorčeky nemožno preklápať, ani otáčať. Určte, koľko je možných rozložení 15 štvorčekov 1×1 v škatuľke.

Riešenie. Keďže v zaplnenej škatuľke sú všetky štvorčeky navzájom rôzne (buď je na nich jedno z čísel $1, 2, \ldots, 15$, alebo ide o jediné prázdne políčko), tak máme práve toľko rozložení, koľko je usporiadaní 16 prvkov, čiže $16! = 20\,922\,789\,888\,000$.

Príklad. Koľko je usporiadaní desiatich dievčat do kruhu?

Riešenie. Do radu usporiadame dievčatá $10!$ spôsobmi, avšak pri usporiadaní do kruhu bude tento počet menší. Nerozlišujeme totiž pootočenia kruhu. Keďže jedno usporiadanie do kruhu zodpovedá 10 usporiadaniam do radu (máme 10 pootočení kruhu), tak počet usporiadaní 10 dievčat do kruhu je $\frac{10!}{10} = 9! = 362\,880$.

Čísla $n!$, nazývané tiež **faktoriály**, majú mnohostranné využitie v matematike. Často potrebujeme odhadovať čísla, v ktorých sa faktoriály vyskytujú, teda potrebujeme poznať diferencovateľnú funkciu, ktorá dobre aproximuje $n!$. Bez dôkazu uvádzame nasledujúcu dôležitú vetu.

Veta 1.4 (**Stirlingova formula**). *Platí* $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, *čiže*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\cdot e^{-n} n^n} = 1$$

Definícia. **Variácia** r-tej triedy z n prvkov je ľubovoľný usporiadaný výber r prvkov z danej n-prvkovej množiny.

Veta 1.5. *Ak $r \leq n$, tak počet variácií r-tej triedy z n prvkov sa rovná číslu* $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$.

Dôkaz. Dôkaz je analogický dôkazu vety 1.3. $\square$

Príklad. Koľko existuje rozličných rozmiestnení šiestich rôznych šachových figúrok na šachovnicu?

Riešenie. Nech sú danými figúrkami kráľ, dáma, veža, strelec, jazdec a pešiak. Úlohe zodpovedajú usporiadané výbery 6 polí šachovnice zo 64, pričom prvé vybrané pole predstavuje pozíciu pre kráľa, druhé pre dámu ... až šieste pole predstavuje pozíciu pešiaka. Preto má úloha $\frac{64!}{58!} = 53\,981\,544\,960$ riešení.

DEFINÍCIA. **Kombinácia** r-tej triedy z n prvkov je ľubovoľný výber r-prvkovej podmnožiny z danej n-prvkovej množiny.

VETA 1.6. *Ak $r \leq n$, tak počet kombinácií r-tej triedy z n prvkov sa rovná číslu* $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

DÔKAZ. Nech je S daná n-prvková množina. Ľubovoľná kombinácia r-tej triedy z S môže byť usporiadaná $r!$ spôsobmi podľa vety 1.3. Keďže každú variáciu r-tej triedy z S môžeme získať jediným usporiadaním prvkov jedinej kombinácie, tak počet kombinácií je $r!$ krát menší, ako počet variácií r-tej triedy z n prvkov. Teda podľa vety 1.5 sa počet kombinácií r-tej triedy z n prvkov rovná $\frac{n!}{r!(n-r)!}$. $\square$

PRÍKLAD. V rovine máme 25 bodov, z ktorých žiadne tri nie sú kolineárne (čiže žiadne tri body neležia na jednej priamke). Koľko priamok a koľko trojuholníkov určuje týchto 25 bodov?

RIEŠENIE. Keďže každá dvojica bodov určuje jedinú priamku, tak priamok je toľko, koľko je dvojíc bodov. Teda ich je toľko, koľko je kombinácií druhej triedy z 25 prvkov, čiže $\binom{25}{2} = 300$. Podobne trojuholníkov je toľko, koľko je kombinácií tretej triedy z 25 prvkov, čiže $\binom{25}{3} = 2\,300$.

Výrazy $\binom{n}{r}$ sa nazývajú **kombinačné čísla** $\binom{n}{r}$, respektíve **binomické koeficienty**. Ich názov je odvodený z nasledujúcej vety.

VETA 1.7 (**binomická veta**). *Nech je n kladné prirodzené číslo. Potom pre ľubovoľné x a y platí*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

DÔKAZ. Platí $(x+y)^n = (x+y)(x+y)\dots(x+y)$. Keď tieto výrazy roznásobíme tak, aby už neostala žiadna zátvorka, tak dostaneme množstvo súčinov, pričom každý z nich obsahuje z každej zátvorky buď x, alebo y. Preto súčiny môžu mať len tvar $x^k y^{n-k}$, kde $k = 0, 1, \dots, n$. Zostáva určiť, koľkými spôsobmi môžeme súčin $x^k y^{n-k}$ dostať. V tomto súčine je k-krát x a zvyšné prvky sú y. Teda koeficient pri $x^k y^{n-k}$ sa rovná počtu rozličných výberov k prvkov x z n zátvoriek (každý takýto výber doplníme prvkami y jednoznačne), čiže počtu kombinácií k-tej triedy z n prvkov, teda $\binom{n}{k}$. $\square$

PRÍKLAD. Spočítajte $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$.

RIEŠENIE. Podľa binomickej vety platí

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} = (2+1)^n = 3^n$$

Poznamenajme, že permutácie (variácie a kombinácie) s opakovaním v tomto texte potrebovať nebudeme, a preto ich definície neuvádzame.

Princíp inklúzie a exklúzie

Majme množinu S a vlastnosti $p_1, p_2, \ldots, p_n$, ktoré môžu mať prvky množiny S. Pre $i = 1, 2, \ldots, n$ označme A_i podmnožinu tých prvkov S, ktoré majú vlastnosť p_i a $\overline{A_i}$ podmnožinu tých prvkov S, ktoré vlastnosť p_i nemajú. Potom je $A_1 \cap A_2$ množina tých prvkov S, ktoré majú vlastnosti p_1 aj p_2, zatiaľ čo $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}$ je množina tých prvkov S, ktoré nemajú žiadnu z vlastností $p_1, p_2, \ldots, p_n$. . Platí nasledujúca veta.

VETA 1.8 (**princíp inklúzie a exklúzie**, čiže **zapojenia a vypojenia**). *Pre počet prvkov množiny S, ktoré nemajú žiadnu z vlastností $p_1, p_2, \ldots, p_n$ platí*

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}| = |S| - \sum |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| -$$
$$- \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

pričom prvá suma ide cez všetky i z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, druhá cez všetky kombinácie $\{i, j\}$ druhej triedy množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, tretia cez všetky kombinácie $\{i, j, k\}$ tretej triedy množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ atď.

DÔKAZ. Vetu dokážeme, ak nahliadneme, že prvok, ktorý nemá žiadnu z vlastností $p_1, p_2, \ldots, p_n$ pripočítavame na pravej strane práve raz, zatiaľ čo prvok majúci nejakú z týchto vlastností pripočítavame nulakrát. Je zrejmé, že prvok, ktorý nemá žiadnu z vlastností $p_1, p_2, \ldots, p_n$ prispieva na pravej strane jednotkou, pretože sa vyskytuje len v S a v žiadnej zo súm sa už nevyskytuje. Uvažujme teraz prvok x, ktorý má práve $t \geq 1$ z uvedených vlastností. Prvok x započítavame v $|S|$ raz; vo výraze $\sum |A_i|$ ho započítavame $t = \binom{t}{1}$ krát, pretože má práve t vlastností; vo výraze $\sum |A_i \cap A_j|$ x započítavame $\binom{t}{2}$ krát, pretože má $\binom{t}{2}$ dvojíc vlastností; ... ; posledná suma, v ktorej x započítavame je $\sum |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_t}|$ (suma t-tic) a tu x započítavame práve $\binom{t}{t} = 1$ krát. Teda x pripočítame k pravej strane

$$\binom{t}{0} - \binom{t}{1} + \binom{t}{2} - \cdots + (-1)^t \binom{t}{t} = \sum_{i=0}^{t} \binom{t}{i} (-1)^i 1^{t-i} = (-1+1)^t = 0$$

krát podľa Binomickej vety. □

PRÍKLAD. Koľko kladných prirodzených čísel menších ako 10 000 nie je deliteľných číslami 4, 6, ani 10?

RIEŠENIE. Označme p_1 vlastnosť „číslo je deliteľné 4", p_2 vlastnosť „číslo je deliteľné 6" a p_3 vlastnosť „číslo je deliteľné 10". Pomocou princípu inklúzie a exklúzie nájdeme počet prvkov množiny $S = \{1, 2, \ldots, 9\,999\}$, ktoré nemajú žiadnu z vlastností p_1, p_2, ani p_3. Platí $|A_1| = \lfloor \frac{9\,999}{4} \rfloor = 2\,499$, $|A_2| = \lfloor \frac{9\,999}{6} \rfloor = 1\,666$ a $|A_3| = \lfloor \frac{9\,999}{10} \rfloor = 999$. Číslo je deliteľné 4 aj 6 práve vtedy, keď je deliteľné 12. Preto $|A_1 \cap A_2| = \lfloor \frac{9\,999}{12} \rfloor = 833$, $|A_1 \cap A_3| = \lfloor \frac{9\,999}{20} \rfloor = 499$, $|A_2 \cap A_3| = \lfloor \frac{9\,999}{30} \rfloor = 333$ a $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \lfloor \frac{9\,999}{60} \rfloor = 166$. Teda podľa princípu inklúzie a exklúzie práve $9\,999 - (2\,499 + 1\,666 + 999) + (833 + 499 + 333) - 166 = 6\,334$ kladných prirodzených čísel menších ako 10 000 nie je deliteľných 4, 6, ani 10.

Príklad. Sedem pánov navštívilo divadelné predstavenie a všetci si odložili svoje klobúky v šatni. Koľkými spôsobmi im môže roztržitá šatniarka vydať klobúky späť tak, aby žiaden pán nedostal svoj vlastný klobúk?

Riešenie. Nech je S množina všetkých rozdaní klobúkov pánom. Podľa vety 1.3 má S práve $7!$ prvkov. Označme p_i vlastnosť „i-ty pán dostane svoj vlastný klobúk" a A_i množinu tých prvkov z S, ktoré majú vlastnosť p_i, $i = 1, 2, \dots, 7$. Je zrejmé, že všetky množiny A_i majú rovnako veľa prvkov, konkrétne $6!$ podľa vety 1.3. Podobne všetky množiny $A_i \cap A_j$ majú pre $1 \leq i < j \leq 7$ rovnako veľa prvkov, konkrétne $5!$ atď. Teda podľa vety 1.8 platí

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_7}| = |S| - \binom{7}{1}|A_1| + \binom{7}{2}|A_1 \cap A_2| - \binom{7}{3}|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots$$
$$\dots + (-1)^7\binom{7}{7}|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_7| = 7! - \frac{7!}{6!{\cdot}1!}6! + \frac{7!}{5!{\cdot}2!}5! - \frac{7!}{4!{\cdot}3!}4! + \dots$$
$$\dots + (-1)^7\frac{7!}{0!{\cdot}7!}0! = 7!\left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^7\frac{1}{7!}\right] = 1\,854$$

Teda páni môžu dostať klobúky naspäť 1 854 spôsobmi pri splnení podmienok úlohy.

Predchádzajúca úloha má aj abstraktnejšiu formuláciu: Koľko permutácií sedemprvkovej množiny nenecháva žiaden prvok na svojom mieste? Rozvinutím funkcie e^{-x} do McLaurinovho radu v bode 1 dostávame $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{1}{i!}\right) = e^{-1}$. Teda pre n dostatočne veľké asi $n!e^{-1}$ permutácií n-prvkovej množiny nenecháva žiaden prvok na svojom mieste. (Poznamenajme, že výraz $\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^7\frac{1}{7!}$ sa líši od presnej hodnoty e^{-1} o menej ako tri stotisíciny.)

Dirichletov princíp

Veta 1.9 (**Dirichletov princíp**). *Ak máme $n+1$ objektov rozdelených do n skupín, tak aspoň v jednej skupine sú aspoň dva objekty.*

Dôkaz. Sporom predpokladajme, že v každej skupine je nanajvýš jeden objekt. Keďže skupín je iba n, tak spolu je vo všetkých skupinách nanajvýš n objektov, čo je v spore s naším predpokladom. □

Všimnime si, že Dirichletov princíp nám nedáva žiadnu informáciu, ako nájsť skupinu, ktorá obsahuje aspoň dva objekty. Zaručuje iba existenciu takej skupiny. To znamená, že ak aplikujeme Dirichletov princíp v dôkaze existencie nejakej štruktúry, tak tento dôkaz nám nedá návod, ako takú štruktúru zostrojiť.

Príklad. Majme n prirodzených čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$. Potom existujú indexy k a l, $1 \leq k \leq l \leq n$, také, že súčet $a_k + a_{k+1} + \dots + a_l$ je deliteľný číslom n.

Riešenie. Uvažujme súčty a_1, $a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3$, ... , $a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Ak by bol niektorý z týchto súčtov deliteľný n, tak niet čo dokazovať. Predpokladajme teda, že všetky tieto súčty majú nenulový zvyšok po delení n. Keďže súčtov je n a nenulových zvyškov iba $n-1$, tak podľa Dirichletovho princípu aspoň dva tieto súčty, povedzme $a_1 + a_2 + \cdots + a_i$ a $a_1 + a_2 + \cdots + a_j$, majú rovnaký zvyšok po delení n. Nech $i < j$. Potom je súčet $a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_j$ deliteľný číslom n.

VETA 1.10 (**Dirichletov princíp**, silná forma). *Nech sú $q_1, q_2, \ldots, q_n$ prirodzené čísla. Ak máme $q_1 + q_2 + \cdots + q_n + 1$ objektov rozdelených do n skupín, tak buď prvá skupina obsahuje aspoň $q_1 + 1$ objektov, alebo druhá skupina obsahuje aspoň $q_2 + 1$ objektov, ..., alebo n-tá skupina obsahuje aspoň $q_n + 1$ objektov.*

DÔKAZ. Sporom predpokladajme, že v i-tej skupine je nanajvýš q_i objektov pre každé $i = 1, 2, \ldots, n$. Potom je vo všetkých skupinách spolu nanajvýš $q_1 + q_2 + \cdots + q_n$ objektov, čo je v spore s predpokladom. □

Ak zvolíme $q_1 = q_2 = \cdots = q_n = 1$, tak dostávame slabú formu Dirichletovho princípu. Z modifikácií Dirichletovho princípu je najznámejšia nasledujúca.

DÔSLEDOK. *Nech sú r a $k_1, k_2, \ldots, k_n$ prirodzené čísla. Ak pre priemer týchto čísel platí $\frac{k_1+k_2+\cdots+k_n}{n} > r$, tak aspoň jedno z čísel $k_1, k_2, \ldots, k_n$ je aspoň $r + 1$.*

DÔKAZ. Majme už umiestnené objekty do n skupín tak, že v i-tej skupine je k_i objektov, $i = 1, 2, \ldots, n$. Keďže $\frac{k_1+k_2+\cdots+k_n}{n} > r$, tak $k_1 + k_2 + \cdots + k_n > n \cdot r$ a keďže všetky čísla sú prirodzené, tak $k_1 + k_2 + \cdots + k_n \geq n \cdot r + 1$. To znamená, že v n skupinách máme aspoň $n \cdot r + 1$ objektov. Teda podľa vety 1.10 aspoň jedna skupina obsahuje aspoň $r + 1$ objektov, čiže aspoň jedno z čísel $k_1, k_2, \ldots, k_n$ je aspoň $r + 1$. □

PRÍKLAD. Dva kruhové disky, jeden menší než druhý, sú rozdelené každý na 200 rovnakých výsečí. Na väčšom disku sme vybrali náhodne 100 výsečí, ktoré sme zafarbili na červeno a ostatné výseče sme zafarbili na modro. Na menšom disku sme výseče farbili na červeno a na modro úplne náhodne. Dokážte, že je možné priložiť tieto disky na seba tak, aby bolo aspoň 100 výsečí súhlasne zafarbených.

RIEŠENIE. Umiestnime väčší disk pevne v priestore. Máme presne 200 možností priloženia malého disku na veľký tak, aby výseče malého disku korešpondovali s výsečami veľkého disku. Týchto 200 možností spolu dáva 20 000 výsečí zafarbených súhlasne, keďže každá výseč malého disku má takú farbu ako 100 výsečí veľkého. Keďže priemerný počet súhlasne zafarbených výsečí je $\frac{20\,000}{200} = 100 > 99$, tak podľa Dirichletovho princípu (presnejšie, podľa dôsledku vety 1.10) musí existovať pozícia, v ktorej je súhlasne zafarbených aspoň 100 výsečí.

Cvičenia

CVIČENIE 1.1. Koľko deliteľov má číslo 620?

CVIČENIE 1.2. Koľko je rozličných možností uloženia 8 rovnakých veží na šachovnici tak, aby sa navzájom neohrozovali? (Dve veže sa navzájom ohrozujú ak ležia v rovnakom riadku, či stĺpci.)

CVIČENIE 1.3. Koľko je rozličných možností uloženia 5 bielych a 3 čiernych veží na šachovnici 8×8 tak, aby sa navzájom neohrozovali? Vyriešte túto úlohu aj pre šachovnicu 12×12.

CVIČENIE 1.4. Koľko je rozličných možností usadenia 10 dám a 10 pánov alternujúco okolo okrúhleho stola?

CVIČENIE 1.5. John pracuje v typickom americkom meste, ktorého plán tvoria cesty vytvárajúce šachovnicu. John býva na veľkej križovatke a pracuje tiež na križovatke, ale o desať „streets“ a osem „avenues“ ďalej. Koľko má rôznych najkratších ciest, ktorými môže chodiť z domu do práce? (Predpokladáme, že avenues sú tvorené sieťou rovnobežných ulíc, podobne ako streets, avšak každá avenue je kolmá na každú street.)

CVIČENIE 1.6. Spočítajte $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot k$. (Návod: Použite deriváciu na binomickú vetu pre dvojčlen $(x+1)$.)

CVIČENIE 1.7. Spočítajte $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1}$. (Návod: Použite integrál na binomickú vetu pre dvojčlen $(x+1)$.)

CVIČENIE 1.8. Koľko prirodzených čísel medzi 1 a 10 000 nie je druhými ani tretími mocninami prirodzených čísel?

CVIČENIE 1.9. Po púšti ide karavána 6 tiav. Idú už veľmi dlho v rovnakom poradí, a preto sa chcú vymeniť tak, aby pred každou ťavou išla iná, ako doteraz. Každá ťava chce bezprostredne pred sebou vidieť inú ťavu. Koľko je možných preusporiadaní, z ktorých si môžu vybrať?

CVIČENIE 1.10. Desať rozvadených manželských párov cestuje vlakom v štyroch vagónoch. Koľkými spôsobmi môže týchto 20 ľudí cestovať, ak v každom vagóne musí sedieť aspoň jeden z nich a žiaden manželský pár nechce cestovať v spoločnom vagóne?

CVIČENIE 1.11. Koľko permutácií množiny $\{1, 2, \ldots, 8\}$ nenecháva žiadne párne číslo na svojom mieste?

CVIČENIE 1.12. Dvaja učitelia skúšajú súčasne skupinu 12 študentov, každý jeden predmet. Každý študent odpovedá z jedného predmetu 30 minút. Koľko existuje rozvrhov skúšania, ak požadujeme, aby skúšky skončili za šesť hodín?

CVIČENIE 1.13. Majme vybraných 101 čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, 200\}$. Dokážte, že medzi týmito číslami sú dve také, z ktorých jedno je deliteľom druhého.

CVIČENIE 1.14. Ukážte, že z množiny $\{1, 2, \ldots, 200\}$ možno vybrať 100 čísel tak, že medzi týmito číslami nie je žiadna dvojica čísel, z ktorých jedno je deliteľom druhého.

CVIČENIE 1.15. Dokážte, že medzi ľubovoľnými 52 prirodzenými číslami existuje dvojica, ktorej súčet alebo rozdiel je deliteľný číslom 100.

CVIČENIE 1.16. Dokážte, že ak vyberieme $n+1$ čísel z množiny $\{2, 3, \ldots, 2n+1\}$ tak tieto čísla obsahujú dvojicu nesúdeliteľných čísel.

CVIČENIE 1.17. Dokážte nasledujúce tvrdenia.

a) Ak je 9 bodov zvolených vo štvorci o strane 2, tak existuje trojica bodov, ktorých vzájomné vzdialenosti sú nanajvýš $\sqrt{2}$.
b) Ak je 82 bodov zvolených v kocke o strane 3, tak existuje štvorica bodov, ktorých vzájomné vzdialenosti sú nanajvýš $\sqrt{3}$.
c) Ak je 9 bodov zvolených v rovnostrannom trojuholníku o strane 2, tak existuje trojica bodov, ktorých vzájomné vzdialenosti sú nanajvýš 1.

CVIČENIE 1.18 (**Erdösova-Szekeresova veta**). Dokážte, že každá postupnosť $a_1, a_2 \ldots, a_{n^2+1}$ reálnych čísel obsahuje buď neklesajúcu podpostupnosť (čiže vybranú postupnosť) dĺžky $n+1$, alebo nerastúcu podpostupnosť dĺžky $n+1$. (Uvažujte dĺžky najdlhších neklesajúcich podpostupností začínajúcich číslom a_i.)

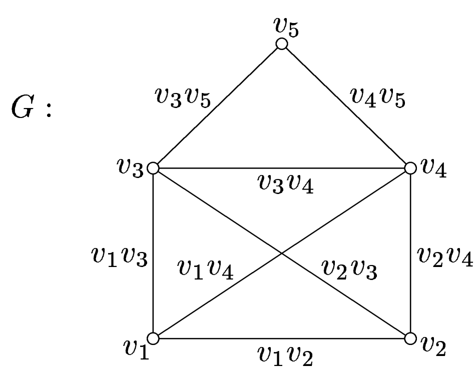
2 GRAFY

Graf

Definícia. **Graf** G je usporiadaná dvojica $G = (V(G), E(G))$, kde $V(G)$ je konečná množina a $E(G)$ je množina dvojprvkových podmnožín (nie nutne všetkých) množiny $V(G)$. Prvky $V(G)$ voláme **vrcholy** a prvky $E(G)$ **hrany**. Počet vrcholov grafu G označujeme symbolom n_G a počet hrán symbolom m_G.

Graf môžeme vizualizovať nakreslením tak, že vrcholom budú zodpovedať malé krúžky a hranám krivky (prípadne úsečky) spájajúce dvojice vrcholov. V celom nasledujúcom texte kvôli zjednodušeniu zápisu nebudeme hranu obsahujúcu vrcholy u a v označovať symbolom $\{u, v\}$, ale uv.

Príklad. Na obrázku 1 je známy graf „domček“. Vrcholová množina tohoto grafu je $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ a hranami sú v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_3v_5 a v_4v_5.



Obrázok 1

Definícia. Nech je $G = (V(G), E(G))$ graf a $v \in V(G)$. Počet tých hrán grafu G, ktoré obsahujú v (čiže ktoré sú **susedné**, cudzím slovom **incidentné**, s v), nazývame **stupeň vrchola** v a označujeme $deg_G(v)$.

Graf na obrázku 1 má jeden vrchol stupňa 2, dva vrcholy stupňa 3 a 2 vrcholy stupňa 4.

Spôsoby zadania grafu, grafové matice

V tejto časti predpokladáme, že vrcholmi grafu G sú $v_1, v_2, \dots, v_{n_G}$. Tým sme vlastne vrcholy grafu G usporiadali.

Graf môžeme zadať pomocou **zoznamu susedov**. V tomto prípade vytvoríme n_G zoznamov (zásobníkov, v krajnom prípade polí), z ktorých každý zodpovedá jednému vrcholu grafu. Nuž a zoznam zodpovedajúci vrcholu v_i obsahuje $deg_G(v_i)$ prvkov, susedov vrchola v_i.

Všimnime si, že v tomto prípade potrebujeme $2m_G$ pamäťových miest, pretože každú hranu v_iv_j sme zachytili dvakrát. Raz sa v_j vyskytuje v zozname vrchola v_i a raz sa v_i vyskytuje v zozname vrchola v_j.

Graf môžeme zadať aj maticami. **Matica incidencie** $\mathbb{A}_G = (a_{i,j})$ je matica typu $n_G \times m_G$, ktorá obsahuje len nuly a jedničky. V tejto matici $a_{i,j} = 1$ práve vtedy, keď je i-ty vrchol v_i incidentný s j-tou hranou (čiže j-ta hrana obsahuje v_i).

Matica incidencie má v každom stĺpci práve dve jednotky a v i-tom riadku ich je $deg_G(v_i)$. Na zápis tejto matice potrebujeme $n_G \cdot m_G$ pamäťových miest, avšak tieto miesta budú zaberať len nuly a jedničky.

Graf možno zadať aj **maticou susednosti** $\mathbb{B}_G = (b_{i,j})$, čo je štvorcová matica typu $n_G \times n_G$, ktorá obsahuje opäť len nuly a jedničky. V tejto matici $b_{i,j} = 1$ práve vtedy, keď sú i-ty a j-ty vrchol susedné, čiže keď $v_iv_i \in E(G)$.

Matica susednosti je symetrická, pričom v i-tom riadku aj v i-tom stĺpci má práve $deg_G(v_i)$ jednotiek. Na zápis tejto matice potrebujeme $n_G \cdot n_G$ „malých“ pamäťových miest.

Veta 2.1. *Nech je G graf, $\mathbb{A}_G$ a $\mathbb{B}_G$ sú jeho matice incidencie a susednosti, a $\mathbb{D}_G = (d_{i,j})$ je diagonálna matica, kde $d_{i,i} = deg_G(v_i)$ (ak $i \neq j$ tak $d_{i,j} = 0$). Potom $\mathbb{A}_G \cdot \mathbb{A}_G^T = \mathbb{B}_G + \mathbb{D}_G$.*

Dôkaz. Označme $\mathbb{A}_G \cdot \mathbb{A}_G^T = \mathbb{C} = (c_{i,j})$. Potom

$$c_{i,j} = a_{i,1}a_{j,1} + a_{i,2}a_{j,2} + \cdots + a_{i,n_G}a_{j,n_G}$$

Tu sú tie súčiny zakaždým rovné buď 0, alebo 1. Avšak 1 v súčine dostaneme len vtedy, keď sú obidva činitele rovné 1.

Ak $i \neq j$, tak maximálne jeden súčin je 1, a to je súčin zodpovedajúci (možnej) hrane v_iv_j. Čiže tu $c_{i,j} = b_{i,j}$.

Ak $i = j$, tak skalárne násobíme i-ty riadok so sebou samým, teda dostávame $c_{i,i} = deg_G(v_i)$. □

Vzdialenosti v grafe

Definícia. Postupnosť $v_0, v_1, \dots, v_k$ je **sled** grafu $G = (V(G), E(G))$, ak platí $v_1, v_2, \dots, v_k \in V(G)$ a $v_iv_{i+1} \in E(G)$ pre $0 \leq i < k$. **Dĺžka** tohoto sledu je k.

V prípade, keď $v_i \neq v_j$ pre každé i a j spĺňajúce $0 \leq i < j \leq k$, tak tento sled je **cesta** dĺžky k.

Konečne, ak $k \geq 3$ a pre $0 \leq i < j \leq k$ platí $v_i = v_j$ práve vtedy, keď $i = 0$ a $j = k$, tak tento sled nazývame **kružnica** dĺžky k. Túto kružnicu zapisujeme $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$.

V grafe na obrázku 1 je v_1, v_2, v_3, v_2, v_4 sledom dĺžky 4, jeho časť v_1, v_2, v_3 je dokonca cestou a kružnicou dĺžky 3 (**trojuholníkom**) je napríklad (v_2, v_1, v_4).

Definícia. Nech je $G = (V(G), E(G))$ daný graf a $u, v \in V(G)$. **Vzdialenosť vrcholov** u a v, $dist_G(u, v)$, je dĺžka najkratšej cesty začínajúcej v u a končiacej vo v.

Všimnime si, že najdlhšia cesta v grafe na obrázku 1 má dĺžku 4. Avšak vzdialenosti v tomto grafe majú veľkosti iba 0, 1 a 2.

Poznámka. Ak pre vrcholy u a v neexistuje žiadna cesta začínajúca v u a končiaca vo v, tak kladieme $dist_G(u, v) = \infty$.

Definícia. Graf $G = (V(G), E(G))$ je **súvislý**, ak pre každé $u, v \in V(G)$ existuje v G cesta z u do v. Ak graf nie je súvislý, tak jeho maximálne (čiže nezväčšiteľné) časti sa nazývajú **komponenty súvislosti**.

Na počítanie vzdialeností v grafe môžeme použiť maticu susednosti.

Veta 2.2. *Nech je $G = (V(G), E(G))$ graf, $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n_G}\}$. Potom $dist_G(v_i, v_j) \leq k$ práve vtedy, keď má matica $(\mathbb{B}_G + \mathbb{I})^k$ nenulový prvok v i-tom riadku a j-tom stĺpci.*

Dôkaz. Najprv uvažujme matice $\mathbb{B}_G^l = \mathbb{B}_G \cdot \mathbb{B}_G \cdot \ldots \cdot \mathbb{B}_G$ (na pravej strane rovnosti je l výskytov $\mathbb{B}_G$) pre $l \leq k$. V matici $\mathbb{B}_G$ je v i-tom riadku a j-tom stĺpci jednotka práve vtedy, keď v grafe G existuje hrana $v_i v_j$. V matici $\mathbb{B}_G \cdot \mathbb{B}_G$ je v i-tom riadku a j-tom stĺpci prvok väčší ako 0 práve vtedy, keď majú v_i a v_j spoločného suseda (využívame, že matica $\mathbb{B}_G$ je symetrická), teda keď existuje sled dĺžky 2 z v_i do v_j. Analogicky sa nahliadne, že $\mathbb{B}_G^{l-1} \cdot \mathbb{B}_G$ má v i-tom riadku a j-tom stĺpci prvok väčší ako 0 práve vtedy, keď existuje sled dĺžky $(l-1) + 1 = l$ z v_i do v_j.

Teraz si stačí uvedomiť, že keď nahradíme maticu $\mathbb{B}_G$ súčtom $\mathbb{B}_G + \mathbb{I}$, tak to akoby sme do každého vrchola pridali slučku. To nám umožňuje sledy „držať“ nejaký čas v danom vrchole a až potom ich pustiť ďalej. Tým sa stane, že zatiaľ čo $\mathbb{B}_G^k$ počíta sledy dĺžky k, tak $(\mathbb{B}_G + \mathbb{I})^k$ počíta sledy dĺžky nanajvýš k. $\square$

Ak je graf súvislý, tak na výpočet všetkých vzdialeností z daného vrchola w môžeme použiť **prehľadávanie do šírky**. Pri tomto prehľadávaní postupujeme podľa nasledujúceho algoritmu.

Algoritmus prehľadávania do šírky z vrchola w.

Krok 0: Do prázdnej fronty dáme vrchol w, pre ktorý položíme $vzd[w] = 0$. Pre všetky ostatné vrcholy v platí $vzd[v] = \infty$.

Krok 1: Vyberieme prvý vrchol z fronty. Vzápätí prezrieme všetkých jeho susedov u. Ak platilo $vzd[u] = \infty$, tak dáme u na koniec fronty a následne položíme $vzd[u] = vzd[z]+1$, kde z je ten vrchol, ktorý sme naposledy vybrali z fronty.

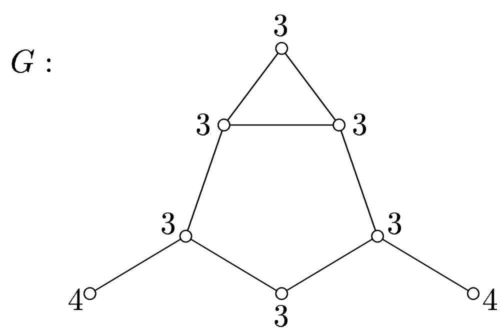
Zjavne vyššie uvedený algoritmus určí vzdialenosti z w do všetkých ostatných vrcholov, pričom potrebuje k tomu prezrieť každú hranu grafu dvakrát. Teda pracuje v čase $O(m_G)$.

Pri prieskume grafov používame aj **prehľadávanie do hĺbky**. To je algoritmus, ktorý sa od prehľadávania do šírky líši len tým, že namiesto dátovej štruktúry fronta používa zásobník. Aj tento algoritmus pracuje v čase $O(m_G)$.

Definícia. Nech je $G = (V(G), E(G))$ graf a $v \in V(G)$. Potom **excentricita vrchola** (**výstrednosť vrchola**) v je

$$e_G(v) = \max_{u \in V(G)} dist_G(v, u)$$

Príklad. Na obrázku 2 máme graf G, ktorý má pri každom vrchole uvedenú excentricitu tohoto vrchola. Ku každému vrcholu v priraďte tie vrcholy, ktoré sú od v najvzdialenejšie.



Obrázok 2

Definícia. Nech je $G = (V(G), E(G))$ graf. **Priemer grafu** G je $diam(G)$ a **polomer grafu** G je $rad(G)$, kde

$$diam(G) = \max_{v \in V(G)} e_G(v) \qquad \text{a} \qquad rad(G) = \min_{v \in V(G)} e_G(v)$$

Všimnime si, že zatiaľ čo priemer je vlastne najväčšia vzdialenosť v grafe, tak polomer je minimum excentricít, teda minimum z maximálnych vzdialeností, čiže minimum idúce cez maximá z minimálnych (najkratších) ciest. Teda pojem polomeru je oveľa zložitejší, ako pojem priemeru.

Tiež si všimnime, že graf G je nesúvislý práve vtedy, keď $diam(G) = \infty$.

Veta 2.3. *Pre každý súvislý graf G platí*

$$rad(G) \leq diam(G) \leq 2 \cdot rad(G)$$

Dôkaz. Keďže $rad(G)$ je minimum množiny $\{e_G(v); v \in V(G)\}$ a $diam(G)$ je jej maximum, tak platí $rad(G) \leq diam(G)$. Nech je w vrchol, pre ktorý platí $e_G(w) = rad(G)$. Potom pre ľubovoľné dva vrcholy $u, v \in V(G)$ platí

$$dist_G(u,v) \leq dist_G(u,w) + dist_G(w,v) \leq 2 \cdot e_G(w) = 2 \cdot rad(G) \quad \square$$

Stromy

Definícia. Súvislý graf bez kružníc sa nazýva **strom**.

Keby sme pri prehľadávaní do šírky (do hĺbky) tučne značili tie hrany, pomocou ktorých sme našli nové vrcholy, tak by sme tučne vyznačili **strom prehľadávania do šírky** (**do hĺbky**) zakorenený vo vrchole w.

Veta 2.4. *V strome $T = (V(T), E(T))$ pre každé dva vrcholy $u, v \in V(T)$ existuje práve jedna cesta začínajúca v u a končiaca vo v.*

Dôkaz. Sporom predpokladajme, že existuje strom T a v ňom dva vrcholy u a v také, že existujú dve rôzne cesty P a Q začínajúce v u a končiace vo v. Keďže P aj Q začínajú v rovnakom vrchole, sú prvé úseky týchto ciest spoločné. Nech je w_1 prvý vrchol cesty P, ktorého nasledovník na P je rôzny od nasledovníka na Q. (Takýto vrchol existuje, pretože v krajnom prípade je ním u.) Podobne nech je w_2 prvý vrchol cesty P, vyskytujúci sa kdesi za w_1, ktorý leží aj na ceste Q. (Opäť takýto vrchol existuje, v krajnom prípade je ním v.) Úsek cesty P medzi w_1 a w_2 je hranovo disjunktný s úsekom cesty Q medzi w_1 a w_2 a tieto úseky spolu tvoria kružnicu. To však protirečí definícii stromu. $\square$

Veta 2.5. *Každý strom T, ktorý obsahuje aspoň 2 vrcholy, má aspoň dva vrcholy stupňa 1.*

Dôkaz. Nech je u vrchol najmenšieho stupňa. Začnime v tomto vrchole tvoriť cestu P a predlžujme ju potiaľ, pokiaľ to len ide. Cesta P nemôže obsahovať nekonečne veľa vrcholov, pretože každý vrchol grafu môže obsahovať nanajvýš raz. Preto musí kdesi skončiť. A sú len dve možnosti, ako skončí.

Jednou možnosťou je, že P skončí vo vrchole stupňa 1. Keďže u bol vrchol najmenšieho stupňa v grafe, tak sme práve našli druhý vrchol stupňa 1 a tvrdenie je dokázané.

Druhou možnosťou je, že cesta končí vo vrchole v (stupňa aspoň 2), ktorého všetci susedia už ležia na P. Označme si symbolom w jedného takéhoto suseda. Potom úsek cesty P medzi w a v spolu s hranou vw tvorí kružnicu, čo protirečí definícii stromu. $\square$

Vetu 2.5 môžeme využiť na dokazovanie viet o stromoch indukciou.

Veta 2.6. *Pre každý strom T na n_T vrcholoch s m_T hranami platí $m_T = n_T - 1$.*

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme indukciou podľa $n = n_T$.

1° Ak $n = 1$, tak jediný graf na 1 vrchole nemá žiadnu hranu.

2° Nech je T strom na $n = n_T$ vrcholoch a nech tvrdenie platí pre každý strom, ktorý má menej ako n vrcholov. Keďže $n > 1$, tak podľa vety 2.5 má T vrchol stupňa 1. Označme tento vrchol u a hranu, ktorá je s týmto vrcholom incidentná označme e. Potom je $T' = (V(T) - \{u\}, E(T) - \{e\})$ opäť stromom, lebo je to súvislý graf bez kružníc. Keďže T' má $n_T - 1$ vrcholov a $m_T - 1$ hrán, tak podľa indukčného predpokladu platí $m_T - 1 = n_T - 1 - 1$, čiže $m_T = n_T - 1$. □

Dôsledok. *Súvislý graf na n vrcholoch má aspoň $n-1$ hrán, pričom ak má práve $n-1$ hrán, tak je stromom.*

Dôkaz. Ak je graf stromom, tak tvrdenie platí podľa vety 2.6. Predpokladajme preto, že G je súvislý graf na n vrcholoch, ktorý nie je stromom. To znamená, že G má kružnicu. Je zrejmé, že vynechaním ľubovoľnej hrany z kružnice grafu G sa súvislosť tohoto grafu neporuší. Označme G' graf, ktorý vznikne z grafu G vynechaním jednej hrany, povedzme e, z ľubovoľnej kružnice grafu G. Ak má aj G' kružnicu, tak opäť vynechajme jednu hranu z ľubovoľnej kružnice grafu G' a tento proces opakujme až dovtedy, kým z grafu G nezostane graf G^*, ktorý neobsahuje kružnice. Graf G^* je súvislý graf bez kružníc, čiže je stromom. Podľa vety 2.6 má G^* práve $n-1$ hrán a keďže graf G obsahuje okrem všetkých hrán stromu G^* aj hranu e (a možno ešte niekoľko ďalších hrán), tak G má aspoň n hrán. To znamená, že ak graf nie je stromom, tak má aspoň n hrán, čiže ak má práve $n-1$ hrán, tak je stromom. □

Cvičenia

Cvičenie 2.1. Dokážte, že v každom grafe G, ktorý má m_G hrán, platí identita

$$\sum_{v \in V(G)} deg_g(v) = 2 \cdot m_G$$

Cvičenie 2.2. Existuje **kubický graf** (čiže graf, v ktorom má každý vrchol stupeň 3) na 13 vrcholoch?

Cvičenie 2.3. **Kompletný graf** na n vrcholoch, K_n, je graf na n vrcholoch, ktorý obsahuje všetky možné hrany. Určte počet hrán, polomer, priemer a stupne všetkých vrcholov grafu K_n.

Cvičenie 2.4. **Kompletný párny (bipartitný) graf** K_{n_1,n_2} je taký graf, ktorého vrcholovú množinu možno rozložiť na dve časti V_1 a V_2, pričom $|V_1| = n_1$ a $|V_2| = n_2$, a množina hrán pozostáva zo všetkých možných dvojíc u_1, u_2, kde

$u_1 \in V_1$ a $u_2 \in V_2$. Určte počet hrán, polomer, priemer a stupne všetkých vrcholov grafu K_{n_1,n_2}. Môže kompletný párny graf obsahovať kružnicu nepárnej dĺžky?

CVIČENIE 2.5. Nech je $G = (V(G), E(G))$ graf. Potom jeho **komplement** je taký graf $\overline{G} = (V(\overline{G}), E(\overline{G}))$, pre ktorý platí $V(\overline{G}) = V(G)$ a ďalej $uv \in E(\overline{G})$ práve vtedy, keď $uv \notin E(G)$. Koľko hrán má graf $\overline{G}$?

CVIČENIE 2.6. Vrchol v grafu G je **centrálny vrchol** ak $rad(G) = e_G(v)$. Dokážte, že strom má nanajvýš 2 centrálne vrcholy.

CVIČENIE 2.7. Zostrojte všetky stromy na 6 vrcholoch.

CVIČENIE 2.8. Zostrojte všetky grafy na 5 vrcholoch. Koľko je medzi nimi súvislých grafov?

CVIČENIE 2.9. **Kubický strom** je taký strom, ktorého vrcholy majú stupne len 1 alebo 3. Ktosi povedal, že každý kubický strom s párnym počtom hrán obsahuje kružnicu. Má pravdu?

CVIČENIE 2.10. Alkány (parafíny) sú organické molekuly so vzorcom C_nH_{2n+2}, v ktorých sú len jednoduché väzby. Povedané v reči teórie grafov, sú to stromy, v ktorých sú vrcholy len stupňov 4 a 1. Koľko je rôznych takýchto stromov (izomérov) pre n vrcholov stupňa 4? (Úlohu vyriešte pre malé hodnoty n.)

CVIČENIE 2.11. Dokážte, že graf na n vrcholoch bez kružníc má najviac $n-1$ hrán. Pritom ak má práve $n-1$ hrán, tak je stromom.

CVIČENIE 2.12. Nech je $(A; *)$ grupa s nosičom A a operáciou $*$. Ďalej nech je S taká podmnožina A, ktorá s každým svojim prvkom obsahuje aj prvok k tomuto inverzný a ktorá neobsahuje jednotku grupy e. Potom **Cayleyho graf** $Cay((A; *), S)$ je taký graf $G = (V(G), E(G))$, pre ktorý $V(G) = A$ a ďalej $ab \in E(G)$ práve vtedy, keď existuje $s \in S$ také, že $b = a * s$. Dokážte, že v Cayleyho grafe majú všetky vrcholy rovnaký stupeň a priemer sa rovná polomeru.

CVIČENIE 2.13. Zostrojte grafy $Cay((\mathbb{Z}_6; \oplus), \{1, 3, 5\})$ a $Cay((\mathbb{Z}_6; \oplus), \{2, 3, 4\})$. Aké sú to grafy?

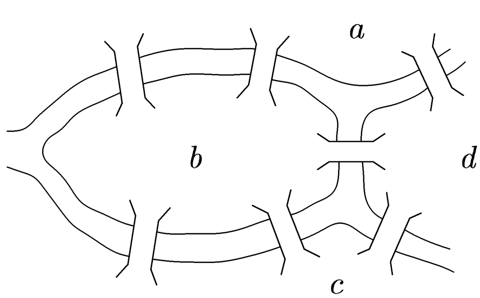
CVIČENIE 2.14. Dihedrálna grupa D_3 je grupa symetrií pravidelného trojuholníka. Táto grupa má 6 prvkov, ktorými sú identita id, otočenie r_1 o $120°$, otočenie r_2 o $240°$ a tri preklopenia p_1, p_2 a p_3. Zostrojte grafy $Cay(D_3, \{p_1, p_2, p_3\})$ a $Cay(D_3, \{r_1, r_2, p_1\})$. Aké sú to grafy?

3 PRECHÁDZKY

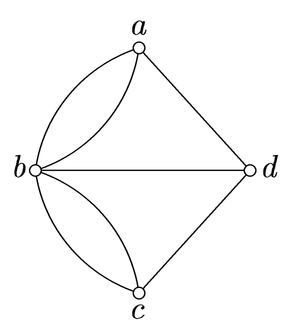
Eulerovské ťahy

Mesto Königsberg, teraz Kaliningrad, sa už v 18-tom storočí rozprestieralo na brehoch a dvoch ostrovoch rieky Pregoly. Tieto časti mesta boli pospájané 7 mostami, ako je znázornené na obrázku 3. V tej dobe nebývalo bežné, aby boli časti mesta pospájené až 7 mostami a obyvatelia Königsbergu boli na tieto svoje mosty aj patrične hrdí. Počas nedieľ sa Königsbergčania prechádzali ulicami a objavil sa problém, či je možné naplánovať takú prechádzku mestom, počas ktorej by prešli každým mostom práve raz.

Leonhard Euler nahradil všetky časti súše vrcholmi a všetky mosty hranami spájajúcimi tieto vrcholy. Takto síce nedostal graf v zmysle našej definície, ale graf s násobnými hranami, pozri obrázok 4. Avšak úlohu týmto spôsobom previedol na problém nájsť taký sled v grafe (s násobnými hranami), ktorý by obsahoval každú hranu práve raz.



Obrázok 3



Obrázok 4

Definícia. **Eulerovský ťah** je taký sled, ktorý obsahuje každú hranu grafu práve raz. Eulerovský ťah je **uzavretý**, keď sa jeho prvý vrchol rovná poslednému a je **otvorený** keď je jeho posledný vrchol rôzny od prvého.

Problém mesta Königsberg Euler zovšeobecnil a v roku 1736 dokázal nasledujúcu vetu, ktorá sa považuje za prvú vetu teórie grafov.

Veta 3.1 (**Eulerova veta**). *Súvislý graf má uzavretý eulerovský ťah práve vtedy, keď má všetky vrcholy párneho stupňa.*

Dôkaz. Nech má graf G uzavretý eulerovský ťah T. Prejdime sa pozdĺž hrán ťahu T. Ak do vrchola v prídeme k_v krát pomocou k_v rôznych hrán, tak z tohoto vrchola musíme aj k_v krát odísť pomocou ďalších k_v rôznych hrán. To znamená, že vrchol v má stupeň $2 \cdot k_v$, a teda stupeň každého vrchola grafu G je párny.

Teraz predpokladajme, že všetky vrcholy grafu G majú párny stupeň. Nech je v ľubovoľný vrchol grafu G a nech je T najdlhší ťah začínajúci vo vrchole v. Predpokladajme, že ťah T končí vo vrchole u, pričom $u \neq v$. Potom je vrchol u susedný s nepárnym počtom hrán ťahu T a keďže stupeň u je párny, tak aspoň jedna hrana susedná s u nepatrí ťahu T. Čiže T možno predĺžiť, čo je spor s predpokladom. To znamená, že ťah T nutne končí vo vrchole v.

Ak ťah T obsahuje všetky hrany grafu G, tak je eulerovský. Predpokladajme preto, že T neobsahuje všetky hrany grafu G. Keďže G je súvislý, tak existuje taká hrana e grafu G, ktorá nepatrí ťahu T, ale susedí s vrcholom, povedzme v', ktorý patrí T. Vynechajme z G všetky hrany ťahu T. Takto dostaneme graf, ktorý môže byť nesúvislý. Označme G' ten komponent súvislosti tohoto grafu, ktorý obsahuje vrchol v'. Keďže všetky vrcholy grafu G' majú párny stupeň, tak v G' existuje ďalší uzavretý ťah, povedzme $v', v'_1, v'_2, \ldots, v'_{k'}, v'$, začínajúci hranou e. Potom ťah $T = v, v_1, v_2, \ldots, v_i, v', v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_k, v$ možno predĺžiť na ťah

$$v, v_1, v_2, \ldots, v_i, v', v'_1, v'_2, \ldots, v'_{k'}, v', v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_k, v$$

ktorý je dlhší ako T, lebo okrem všetkých hrán ťahu T obsahuje aj hranu e. To je však spor s predpokladom, že T je najdlhší ťah grafu G začínajúci vo vrchole v. To znamená, že najdlhší ťah začínajúci vo v obsahuje všetky hrany grafu G, a teda tento ťah je eulerovský. $\square$

Všimnime si, že v predchádzajúcom dôkaze sme nikde nevyužili, že graf G nemá násobné hrany. Teda Eulerova veta platí aj pre také grafy, ktoré násobné hrany majú. Eulerova veta má nasledujúci dôsledok, podľa ktorého neexistuje prechádzka mestom Königsberg, obsahujúca každý most práve raz.

Dôsledok. *Súvislý graf má otvorený eulerovský ťah práve vtedy, keď má práve dva vrcholy nepárneho stupňa.*

Dôkaz. Ak má graf otvorený eulerovský ťah, tak je zrejmé, že všetky jeho vrcholy, s výnimkou prvého a posledného vrchola otvoreného eulerovského ťahu, sú párneho stupňa.

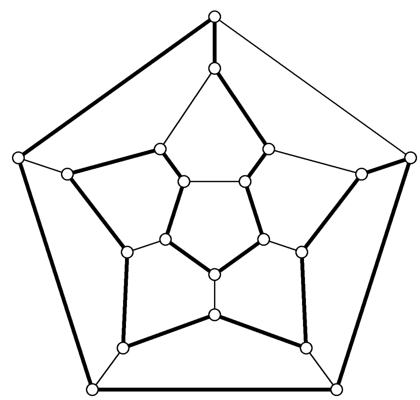
Teraz predpokladajme, že súvislý graf G má len dva vrcholy, povedzme u a v, nepárneho stupňa. Označme G' graf, respektíve graf s násobnými hranami, ktorý vznikne z G pridaním hrany uv. Graf G' je súvislý a každý jeho vrchol má párny stupeň. Preto má podľa Eulerovej vety uzavretý eulerovský ťah, pričom vynechaním hrany uv z tohoto ťahu dostaneme otvorený eulerovský ťah grafu G. $\square$

S uzavretými eulerovskými ťahmi súvisí **úloha čínskeho poštára**. Táto úloha spočíva v nájdení najkratšej okružnej prechádzky mestom, počas ktorej (čínsky) poštár prejde všetky ulice. Keď nahradíme všetky križovatky mesta vrcholmi grafu a cesty hranami, pričom každej hrane bude priradené kladné číslo (dĺžka príslušnej ulice), tak úloha čínskeho poštára spočíva v nájdení takého uzavretého sledu, ktorý obsahuje každú hranu aspoň raz a pri tejto podmienke bude súčet hodnôt všetkých hrán sledu (spolu s ich násobnosťou) minimálny možný.

Podľa vety 3.1 ak je graf G súvislý a každý vrchol G má párny stupeň, tak úlohu čínskeho poštára rieši uzavretý eulerovský ťah grafu G. Avšak pre iné grafy úloha čínskeho poštára nie je až tak triviálna.

Hamiltonovské kružnice

V roku 1857 William R. Hamilton zostrojil matematický hlavolam, ktorého cieľom bolo nájsť takú uzavretú prechádzku po hranách pravidelného dvanásťstena, ktorá by obsahovala každý vrchol práve raz. Ak zabudneme na plochy dvanásťstena a nakreslíme jeho vrcholy a hrany v rovine, tak dostaneme graf nakreslený na obrázku 5. (Tučnou čiarou je zaznačené jedno riešenie hlavolamu.)



Obrázok 5

Definícia. **Hamiltonovská kružnica** je taká kružnica, ktorá obsahuje všetky vrcholy grafu a **hamiltonovská cesta** je cesta, obsahujúca všetky vrcholy grafu.

Teda riešením Hamiltonovho hlavolamu je hamiltonovská kružnica. Jedna takáto kružnica je na obrázku 5 vyznačená tučnými hranami.

Zistiť, či má graf uzavretý eulerovský ťah, je ľahký problém, lebo stačí zistiť súvislosť grafu a paritu stupňov všetkých jeho vrcholov. Je prekvapujúce, že analogický problém pre hamiltonovské kružnice je ťažký. Napriek tomu poznáme veľmi veľa podmienok, ktorých splnenie vynucuje v grafe existenciu hamiltonovskej kružnice. Jednu z najznámejších postačujúcich podmienok tohoto typu dokázal O. Ore v roku 1960.

Veta 3.2 (**Oreho veta**). *Nech je G graf na $n_G \geq 3$ vrcholoch. Ak je súčet stupňov každých dvoch vrcholov, ktoré nie sú spojené hranou, aspoň n_G, tak G má hamiltonovskú kružnicu.*

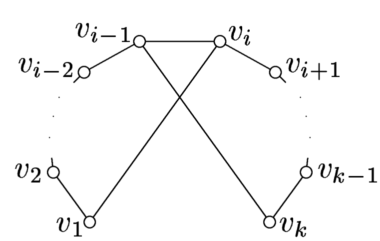
Dôkaz. Nech je G graf spĺňajúci podmienky vety. Najprv dokážeme, že graf G je súvislý. Sporom predpokladajme, že G má aspoň dva komponenty súvislosti. Nech je v_1 vrchol z jedného komponentu súvislosti a v_2 vrchol z iného komponentu súvislosti grafu G. Vrcholy v_1 a v_2 nemôžu byť spojené hranou, a teda podľa predpokladov vety je súčet stupňov týchto vrcholov aspoň n_G. Teda z dvojprvkovej podmnožiny množiny vrcholov vedie do ostatných n_G-2 vrcholov aspoň n_G hrán. Podľa Dirichletovho princípu aspoň dve hrany vedú do rovnakého vrchola, povedzme w. Avšak potom sú v_1w aj v_2w hrany grafu G, čo je v spore s predpokladom, že v_1 a v_2 patria do rôznych komponentov súvislosti grafu G. Teda G je súvislý graf.

Teraz predpokladajme, že $v_1, v_2, \ldots, v_k$ je najdlhšia cesta v grafe G. Dokážeme, že existuje kružnica obsahujúca všetky vrcholy tejto cesty. Ak sú v_1 a v_k spojené hranou, tak niet čo dokazovať. Predpokladajme preto, že v_1 a v_k nie sú spojené hranou. Keďže $v_1, v_2, \ldots, v_k$ je najdlhšia cesta v grafe G, tak z v_1 aj z v_k môžu viesť hrany iba do vrcholov $v_2, v_3, \ldots, v_{k-1}$. Rozdeľme všetky možné hrany susedné s v_1 a v_k do $k-1$ skupín $\{v_1v_2\}$, $\{v_1v_3, v_2v_k\}$, $\{v_1v_4, v_3v_k\}$, ... , $\{v_1v_i, v_{i-1}v_k\}$, ... , $\{v_1v_{k-1}, v_{k-2}v_k\}$, $\{v_{k-1}v_k\}$. Všetky tieto skupiny, s výnimkou prvej a poslednej, sú dvojprvkové. Vrcholy v_1 a v_k nie sú spojené hranou, a preto je súčet ich stupňov aspoň n_G. Keďže skupín hrán je $k-1 \leq n_G-1 < n_G$, tak podľa Dirichletovho princípu máme aspoň v jednej skupine dve hrany grafu G. Nech sú týmito hranami v_1v_i a $v_{i-1}v_k$ pre nejaké $i \in \{3, 4, \ldots, k-1\}$. Potom je

$$C = (v_1, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{k-1}, v_k, v_{i-1}, v_{i-2}, \ldots, v_2, v_1)$$

kružnica obsahujúca všetky vrcholy najdlhšej cesty $v_1, v_2, \ldots, v_k$ grafu G, pozri obrázok 6.

Ak $k = n$, tak tvrdenie vety je dokázané. Predpokladajme preto, že $k < n$. Keďže G je súvislý graf, tak existuje vrchol u grafu G, $u \notin \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, ktorý je spojený hranou s nejakým vrcholom kružnice C. Potom však existuje cesta na vrcholoch $v_1, v_2, \ldots, v_k, u$ (samozrejme nie nutne v tomto poradí), čo je spor s predpokladom, že $v_1, v_2, \ldots, v_k$ je najdlhšia cesta v grafe G. $\square$



Obrázok 6

Dôsledkom Oreho vety je tvrdenie, ktoré dokázal G. Dirac už v roku 1952.

DÔSLEDOK (**Diracova veta**). *Nech je G graf na $n_G \geq 3$ vrcholoch. Ak má každý vrchol grafu G stupeň aspoň $\frac{n_G}{2}$, tak G má hamiltonovskú kružnicu.*

Poznamenajme, že tak, ako je Oreho veta zovšeobecnením Diracovej vety, existujú aj zovšeobecnenia Oreho vety.

Bloky grafu

DEFINÍCIA. Graf G je **2-súvislý** ak pre ľubovoľné dva rôzne vrcholy u a v existujú v G dve **vnútorne disjunktné cesty** (teda také, ktoré majú všetky vrcholy s výnimkou u a v rôzne) z u do v. Vrchol, po ktorého odstránení sa graf stane nesúvislý, sa nazýva **artikulácia**.

Ináč povedané, graf je 2-súvislý ak každé dva jeho vrcholy ležia v kružnici. Grafy na obrázkoch 1 a 5 sú 2-súvislé, avšak graf na obrázku 2 nie je 2-súvislý.

Ak graf nie je 2-súvislý, tak buď nie je súvislý, alebo obsahuje artikuláciu. Graf na obrázku 2 je súvislý, avšak obsahuje 2 artikulácie.

DEFINÍCIA. Graf $H = (V(H), E(H))$ je **podgraf** grafu $G = (V(G), E(G))$ ak platí $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) \subseteq E(G)$. Podgraf daného grafu, ktorý nemá artikuláciu a je pri tejto vlastnosti maximálny (čiže nezväčšiteľný), sa nazýva **blok**.

Uvedomme si, že ak je vrchol v artikuláciou grafu G, tak v ešte nemusí byť artikuláciou podgrafu H grafu G. Ďalej, podľa definície blok nemusí byť 2-súvislý graf. To preto, lebo blokom môže byť aj izolovaný vrchol, respektíve hrana (čiže grafy K_1 a K_2). Graf na obrázku 2 má 3 bloky a 2 artikulácie.

V predchádzajúcej časti sme použili prehľadávanie do šírky na zistenie vzdialeností v grafe. Tu ukážeme, ako sa dá prehľadávanie do hĺbky využiť na nájdenie a opísanie všetkých blokov v grafe. K tomu budeme využívať strom prehľadávania do hĺbky (ktorý sa nazýva aj **kostra prehľadávania do hĺbky**), popísaný pred vetou 2.4.

DEFINÍCIA. Nech je T strom prehľadávania do hĺbky grafu G, zakorenený vo vrchole w. Vrchol u je **potomok** v a v je **predok** u, ak v leží na jedinej $w-u$ ceste v T. Naviac, ak je vu hrana stromu T, tak u je **syn** vrchola v, respektíve v je **rodič** vrchola u.

VETA 3.3. *Nech je G súvislý graf a nech je T jeho strom prehľadávania do hĺbky. Potom pre ľubovoľnú hranu uv grafu G platí, že buď je u potomkom v, alebo je v potomkom u.*

DÔKAZ. Pri prehľadávaní do hĺbky používame zásobník. Pracujeme tak, že na začiatku dáme do zásobníka koreň w.

V nasledujúcom sa pozrieme na vrch zásobníka, kde nájdeme vrchol u (pričom občas sa stane že $u = w$). Ak sme už prezreli (našli) všetkých susedov u, tak vrchol u vyhodíme zo zásobníka. V opačnom prípade nájdeme nového suseda v vrchola u, označíme ho ako nájdený a vložíme ho na vrch zásobníka (teda nad u).

Vyššie opísaný proces opakujeme dovtedy, kým zo zásobníka nevyhodíme posledný vrchol.

Povedzme, že pri prehľadávaní do hĺbky nájdeme najprv u. Keďže uv je hrana grafu, vrchol u je v zásobníku ešte aj vtedy, keď doň vložíme v. Nuž a práve postupnosť vrcholov v zásobníku medzi u a v predstavuje cestu práve zostrojeného stromu prehľadávania do hĺbky. Teda nielen že je v potomkom u, my vieme priamo v zásobníku odčítať cestu z u do v v strome prehľádávania do hĺbky T. □

Poznamenajme, že v predchádzajúcom dôkaze sme proces prehľadávania do hĺbky naznačený v kapitole 2 trošičku, hoci nie veľmi, pozmenili. V čom je tá malá odlišnosť?

Na obrázku 7 je graf, ktorý má tučnými hranami vyznačený jeden strom (kostru) prehľadávania do hĺbky. Tento graf má pri každom vrchole dvojicu čísel, z ktorých prvé predstavuje poradie nájdenia daného vrchola. Teda koreň má prvé číslo 1, ďalší nájdený vrchol má číslo 2 atď.

Nasledujúce tvrdenie je dôsledkom vety 3.3 a uvádzame ho bez dôkazu.

DÔSLEDOK. *Nech je T strom prehľadávania do hĺbky súvislého grafu G. Potom platia nasledujúce výroky. Koreň w stromu T je artikuláciou v G práve vtedy, keď má viac ako jedného syna. Vrchol v rôzny od koreňa je artikuláciou práve vtedy, ak pre niektorého z jeho synov neexistuje nestromová hrana z $E(G) - E(T)$ spájajúca tohoto syna, alebo niektorého jeho potomka, s predkom v.*

Tento dôsledok nám dáva návod na zostrojenie algoritmu hľadajúceho bloky grafu G. Budeme využívať nasledujúce funkcie na vrcholoch.

DEFINÍCIA. Nech je T strom prehľadávania do hĺbky súvislého grafu G. Symbolom Def(v) budeme označovať poradie nájdenia vrchola v a symbolom Low(v) budeme označovať minimum z hodnôt Def(v) a Def(z), kde z sú vrcholy ku ktorým existuje potomok u vrchola v taký, že uz je hrana G.

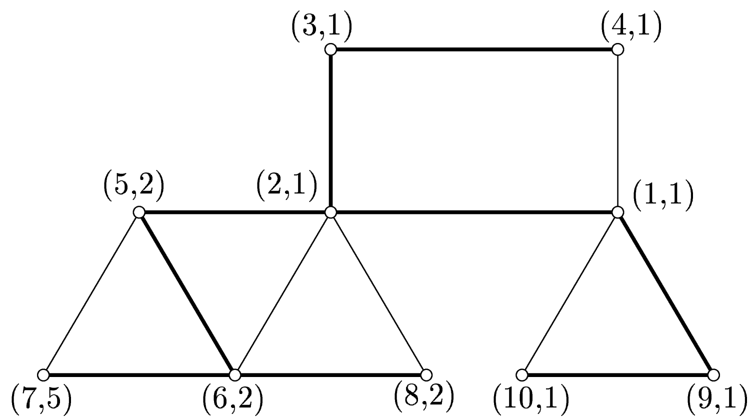
Z predchádzajúceho dôsledku je zrejmé, že vrchol v rôzny od koreňa je artikuláciou práve vtedy, keď pre aspoň jedného jeho syna u platí Low$(u) \geq$ Def(v). Ak teda po vyšetrení vrchola u zistíme, že Low$(u) \geq$ Def(v), kde v je rodič u, tak všetky hrany v zásobníku až po hranu vu tvoria blok.

ALGORITMUS: BLOKY.
Vstup: graf zadaný zoznamami okolí vrcholov bez izolovaných vrcholov.
Výstup: množiny hrán blokov grafu.

```
Procedure BLOK(v,p);                                   { prehľadanie do hĺbky z v, p je }
Begin                                                   { rodič v, premenné Def, Low, }
  stav:=stav+1; Def(v):=stav; Low(v):=Def(v);          { zásobník a stav sú globálne }
  Forall u ∈ zoz(v) Do If Def(u)=0
  Then Begin                                           { u je nový, vu je kostrová }
    zásobník ← vu; BLOK(u,v);
    Low(v):=min(Low(v),Low(u));
    If Low(u) ≥ Def(v) Then Repeat                     { v je koreň, alebo artikulácia }
      e ← zásobník; Write(e);
    Until e = vu;
  End Else If (u ≠ p) And (Def(u) < Def(v))            { aktualizuje Low(v) }
  Then Begin
    zásobník ← vu;
    Low(v):=min(Low(v),Def(u));
  End;
End;                                                    { koniec procedúry }
```

```
Begin                                                   { telo programu }
   Forall v ∈ V Do Def(v):=0;                           { inicializácia }
   zásobník:=∅; stav:=0;
   Forall r ∈ V Do If Def(r)=0 Then BLOK(r,0);     { nájde bloky v komponente }
End.                                                     { obsahujúcom r }
```

Algoritmus Bloky prezrie každú hranu dvakrát (do zásobníka ju dá iba raz), a preto je jeho zložitosť $O(m_G+n_G)$. Na obrázku 7 je graf, v ktorom sú tučne vyznačené hrany stromu prehľadávania do hĺbky. Prvé číslo z dvojice pri vrchole v označuje $\mathrm{Def}(v)$ a druhé $\mathrm{Low}(v)$. Algoritmus vypíše postupne bloky s vrcholmi (číslo Def(v) stotožníme kvôli jednoduchosti s názvom vrchola): $\{8,7,6,5,2\}$, $\{4,3,2,1\}$ a $\{10,9,1\}$.



Obrázok 7

Cvičenia

Cvičenie 3.1. Dokážte, že ak graf obsahuje uzavretý sled nepárnej dĺžky, tak obsahuje aj kružnicu nepárnej dĺžky.

Cvičenie 3.2. Ukážte, že ak graf obsahuje uzavretý sled párnej dĺžky, tak ešte nemusí obsahovať kružnicu.

Cvičenie 3.3. Dokážte, že graf na $n = n_G$ vrcholoch, ktorý má viac, ako $\binom{n-1}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ hrán, je súvislý. Ukážte, že $\binom{n-1}{2}$ hrán vo všeobecnosti nestačí.

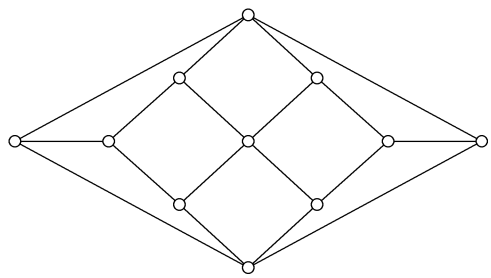
Cvičenie 3.4. Pre aké n má kompletný graf K_n eulerovský ťah?

Cvičenie 3.5. Nech je G graf, ktorý má všetky vrcholy párneho stupňa, s výnimkou vrcholov u a v, ktorých stupne sú nepárne. Dokážte, že graf G je súvislý práve vtedy, keď je súvislý graf (respektíve graf s násobnými hranami) G', ktorý vznikne z grafu G pridaním hrany uv.

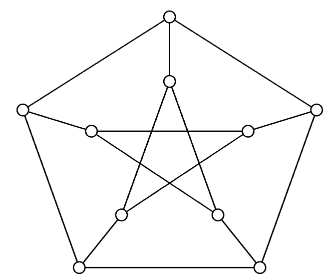
Cvičenie 3.6. Vyriešte úlohu čínskeho poštára pre graf domček z obrázku 1, keď majú hrany v_1v_4, v_2v_3, v_3, v_5 a v_4v_5 dĺžku 1, hrana v_3v_4 má dĺžku 3, hrany v_1v_3 a v_2v_4 majú dĺžku 4 a hrana v_1v_2 má dĺžku 5. Zdôvodnite, prečo je nájdené riešenie najlepšie.

Cvičenie 3.7. Dokážte, že graf na obrázku 8 nemá hamiltonovskú kružnicu.

Cvičenie 3.8. Dokážte, že **Petersenov graf**, ktorý je nakreslený na obrázku 9, nemá hamiltonovskú kružnicu.



Obrázok 8



Obrázok 9

Cvičenie 3.9. Dokážte, že ak má graf $n = n_G$ vrcholov a viac ako $\binom{n-1}{2} + 1$ hrán, tak má hamiltonovskú kružnicu. Ukážte, že $\binom{n-1}{2} + 1$ hrán vo všeobecnosti nestačí.

Cvičenie 3.10. Koľko rôznych hamiltonovských kružníc má kompletný graf na n vrcholoch K_n?

Cvičenie 3.11. Nech je W_n graf, ktorý vznikne z pravidelného $(n-1)$-bokého ihlanu, ak zabudneme na plochy tohoto ihlanu. Takýto graf nazývame **koleso**. Koľko hamiltonovských kružníc má W_n?

Cvičenie 3.12. Nech je H_n graf, ktorý vznikne z pravidelného $\frac{n}{2}$-bokého hranola, ak zabudneme na plochy tohoto hranola. Takýto graf nazývame **hranol**. Koľko hamiltonovských kružníc má H_n?

Cvičenie 3.13. Nech je T kostra prehľadávania do hĺbky súvislého grafu G a nech je K kompletný podgraf grafu G. Dokážte, že všetky vrcholy K ležia na jednej ceste začínajúcej v koreni kostry T.

4 TOKY A SÚVISLOSŤ

Definície

DEFINÍCIA. **Sieť** $G = (V(G), E(G))$ je usporiadaná dvojica, kde $V(G)$ je konečná množina **vrcholov** a $E(G)$ je množina **šípov**, čiže usporiadaných dvojíc vrcholov. Vrcholy n-vrcholovej siete označujeme $s = v_1, v_2, \ldots, v_n = t$. Vrchol v_1 nazývame **zdroj** (pre výraznejšie rozlíšenie ho označujeme aj s) a vrchol v_n nazývame **ústie** (pre výraznejšie rozlíšenie ho označujeme t). Naviac, každý šíp e siete je ohodnotený nezápornou hodnotou $c(e)$, nazývanou **priepustnosť** (**kapacita**).

Sieť obyčajne znázorňujeme v rovine tak, že vrcholy zakreslíme ako malé krúžky a šípy zakreslíme ako čiary spájajúce dvojice vrcholov. Na každej takejto čiare je šípka, usmerňujúca túto čiaru od začiatočného vrchola ku koncovému.

Siete majú rozmanité aplikácie. Celkom prirodzene sa používajú na znázornenie komunikačných sietí (v tom prípade ohodnotenia môžu reprezentovať dĺžky jednotlivých komunikácií), rozvodných sietí (vtedy ohodnotenia predstavujú priepustnosť), na znázornenie projektov (tu ohodnotenia šípov môžu predstavovať dĺžky trvania príslušných podprojektov) a podobne.

Všimnime si, že sieť na n vrcholoch môže mať až $n \cdot (n-1)$ šípov. To znamená, že sieť nedostaneme z grafu jednoduchým zorientovaním hrán.

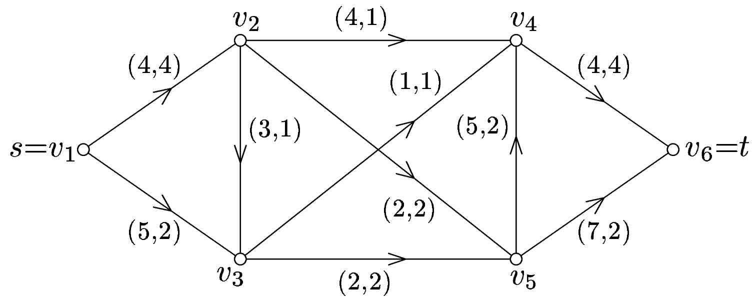
DEFINÍCIA. **Tok** zo zdroja s do ústia t je taká funkcia f definovaná na šípoch, pre ktorú platí $0 \leq f(uv) \leq c(uv)$ pre každý šíp uv siete G a

$$Div(v) = \sum_{vu \in E(G)} f(vu) - \sum_{wv \in E(G)} f(wv) = \begin{cases} W(f) & \text{ak } v = s; \\ -W(f) & \text{ak } v = t; \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Hodnotu $W(f)$ nazývame **veľkosť toku**.

V tejto definícii prvá podmienka tvrdí, že tok idúci ľubovoľným šípom je nezáporný a nie je väčší ako kapacita tohoto šípu, zatiaľ čo druhá podmienka zaručí, že všetko čo do vrchola (iného ako zdroj a ústie) vtečie, musí z neho aj vytiecť. Druhá podmienka sa nazýva **Kirchhoffov zákon**.

Na obrázku 10 máme znázornenú sieť s vrcholmi $s{=}v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6{=}t$. Pri každom šípe máme uvedenú dvojicu čísel v zátvorkách, kde prvé číslo predstavuje kapacitu a druhé veľkosť toku. Overte si, že tok spĺňa obidve podmienky uvedené vyššie. Veľkosť tohoto toku je $4 + 2 = 6$.



Obrázok 10

Úloha o maximálnom toku

V tejto kapitole sa budeme zaoberať problémom nájdenia takého toku v sieti, ktorého veľkosť je najväčšia možná.

Definícia. Nech je A podmnožina vrcholovej množiny $V(G)$ siete G. Množinu šípov vedúcich z vrcholov A do $V(G)-A$ označujeme $\langle A, V(G)-A\rangle$. Ak je f tokom v sieti G, tak $f(\langle A, V(G)-A\rangle)$ je súčet hodnôt $f(e)$ cez všetky šípy e z $\langle A, V(G)-A\rangle$.

Lema 4.1. *Majme sieť G so zdrojom s a ústím t. Nech je A podmnožina množiny vrcholov $V(G)$, pričom $s \in A$ a $t \in V(G)-A$. Potom pre veľkosť toku $W(f)$ platí*

$$W(f) = f(\langle A, V(G)-A\rangle) - f(\langle V(G)-A, A\rangle)$$

Dôkaz. Spočítajme všetky hodnoty $Div(v)$ pre $v \in A$. Keďže pre všetky vrcholy v z $A-\{s\}$ platí $Div(v) = 0$ a $Div(s) = W(f)$, tak tento súčet sa rovná $W(f)$. Pritom každý šíp, ktorý spája dva vrcholy z A započítavame v tomto súčte dvakrát, raz so znamienkom $+$ a raz s $-$. Preto sa $W(f)$ rovná súčtu veľkostí toku na šípoch spájajúcich A s $V(G)-A$, vždy s príslušným znamienkom. $\square$

Dôsledok. *Ak označíme $c(\langle A, V(G)-A\rangle)$ súčet kapacít všetkých hrán vedúcich z A do $V(G)-A$, tak $W(f) \leq c(\langle A, V(G)-A\rangle)$ pre ľubovoľnú množinu $A \subseteq V(G)$ takú, že $s \in A$ a $t \notin A$.*

Definícia. **Polocesta** v sieti je postupnosť šípov, z ktorej vznikne cesta, ak zabudneme na orientáciu týchto šípov. Šíp polocesty je **priamy**, ak má s ňou súhlasnú orientáciu, inak je **obrátený**. Pre každý šíp e polocesty definujeme **rezervu** $\epsilon(e)$ nasledujúcim spôsobom

$$\epsilon(e) = \begin{cases} c(e) - f(e) & \text{ak je } e \text{ priamy šíp;} \\ f(e) & \text{ak je } e \text{ obrátený šíp.} \end{cases}$$

Najmenšiu rezervu šípu spomedzi všetkých šípov polocesty nazývame **rezerva polocesty** a ak je táto hodnota kladná, tak polocesta je **zväčšujúca**.

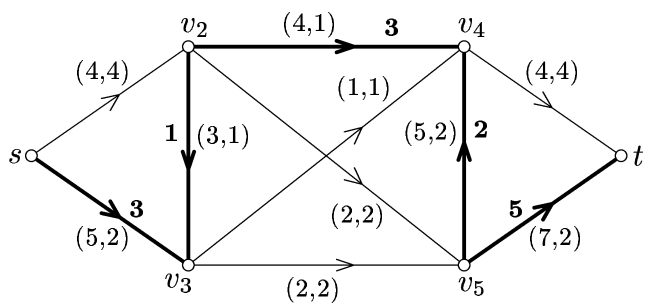
Ak máme v sieti tok f a nájdeme zväčšujúcu $s-t$ polocestu P s rezervou $\epsilon(P)$, tak tok f možno zväčšiť na nový tok f' nasledovne

$$f'(e) = \begin{cases} f(e)+\epsilon(P) & \text{ak je } e \text{ priamy šíp polocesty } P; \\ f(e)-\epsilon(P) & \text{ak je } e \text{ obrátený šíp polocesty } P; \\ f(e) & \text{ak } e \text{ nie je šípom } P. \end{cases}$$

Je zrejmé, že hodnota nového toku f' je presne o $\epsilon(P)$ väčšia ako hodnota starého toku f.

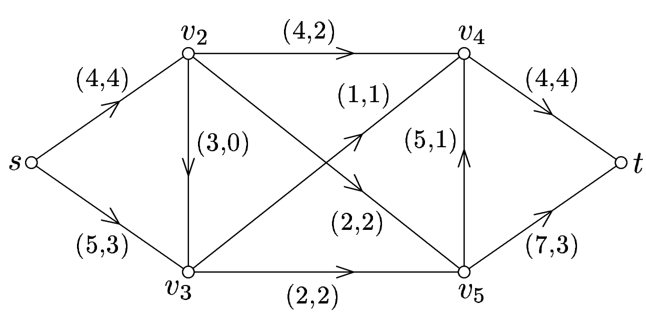
Príklad. Uvažujte sieť, ktorá je zobrazená na obrázku 10. Zistite, či je pre daný tok polocesta s, v_3, v_2, v_4, v_5, t zväčšujúca a ak je, zostrojte tok, ktorý je väčší o rezervu tejto polocesty.

Riešenie. Vyznačme si šípy polocesty tučnými čiarami, pozri obrázok 11. Keďže šípy sv_3, v_2v_4 a v_5t sú priame, ich rezervy (ktoré sú v obrázku 11 vyznačené tučne) sú po rade $5-2=3$, $4-1=3$ a $7-2=5$. Naopak, šípy v_3v_2 a v_4v_5 sú obrátené, teda ich rezervy sú 1 a 2.



Obrázok 11

Rezerva polocesty je $\min\{3,1,3,2,5\} = 1$, čiže polocesta je zväčšujúca. Keď zväčšíme tok na poloceste o jej rezervu, dostávame tok, zobrazený na obrázku 12.



Obrázok 12

Veta 4.2. *Nech je G sieť s tokom f. Tok f je maximálny práve vtedy, keď v sieti neexistuje zväčšujúca $s-t$ polocesta.*

Dôkaz. Ak existuje zväčšujúca $s-t$ polocesta, tak tok nie je maximálny, lebo ho možno zväčšiť o rezervu tejto polocesty (pozri príklad pred vetou).

Teraz predpokladajme, že v sieti neexistuje zväčšujúca $s-t$ polocesta. Označme A množinu tých vrcholov v siete G, do ktorých vedie nejaká zväčšujúca $s-v$ polocesta. Isto $s \in A$, keďže $s-s$ polocesta má rezervu ∞, avšak $t \notin A$. V ďalšom ukážeme, že $W(f) = c(\langle A, V(G)-A\rangle)$. Ak $vu \in \langle A, V(G)-A\rangle$, tak potom existuje f-zväčšujúca $s-v$ polocesta, ktorú však nemožno predĺžiť do $u \in V(G)-A$. Preto platí $f(vu) = c(vu)$. Na druhej strane ak $wv \in \langle V(G)-A, A\rangle$, tak opäť existuje zväčšujúca $s-v$ polocesta, ktorú nemožno predĺžiť do $w \in V(G)-A$, z čoho plynie $f(wv) = 0$. Teda

$$f(\langle A, V(G)-A\rangle) - f(\langle V(G)-A, A\rangle) = c(\langle A, V(G)-A\rangle) - 0$$

Podľa lemy 4.1 platí $W(f) = c(\langle A, V(G)-A\rangle)$, čiže tok f je maximálny podľa dôsledku lemy 4.1. □

Dôsledok (**Fordova-Fulkersonova veta**). *Veľkosť maximálneho toku sa rovná kapacite minimálneho $s-t$ rezu, čiže*

$$\max_f W(f) = \min_{A \subseteq V(G)} c(\langle A, V(G)-A\rangle)$$

pričom $s \in A$ a $t \in V(G)-A$.

Poznamenajme, že formálnu definíciu rezu (pre grafy) zavedieme v nasledujúcej kapitole.

Algoritmus riešiaci úlohu o maximálnom toku

Teraz popíšeme, ako sa dá v sieti s daným tokom nájsť zväčšujúca polocesta. Tento problém budeme riešiť pomocou prehľadávania do šírky.

Algoritmus na hľadanie zväčšujúcej polocesty pozostáva z dvoch krokov:

Krok 0: Na začiatku máme prázdnu frontu a všetky vrcholy sú bez značiek. Začneme vo vrchole $s = v_1$, označíme ho ako nájdený, dáme mu značku 0 a zaradíme ho na koniec fronty.

V ďalšom budeme opakovať Krok 1 až pokým neoznačíme vrchol t, alebo pokým neprídeme do stavu, že máme vybrať čosi z fronty, ktorá je prázdna.

Krok 1: Vyberieme z fronty prvý vrchol, ktorým je povedzme v_i.

Nato prezrieme všetky šípy $v_i v_l$, pre ktoré $f(v_i v_l) < c(v_i v_l)$. Ak vrchol v_l ešte nie je označený, tak ho označíme ako nájdený, dáme mu značku v_i a zaradíme ho na koniec fronty (v poloceste by sa mohol vyskytnúť priamy šíp $v_i v_l$). Ak v_l označený je, neurobíme nič.

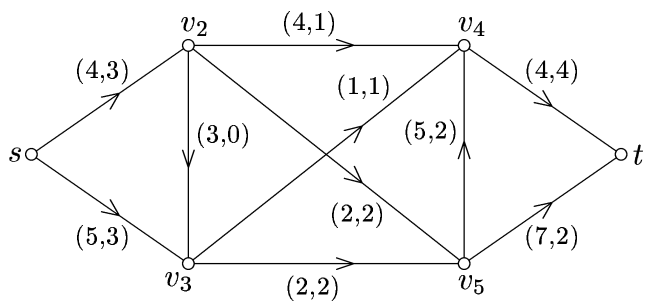
Vzápätí prezrieme všetky šípy $v_k v_i$, pre ktoré $f(v_k v_i) > 0$. Ak vrchol v_k ešte nie je označený, tak ho označíme ako nájdený, dáme mu značku v_i a zaradíme ho na koniec fronty (v polocestе by sa mohol vyskytnúť obrátený šíp $v_k v_i$). Ak v_k označený je, neurobíme nič.

V okamihu, keď označíme vrchol t, tak pomocou značiek zrekonštruujeme celú polocestu a určíme jej rezervu, ktorá bude kladná. Ak však prídeme do stavu, že sme t nedosiahli a mali by sme vybrať vrchol z fronty, ktorá je prázdna, tak zostrojený tok je maximálny.

Poznamenajme, že uvedený algoritmus zväčšuje tok pomocou najkratších polociest, čiže pomocou polociest, ktoré majú najmenší možný počet vrcholov.

Všimnime si, že ak sú kapacity na šípoch celočíselné, tak prezentovaný algoritmus nájde maximálny tok, ktorý je tiež celočíselný.

Príklad. Pomocou popísaného algoritmu nájdite zväčšujúcu polocestu v sieti znázornenej na obrázku 13 a zväčšite tok o rezervu tejto polocesty.



Obrázok 13

Riešenie. V nasledujúcom budeme značku vrchola uvádzať v zátvorkách za menom vrchola.

Po absolvovaní Kroku 0 budeme mať vo fronte iba vrchol $s(0)$.

Prejdeme na Krok 1. Vyberieme z fronty vrchol $s(0)$, prezrieme obidva šípy sv_2 a sv_3, a keďže tok na týchto šípoch je menší ako kapacita, zaradíme v_2 aj v_3 do fronty. Teda stav fronty bude: $v_2(s), v_3(s)$.

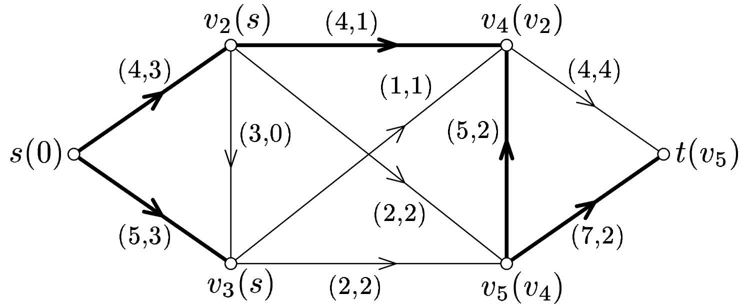
Vrchol t sme zatiaľ nenašli, takže opäť pokračujeme Krokom 1. Vyberieme z fronty $v_2(s)$ a prezrieme postupne šípy v_2v_3 (tu vrchol v_3 je už nájdený, takže neurobíme nič), ďalej v_2v_4 (tok na tomto šípe je menší ako kapacita, takže zaradíme v_4 na koniec fronty), následne v_2v_5 (tok sa rovná kapacite, takže neurobíme nič) a na záver sv_2 (vrchol s je už označený, takže neurobíme nič). Stav fronty je: $v_3(s), v_4(v_2)$.

Teraz vyberieme z fronty $v_3(s)$ a prezrieme postupne šípy v_3v_4 (v_4 je už nájdený, nerobíme nič), v_3v_5 (tok sa rovná kapacite, nerobíme nič), sv_3 (s je už nájdený, nerobíme nič) a v_2v_3 (v_2 je nájdený, nerobíme nič). Stav fronty je: $v_4(v_2)$.

Pri ďalšom absolvovaní Kroku 1 vyberieme z fronty $v_4(v_2)$, pričom konečný stav fronty bude: $v_5(v_4)$.

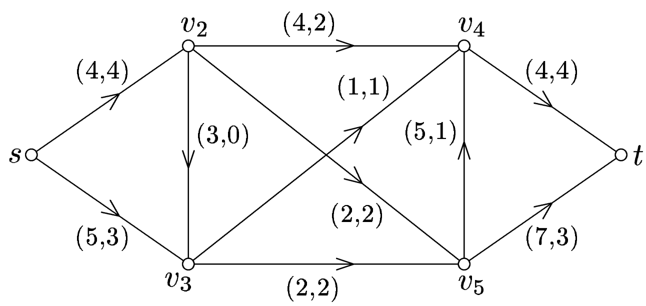
Nakoniec, po vybratí v_5 z fronty nájdeme t.

Algoritmus skončil. Teraz pomocou značiek nájdeme zväčšujúcu polocestu, ktorou je, s, v_2, v_4, v_5, t, pozri obrázok 14.



Obrázok 14

Rezerva tejto polocesty je 1 a tok, ktorý získame pomocou tejto polocesty, je zobrazený na obrázku 15.



Obrázok 15

Tok znázornený na obrázku 15 je maximálny, pretože pri ďalšej aplikácii nášho algoritmu vyprázdnime frontu prv, než označíme vrchol t.

Súvislosť

Definícia. Nech je G súvislý graf, s a t sú jeho vrcholy a $A \subseteq V(G)$, $s, t \notin A$. Potom A **separuje** s od t v G, ak v grafe H, ktorý vznikne z G vynechaním všetkých vrcholov množiny A, ako aj hrán incidentných s vrcholmi z A, neexistuje cesta z s do t.

Nasledujúce tvrdenie je dôsledkom Fordovej-Fulkersonovej vety.

Lema 4.3. *Nech je G graf a $s, t \in V(G)$ sú také vrcholy, pre ktoré $st \notin E(G)$. Potom sa maximálny počet vnútorne vrcholovo disjunktných $s-t$ ciest v G rovná minimálnemu počtu vrcholov separujúcich s od t v G.*

Dôkaz. Zostrojme z grafu G sieť G^s nasledovne. Zdrojom bude s, ústím t, a každý iný vrchol $v \in V(G)$ bude zodpovedať dvojici vrcholov $v^-, v^+ \in V(G^s)$, ktoré sú spojené šípom v^-v^+. Ak bola uv hrana grafu G, $u, v \notin \{s, t\}$, tak tejto hrane bude zodpovedať dvojica šípov u^+v^- a v^+u^- siete G^s. Hrane su bude zodpovedať šíp su^- a hrane vt šíp v^+t. Kapacita každého šípu siete G^s bude 1.

Keďže kapacity na šípoch sú celočíselné, tak podľa poznámky z predchádzajúcej časti bude maximálny tok celočíselný. Všimnime si, že v sieti G^s pre každý vrchol w rôzny od s a t platí, že buď z w vychádza len jediný šíp (w je v^- pre vhodné $v \in V(G)$), alebo do w vchádza len jediný šíp (w je v^+ pre vhodné $v \in V(G)$). To znamená, že ak bude v sieti G^s zostrojený maximálny tok, tak cesty, po ktorých v G^s bude čosi tiecť (jednotka), budú vnútorne vrcholovo disjunktné. Nuž a tieto cesty zodpovedajú vnútorne vrcholovo disjunktným $s-t$ cestám grafu G.

Uvažujme teraz kapacity minimálnych (hranových) $s-t$ rezov, čiže hodnoty $c(\langle B, V(G) - B\rangle)$, kde $s \in B$ a $t \in V(G) - B$. Ak $v^+ \in B$ a $u^- \notin B$ pre nejakú hranu $vu \in E(G)$, tak pre $B' = B - \{v^+\}$ platí

$$c(\langle B', V(G) - B'\rangle) \leq c(\langle B, V(G) - B\rangle)$$

To znamená, že každému minimálnemu rezu $(\langle B, V(G) - B\rangle)$ zodpovedá minimálny rez $(\langle B', V(G) - B'\rangle)$ taký, že šípy tohoto rezu sú len typu v^-v^+. Ináč povedané, každý minimálny hranový rez $(\langle B, V(G) - B\rangle)$ zodpovedá množine vrcholov A grafu G, ktorá separuje s od t.

Podľa Fordovej-Fulkersonovej vety sa veľkosť maximálneho toku rovná kapacite minimálneho (hranového) $s-t$ rezu, čiže

$$\max_f W(f) = \min_{B \subseteq V(G)} c(\langle B, V(G) - B\rangle)$$

pričom $s \in B$ a $t \in V(G) - B$. Toto podľa predchádzajúceho rozboru znamená, že maximálny počet vnútorne vrcholovo disjunktných $s-t$ ciest sa rovná minimálnemu počtu vrcholov separujúcich s od t. $\square$

Definícia. Graf G je **k-súvislý**, ak pre ľubovoľné dva rôzne vrcholy u a v existuje v tomto grafe k vnútorne disjunktných ciest z u do v. Nech je G súvislý graf a $A \subseteq V(G)$. Množina A je **vrcholový rez** grafu G ak je graf $G - A$ nesúvislý.

Nasledujúce tvrdenie je dôsledkom lemy 4.3. Jeho dôkaz vynechávame.

Veta 4.4 (**Mengerova veta**). *Graf G na $n_G > k$ vrcholoch je k-súvislý práve vtedy, keď v ňom neexistuje vrcholový rez A taký, že $|A| < k$.*

Poznamenajme, že podmienka $n_G > k$ je v predchádzajúcej vete preto, lebo kompletný graf nemá žiaden rez.

Cvičenia

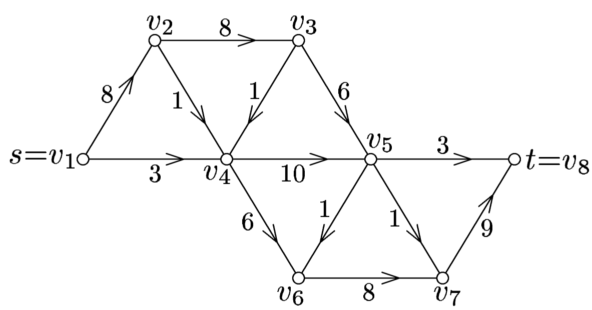
Cvičenie 4.1. Dokážte, že ak v sieti G neexistuje orientovaná $s-t$ cesta, tak veľkosť maximálneho toku aj kapacita minimálneho $s-t$ rezu sú nulové.

CVIČENIE 4.2. Ak je A podmnožina vrcholovej množiny siete G, označme $\overline{A}$ množinu $V(G)-A$. Nech sú $\langle S,\overline{S}\rangle$ a $\langle T,\overline{T}\rangle$ dva minimálne $s-t$ rezy v sieti G. Potom sú minimálne aj $\langle S\cup T,\overline{S\cup T}\rangle$ a $\langle S\cap T,\overline{S\cap T}\rangle$. Dokážte.

CVIČENIE 4.3. Zostrojte maximálny tok v sieti z obrázku 10. Začnite s tokom, ktorý má na každom šípe veľkosť 0.

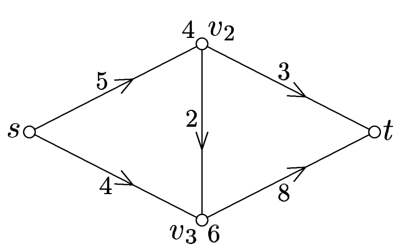
CVIČENIE 4.4. Zostrojte maximálny tok v sieti z obrázku 10, ak sú na šípoch zmenené kapacity. Na šípe sv_2 je kapacita 7, na šípe sv_3 kapacita 3, na šípe v_2v_3 kapacita 6, na šípe v_2v_4 kapacita 1, na šípe v_2v_5 kapacita 1, na šípe v_3v_4 kapacita 2, na šípe v_3v_5 kapacita 10, na šípe v_5v_4 kapacita 5, na šípe v_4t kapacita 17 a na šípe v_5t kapacita 4.

CVIČENIE 4.5. Zostrojte maximálny tok v sieti znázornenej na obrázku 16.

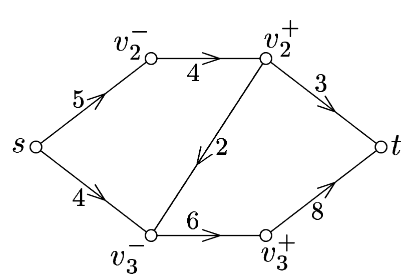


Obrázok 16

CVIČENIE 4.6. Na obrázku 17 je daná sieť s kapacitami na vrcholoch. Nájdite v tejto sieti taký maximálny tok, v ktorom tok prechádzajúci ľubovoľným vrcholom neprekročí kapacitu tohoto vrchola. (Postupujte podobne, ako sme postupovali v dôkaze lemy 4.3. Tento postup Vám dá sieť z obrázku 18, v ktorej nájdete maximálny tok, a ten potom pretransformujete na maximálny tok siete z obrázku 17.)



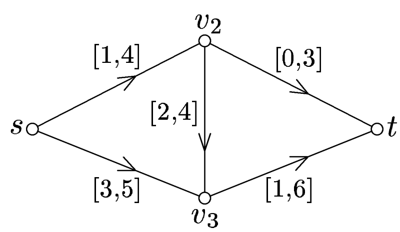
Obrázok 17



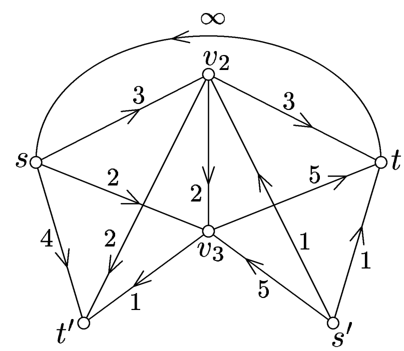
Obrázok 18

CVIČENIE 4.7. Zmeňte sieť z cvičenia 4.4 tak, že na šíp v_3v_5 dáte kapacitu 12 a na šíp v_4t kapacitu 17. Ďalej dajte kapacity na vrcholy. Na vrchol v_2 kapacitu 8, na v_3 kapacitu 6, na v_4 kapacitu 7 a na v_5 kapacitu 7. Zostrojte v sieti tok, ktorý v žiadnom vrchole neprekročí predpísanú kapacitu.

Cvičenie 4.8. Zostrojte maximálny tok v sieti s dolnými aj hornými medzami, zobrazenej na obrázku 19. Dolnými medzami sú prvé a hornými medzami (kapacitami) druhé čísla v hranatých zátvorkách. (Tu najprv zostrojte pomocnú sieť s novým zdrojom s' a novým ústím t', pozri obrázok 20. V tejto sieti sú dolné medze odvedené do šípov vychádzajúcich z s' a vchádzajúcich do t'. V tejto sieti nájdite maximálny tok. Ak tento nenasycuje všetky šípy vychádzajúce z s', tak v pôvodnej sieti neexistuje tok spĺňajúci dané ohraničenia. Ak však maximálny tok v pomocnej sieti nasycuje všetky šípy vychádzajúce z s', tak zostrojte tok spĺňajúci ohraničenia a nájdite v pôvodnej sieti maximálny tok.)

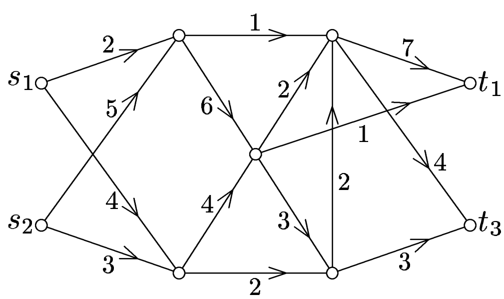


Obrázok 19

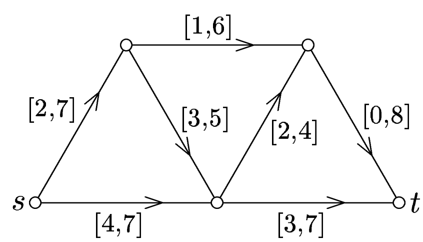


Obrázok 20

Cvičenie 4.9. V sieti na obrázku 21 sú dva zdroje a dve ústia. Zostrojte v tejto sieti maximálny tok. (Úlohu riešte pridaním nového umelého zdroja a nového ústia.)



Obrázok 21



Obrázok 22

Cvičenie 4.10. Zostrojte maximálny tok v sieti s hornými aj dolnými ohraničeniami na šípoch, ktorá je znázornená na obrázku 22.

Cvičenie 4.11. Firma má prepraviť sedem druhov balíkov, pričom z každého druhu balíkov treba dopraviť tri. K dispozícii má päť vozidiel, ktoré môžu prepraviť 6, 4, 5, 4, respektíve 3 balíky, avšak žiadne vozidlo nesmie prevážať dva balíky rovnakého druhu. Sformulujte problém ako úlohu o maximálnom toku a nájdite riešenie.

Cvičenie 4.12. Majme danú sieť G. Pod dĺžkou cesty z s do t budeme v tomto cvičení rozumieť súčet hodnôt šípov na ceste začínajúcej v s a končiacej v t. Navrhnite algoritmus, ktorý pomocou prehľadávania do šírky zostrojí najkratšiu cestu z s do t v G.

Cvičenie 4.13. Majme danú sieť G. Zmeňte algoritmus z predchádzajúceho cvičenia tak, aby hľadal najdlhšiu cestu z s do t.

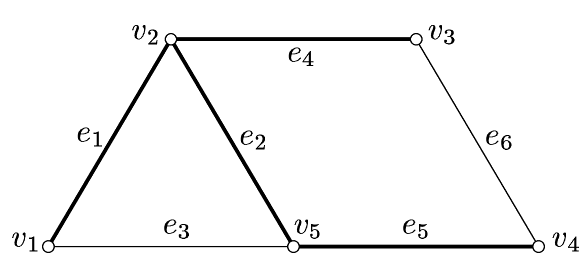
Cvičenie 4.14. Dokážte Mengerovu vetu.

5 REZY A CYKLY

Priestory rezov a cyklov

V predchádzajúcich kapitolách sme spomínali kružnice a rezy. Teraz budeme skúmať, koľko má graf rezov, respektíve (zovšeobecnených) kružníc, a ako sa dajú tieto získať z akýchsi základných prvkov.

Definícia. Nech je $G = (V(G), E(G))$ graf. **Hranový priestor** $\mathbb{E}(G)$ je vektorový priestor nad poľom $(\mathbb{Z}_2; +, \cdot)$ tvorený všetkými podmnožinami $E(G)$ ako vektormi. Pre $a, b \in \mathbb{E}(G)$ definujeme súčet vektorov $a \oplus b$ ako symetrickú diferenciu vektorov a a b a násobenie skalárom definujeme $1{\cdot}a = a$ a $0{\cdot}a = \emptyset$. Ak $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, kde $m = m_G$, tak $\{\{e_1\}, \{e_2\}, \ldots, \{e_m\}\}$ tvorí bázu $\mathbb{E}(G)$ a dimenzia tohoto priestoru je m. Keďže každý vektor z $\mathbb{E}(G)$ je množinou hrán, tak hranový vektor budeme stotožňovať so zodpovedajúcou množinou hrán. Podobne definujeme **vrcholový priestor** $\mathbb{V}(G)$ dimenzie $n = n_G$ nad $(\mathbb{Z}_2; +, \cdot)$. **Hraničný lineárny operátor** $\sigma : \mathbb{E}(G) \to \mathbb{V}(G)$ priradí množinám hrán symetrickú diferenciu množín ich vrcholov. Vektory $c \in \mathbb{E}(G)$, pre ktoré $\sigma(c) = \emptyset$ nazývame **cyklické** (**cykly**) a jadro hraničného lineárneho operátora $Ker(\sigma)$ nazývame **cyklický priestor** G a označujeme $\mathbb{C}(G)$. **Kružnica** je taký neprázdny cyklus, ktorého žiadna vlastná podmnožina už nie je neprázdnym cyklom. **Kohraničný lineárny operátor** $\delta : \mathbb{V}(G) \to \mathbb{E}(G)$ priradí množinám vrcholov symetrickú diferenciu množín s nimi incidentných hrán. Vektory $\delta(r)$, pre ktoré $r \in \mathbb{V}(G)$, nazývame **rezové** a obraz kohraničného lineárneho operátora $Im(\delta)$ nazývame **priestor rezov** G a označujeme $\mathbb{R}(G)$. **Minimálny rez** je taký neprázdny rez, ktorého žiadna vlastná podmnožina už nie je neprázdnym rezom.



Obrázok 23

Poznamenajme, že vyššie definovaná kružnica je práve kružnica v zmysle definície z kapitoly 2. Priamo z definície plynie, že cyklus je taký podgraf grafu G, ktorý má všetky vrcholy párneho stupňa. Cyklus je teda zjednotením hranovo disjunktných kružníc.

Podobne, minimálny rez v zmysle Fordovej-Fulkersonovej vety je minimálny podľa vyššie uvedenej definície. Následne rez je symetrickou diferenciou minimálnych rezov.

Príklad. Nech je G graf nakreslený na obrázku 23. V tomto grafe platí $\sigma(\{e_1, e_2, e_3\}) = \{v_1, v_2\} \oplus \{v_2, v_5\} \oplus \{v_1, v_5\} = \emptyset$, a preto je vektor $\{e_1, e_2, e_3\}$ cyklický. Naopak, $\delta(\{v_1, v_2\}) = \{e_1, e_3\} \oplus \{e_1, e_2, e_4\} = \{e_2, e_3, e_4\}$, čiže vektor $\{e_2, e_3, e_4\}$ je rezový.

Definícia. Nech je G súvislý graf. **Kostra** je taký súvislý podgraf H grafu G, ktorý je stromom a spĺňa $V(H) = V(G)$.

Kostry sme spomínali už v kapitole 2, v súvislosti s prehľadávaním do šírky, respektíve do hĺbky.

Definícia. Nech je T taký podgraf grafu G, ktorého súvislé komponenty sú kostrami komponentov súvislosti grafu G. Hrany T nazývame **vetvy** a hrany grafu G neležiace v T nazývame **chordy**. Pridaním ľubovoľnej chordy k T vznikne jediná kružnica, ktorú nazývame **bázový cyklus** vzhľadom na T. Naopak, odobratie ľubovoľnej vetvy rozdelí príslušný komponent súvislosti grafu T na dva komponenty a pridaním chord spájajúcich tieto komponenty dostávame minimálne rezy, ktoré nazývame **bázové rezy** vzhľadom na T.

Príklad. Ak v grafe z obrázku 23 zvolíme za kostru množinu tučných hrán, tak bázovými cyklami sú $c_{c_3} = \{e_1, e_2, e_3\}$ a $c_{c_6} = \{e_2, e_4, e_5, e_6\}$ a bázové rezy sú $r_{v_1} = \{e_1, e_3\}$, $r_{v_2} = \{e_2, e_3, e_6\}$, $r_{v_4} = \{e_4, e_6\}$ a $r_{v_5} = \{e_5, e_6\}$.

Veta 5.1. *Nech je G súvislý graf na n_G vrcholoch s m_G hranami. Potom bázové cykly vzhľadom na ľubovoľnú kostru tvoria bázu priestoru cyklov $\mathbb{C}(G)$ a dimenzia tohoto priestoru je $m_G - n_G + 1$.*

Dôkaz. Každá chorda sa vyskytuje v jedinom bázovom cykle, a preto sú bázové cykly lineárne nezávislé. Ukážeme, že bázové cykly generujú celý cyklický priestor grafu G. Nech je c ľubovoľný nenulový cyklický vektor obsahujúci chordy $e_{c_1}, e_{c_2}, \ldots, e_{c_k}$. Označme c' súčet bázových cyklov $c_{c_1}, c_{c_2}, \ldots, c_{c_k}$ zodpovedajúcich chordám $e_{c_1}, e_{c_2}, \ldots, e_{c_k}$, čiže $c' = c_{c_1} \oplus c_{c_2} \oplus \ldots \oplus c_{c_k}$. Keďže vektory c_{c_i} sú z jadra lineárneho operátora σ, $i = 1, 2, \ldots, k$, tak aj c' je z tohoto jadra, a teda c' je cyklický vektor. Vektor c' má tie isté chordy ako c, a preto je $c \oplus c'$ cyklický vektor bez chord. Teda $c \oplus c'$ je cyklický vektor, ktorý je nanajvýš časťou kostry. Preto $c \oplus c' = \emptyset$, čiže $c = c_{c_1} \oplus c_{c_2} \oplus \ldots \oplus c_{c_k}$. $\square$

Ak v predchádzajúcom dôkaze nahradíme pojem cyklus rezom a chorda vetvou, tak za pomoci vety 2.6 dostaneme nasledujúce tvrdenie pre priestor rezov $\mathbb{R}(G)$.

Veta 5.2. *Nech je G súvislý graf na n_G vrcholoch. Potom bázové rezy vzhľadom na ľubovoľnú kostru tvoria bázu priestoru rezov $\mathbb{R}(G)$ a dimenzia tohoto priestoru je $n_G - 1$.*

Princíp dôkazu vety 5.2 pomocou dôkazu vety 5.1 nazývame **princíp duality**. Ak budeme skúmať každý komponent súvislosti grafu G samostatne, dostaneme nasledujúci dôsledok viet 5.1 a 5.2.

DÔSLEDOK. *Nech je G graf s p_G komponentami súvislosti na n_G vrcholoch s m_G hranami. Potom dimenzia priestoru cyklov $\mathbb{C}(G)$ je $m_G - n_G + p_G$ a dimenzia priestoru rezov $\mathbb{R}(G)$ je $n_G - p_G$. Naviac, bázové cykly tvoria bázu $\mathbb{C}(G)$ a bázové rezy tvoria bázu $\mathbb{R}(G)$.*

Matice rezov a cyklov

Cieľom tejto kapitoly je popísať, ako možno pomocou determinantu zistiť počet kostier súvislého grafu. K tomu však potrebujeme matice s reálnymi koeficientmi, teda budeme pracovať nad poľom $(\mathbb{R}; +, \cdot)$. Naviac, hrany grafu si zorientujeme. To znamená, že každú hranu uv nahradíme buď šípom uv, alebo šípom vu. Označme takto získaný orientovaný graf symbolom $\overrightarrow{G}$.

DEFINÍCIA. **Orientovaný graf** je usporiadaná dvojica $H = (V(H), E(H))$, kde $V(H)$ je konečná množina (množina **vrcholov**) a $E(H)$ je množina usporiadaných dvojíc množiny $V(H)$ (množina **šípov**).

Orientovaným grafom je napríklad podkladový graf siete, pozri kapitolu 4.

DEFINÍCIA. Nech je H orientovaný graf na $n = n_H$ vrcholoch $v_1, v_2, \ldots, v_n$, ktorý má $m = m_H$ šípov $e_1, e_2, \ldots, e_m$. **Matica incidencie** grafu H, $\mathbb{A}_H = (a_{i,j})$, je matica typu $n \times m$, kde

$$a_{i,j} = \begin{cases} -1 & \text{ak šíp } e_j \text{ končí vo vrchole } v_i; \\ 1 & \text{ak šíp } e_j \text{ začína vo vrchole } v_i; \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

VETA 5.3. *Nech je G súvislý graf na $n = n_G$ vrcholoch. Hodnosť matice incidencie orientovaného grafu $\overrightarrow{G}$ je $n-1$.*

DÔKAZ. V každom stĺpci matice incidencie $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\overrightarrow{G}}$ je práve jeden prvok -1 a jeden 1. Preto je súčet riadkov nulový vektor, a teda hodnosť $\mathbb{A}$ je nanajvýš $n-1$. Na dôkaz opačnej nerovnosti stačí nájsť v $\mathbb{A}$ štvorcovú regulárnu podmaticu rádu $n-1$. Nech je $\mathbb{A}'$ podmatica matice $\mathbb{A}$ tvorená ľubovoľnými $n-1$ riadkami a takými $n-1$ stĺpcami, ktoré zodpovedajú hranám nejakej kostry grafu G. Potom je $\mathbb{A}'$ podmaticou matice incidencie stromu na n vrcholoch. Indukciou dokážeme, že determinant $\mathbb{A}'$ je buď 1 alebo -1.

1° Ak má strom dva vrcholy, tak $\mathbb{A}' = (1)$, alebo $\mathbb{A}' = (-1)$.

2° Predpokladajme, že strom má $k+1$ vrcholov, pričom tvrdenie platí pre k-vrcholové stromy. Keďže každý strom má aspoň dva vrcholy stupňa 1, tak existuje riadok $\mathbb{A}'$, zodpovedajúci vrcholu stupňa 1 v strome. Ak rozvinieme determinant podľa tohoto riadku, tak dostávame $|\mathbb{A}'| = (-1)^c|\mathbb{A}''|$, kde c je 0 alebo 1 a $\mathbb{A}''$ je matica zodpovedajúca stromu na k vrcholoch. Podľa indukčného predpokladu je $|\mathbb{A}''| = 1$, alebo $|\mathbb{A}''| = -1$, a teda aj $|\mathbb{A}'| = 1$, alebo $|\mathbb{A}'| = -1$. $\square$

Kvôli nasledujúcej definícii na chvíľu prirodzeným spôsobom zorientujme všetky kružnice, cykly a rezy grafu. Pod orientovaným grafom H chápeme graf $\overrightarrow{G}$ opísaný na začiatku tejto časti.

Definícia. **Matica rezov** $\mathbb{R}_H = (r_{i,j})$ orientovaného grafu H s $m = m_H$ šípmi má m_H stĺpcov a toľko riadkov, koľko rezov má H, pričom

$$r_{i,j} = \begin{cases} -1 & \text{ak je } j\text{-ty šíp v } i\text{-tom reze a je s ním nesúhlasne orientovaný;} \\ 1 & \text{ak je } j\text{-ty šíp v } i\text{-tom reze a je s ním súhlasne orientovaný;} \\ 0 & \text{ak } j\text{-ty šíp nepatrí do } i\text{-teho rezu.} \end{cases}$$

Matica cyklov $\mathbb{C}_H = (c_{i,j})$ má tiež m stĺpcov a toľko riadkov, koľko cyklov má H, pričom

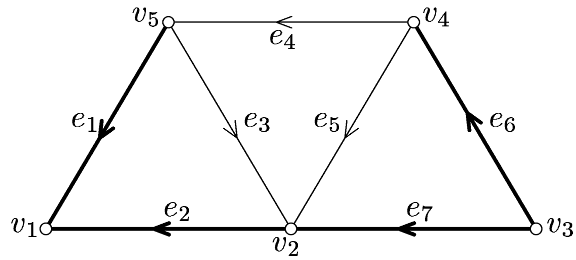
$$c_{i,j} = \begin{cases} -1 & \text{ak je } j\text{-ty šíp v } i\text{-tom cykle a je s ním nesúhlasne orientovaný;} \\ 1 & \text{ak je } j\text{-ty šíp v } i\text{-tom cykle a je s ním súhlasne orientovaný;} \\ 0 & \text{ak } j\text{-ty šíp nepatrí do } i\text{-teho cyklu.} \end{cases}$$

Pripomeňme, že cyklom grafu $\overrightarrow{G}$ rozumieme zorientovaný cyklus grafu G. Všimnime si, že ak vhodne zorientujeme rezy, tak je matica incidencie podmaticou matice rezov orientovaného grafu.

Podľa vety 5.2 bázové rezy tvoria bázu priestoru rezov v neorientovanom grafe G. Z tohoto plynie, že každý riadok matice rezov je lineárnou kombináciou tých riadkov, ktoré zodpovedajú bázovým rezom. Podobne je každý riadok matice cyklov lineárnou kombináciou tých riadkov, ktoré zodpovedajú bázovým cyklom.

Príklad. Nech je $\overrightarrow{G}$ orientovaný graf znázornený na obrázku 24. Podľa vety 5.1 má tento graf $2^3 = 8$ cyklov a $2^4 = 16$ rezov. Preto zapíšeme len tie podmatice matice rezov a cyklov, ktoré zodpovedajú bázovým rezom a cyklom pri hrubo vyznačenej kostre. Aby bola štruktúra týchto matíc očividná, usporiadame stĺpce týchto matíc v poradí $e_1, e_2, e_6, e_7, e_3, e_4, e_5$, zatiaľ čo riadky budú usporiadané prirodzene. Dostávame bázové matice $\mathbb{R}^B$ a $\mathbb{C}^B$:

$$\mathbb{R}^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{C}^B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Obrázok 24

VETA 5.4. *Ak sú stĺpce v maticiach $\mathbb{R}_H$ aj $\mathbb{C}_H$ usporiadané rovnako, tak platí $\mathbb{C}_H \times \mathbb{R}_H^T = \mathbb{O}$, kde $\mathbb{C}_H$ je matica cyklov, $\mathbb{R}_H$ je matica rezov a $\mathbb{O}$ je nulová matica.*

DÔKAZ. Nech je $\delta(V_1)$ rez orientovaný z V_1 do $V_2 = V(G) - V_1$ a nech je c ľubovoľný cyklus. Cyklus c je zjednotením hranovo disjunktných kružníc. Nech je $\tilde{c}$ ľubovoľná z kružníc cyklu c. Označme $e_1, e_2, \ldots, e_k$ šípy spoločné rezu $\delta(V_1)$ aj kružnici $\tilde{c}$. Keďže úseky patriace V_1, respektíve V_2, sa na kružnici $\tilde{c}$ alternujúco striedajú, tak na polovičke hrán z $e_1, e_2, \ldots, e_k$ je orientácia kružnice súhlasná s orientáciou rezu (tie prispejú v súčine hodnotou 1) a na polovičke je orientácia kružnice nesúhlasná s orientáciou rezu (tie prispejú v súčine hodnotou -1). Preto sa súčin riadku matice cyklov zodpovedajúcemu kružnici $\tilde{c}$ s riadkom matice rezov zodpovedajúcemu rezu $\delta(V_1)$ rovná 0. Keďže $\tilde{c}$ bola ľubovoľná kružnica z c a c je zjednotením hranovo disjunktných kružníc, tak je súčin riadku matice $\mathbb{C}_H$ (ktorý zodpovedá cyklu c) s riadkom $\mathbb{R}_H$ (ktorý zodpovedá rezu $\delta(V_1)$) práve 0. □

DÔSLEDOK. *Nech je G orientovaný graf. Potom pre jeho matice rezov a cyklov platí:*

(a) *stĺpce matice rezov zodpovedajúce šípom cyklu sú lineárne závislé;*
(b) *stĺpce matice cyklov zodpovedajúce šípom rezu sú lineárne závislé.*

Nenulové k-toky

DEFINÍCIA. Nech je G graf. **Nenulový k-tok** je také priradenie $k-1$ čísel $1, 2, \ldots, k-1$ šípom grafu $\overrightarrow{G}$, pri ktorom sa súčet hodnôt na šípoch smerujúcich do v rovná súčtu hodnôt na šípoch smerujúcich z v pre každý vrchol $v \in V(\overrightarrow{G})$. Hovoríme, že **graf G má** (pripúšťa) **nenulový k-tok**, ak existuje taká orientácia $\overrightarrow{G}$ grafu G, na ktorej existuje nenulový k-tok.

Aký tvar majú grafy, ktoré majú k-toky pre malé k? Je zrejmé, že 1-tok majú len grafy bez hrán. Nasledujúca veta sa zaoberá 2-tokmi.

VETA 5.5. *Graf má nenulový 2-tok práve vtedy, keď majú všetky jeho vrcholy párny stupeň.*

DÔKAZ. Nech má graf G nenulový 2-tok. Potom existuje jeho orientácia $\overrightarrow{G}$ ktorá má nenulový 2-tok. To znamená, že na každom šípe $\overrightarrow{G}$ je hodnota 1. A keďže ide o tok, tak pre každý vrchol u platí, že počet šípov (s hodnotou 1) smerujúcich do u sa rovná počtu šípov (s hodnotou 1) vychádzajúcich z u. Inak povedané, stupeň u je párny.

Naopak, predpokladajme, že všetky vrcholy grafu G majú párny stupeň. Podľa Eulerovej vety (veta 3.1) každý komponent súvislosti grafu G obsahuje uzavretý eulerovský ťah. Teraz keď sa prejdeme po hranách komponentu pozdĺž eulerovského ťahu, tak každú hranu uv prejdeme buď v smere z u do v, alebo z v do u. V prvom prípade dáme do $\overrightarrow{G}$ šíp uv, v druhom vu. Takým spôsobom sme získali orientáciu $\overrightarrow{G}$, v ktorej do každého vrchola smeruje práve toľko šípov, koľko z neho vychádza. Preto keď priradíme každému šípu hodnotu 1, dostaneme nenulový 2-tok. □

Uvažujme nejakú kostru T grafu G a nejaký nenulový k-tok τ na $\overrightarrow{G}$. Všimnime si, že pre šípy každého rezu oddeľujúceho V_1 od $V_2 = V(G) - V_1$ platí, že keď sčítame toky na nich, tak hodnota toku na šípoch smerujúcich z V_1 do V_2 sa rovná hodnote toku na šípoch idúcich z V_2 do V_1 (pozri dôkaz lemy 4.1). A keďže bázové rezy obsahujú každý len jednu jedinú vetvu, tak ohodnotenie chord hodnotami toku nám dá jednoznačne ohodnotenie vetiev.

Z toho plynie aj nasledujúce pozorovanie. Keď pozdĺž každého bázového cyklu C_{c_k}, kde c_k je chorda C_{c_k}, pustíme tok $\tau(c_k)$ (čiže na šípy kružnice C_{c_k} idúce súhlasne s chordou c_k dáme hodnotu $\tau(c_k)$ a na šípy C_{c_k} idúce nesúhlasne s chordou c_k dáme hodnotu $-\tau(c_k)$), tak keď pre každú vetvu e_v sčítame hodnoty na všetkých chordách, ktoré určujú bázové cykly obsahujúce e_v (vždy s príslušnou orientáciou), dostaneme na e_v tok τ. To značí, že tok τ je jednoznačne určený tokom na chordách. Teda každý tok je lineárnou kombináciou bázových cyklov matice cyklov $\mathbb{C}_{\overrightarrow{G}}$. Preto nám na určenie všetkých možných tokov stačí rozobrať všetky toky idúce po bázových cykloch.

Teraz uvedieme veľmi známe **Tuttove tokové hypotézy**.

Hypotéza (Tutte). *Každý 2-súvislý graf má nenulový 5-tok.*

P. Seymour dokázal, že každý 2-súvislý graf má nenulový 6-tok, avšak Tuttova hypotéza zostáva otvorená.

Definícia. Graf H je **subdivízia** grafu G, ak H vznikne z G tak, že niektoré hrany uv nahradíme cestami $u, x_1, x_2, \ldots, x_k, v$, kde $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sú nové vrcholy, pričom všetky pridané vrcholy majú v H stupeň 2.

Niektoré 2-súvislé grafy, ako napríklad Petersenov graf, nemajú nenulový 4-tok.

Hypotéza (Tutte). *Každý 2-súvislý graf, ktorý neobsahuje subdivíziu Petersenovho grafu ako svoj podgraf, má nenulový 4-tok.*

Hypotéza (Tutte). *Každý 4-súvislý graf má nenulový 3-tok.*

F. Jaeger ukázal, že každý 4-súvislý graf má nenulový 4-tok, avšak aj táto Tuttova hypotéza zostáva zatiaľ otvorená.

Záverom tejto časti poznamenajme, že pre rovinné grafy sú pojmy k-tok a k-farbiteľnosť v istom zmysle duálne, pozri veta 8.9.

Počet kostier grafu

Nasledujúce tvrdenie dopĺňa vetu 5.3.

Lema 5.6. *Nech $\mathbb{A}'$ vznikne z matice incidencie orientovaného súvislého grafu $\overrightarrow{G}$ vynechaním ľubovoľného riadku. Štvorcová podmatica rádu $n_G - 1$ matice $\mathbb{A}'$ je regulárna práve vtedy, keď šípy zodpovedajúce stĺpcom tvoria kostru.*

Dôkaz. Ak šípy zodpovedajúce stĺpcom tvoria kostru, tak podľa dôkazu vety 5.3 sa absolútna hodnota determinantu tejto matice rovná 1, čiže takáto matica je regulárna. Naopak, ak sú stĺpce lineárne nezávislé, tak podľa dôsledku (a) vety 5.4 nemôže existovať cyklus tvorený ľubovoľnou podmnožinou týchto hrán, lebo matica incidencie je podmaticou matice rezov. Teda šípy zodpovedajúce stĺpcom tvoria podgraf bez kružníc s $n_G - 1$ šípmi, čiže kostru. $\square$

Podľa lemy 5.6 sa počet kostier grafu G rovná počtu regulárnych podmatíc rádu $n_G - 1$ matice $\mathbb{A}'$, pričom determinant každej takejto regulárnej podmatice je 1, alebo -1. Z toho použitím tzv. Binet – Cauchyho vety plynie:

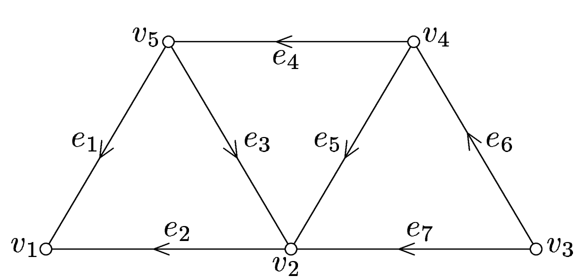
Veta 5.7. *Nech je G súvislý graf a nech je $\mathbb{A}'$ matica incidencie grafu $\overrightarrow{G}$ bez jedného (ľubovoľného) riadku. Potom G má práve $|\mathbb{A}' \times \mathbb{A}'^T|$ kostier.*

Príklad. Koľko kostier má graf G nakreslený na obrázku 25?

Riešenie. Zostrojme maticu incidencie $\mathbb{A}$ grafu $\overrightarrow{G}$ a vynechajme z nej riadok zodpovedajúci vrcholu v_5. Dostávame

$$\mathbb{A}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbb{A}' \times \mathbb{A}'^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Keďže $|\mathbb{A}' \times \mathbb{A}'^T| = 21$, tak podľa vety 5.7 má G práve 21 kostier.



Obrázok 25

PRÍKLAD. Zistite počet označených stromov na n vrcholoch.

RIEŠENIE. Každý označený strom na n vrcholoch je kostrou kompletného grafu na n vrcholoch. Preto sa počet takýchto stromov rovná $|\mathbb{A}' \times \mathbb{A}'^T|$, kde $\mathbb{A}'$ vznikne z matice incidencie kompletného grafu na n vrcholoch vynechaním ľubovoľného riadku. Determinant $|\mathbb{A}' \times \mathbb{A}'^T|$ sa rovná

$$\begin{vmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-1 & -n & -n & \dots & -n \\ -1 & n & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & n & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = n^{n-2}$$

Cvičenia

CVIČENIE 5.1. Opíšte, ako možno nájsť bázu priestoru cyklov pomocou prehľadávania do hĺbky. (Využite vetu 3.3 na kostru prehľadávania do hĺbky.)

CVIČENIE 5.2. Aké grafy majú dimenziu priestoru cyklov 0?

CVIČENIE 5.3. Ukážte, že dimenzia priestoru cyklov grafu sa nezmení pri nasledujúcich operáciach:

(a) nahradenie vrchola stupňa dva hranou;
(b) vloženie nového vrchola do hrany.

CVIČENIE 5.4. Nech je c kružnica v grafe G a $a, b \in c$. Dokážte, že existuje minimálny rez r taký, že $r \cap c = \{a, b\}$. (Využite skutočnosť, že každý bázický rez je minimálny.)

CVIČENIE 5.5. Nech sú T_1 a T_2 dve kostry súvislého grafu G. Ukážte, že k ľubovoľnej hrane e z T_1 existuje hrana f z T_2 taká, že $(T_1 - e) \cup f$ je opäť kostra.

CVIČENIE 5.6. Nech sú c_1 a c_2 dve kružnice (respektíve cykly) grafu G a nech pre hrany e a f platí $e \in c_1 \cap c_2$ a $f \in c_1 - c_2$. Dokážte, že potom existuje kružnica c_3 taká, že $c_3 \subseteq (c_1 \cup c_2) - e$ a $f \in c_3$.

CVIČENIE 5.7. Sformulujte a dokážte tvrdenie duálne k tvrdeniu cvičenia 5.6.

CVIČENIE 5.8. Množina hrán je **nezávislá**, ak žiadna jej podmnožina netvorí cyklus. Dokážte, že

(a) každá podmnožina nezávislej množiny je nezávislá;
(b) ak sú I a J nezávislé množiny veľkosti $|I| = k$ a $|J| = k+1$, tak existuje hrana $e \in J - I$ taká, že $I \cup \{e\}$ je nezávislá.

Sformulujte a dokážte duálne tvrdenie pre rezy.

Cvičenie 5.9. Zostrojte nenulový 5-tok v Petersenovom grafe.

Cvičenie 5.10. Zostrojte nenulový 4-tok v kolese W_n.

Cvičenie 5.11. Zostrojte nenulový 4-tok v hranole H_n.

Cvičenie 5.12. Zostrojte nenulový 3-tok v kompletnom grafe K_n.

Cvičenie 5.13. Nech je G súvislý orientovaný graf. Nech je $\mathbb{V}$ matica tvorená ľubovoľnými n_G-1 lineárne nezávislými riadkami matice rezov grafu G a $\mathbb{U}$ nech je matica tvorená ľubovoľnými m_G-n_G+1 lineárne nezávislými riadkami matice cyklov. Dokážte, že potom je $\binom{\mathbb{V}}{\mathbb{U}}$ matica, ktorá nie je singulárna.

Cvičenie 5.14. Nech je G graf s hranou e. Symbolom G/e označme graf, ktorý vznikne z G **kontrakciou hrany** e, čiže vyhodením tejto hrany a zlepením jej koncových vrcholov. (Prísne vzaté, štruktúra G/e nemusí byť graf, lebo môže obsahovať násobné hrany.) Naopak, symbolom $G - e$ označujeme graf, ktorý vznikne z G vynechaním hrany e. Nech $\tau(H)$ označuje počet kostier grafu H. Dokážte, že platí $\tau(G) = \tau(G/e) + \tau(G-e)$.

Cvičenie 5.15. S využitím predchádzajúceho cvičenia nájdite počet kostier kolesa W_6.

Cvičenie 5.16. Nájdite počet kostier grafu K_n-e, ktorý vznikne z kompletného grafu na n vrcholoch vynechaním jednej hrany.

6 TRANSVERZÁLY

Hallova veta

DEFINÍCIA. Nech je X množina a nech sú $A_1, A_2, \ldots, A_r$ podmnožiny X. Potom $x_1, x_2, \ldots, x_r$ nazývame **systém rozličných reprezentantov** (**transverzála**), ak $x_i \in A_i$ pre $i = 1, 2, \ldots, r$ a $x_i \neq x_j$ pre $1 \leq i < j \leq r$.

Pojem transverzály sa obyčajne vysvetľuje priraďovaním mládencov k slečnám na zoznamovacom večierku. Predpokladajme, že sa na takom večierku stretlo niekoľko slobodných dievčat a slobodných mládencov. Všetky slečny sa chcú vydať, pričom partnera si chcú vybrať už na tomto večierku. Pokiaľ by si nekládli žiadne podmienky, tak všetky sa môžu vydať práve vtedy, keď je mládencov aspoň toľko, ako dievčat. Avšak ani vydajachtivé slečny sa nehrnú do manželstva až tak unáhlene. Každej z dievčat sa páčia len niektorí z mládencov, teda každá má zoznam možných nápadníkov. Za akých podmienok je možné vydať všetky slečny za mládencov z ich zoznamov?

Zvoľme si za X množinu mládencov, pričom A_i nech je zoznam možných nápadníkov pre i-tu slečnu. Potom systém rozličných reprezentantov (ak existuje) zodpovedá sobášom, pričom i-ta slečna sa vydá za x_i-tého mládenca.

Nasledujúcu vetu dokázal P. Hall v roku 1935. Táto veta dáva úplné riešenie predchádzajúceho príkladu, a preto sa niekedy nazýva „sobášna veta“.

VETA 6.1 (**Hallova veta**). *Systém $A_1, A_2, \ldots, A_r$ podmnožín množiny X má transverzálu práve vtedy, keď pre každé $k = 1, 2, \ldots, r$ a pre ľubovoľné $i_1, i_2, \ldots, i_k$ také, že $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq r$, platí*

$$|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}| \geq k$$

DÔKAZ. Ak má systém $A_1, A_2, \ldots, A_r$ transverzálu $x_1, x_2, \ldots, x_r$, tak podmienka je istotne splnená, keďže $|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}| \geq |\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\}| = k$. Matematickou indukciou podľa r dokážeme, že keď systém $A_1, A_2, \ldots, A_r$ spĺňa podmienku Hallovej vety, tak má transverzálu.

1° Ak $r = 1$, tak $|A_1| \geq 1$, lebo systém spĺňa podmienku vety. Teda existuje prvok $x_1 \in A_1$, ktorý je transverzálou jednomnožinového systému A_1.

2° Nech $r > 1$ a nech má transverzálu každý systém, ktorý má menej ako r množín a spĺňa podmienku Hallovej vety. Rozlíšime dva prípady.

(i) Pre každé $k = 1, 2, \ldots, r-1$ a pre ľubovoľné $i_1, i_2, \ldots, i_k$, ktoré spĺňajú $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq r$, platí $|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}| \geq k + 1$.

To znamená, že podmienka je splnená pre každý výber s rezervou. Keďže podmienka je splnená, tak $|A_r| \geq 1$. Vyberme $x_r \in A_r$ a uvažujme systém $A_1-\{x_r\}, A_2-\{x_r\}, \ldots, A_{r-1}-\{x_r\}$. Dokážeme, že tento systém spĺňa podmienku Hallovej vety. Nech $1 \leq k \leq r-1$ a nech pre $i_1, i_2, \ldots, i_k$ platí $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq r-1$. Potom

$$\begin{aligned}|(A_{i_1}-\{x_r\}) \cup (A_{i_2}-\{x_r\}) \cup \cdots \cup (A_{i_k}-\{x_r\})| &= \\ = |(A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}) - \{x_r\}| &\geq \\ \geq |A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}| - 1 \geq (k+1) - 1 &= k\end{aligned}$$

Teda systém $A_1-\{x_r\}, A_2-\{x_r\}, \ldots, A_{r-1}-\{x_r\}$ spĺňa podmienku Hallovej vety a podľa indukčného predpokladu má transverzálu $x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}$, ktorú možno doplniť prvkom x_r na transverzálu systému $A_1, A_2, \ldots, A_{r-1}, A_r$.

(ii) Pre nejaké p také, že $1 \leq p \leq r-1$, a pre nejaký výber $i_1, i_2, \ldots, i_p$ taký, že $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq r$, platí $|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_p}| = p$.

To znamená, že pre tento výber je podmienka Hallovej vety splnená tesne. Kvôli jednoduchšiemu zápisu predpokladajme, že p množín tohoto výberu tvoria množiny $A_1, A_2, \ldots, A_p$. Systém $A_1, A_2, \ldots, A_p$ je podsystémom celého systému $A_1, A_2, \ldots, A_r$, a preto $A_1, A_2, \ldots, A_p$ spĺňa podmienku Hallovej vety. Keďže platí $p \leq r-1$, tak podľa indukčného predpokladu má $A_1, A_2, \ldots, A_p$ transverzálu $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Všimnime si, že teraz $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$. Označme $Y = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ a uvažujme systém $r-p$ množín $A_{p+1}-Y, A_{p+2}-Y, \ldots, A_r-Y$. Nech $1 \leq k \leq r-p$ a nech pre $j_1, j_2, \ldots, j_k$ platí $p+1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq r$. Potom

$$\begin{aligned}|(A_{j_1}-Y) \cup (A_{j_2}-Y) \cup \cdots \cup (A_{j_k}-Y)| = |(A_{j_1} \cup A_{j_2} \cup \cdots \cup A_{j_k}) - Y| &= \\ = |(Y \cup A_{j_1} \cup A_{j_2} \cup \ldots \cup A_{j_k}) - Y| &= \\ = |(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p \cup A_{j_1} \cup A_{j_2} \cup \cdots \cup A_{j_k}) - Y| &= \\ = |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p \cup A_{j_1} \cup A_{j_2} \cup \cdots \cup A_{j_k}| - |Y| \geq (p+k) - p &= k\end{aligned}$$

Teda systém $A_{p+1}-Y, A_{p+2}-Y, \ldots, A_r-Y$ spĺňa podmienku Hallovej vety. Keďže $p \geq 1$, tak $r-p \leq r-1$ a podľa indukčného predpokladu má systém $A_{p+1}-Y, A_{p+2}-Y, \ldots, A_r-Y$ transverzálu $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_r$. Túto transverzálu možno doplniť transverzálou $x_1, x_2, \ldots, x_p$ systému $A_1, A_2, \ldots, A_p$ na transverzálu $x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_r$ systému $A_1, A_2, \ldots, A_r$. □

Podmienka z Hallovej vety sa nazýva **Hallova podmienka**.

Príklad. Majme päť dievčat a päť mládencov. Mládenci sú označení číslami $1, 2, \ldots, 5$ a prvej slečne sa páčia mládenci s číslami 1 a 4, teda $A_1 = \{1, 4\}$, ďalej $A_2 = \{1, 3\}$, $A_3 = \{1, 2, 4, 5\}$, $A_4 = \{1, 3, 4\}$ a $A_5 = \{3, 4\}$. Možno vydať všetky slečny za mládencov, ktorí sa im páčia?

Riešenie. Keďže $|A_1 \cup A_2 \cup A_4 \cup A_5| = |\{1, 3, 4\}| = 3$, tak podľa Hallovej vety systém $A_1, A_2, \ldots, A_5$ nemá transverzálu. Teda nemožno všetky slečny vydať tak, aby mali za manželov mládencov, ktorí sa im páčia.

Transverzály zodpovedajú párovaniam v párnych grafoch.

Definícia. Nech je $G = (V(G), E(G))$ graf, pre ktorý $V(G) = V_1 \cup V_2$, pričom $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, a každá hrana má jeden svoj vrchol v množine V_1 a druhý vo V_2. Takýto graf sa nazýva **párny graf** (respektíve **bipartitný graf**) a zapisujeme ho aj $G = (V_1, V_2; E(G))$. **Párovanie** je taký podgraf grafu G, v ktorom je každý vrchol susedný s nanajvýš jednou hranou. Párovanie s najväčším možným počtom hrán nazývame **maximové párovanie**.

Hrana **pokrýva** vrchol, ak je s týmto vrcholom susedná a množina hrán M pokrýva množinu vrcholov S ak pre každý vrchol $v \in S$ existuje hrana $e \in M$ pokrývajúca vrchol v.

Nech je $G = (V(G), E(G))$ graf, $u \in V(G)$ a $S \subseteq V(G)$. Symbolom $N(u)$ označujeme množinu vrcholov $v \in V(G)$, pre ktoré existuje hrana uv v grafe G a symbolom $N(S)$ označujeme množinu $\bigcup\limits_{u \in S} N(u)$.

Nech je V_1 množina dievčat a V_2 nech je množina mládencov. Ďalej nech je $G = (V_1, V_2; E(G))$ párny graf, v ktorom sú vrcholy u a v, $u \in V_1$ a $v \in V_2$, spojené hranou práve vtedy, keď sa mládenec v páči slečne u. Ak označíme $N(u)$ množinu vrcholov $v \in V_2$, pre ktoré existuje uv hrana v grafe G, tak systém množín $\{N(u);\, u \in V_1\}$ zodpovedá zoznamom prípustných nápadníkov pre dievčatá a priradenie čo najväčšieho počtu nápadníkov dievčatám zodpovedá maximovému párovaniu. Teda Hallovu vetu možno v reči teórie grafov preformulovať nasledovne:

Veta 6.2 (**Hallova veta**). *Párny graf $G = (V_1, V_2; E(G))$ má párovanie pokrývajúce celú množinu V_1 práve vtedy, keď $|N(S)| \geq |S|$ pre každú množinu $S \subseteq V_1$.*

Pre pravidelné grafy možno Hallovu vetu zosilniť.

Definícia. Graf G je **pravidelný**, ak majú všetky jeho vrcholy rovnaký stupeň. **Úplné** (**perfektné**) **párovanie** grafu G je taký podgraf H, ktorý je pravidelný stupňa 1 a obsahuje všetky vrcholy grafu G.

Všimnime si, že úplné párovanie sme definovali aj pre grafy, ktoré nie sú párne. Avšak k tomu, aby úplné párovanie grafu G existovalo, je potrebné, aby bol počet vrcholov grafu G párny.

Veta 6.3. *Nech je $G = (V_1, V_2; E(G))$ pravidelný párny graf stupňa p. Potom množinu hrán $E(G)$ možno rozložiť na p úplných párovaní grafu G.*

Dôkaz. Keďže H má $p \cdot |V_1| = p \cdot |V_2|$ hrán, tak V_1 má práve toľko vrcholov, ako V_2. Vetu dokážeme indukciou podľa stupňa p grafu G.

1° Ak $p = 1$, tak niet čo dokazovať, pretože v tomto prípade množina všetkých hrán grafu tvorí jedno úplné párovanie.

2° Nech veta platí pre grafy stupňa $p-1$, pričom párny graf G má stupeň p. Ukážeme, že G má úplné párovanie. Nech $S \subseteq V_1$. S vrcholmi množiny S je susedných $p \cdot |S|$ hrán, pričom všetky tieto hrany majú druhého suseda v množine $N(S)$. Ak by platilo $|N(S)| < |S|$, tak by podľa Dirichletovho princípu existoval vrchol $y \in N(S)$, ktorého stupeň by bol aspoň $\frac{p \cdot |S|}{|N(S)|} > p$, čo je spor s predpokladom, že graf G je pravidelný stupňa p. To znamená, že $|N(S)| \geq |S|$ platí pre každú množinu $S \subseteq V_1$. Podľa Hallovej vety 7.2 má graf G párovanie M pokrývajúce celú množinu V_1. Keďže $|V_1| = |V_2|$, tak M je úplné párovanie grafu G. Označme G' graf, ktorý vznikne z G vynechaním všetkých hrán párovania M. Graf G' je pravidelný párny graf stupňa $p-1$ a podľa indukčného predpokladu možno množinu hrán grafu G' rozložiť na $p-1$ úplných párovaní $M_1, M_2, \dots, M_{p-1}$. Teda $M_1, M_2, \dots, M_{p-1}, M$ je rozklad množiny hrán grafu G na p úplných párovaní. $\square$

Zovšeobecnená Hallova veta

Ako sme videli vo vyššie uvedenom príklade, nie vždy sa nám podarí uspokojiť všetky vydajachtivé slečny. V takom prípade je vhodné zistiť, aký najväčší počet dievčat môžeme vydať.

VETA 6.4 (**zovšeobecnená Hallova veta**). *Nech je $A_1, A_2, \dots, A_r$ systém podmnožín množiny X a nech q spĺňa $1 \le q \le r$. V systéme $A_1, A_2, \dots, A_r$ existuje q-množinový podsystém s transverzálou práve vtedy, keď pre každé $k = 1, 2, \dots, r$ a pre každý výber $i_1, i_2, \dots, i_k$ taký, že $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le r$ platí*

$$|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}| \ge k - (r-q)$$

DÔKAZ. Nech je Y množina $r-q$ prvkov taká, že $X \cap Y = \emptyset$. Potom $A_i \cap Y = \emptyset$ pre každé $i = 1, 2, \dots, r$, keďže $A_i \subseteq X$. Uvažujme systém $A_1 \cup Y, A_2 \cup Y, \dots, A_r \cup Y$ podmnožín množiny $X \cup Y$.

Najprv ukážeme, že $A_1, A_2, \dots, A_r$ má q-množinový podsystém s transverzálou práve vtedy, keď má systém $A_1 \cup Y, A_2 \cup Y, \dots, A_r \cup Y$ transverzálu. Predpokladajme, že q-množinový podsystém systému $A_1, A_2, \dots, A_r$ má transverzálu. Nech tento podsystém tvoria množiny $A_1, A_2, \dots, A_q$ s transverzálou $x_1, x_2, \dots, x_q$. Nech $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_{r-q}\}$. Potom je $x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_{q-r}$ transverzála systému $A_1 \cup Y, A_2 \cup Y, \dots, A_r \cup Y$. Teraz naopak predpokladajme, že systém $A_1 \cup Y, A_2 \cup Y, \dots, A_r \cup Y$ má transverzálu $w_1, w_2, \dots, w_r$. Keďže Y má $r-q$ prvkov, tak aspoň q prvkov z $w_1, w_2, \dots, w_r$ patrí do X. Nech sú to prvky $w_1, w_2, \dots, w_q$. Potom $w_1 \in A_1$, $w_2 \in A_2$, $\dots$, $w_q \in A_q$, čiže systém $A_1, A_2, \dots, A_r$ obsahuje q-množinový podsystém $A_1, A_2, \dots, A_q$, ktorý má transverzálu.

Podľa Hallovej vety má systém $A_1 \cup Y, A_2 \cup Y, \dots, A_r \cup Y$ transverzálu práve vtedy, keď pre každé $k = 1, 2, \dots, r$ a pre každý k-prvkový výber $i_1, i_2, \dots, i_k$ taký, že $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le r$, platí

$$|(A_{i_1} \cup Y) \cup (A_{i_2} \cup Y) \cup \cdots \cup (A_{i_k} \cup Y)| \ge k \tag{*}$$

Keďže

$$\begin{aligned} |(A_{i_1} \cup Y) \cup (A_{i_2} \cup Y) \cup \cdots \cup (A_{i_k} \cup Y)| &= |(A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}) \cup Y| = \\ = |A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}| + |Y| &= |A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}| + r-q \end{aligned}$$

tak (*) platí práve vtedy, keď $|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}| \ge k - (r-q)$. $\square$

Príklad. Nech je zo šachovnice typu 4×7 vyrezaných 11 polí podľa obrázku 26. Na dve susedné políčka, z ktorých žiadne nie je vyrezané, môžeme položiť dlaždičku (hraciu kocku) domina s rozmermi 2×1. Aký najväčší počet bielych políčok môžeme pokryť kockami domina tak, aby sa tieto navzájom neprekrývali?

b_1		b_2	$\check{c}_1$			
	b_3		b_4	$\check{c}_2$		$\check{c}_3$
b_5	$\check{c}_4$	b_6		b_7	$\check{c}_5$	b_8
$\check{c}_6$				$\check{c}_7$	b_9	$\check{c}_8$

Obrázok 26

Riešenie. Označme biele a čierne polia tak, ako je to naznačené na obrázku 26. Každá kocka domina pokrýva vždy jedno biele a jedno čierne políčko. Pre každé biele pole b_i označme A_i množinu čiernych nevyrezaných polí susedných s b_i, kde $i = 1, 2, \dots, 9$. Potom máme $A_1 = \{\emptyset\}$, $A_2 = \{\check{c}_1\}$, $A_3 = \{\check{c}_4\}$, $A_4 = \{\check{c}_1, \check{c}_2\}$, $A_5 = \{\check{c}_4, \check{c}_6\}$, $A_6 = \{\check{c}_4\}$, $A_7 = \{\check{c}_2, \check{c}_5, \check{c}_7\}$, $A_8 = \{\check{c}_3, \check{c}_5, \check{c}_8\}$ a $A_9 = \{\check{c}_5, \check{c}_7, \check{c}_8\}$. Maximálny počet pokrytých bielych políčok zodpovedá transverzále najväčšieho podsystému systému $A_1, A_2, \dots, A_9$. Keďže $|A_1 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_6| = 2 = 4 - (9-7)$, tak podľa vety 6.4 nemôžeme pokryť viac, ako 7 bielych polí. Po niekoľkých ďalších pokusoch zistíme, že asi už každý k-prvkový podsystém systému $A_1, A_2, \dots, A_9$ obsahuje aspoň $k-2$ prvkov, $1 \le k \le 9$. To však znamená, že by sme mali dokázať pokryť sedem bielych polí podľa vety 6.4. Jedným z takých pokrytí je pokrytie $b_2 - \check{c}_1$, $b_3 - \check{c}_4$, $b_4 - \check{c}_2$, $b_5 - \check{c}_6$, $b_7 - \check{c}_5$, $b_8 - \check{c}_3$, $b_9 - \check{c}_7$.

Všimnime si, že z deviatich bielych polí sa nám v predchádzajúcom príklade podarilo pokryť iba sedem, hoci sme mali k dispozícii osem čiernych polí.

Aj zovšeobecnenú Hallovu vetu možno sformulovať v reči teórie grafov.

Veta 6.5 (**zovšeobecnená Hallova veta**). *Nech je $G = (V_1, V_2; E(G))$ párny graf. Označme S_0, takú podmnožinu množiny V_1, pre ktorú je číslo $|S_0| - |N(S_0)|$ najväčšie. Potom počet hrán maximového párovania párneho grafu G je*

$$|X| - (|S_0| - |N(S_0)|)$$

Permanenty

Hallova veta dáva odpoveď na otázku, či má systém aspoň jednu transverzálu. V tejto časti sa budeme zaoberať problémom, koľko transverzál má daný systém.

Definícia. Nech je $\mathbb{A}$ matica typu $m \times n$, kde $m \le n$. **Permanent** matice $\mathbb{A}$ je $per(\mathbb{A}) = \sum_s \prod_{i=1}^{m} a_{i,s(i)}$, kde suma ide cez všetky m-prvkové výbery n-prvkovej množiny. Teda $s(1), s(2), \ldots, s(m)$ je vždy m rôznych prvkov z $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Ak je matica $\mathbb{A}$ štvorcová, tak $per(\mathbb{A})$ sa líši od determinantu len v tom, že všetky súčiny majú znamienko $+$, zatiaľ čo pri determinante toto znamienko závisí od parity príslušnej permutácie.

Lema 6.6. *Pre permanent matice $\mathbb{A}$ typu $m \times n$ platí:*

(a) *ak jeden z riadkov $\mathbb{A}$ pozostáva zo samých núl, tak $per(\mathbb{A}) = 0$;*
(b) *ak matica $\mathbb{A}'$ vznikne z $\mathbb{A}$ prenásobením jedného riadku číslom c, tak $per(\mathbb{A}') = c \cdot per(\mathbb{A})$;*
(c) *ak $\mathbb{A}'$ vznikne z $\mathbb{A}$ výmenou ľubovoľných dvoch riadkov, alebo stĺpcov, tak $per(\mathbb{A}') = per(\mathbb{A})$;*
(d) *ak $\mathbb{A}_{i,j}$ vznikne z $\mathbb{A}$ vynechaním i-teho riadku a j-teho stĺpca a $\mathbb{A}'_{i,j}$ vznikne z $\mathbb{A}$ nahradením prvku $a_{i,j}$ nulou, tak $per(\mathbb{A}) = a_{i,j} \cdot per(\mathbb{A}_{i,j}) + per(\mathbb{A}'_{i,j})$;*
(e) **rozklad podľa riadku** *i: $per(\mathbb{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot per(\mathbb{A}_{i,j})$.*

Dôkaz. Keďže v každom súčine v definícii permanentu je práve jeden prvok z každého riadku, tak platia tvrdenia (a) a (b).

Výmenou dvoch riadkov, prípadne dvoch stĺpcov, sa nezmení žiaden zo súčinov v definícii permanentu, a preto platí (c).

Rozdeľme všetky súčiny v permanente do dvoch skupín. V prvej skupine budú tie súčiny, ktoré obsahujú prvok $a_{i,j}$ a v druhej tie, ktoré tento prvok neobsahujú. Dostávame $per(\mathbb{A}) = a_{i,j} \cdot per(\mathbb{A}_{i,j}) + per(\mathbb{A}'_{i,j})$.

Tvrdenie (e) je dôsledkom tvrdení (d) a (a). □

Definícia. Majme systém $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ podmnožín n-prvkovej množiny $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Potom matica $\mathbb{A} = (a_{i,j})$ typu $m \times n$, pre ktorú

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{ak } x_j \in S_i; \\ 0 & \text{inak,} \end{cases}$$

sa nazýva **matica incidencie** systému $\mathcal{S}$.

Veta 6.7. *Nech je $\mathbb{A}$ matica incidencie systému $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ podmnožín množiny $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Potom $\mathcal{S}$ má práve $per(\mathbb{A})$ transverzál.*

Dôkaz. Matica $\mathbb{A}$ obsahuje len prvky 0 a 1. Preto každému m-prvkovému výberu z n prvkov, ktorý dáva nenulový súčin v permanente (teda 1), zodpovedá m rôznych reprezentantov (čiže transverzála) $\mathcal{S}$. □

Príklad. Určte počet transverzál systému $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ podmnožín množiny $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, ak $n \ge 2$, $S_1 = \{1, 2\}$, $S_n = \{n-1, n\}$ a pre ostatné $i = 2, 3, \ldots, n-1$ platí $S_i = \{i-1, i, i+1\}$.

Riešenie. Matica incidencie daného systému má tvar

$$\mathbb{A}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Podľa vety 6.7 nám stačí určiť permanent tejto matice. Označme $p_n = per(\mathbb{A}_n)$. Potom $p_2 = 2$ a $p_3 = 3$. Keď rozložíme permanent podľa prvého riadku, tak podľa tvrdenia (e) lemy 6.6 dostávame $per(\mathbb{A}_n) = per(\mathbb{A}_{n-1}) + per(\mathbb{A}^*_{n-1})$, kde matica $\mathbb{A}^*_{n-1}$ sa líši od $\mathbb{A}_{n-1}$ len v tom, že $a^*_{2,1} = 0$. Preto $per(\mathbb{A}^*_{n-1}) = per(\mathbb{A}_{n-2})$, čiže $p_n = p_{n-1} + p_{n-2}$ pre $n \geq 4$. Riešením tohoto rekurentného vzťahu sú známe **Fibonacciho čísla** 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

Cvičenia

Cvičenie 6.1. Nech je $A_1, A_2, \dots, A_r$ systém množín, ktorý má transverzálu, a nech sa x nachádza aspoň v jednej z množín $A_1, A_2, \dots, A_r$. Dokážte, že potom existuje transverzála systému $A_1, A_2, \dots, A_r$ obsahujúca x. Ďalej ukážte, že ak $x \in A_1$, tak systém $A_1, A_2, A_3, \dots, A_r$ ešte nemusí mať transverzálu tvaru $x, x_2, x_3, \dots, x_r$, čiže nie je vždy možné predurčiť, ktorú množinu bude prvok x reprezentovať.

Cvičenie 6.2. Nech je $A_1, A_2, \dots, A_r$ systém r množín, v ktorom pre každé $k = 1, 2, \dots, r$ a pre každý výber $i_1, i_2, \dots, i_k$ taký, že $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq r$ platí $|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_k}| \geq k + 1$. Nech $x \in A_1$. Dokážte, že potom existuje transverzála $x, x_2, x_3, \dots, x_r$ systému $A_1, A_2, A_3, \dots, A_r$.

Cvičenie 6.3. Na zoznamovacom večierku je n slobodných dievčat a n slobodných mládencov. Predpokladajme, že existuje číslo p také, že každej slečne sa páči práve p mládencov a každý mládenec sa páči práve p slečnám. Dokážte, že potom možno každej slečne priradiť nápadníka, ktorý sa jej páči.

Cvičenie 6.4. Na tanečnom večierku je n dievčat a n mládencov. Predpokladajme, že existuje číslo p také, že každej slečne sa páči práve p mládencov a každý mládenec sa páči práve p slečnám. Dokážte, že možno zorganizovať p tanečných kôl tak, aby v každom kole tancovalo každé dievča len s takým chlapcom, ktorý sa jej páči, a aby počas týchto p kôl tancovalo každé dievča so všetkými p mládencami, ktorí sa jej páčia.

Cvičenie 6.5. Nech $r \leq n$. **Latinský obdĺžnik** typu $r \times n$ je obdĺžniková tabuľka s r riadkami a n stĺpcami, v ktorej je v každom poli zapísaný prvok z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, pričom v každom riadku a v každom stĺpci sa každý prvok z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ vyskytuje nanajvýš raz. Latinský obdĺžnik typu $n \times n$ nazývame **latinský štvorec**. Dokážte, že každý latinský obdĺžnik sa dá doplniť na latinský štvorec.

CVIČENIE 6.6. Firma potrebuje obsadiť sedem rôznych pracovných činností $p_1, p_2, \ldots, p_7$, pričom má k dispozícii 8 zamestnancov $a_1, a_2, \ldots, a_8$. Každý zamestnanec môže vykonávať len niektoré činnosti. Prvý má kvalifikáciu pre $\{p_1, p_4, p_5\}$, druhý pre $\{p_2, p_6, p_7\}$ a ďalší postupne pre $\{p_3, p_4\}$, $\{p_1, p_5\}$, $\{p_3\}$, $\{p_2, p_3\}$, $\{p_1, p_3\}$ a posledný len pre $\{p_1\}$. Aký najväčší počet činností môže firma kvalifikovane obsadiť týmito zamestnancami?

CVIČENIE 6.7. Nech $n \geq 2$ a nech je $A_1, A_2, \ldots, A_n$ taký systém podmnožín množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, v ktorom $A_i = \{1, 2, \ldots, n\} - \{i\}$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Koľko rôznych transverzál má tento systém? (Návod: nevyužívajte permanent, ale preveďte úlohu na úlohu o „klobúkoch“ z príkladu pred vetou 1.9.)

CVIČENIE 6.8. Nech je G graf, ktorý dostaneme z kompletného párneho grafu $K_{n,n}$ vynechaním hrán jedného párovania. Koľko rôznych úplných párovaní má graf G?

CVIČENIE 6.9. Dokážte, že množinu hrán Petersenovho grafu nemožno rozložiť na úplné párovania.

CVIČENIE 6.10. **Fanova rovina** je systém 7 podmnožín množiny X, ktorá má 7 prvkov. Ak $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, tak týmito 7 podmnožinami sú $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{1, 6, 7\}$, $\{2, 4, 6\}$, $\{2, 5, 7\}$, $\{3, 4, 7\}$ a $\{3, 5, 6\}$. Keďže Fanova rovina je **konečná projektívna rovina**, tak vyššie uvedených 7 podmnožín X nazývame **priamky**.
Určte počet transverzál Fanovej roviny, ak priamky predstavujú množiny systému $\mathcal{S}$ a X je množina bodov.

CVIČENIE 6.11. Nájdite štvorcové matice čo najmenšieho rádu také, aby platilo $per(\mathbb{A} \times \mathbb{B}) \neq per(\mathbb{A}) \cdot per(\mathbb{B})$, kde $\times$ je zvyčajný súčin matíc.

CVIČENIE 6.12. Dokážte, že pre permanent a determinant štvorcovej matice $\mathbb{A}$ s nezápornými členmi platí $per(\mathbb{A}) \geq |\mathbb{A}|$.

CVIČENIE 6.13. Dokážte, že pre štvorcové matice $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ rovnakého rádu s nezápornými členmi platí $per(\mathbb{A} + \mathbb{B}) \geq per(\mathbb{A}) + per(\mathbb{B})$.

7 PÁROVANIA

Petersenova a Königova veta

V tejto časti uvedieme viaceré aplikácie Hallovej vety.

DEFINÍCIA. Nech je $G = (V(G), E(G))$ graf a nech je $H = (V(G), F(H))$ podgraf grafu G. Ak je H pravidelný graf stupňa k, tak H nazývame **k-faktor** grafu G.

Všimnime si, že vrcholová množina k-faktora grafu G je totožná s vrcholovou množinou grafu G. Úplné párovanie je 1-faktor grafu, a teda podľa vety 6.3 možno pravidelný párny graf stupňa p rozložiť na p 1-faktorov. Ak však graf nie je párny, tak nie vždy je možné rozložiť pravidelný graf na 1-faktory, pretože tento graf nemusí obsahovať žiaden 1-faktor (napríklad ak má nepárne veľa vrcholov). Napriek tomu pre 2-faktory platí nasledujúce tvrdenie.

VETA 7.1 (**Petersenova veta**). *Nech je $G = (V(G), E(G))$ pravidelný graf stupňa $2p$. Potom množinu hrán $E(G)$ možno rozložiť na p 2-faktorov grafu G.*

DÔKAZ. Vetu stačí dokázať pre súvislé grafy, pretože v nesúvislom grafe možno rozložiť každý komponent súvislosti samostatne. Predpokladajme preto, že G je súvislý graf. Keďže všetky vrcholy grafu G sú párneho stupňa, tak podľa Eulerovej vety 3.1 v grafe G existuje uzavretý eulerovský ťah T. Zvoľme si orientáciu ťahu T a prejdime sa po grafe pozdĺž hrán T. Zvolená orientácia nám určila, ktorým smerom sme prešli každú hranu grafu G. Označme $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ vrcholy grafu G. Nech sú $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ a $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ disjunktné množiny. Zostrojme pomocný párny graf $H = (X, Y; F)$ tak, že dvojica $x_i y_j$, je hranou grafu H práve vtedy, keď je $v_i v_j$ hranou grafu G, pričom pri prechádzke pozdĺž hrán ťahu T sme túto hranu prešli v smere z v_i do v_j, $1 \leq i \leq n$ a $1 \leq j \leq n$. Keďže G je pravidelný graf stupňa $2p$, tak H je pravidelný párny graf stupňa p (do každého vrchola grafu G ťah T „prišiel“ p krát a p krát z neho „odišiel“). Podľa vety 6.3 možno množinu hrán F grafu H rozložiť na p úplných párovaní $F_1, F_2, \ldots, F_p$.

Nech E_k obsahuje také hrany $v_i v_j$ grafu G, pre ktoré buď $x_i y_j$, alebo $x_j y_i$, patria do F_k, $k = 1, 2, \ldots, p$ (všimnime si, že iba jedna z hrán $x_i y_j$ a $x_j y_i$ sa môže vyskytovať v grafe H). Keďže x_i aj y_i sú vrcholy stupňa 1 v 1-faktore F_k, tak stupeň vrchola v_i v E_k je 2 pre každé $i = 1, 2, \ldots, n$ a $k = 1, 2, \ldots, p$. To znamená, že $E_1, E_2, \ldots, E_p$ sú 2-faktory grafu G. Tieto 2-faktory spolu obsahujú všetky hrany grafu G, a preto sú ich množiny hrán navzájom disjunktné. Teda systém $E_1, E_2, \ldots, E_p$ tvorí rozklad množiny hrán grafu G na 2-faktory. $\square$

DEFINÍCIA. Nech je $G = (V(G), E(G))$ graf. Podmnožina P množiny vrcholov $V(G)$ tvorí **vrcholové pokrytie** grafu G, ak je každá hrana grafu G susedná s nejakým vrcholom z množiny P.

VETA 7.2 (**Königova veta**). *Počet hrán maximového párovania párneho grafu sa rovná minimálnemu počtu vrcholov vrcholového pokrytia tohoto grafu.*

DÔKAZ. Nech je $G = (V(G), E(G))$ párny graf. Označme m_e počet hrán maximového párovania a m_v minimálny počet vrcholov vrcholového pokrytia grafu G. Podľa vety 6.4 sa počet hrán maximového párovania rovná $|X| - (|S_0| - |N(S_0)|)$ pre nejakú množinu $S_0 \subseteq X$. Potom však $(X - S_0) \cup N(S_0)$ tvorí vrcholové pokrytie, lebo žiadna hrana nespája vrchol z množiny S_0 s vrcholom z $Y - N(S_0)$. Veľkosť tohoto pokrytia je

$$(|X| - |S_0|) + |N(S_0)| = |X| - (|S_0| - |N(S_0)|) = m_e$$

a preto pre minimálny počet vrcholov vrcholového pokrytia platí $m_v \leq m_e$. Na druhej strane každé vrcholové pokrytie obsahuje aspoň jeden vrchol z každej hrany maximového párovania, a preto $m_e \leq m_v$, čiže $m_e = m_v$. $\square$

Königova veta je známejšia v maticovej formulácii.

DEFINÍCIA. Majme danú maticu. Pojmom **línia** rozumieme ktorýkoľvek riadok, prípadne stĺpec tejto matice. Ak nejaký prvok matice leží v línii l, tak línia l **pokrýva** tento prvok. Prvky matice, ktoré neležia v spoločnej línii nazývame **nezávislé**. Matica $\mathbb{A}$ je **binárna**, ak všetky jej prvky sú 0, alebo 1.

VETA 7.3 (**Königova veta**). *Maximálny počet navzájom nezávislých jednotiek binárnej matice sa rovná minimálnemu počtu línií, ktoré pokrývajú všetky jednotky v tejto matici.*

Veta 7.3 je ekvivalentná s vetou 8.2, lebo párny graf $G = (V_1, V_2; E(G))$, kde $V_1 = \{v_{1,1}, v_{1,2}, \ldots, v_{1,n_1}\}$ a $V_2 = \{v_{2,1}, v_{2,2}, \ldots, v_{2,n_2}\}$, zodpovedá binárnej matici $\mathbb{P} = (p_{i,j})$ typu $n_1 \times n_2$, v ktorej je $p_{i,j} = 1$ práve vtedy, keď $v_{1,i}v_{2,j} \in E(G)$.

PRÍKLAD. Uvažujme binárnu maticu $\mathbb{A}$ typu 5×5

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Táto matica neobsahuje žiaden nulový riadok ani nulový stĺpec. Napriek tomu na jej pokrytie stačia štyri línie: druhý a štvrtý riadok a prvý a tretí stĺpec. V matici $\mathbb{A}$ sú štyri navzájom nezávislé jednoty, pretože $a_{1,3} = a_{2,4} = a_{3,1} = a_{4,2} = 1$. Podľa Königovej vety 7.3 už neexistuje väčší počet navzájom nezávislých jednotiek ani menší počet pokrývajúcich línií.

Priraďovací problém

V tejto časti si opíšeme jednu peknú aplikáciu Königovej vety.

Definícia. Majme štvorcovú maticu $\mathbb{A}$ typu $n \times n$. **Priraďovacia úloha** (**problém**) je úlohou nájdenia takých n nezávislých prvkov matice $\mathbb{A}$, ktorých súčet je najmenší možný.

Riešenie priraďovacej úlohy si ozrejmíme na príklade.

Príklad. Vo firme majú štyri stroje, na ktorých možno vykonať štyri zadané práce. Vedenie požaduje, aby bola každá z činností vykonaná na inom stroji. Čas, ktorý je potrebný na vykonanie každej z prác na jednotlivých strojoch, je zaznačený v nasledujúcej tabuľke

	práca 1	práca 2	práca 3	práca 4
stroj 1	13	4	8	6
stroj 2	2	14	5	5
stroj 3	6	9	2	8
stroj 4	2	7	3	10

Nájdite také priradenie strojov prácam, ktorého sumárny čas je minimálny.

Riešenie. Zapíšeme si všetky časy do štvorcovej matice a nájdeme minimálny čas v každom riadku. V prvom riadku je to 4 a vo všetkých ostatných 2. Následne v každom riadku odčítame od všetkých časov nájdené minimum. Výsledné časy sú zapísané v matici

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 12 & 3 & 3 \\ 4 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Teraz nájdeme minimum v každom stĺpci a odčítame ho od všetkých prvkov príslušného stĺpca. Keďže v našej matici je len vo štvrtom stĺpci nenulové minimum 2, získame novú maticu

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 12 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Test optimálnosti. Zistíme, koľko línií treba na pokrytie všetkých núl v matici. Ak ich je potrebných toľko, koľko je v matici riadkov, tak medzi nulami možno nájsť optimálne riešenie.

V našom prípade na pokrytie núl stačia tri línie (pozri vyššie uvedenú maticu), a preto riešenie nie je optimálne. V takom prípade nájdeme medzi číslami nepokrytými líniami najmenšie číslo. U nás je jeho hodnota 1.

Odčítame nájdené najmenšie číslo od všetkých prvkov nepokrytých líniami a pričítame ho k tým prvkom, ktoré sú pokryté dvoma líniami. Dostávame nasledujúcu maticu

$$\begin{pmatrix} 10 & \mathbf{0} & 5 & 0 \\ 0 & 11 & 3 & \mathbf{0} \\ 4 & 6 & \mathbf{0} & 3 \\ \mathbf{0} & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Keby sa nuly v tejto matici dali pokryť menej ako štyrmi líniami, opäť by sme hľadali najmenšie číslo medzi nepokrytými prvkami. To však nie je náš prípad. Podľa Königovej vety sa minimálny počet pokrývajúcich línií rovná maximálnemu počtu nezávislých prvkov. Teda keď nájdeme 4 nezávislé nuly vo vyššie uvedenej matici $\mathbb{B} = (b_{i,j})$, tak sme našli optimálne riešenie.

Keďže v treťom a štvrtom riadku máme jedinú nulu, vyberieme si do riešenia $b_{3,3}$ a $b_{4,1}$. Podobne, keďže v druhom stĺpci je len jedna nula, vyberieme $b_{1,2}$, čo doplníme posledným možným prvkom $b_{2,4}$. Sumárny čas tohoto optimálneho riešenia je $2 + 2 + 4 + 5 = 13$. $\square$

Párovania vo všeobecnom grafe

V tejto časti sa nebudeme zaoberať výlučne párnymi grafmi. Budeme opäť hľadať „veľké“ párovania, avšak tieto sa už nedajú interpretovať ako transverzály.

Definícia. Majme graf na n vrcholoch. **Párovanie** (**matching**) je množina navzájom **nezávislých hrán** čiže takých hrán, ktoré majú disjunktné množiny svojich koncových vrcholov.

Podobne ako v predchádzajúcej kapitole, párovanie s maximálnym počtom hrán nazývame maximové a úplné párovanie je také, ktoré má $\frac{n}{2}$ hrán.

Každý graf má maximové párovanie, avšak nie každý graf má úplné párovanie.

Definícia. Nech je G graf a $S \subseteq V(G)$. Symbolom $p_G(S)$ označujeme počet komponentov súvislosti grafu $G - S$, ktoré majú nepárne veľa vrcholov.

Na otázku, kedy má graf úplné párovanie, dáva odpoveď nasledujúca veta.

Veta 7.4 (**Tuttova veta**). *Graf G má úplné párovanie práve vtedy, keď platí $p_G(S) \leq |S|$ pre každú množinu $S \subseteq V(G)$.*

Dôkaz. Nech je M jedno úplné párovanie grafu G, $S \subseteq V(G)$, a nech sú $G_1, G_2, \ldots, G_k$ všetky komponenty súvislosti grafu $G - S$, ktoré majú nepárny počet vrcholov. Párovanie M pokrýva všetky vrcholy grafu G, a preto je aspoň jeden vrchol, povedzme v_i, grafu G_i, $1 \leq i \leq k$, spojený hranou párovania s vrcholom z S. Keďže hrany párovania sú navzájom nezávislé, tak $p_G(S) = k \leq |S|$.

Teraz predpokladajme, že $p_G(S) \leq |S|$ pre každú množinu $S \subseteq V(G)$. Keďže $p_G(\emptyset) \leq 0$, tak všetky komponenty súvislosti grafu G majú párny počet vrcholov, a teda aj G má párny počet vrcholov. Indukciou podľa n dokážeme, že ak má graf G párny počet n vrcholov, tak má úplné párovanie.

1° Ak $n = 2$, tak G má dva vrcholy spojené hranou a táto hrana je zároveň hranou úplného párovania grafu G.

2° Nech tvrdenie platí pre všetky grafy na menej ako n vrcholoch. Keďže G má párny počet vrcholov, tak pre každú množinu $S \subseteq V(G)$ majú $|S|$ aj $p_G(S)$ rovnakú paritu. Uvažujme dva prípady.

(i) Nech $p_G(S) < |S|$ pre všetky množiny $S \subseteq V(G)$, pre ktoré $2 \leq |S| \leq n$. Nech je uv ľubovoľná hrana grafu G a G' nech je graf získaný vynechaním vrcholov u a v z G. Potom pre ľubovoľnú množinu $T \subseteq V(G')$ platí

$$p_{G'}(T) = p_G(T \cup \{u, v\}) < |T \cup \{u, v\}| = |T| + 2$$

a keďže $p_{G'}(T)$ aj $|T|$ majú rovnakú paritu, tak $p_{G'}(T) \leq |T|$. Teda G' má podľa indukčného predpokladu úplné párovanie, ktoré možno doplniť hranou uv na úplné párovanie grafu G.

(ii) Nech existuje $S \subseteq V(G)$ taká, že $p_G(S) = |S|$. Zvoľme si množinu S tak, aby bola maximálnou množinou s vlastnosťou $p_G(S) = |S|$. Ak by mal graf $G-S$ párne komponenty súvislosti, tak by sme mohli z každého párneho komponentu vybrať po jednom vrchole, pridať do S, pričom pre takto rozšírenú množinu S' by tiež platilo $p_G(S') = |S'|$, čo by bol spor s maximalitou S. Teda $G - S$ nemá párne komponenty. Nech $|S| = s$ a nech sú $G_1, G_2, \ldots, G_s$ všetky komponenty súvislosti grafu $G - S$. Ukážeme, že z každého komponentu $G - S$ možno vybrať po jednom vrchole a tieto spárovať hranami s S. Ak by sa také hrany nedali vybrať, tak by podľa Hallovej vety 7.2 existovalo t vrcholov z S, ktoré by boli spojené hranami len s $k < t$ komponentami grafu $G - S$. Ak označíme T množinu ostatných $s - t$ vrcholov množiny S, tak by platilo

$$p_G(T) \geq s - k > s - t = |T|$$

čo je v spore s predpokladom vety. Teda v každom komponente G_i vieme nájsť vrchol v_i, $i = 1, 2, \ldots, s$, a spárovať tieto vrcholy navzájom nezávislými hranami s vrcholmi S. V ďalšom stačí ukázať, že $G_i' = G_i - \{v_i\}$ spĺňa predpoklady vety, $i = 1, 2, \ldots, s$, pretože potom podľa indukčného predpokladu existuje úplné párovanie v G_i' a toto párovanie vieme hranami, ktorými sme spárovali S s $v_1, v_2, \ldots, v_s$, doplniť na úplné párovanie grafu G. Sporom predpokladajme, že existuje množina $R \subseteq V(G_i')$ taká, že $p_{G_i'}(R) \geq |R| + 2$. Potom platí

$$p_G(R \cup S \cup \{v_i\}) = p_{G_i'}(R) + p_G(S) - 1 \geq |R| + |S| + 1 = |R \cup S \cup \{v_i\}|$$

čo je v spore s maximalitou množiny S. □

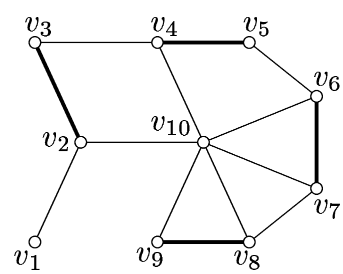
V ďalšom si ukážeme ako asi pracuje algoritmus hľadajúci maximové párovanie vo všeobecnom grafe. Tento postup sa nazýva **Edmondsova metóda**.

Definícia. Nech je M párovanie v grafe G. Vrchol, ktorý nie je incidentný so žiadnou hranou párovania, nazývame **voľný vrchol**. **Zlepšujúca alternujúca cesta** vzhľadom na M je cesta nepárnej dĺžky $v_1, v_2, \ldots, v_{2k}$, kde v_1 a v_k sú voľné vrcholy a do párovania M patria hrany $v_{2i}v_{2i+1}$, kde $i = 1, 2, \ldots, k-1$.

Lema 7.5. *Nech je P množina hrán zlepšujúcej alternujúcej cesty v grafe G vzhľadom na párovanie M. Potom je $M \div P$ párovanie, ktoré má $|M|+1$ hrán. (Poznamenajme, že $\div$ je symetrický rozdiel množín.)*

Dôkaz. Nech je G' podgraf grafu G, pre ktorý $V(G') = V(G)$ a $E(G') = M \div P$. Ukážeme, že každý vrchol G' má stupeň nanajvýš 1. Na chvíľu stotožníme cestu s množinou jej hrán. Ak vrchol v neleží na ceste P, tak jeho stupeň v G' je isto nanajvýš 1, lebo je incidentný s nanajvýš jednou hranou párovania M. Ak je v prvý, alebo posledný vrchol cesty P, tak jeho stupeň v G' je 1, lebo tento vrchol nebol incidentný so žiadnou hranou párovania. Nakoniec, ak je v vnútorný vrchol cesty P, tak v bol incidentný s jedinou hranou párovania M. Keďže v je incidentný s dvoma hranami cesty P, z ktorých jedna patrí do párovania M, tak stupeň v v G' je 1. Teda $M \div P$ je párovanie. Keďže koncové vrcholy cesty P sú voľné vzhľadom na M, tak P má nepárny počet hrán a $|M \div P| = |M| + 1$. $\square$

Príklad. Na obrázku 27 je znázornený graf, ktorého tučné hrany sú hranami párovania M. V tomto grafe existujú dve zlepšujúce cesty vzhľadom na M. Sú to cesty $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}$ a $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_{10}$.



Obrázok 27

Veta 7.6. *Párovanie M v grafe G je maximové práve vtedy, keď v G neexistuje zlepšujúca alternujúca cesta vzhľadom na M.*

Dôkaz. Ak by takáto zlepšujúca cesta existovala, tak M by nebolo maximové podľa lemy 7.5. Predpokladajme teda, že v grafe G neexistuje zlepšujúca cesta vzhľadom na M. Dokážeme, že M je maximové. Sporom predpokladajme, že v grafe G existuje párovanie M', ktoré má viac hrán, ako M. Nech je G' podgraf grafu G tvorený hranami $M \cup M'$. Stupeň každého vrchola v G' je nanajvýš 2, a preto je G' zjednotením vrcholovo disjunktných ciest a párnych kružníc. Keďže $|M| < |M'|$, tak aspoň jedna z týchto ciest má nepárnu dĺžku a začína aj končí hranami z M'. Teda koncové vrcholy tejto cesty sú voľné vzhľadom na M, čiže táto cesta je zlepšujúca vzhľadom na M, čo je v spore s predpokladom. $\square$

Cvičenia

CVIČENIE 7.1. Nájdite rozklad množiny hrán kompletného bipartitného grafu $K_{n,n}$, kde n je párne, na 2-faktory.

CVIČENIE 7.2. Nájdite rozklad množiny hrán kompletného grafu K_n, kde n je párne, na 1-faktory.

CVIČENIE 7.3. Nájdite rozklad množiny hrán kompletného grafu K_n, kde n je nepárne, na 2-faktory.

CVIČENIE 7.4. Zostrojte párny graf zodpovedajúci binárnej matici $\mathbb{A}$ z príkladu za vetou 7.3.

CVIČENIE 7.5. Americký tréner potrebuje zostaviť štafetu pre polohové preteky. K dispozícii má štyroch vynikajúcich plavcov, o ktorých predpokladá, že dokážu zaplávať nasledujúce časy.

	Kraul	Prsia	Motýlik	Znak
Gary Hall	54	54	51	53
Mark Spitz	51	57	52	52
Jim Montgomery	50	53	54	56
Chet Jastremski	56	54	55	53

Zostavte štafetu tak, aby bol predpokladaný výsledný čas čo najnižší.

CVIČENIE 7.6. Na diskotéke sa stretlo päť mládencov a päť dievčat. V nasledujúcej tabuľke máme uvedenú mieru vzájomnej akceptovateľnosti (spokojnosti) pre každý pár.

	Ilona	Mara	Anča	Zuza	Kača
Jano	5	7	6	2	8
Fero	2	6	5	3	7
Pišta	9	3	4	6	5
Peter	4	8	9	7	6
Paľo	1	6	8	6	7

Zostavte dvojice na celý večer tak, aby sa maximalizovala globálna spokojnosť v sále. (Najprv preveďte problém z maximalizačného na minimalizačný.)

CVIČENIE 7.7. Dokážte, alebo vyvráťte nasledujúce tvrdenie. Pre každé párovanie M existuje maximové párovanie M' také, že $M \subseteq M'$.

Cvičenie 7.8. Nech sú M a N hranovo disjunktné párovania v grafe G, pričom $|M| > |N|$. Dokážte, že potom existujú hranovo disjunktné párovania M' a N' také, že $|M'| = |M| - 1$, $|N'| = |N| + 1$ a $M' \cup N' = M \cup N$.

Cvičenie 7.9. Dokážte, že strom T má úplné párovanie práve vtedy, keď pre každý vrchol $v \in V(T)$ platí $p_T(\{v\}) = 1$.

Cvičenie 7.10. Dokážte, že v ľubovoľnom grafe má minimová množina vrcholov vrcholového pokrytia aspoň takú veľkosť, ako je veľkosť maximového párovania.

Cvičenie 7.11. **Hranové pokrytie** je taká množina hrán, ktorá obsahuje všetky vrcholy grafu. Dokážte, že ak graf G nemá izolované vrcholy, tak veľkosť minimového hranového pokrytia sa rovná $|V(G)| - |M|$, kde M je maximové párovanie.

8 VRCHOLOVÉ FARBENIA

Chromatické číslo

Definícia. Nech je G graf. **Vrcholové farbenie** pomocou k farieb je priradenie k čísel (farieb) vrcholom grafu G. Toto farbenie je **regulárne**, ak majú každé dva susedné vrcholy rôzne farby. **Chromatické číslo** grafu G, označované $\chi(G)$, je najmenšie k, pre ktoré má graf G regulárne vrcholové k-farbenie.

V tejto časti sa budeme zaoberať len regulárnymi vrcholovými farbeniami. Avšak kvôli stručnosti budeme prívlastky „regulárne“ a „vrcholové“ vynechávať.

Je zrejmé, že ak je graf ofarbiteľný pomocou k farieb, teda ak je k-farbiteľný, tak je aj $(k+1)$-farbiteľný. Ináč povedané, chromatické číslo je dobre definované.

Akonáhle graf obsahuje aspoň jednu hranu, tak na jeho dobré zafarbenie potrebujeme aspoň dve farby. Keďže každý párny graf $G = (V_1, V_2; E(G))$ je 2-farbiteľný (stačí zafarbiť všetky vrcholy V_1 jednou farbou a vrcholy V_2 druhou farbou), tak chromatické číslo každého párneho grafu obsahujúceho aspoň jednu hranu je 2.

Veta 8.1. *Nech je G graf s maximálnym stupňom Δ_G. Potom G má regulárne vrcholové farbenie pomocou (Δ_G+1) farieb.*

Dôkaz. Vetu dokážeme indukciou vzhľadom na počet vrcholov n_G grafu G.

1° Ak $n_G = 1$ tak G je graf na jedinom vrchole bez hrán. V tomto prípade $\Delta_G = 0$ a graf je zjavne 1-farbiteľný.

2° Teraz predpokladajme, že G je graf s $n_G > 1$, pričom veta platí pre všetky grafy na menej ako n_G vrcholoch. Nech $v \in V(G)$ a nech je G' graf, ktorý sa získa z G vynechaním vrchola v a všetkých hrán incidentných s v. Podľa indukčného predpokladu G' je (Δ_G+1)-farbiteľný. Uvažujme jedno takéto farbenie. V tomto farbení majú susedia v, ktorých je nanajvýš Δ_G, nanajvýš Δ_G rôznych farieb. To znamená, že nejakú z Δ_G+1 farieb sme na zafarbenie susedov v nepoužili. Keď teraz túto farbu dáme vrcholu v, získame regulárne vrcholové farbenie grafu G. □

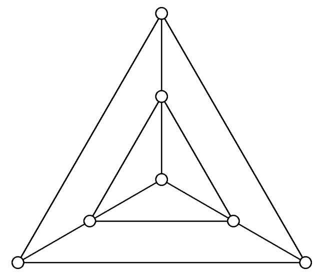
Všimnime si, že podľa vety 8.1 nám na regulárne zafarbenie ľubovoľnej kružnice stačia 3 farby. A na zafarbenie kompletného grafu K_n nám stačí n farieb.

Nasledujúca veta je zosilnením vety 8.1. Dôkaz vynechávame, pretože jeho myšlienka je obsiahnutá v dôkaze vety 8.8.

Veta 8.2 (**Brooksova veta**). *Nech je G graf s maximálnym stupňom Δ_G. Ak G nie je kompletným grafom ani nepárnou kružnicou, tak $\chi(G) \le \Delta_G$.*

Príklad. Uvažujme graf G z obrázku 28. Tento graf nie je kompletný, pričom jeho maximálny stupeň je 4. Podľa Brooksovej vety platí $\chi(G) \leq 4$. Na druhej strane tento graf obsahuje kompletný graf na 4 vrcholoch ako svoj podgraf, a preto $\chi(G) \geq 4$. Z toho plynie $\chi(G) = 4$.

G :



Obrázok 28

Postup z predchádzajúceho príkladu má svoje opodstatnenie v Hadwigerovej hypotéze. Aby sme túto mohli uviesť, potrebujeme zaviesť definíciu minora.

Definícia. Majme daný graf $G = (V(G), E(G))$ s hranou $e = uv$. **Kontrakcia** grafu G pozdĺž hrany e je taký graf $G/e = (V(G/e), E(G/e))$, pre ktorý platí $V(G/e) = V(G) - \{u, v\} \cup \{w\}$, kde w je vrchol nevyskytujúci sa vo $V(G)$, a v ktorom je vrchol w spojený so všetkými takými vrcholmi, ktoré susedili s u, alebo v.

Nech sú G a H grafy. Ak je možné získať graf H z G vynechaním niekoľkých vrcholov, následne vynechaním hrán a na záver kontrakciami hrán, tak H je **minor** grafu G.

Hypotéza (**Hadwigerova hypotéza**). *Nech je G graf, pre ktorý $\chi(G) = k$. Potom je K_k minorom grafu G.*

Hadwigerova hypotéza už bola dokázaná pre $k \leq 6$, avšak pre $k \geq 7$ zostáva otvorená.

Chromatický polynóm

Definícia. Nech je G graf a nech $P_G(k)$ označuje počet regulárnych vrcholových farbení grafu G pomocou k farieb. Funkcia $P_G(k)$ sa nazýva **chromatický polynóm** grafu G.

Lema 8.3. *Nech je K kompletný graf na n vrcholoch a T nech je ľubovoľný strom na n vrcholoch. Potom platí*

(1) $P_K(k) = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot (k-n+1)$;
(2) $P_T(k) = k \cdot (k-1)^{n-1}$.

Dôkaz. V kompletnom grafe sú všetky vrcholy navzájom susedné. Preto na výber farby pre prvý vrchol máme k možností, avšak na výber farby pre druhý vrchol už len $k-1$ možností, ... a konečne na výber farby pre posledný vrchol máme $k-n+1$ možností.

V strome T si označme vrcholy tak, ako ich nájdeme pomocou prehľadania do hĺbky (respektíve do šírky). Takým spôsobom je i-ty vrchol pre $i > 1$ susedný s jediným vrcholom, ktorý sme našli skôr, ako i-ty vrchol. Preto na výber farby pre prvý vrchol máme k možností, avšak na výber farby pre každý ďalší vrchol máme $k-1$ možností. $\square$

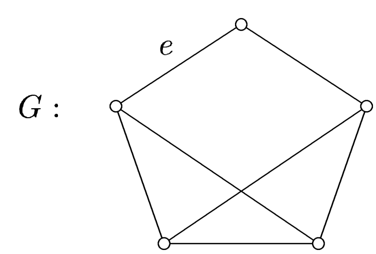
Nasledujúca veta dáva návod na výpočet chromatického polynómu pre ľubovoľný graf.

VETA 8.4. *Nech je G graf s hranou e. Označme $G' = G/e$ a $G'' = G - e$, kde G/e je graf získaný z G skontrahovaním hrany e a G'' dostaneme z G vynechaním e. Potom platí*

$$P_G(k) = P_{G''}(k) - P_{G'}(k)$$

DÔKAZ. Nech $e = uv$. Počet farbení grafu G'', v ktorých u a v dostanú rovnakú farbu je práve $P_{G'}(k)$, zatiaľ čo počet farbení grafu G'', v ktorých u a v dostanú rôzne farby, je $P_G(k)$. Preto $P_{G''}(k) = P_{G'}(k) + P_G(k)$. $\square$

Všimnime si, že dôsledkom vety 8.4 a lemy 8.3 je skutočnosť, že je pre ľubovoľný súvislý graf G je $P_G(k)$ polynóm v premennej k. Teda názov „chromatický polynóm“ nie je zavádzajúci.



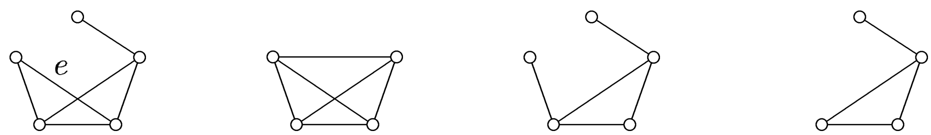
Obrázok 29

PRÍKLAD. Zistite chromatický polynóm grafu G zobrazeného na obrázku 29.

RIEŠENIE. Podľa vety 8.4 platí $P_G(k) = P_{G_1}(k) - P_{G_2}(k)$, kde G_1 a G_2 sú grafy z obrázku 30. Z lemy 8.3 máme $P_{G_2}(k) = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot (k-3)$. Následne $P_{G_1}(k) = P_{G_3}(k) - P_{G_4}(k)$, pozri obrázok 30. Keďže $P_{K_3}(k) = k \cdot (k-1) \cdot (k-2)$, tak podobne, ako sme určili chromatický polynóm pre strom v leme 8.3, možno nahliadnuť $P_{G_3}(k) = k \cdot (k-1)^3 \cdot (k-2)$ a $P_{G_4}(k) = k \cdot (k-1)^2 \cdot (k-2)$. Po úprave dostávame

$$P_G(k) = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot (k^2 - 4k + 5) = k^5 - 7k^4 + 19k^3 - 23k^2 + 10k \quad \square$$

Chromatické číslo grafu z predchádzajúceho príkladu je 3. Je to najmenšie k, pre ktoré $P_G(k) > 0$. Avšak uvedomme si, že keď budeme chromatické číslo počítať týmto spôsobom, čiže pomocou vety 8.4 a lemy 8.3, tak dostaneme algoritmus, ktorý je exponenciálny vzhľadom na počet hrán grafu.



G_1 G_2 G_3 G_4

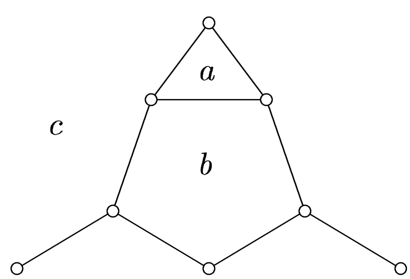
Obrázok 30

Rovinné grafy

Definícia. **Rovinné nakreslenie** grafu je také nakreslenie tohoto grafu v rovine, pri ktorom sa jeho hrany navzájom nepretínajú. Graf je **rovinný** ak má rovinné nakreslenie.

Predchádzajúca definícia je trochu nepresná, pretože sme nezadefinovali, čo je to nakreslenie grafu v rovine a ani čo to znamená, že sa hrany navzájom nepretínajú. Avšak intuitívne je zrejmé, aký graf môže byť rovinný.

Príklad. Na obrázku 31 je znázornené rovinné nakreslenie rovinného grafu. Toto nakreslenie ohraničuje v rovine tri oblasti označené a, b a c, pričom dĺžky týchto oblastí sú postupne 3, 5 a 10.



Obrázok 31

Graf nakreslený na obrázku 29 síce rovinný je, ale na obrázku 29 nie je jeho rovinné nakreslenie.

V každom rovinnom nakreslení sú hrany kreslené ako úsečky, oblúky, respektíve krivky. Platí tvrdenie, že keď má graf rovinné nakreslenie, tak má aj také rovinné nakreslenie, v ktorom hranám zodpovedajú úsečky.

Veta 8.5 (**Eulerova formula**). *Nech je G súvislý rovinný graf, ktorého hrany v rovinnom nakreslení ohraničujú r oblastí. Ak má tento graf $n = n_G$ vrcholov a $m = m_G$ hrán, tak platí*

$$n + r - m = 2$$

DÔKAZ. Nech je n pevne zvolené prirodzené číslo. Vetu dokážeme indukciou podľa počtu hrán súvislého rovinného grafu na n vrcholoch.

1° Podľa dôsledku vety 2.6 má každý súvislý graf na n vrcholoch aspoň $n-1$ hrán, pričom $n-1$ hrán má len strom. Teda prvý krok indukcie urobíme pre stromy. Keďže strom nemá kružnice, tak je rovinným grafom, pričom rovinné nakreslenie stromu ohraničuje v rovine jedinú (vonkajšiu) oblasť. Podľa vety 2.6 má strom $n-1$ hrán, a preto $n + 1 - (n-1) = 2$, čiže pre stromy Eulerova formula platí.

2° Nech je G súvislý rovinný graf, ktorý má $m > n-1$ hrán, pričom tvrdenie platí pre rovinné grafy, ktoré majú $m-1$ hrán. Nech má rovinné nakreslenie grafu G práve r oblastí. Podľa dôsledku vety 2.6 G nie je stromom, a preto má kružnicu. Nech je uv ľubovoľná hrana tejto kružnice. Táto hrana leží na hranici dvoch oblastí. Jedna oblasť je vnútri a druhá zvonka uvažovanej kružnice. Označme H graf, ktorý vznikne z grafu G vynechaním hrany uv. Graf H je súvislý a rovinný. V tom rovinnom nakreslení grafu H, ktoré vzniklo z rovinného nakreslenia grafu G, ohraničujú hrany H presne $r-1$ oblastí, lebo vynechaním hrany uv vznikla z dvoch oblastí jedna. Keďže podľa indukčného predpokladu pre graf H platí Eulerova formula, tak platí $n + (r-1) - (m-1) = 2$, čiže $n + r - m = 2$. □

Nasledujúce tvrdenie je dôsledkom Eulerovej formuly.

VETA 8.6. *Každý rovinný graf obsahuje vrchol, ktorého stupeň je nanajvýš 5.*

DÔKAZ. Nech je G rovinný graf na n vrcholoch s m hranami. Graf G má podľa Eulerovej formuly v každom rovinnom nakreslení $m + 2 - n$ oblastí. Každá hrana sa vyskytuje na hranici oblasti dvakrát. Ak leží v kružnici, tak sa vyskytuje na hraniciach dvoch rôznych oblastí a ak neleží v žiadnej kružnici, tak sa vyskytuje dvakrát na hranici jednej oblasti. Preto sa súčet dĺžok všetkých oblastí rovinného nakreslenia grafu rovná $2m$. Keďže každá oblasť je ohraničená aspoň tromi hranami, tak oblastí je nanajvýš $\frac{2m}{3}$. Teda $m+2-n \leq \frac{2}{3}m$, čiže

$$m \leq 3n - 6 \qquad (*)$$

Podľa cvičenia 2.1 ak sú $d_1, d_2, \ldots, d_n$ stupne vrcholov $v_1, v_2, \ldots, v_n$ grafu G, tak platí

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 2m$$

Ak by boli všetky tieto stupne aspoň 6, tak by platilo $6n \leq 2m$, čiže $3n \leq m$, čo je v spore s (*). Preto v grafe G existuje vrchol, ktorého stupeň je nanajvýš 5. □

Už trochu vieme, čo všetko musí graf spĺňať, aby bol rovinný. Informácia z vety 8.6 nám úplne postačí k dôkazu hlavného výsledku tejto kapitoly. Pre rovinné grafy však existuje presná charakterizácia.

VETA 8.7 (**Kuratowského veta**). *Graf je rovinný práve vtedy, keď neobsahuje ako svoj podgraf subdivíziu K_5 ani subdivíziu $K_{3,3}$.*

Poznamenajme, že existuje algoritmus zisťujúci, či je daný graf rovinný, pričom tento algoritmus je v počte vrcholov lineárny. Tento algoritmus však nie je založený na vete 8.7, ale na prehľadávaní do hĺbky, presnejšie na štruktúre blokov a na algoritme Bloky z kapitoly 3.

Farbenie rovinných grafov

Definícia. Nech je $G = (V(G), E(G))$ graf a nech $S \subseteq V(G)$. **Podgraf grafu G indukovaný** množinou S je taký graf $H = (S, E(H))$, ktorého množina vrcholov je S, pričom dva vrcholy sú spojené hranou v H práve vtedy, ak sú tieto vrcholy spojené hranou v grafe G.

Majme v rovine nakreslenú mapu štátov, ktoré sú všetky „súvislé". Teda žiaden štát nemá na inom území enklávy, ako je napríklad Gibraltar. Politická mapa je také zafarbenie štátov farbami, pri ktorom dostanú štáty, ktoré susedia hranicou nenulovej dĺžky, rôzne farby. Zaujímavé je zistiť, aký najmenší počet farieb potrebujeme na korektné zafarbenie politickej mapy. Ak nahradíme všetky štáty vrcholmi, ktoré spojíme hranou práve vtedy, keď tieto štáty susedia hranicou nenulovej dĺžky, tak dostaneme rovinný graf. Čiže úlohu sme previedli na problém, koľko farieb stačí na regulárne zafarbenie rovinného grafu. Nasledujúcu vetu dokázal P. J. Heawood v roku 1890.

Veta 8.8. *Každý rovinný graf je 5-farbiteľný.*

Dôkaz. Dôkaz urobíme indukciou vzhľadom na počet n vrcholov grafu.

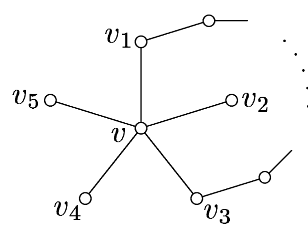
1° Pre grafy, ktoré majú nanajvýš 5 vrcholov veta zjavne platí.

2° Predpokladajme, že G je rovinný graf na n vrcholoch, $n > 5$, pričom veta platí pre všetky rovinné grafy na $n-1$ vrcholoch. Podľa vety 8.6 má graf G vrchol v stupňa nanajvýš 5. Nech je H graf, ktorý vznikne z grafu G vynechaním vrchola v a všetkých hrán, ktoré sú susedné s v. (Teda H je podgraf grafu $G = (V(G), E(G))$ indukovaný množinou $V(G) - \{v\}$.) Keďže G je rovinný graf, tak je rovinný aj graf H. V ďalšom uvažujme rovinné nakreslenie grafu H, ktoré vznikne z rovinného nakreslenia grafu G vynechaním vrchola v. Podľa indukčného predpokladu je graf H regulárne zafarbiteľný 5 farbami. Ak má vrchol v v grafe G stupeň nanajvýš 4, tak existuje farba, ktorú nemá žiaden sused vrchola v pri regulárnom zafarbení vrcholov grafu H piatimi farbami. Touto farbou môžeme zafarbiť vrchol v, pričom takto získané zafarbenie grafu G je regulárne.

Predpokladajme teda, že stupeň vrchola v v grafe G je 5. Nech sú $v_1, v_2, \ldots, v_5$ vrcholy susedné s v, pričom hrany vedúce z vrchola v k $v_1, v_2, \ldots, v_5$ sa v rovinnom nakreslení grafu G objavia práve v tomto poradí, ak sa prejdeme v rovine po malej kružnici okolo vrchola v, pozri obrázok 32. Ak majú dva z vrcholov $v_1, v_2, \ldots, v_5$ rovnakú farbu pri regulárnom zafarbení grafu H piatimi farbami, tak opäť existuje farba, ktorou nie je zafarbený žiaden sused vrchola v a touto farbou môžeme vrchol v zafarbiť. Predpokladajme preto, že všetky vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_5$ majú v regulárnom zafarbení grafu H piatimi farbami navzájom rôzne farby. Naviac, označme 1 farbu, ktorou je zafarbený vrchol v_1, 2 farbu, ktorou je zafarbený vrchol v_2, ... , až 5 farbu, ktorou je zafarbený vrchol v_5. Prefarbením niektorých vrcholov grafu H ukážeme, že existuje také regulárne zafarbenie grafu H piatimi farbami, v ktorom majú dva z vrcholov $v_1, v_2, \ldots, v_5$ rovnakú farbu, čím ukážeme, že G je 5-farbiteľný.

Nech je $H_{1,3}$ podgraf grafu H indukovaný vrcholmi, ktoré majú farbu 1, alebo 3. Predpokladajme, že v_1 a v_3 patria do rôznych komponentov súvislosti grafu $H_{1,3}$. Zameňme farby vrcholov v tom komponente súvislosti grafu $H_{1,3}$, v ktorom je v_1. Teda tým vrcholom, ktoré mali farbu 1 dáme farbu 3 a tým, ktoré mali farbu 3 dáme farbu 1. Ukážeme, že takto získané zafarbenie grafu H je regulárne. Sporom predpokladajme, že toto zafarbenie nie je regulárne. Potom existuje hrana u_1u_2 grafu H, ktorej obidva vrcholy sú pri novom zafarbení zafarbené rovnakou farbou. Pri novom zafarbení sme však iba navzájom zamenili farby 1 a 3 v niektorých vrcholoch. Preto obidva vrcholy u_1 a u_2 majú pri novom zafarbení farbu 1, prípadne obidva majú farbu 3. To znamená, že u_1 a u_2 museli patriť do rôznych komponentov súvislosti grafu $H_{1,3}$, čiže nemôžu byť spojené hranou v H, čo je spor s predpokladom. Teda existuje regulárne zafarbenie grafu H, v ktorom majú vrcholy v_1 a v_3 rovnakú farbu, čiže G je 5-farbiteľný.

Zostáva nám rozobrať prípad, keď v_1 a v_3 patria do jedného komponentu súvislosti grafu $H_{1,3}$. V tomto prípade existuje v grafe H taká cesta z vrchola v_1 do v_3, ktorá využíva len vrcholy farieb 1 a 3 (táto cesta je naznačená na obrázku 32). Keďže H je rovinný graf, tak nemôže existovať cesta z vrchola v_2 do vrchola v_4, využívajúca len vrcholy farieb 2 a 4. To znamená, že ak označíme $H_{2,4}$ podgraf grafu H indukovaný vrcholmi, ktoré majú farbu 2, alebo 4, tak v_2 a v_4 patria do rôznych komponentov súvislosti grafu $H_{2,4}$. Teda keď zameníme farby tých vrcholov grafu $H_{2,4}$, ktoré ležia v komponente súvislosti obsahujúcom v_2, tak dostaneme regulárne zafarbenie grafu H piatimi farbami, v ktorom majú vrcholy v_2 a v_4 rovnakú farbu. Čiže aj v tomto poslednom prípade je graf G 5-farbiteľný. $\square$



Obrázok 32

Ako sme mohli nahliadnuť, dôkaz tvrdenia, že každý rovinný graf je 5-farbiteľný, je ľahký. Platí však silnejšie tvrdenie, známe ako veta o štyroch farbách (skrátene 4CT), ktoré tvrdí, že každý rovinný graf je 4-farbiteľný! Hypotéza, že každý rovinný graf je 4-farbiteľný, bola snáď najznámejším otvoreným problémom v teórii grafov. V roku 1976 K. Appel a W. Haken oznámili, že pomocou počítača dokázali 4CT. Ich dôkaz bol pomerne neprehľadný a dosť podstatný sa ukázal problém nezávislej verifikácie ich počítačových programov. V roku 1997 bol publikovaný odlišný dôkaz, ktorého autormi sú N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour a R. Thomas. Tento dôkaz tiež využíva počítač, je však oveľa prehľadnejší a akceptovateľnejší.

Na záver si ukážme súvislosť medzi farbeniami rovinných grafov a tokmi. **Most** je taká hrana e súvislého grafu G, pre ktorú je graf $G - e$ nesúvislý.

Veta 8.9 (**Tuttova veta**). *Každý súvislý rovinný graf je 4-farbiteľný práve vtedy, keď má každý súvislý rovinný graf bez mostov nenulový 4-tok.*

Náznak dôkazu. Majme v rovine zakreslený graf bez mostov. Keď do každej oblasti vložíme vrchol, a tieto spojíme hranami práve vtedy, keď boli oblasti susedné, dostaneme rovinný graf H. (Graf H nemá slučky, čiže nemá hrany typu uu.) Predpokladajme, že každý rovinný graf je 4-farbiteľný a regulárne ofarbime vrcholy H štyrmi farbami 0,1,2 a 3. Teraz si zorientujme hrany G tak, že každý šíp uv bude mať napravo od seba oblasť s väčšou farbou ako naľavo. Následne dajme na takýto šíp hodnotu rovnú rozdielu farieb oblastí, ktoré s týmto šípom susedia. Takto sme dostali nenulový 4-tok grafu G.

Dôkaz obrátenej implikácie neuvádzame. □

Cvičenia

Cvičenie 8.1. Dokážte, že graf je párny práve vtedy, keď nemá kružnicu nepárnej dĺžky.

Cvičenie 8.2. Dokážte, že každý strom je párny graf.

Cvičenie 8.3. Môže mať párny graf na nepárnom počte vrcholov hamiltonovskú kružnicu? Pomocou tohoto pozorovania opätovne nahliadnite, že graf znázornený na obrázku 8 nemôže mať hamiltonovskú kružnicu.

Cvičenie 8.4. Dokážte, že ak má graf jedinú kružnicu nepárnej dĺžky, tak je 3-farbiteľný.

Cvičenie 8.5. Nájdite chromatické číslo Petersenovho grafu.

Cvičenie 8.6. Určte najmenšie počty farieb nutných na regulárne zafarbenie grafov Platónovských telies: pravidelného štvorstena, kocky, osemstena, dvanásťstena a dvadsaťstena.

Cvičenie 8.7. Určte chromatické číslo kolesa W_n.

Cvičenie 8.8. Určte chromatické číslo hranola H_n.

Cvičenie 8.9. Zostrojte také ofarbenie vrcholov pravidelného dvanásťstena piatimi farbami, pri ktorom budú mať všetky dvojice vrcholov, ktorých vzájomná vzdialenosť je nanajvýš 2, rôzne farby. Koľko farieb by sme potrebovali na takéto zafarbenie Petersenovho grafu?

Cvičenie 8.10. Vypočítajte chromatický polynóm kružnice C_n.

Cvičenie 8.11. Aký je chromatický polynóm grafu „domček“ z obrázku 1?

CVIČENIE 8.12. Vypočítajte chromatický polynóm grafu z obrázku 31.

CVIČENIE 8.13. Vypočítajte chromatický polynóm kolesa W_n.

CVIČENIE 8.14. Pomocou Eulerovej formuly dokážte, že kompletný graf na 5 vrcholoch K_5 nie je rovinný. (Následne sa pokúste spraviť tento dôkaz bez využitia Eulerovej formuly.)

CVIČENIE 8.15. Pomocou Eulerovej formuly dokážte, že kompletný bipartitný graf $K_{3,3}$ nie je rovinný. (Následne sa pokúste spraviť tento dôkaz bez využitia Eulerovej formuly.)

CVIČENIE 8.16. Pomocou Eulerovej formuly dokážte, že Petersenov graf nie je rovinný. (Následne sa pokúste spraviť tento dôkaz bez využitia Eulerovej formuly.)

9 ROZKLADY GRAFOV

Chromatický index

Definícia. Nech je $G = (V(G), E(G))$ graf. **Hranové farbenie** grafu G pomocou k farieb je rozklad hranovej množiny $E(G)$ na k párovaní. **Chromatický index** grafu G, označovaný $\chi'(G)$, je najmenšie k, pre ktoré má graf G hranové k-farbenie.

Všimnime si, že keď hranám i-teho párovania z predchádzajúcej definície priradíme i-tu farbu, tak žiadne dve susedné hrany nebudú ofarbené rovnako.

Je zrejmé, že keď má graf G vrchol stupňa d, tak $\chi'(G) \geq d$. Nasledujúce tvrdenie je analógiou Brooksovej vety pre hranové farbenia. A tak ako pri Brooksovej vete, ani dôkaz tejto vety neuvádzame.

Veta 9.1 (**Vizingova veta**). *Nech je Δ_G maximálny stupeň v grafe G. Potom platí*

$$\Delta_G \leq \chi'(G) \leq \Delta_G + 1$$

Podľa Vizingovej vety delíme všetky grafy do dvoch skupín.

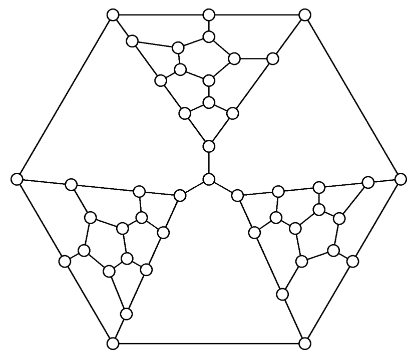
Definícia. Graf G patrí do **triedy 1** ak $\chi'(G) = \Delta_G$. Ak $\chi'(G) = \Delta_G + 1$, tak graf G patrí do **triedy 2**.

Nuž a jedným z veľkých problémov je charakterizovať grafy podľa príslušnosti do triedy 1, respektíve triedy 2. Tento problém je ťažký už aj pre pravidelné grafy stupňa 3 (čiže pre kubické grafy). Až donedávna bolo známych len veľmi málo „zaujímavých“ kubických grafov triedy 2. Takéto grafy sa hľadali veľmi ťažko, a preto M. Gardner navrhol, aby sa 2-súvislé kubické grafy patriace do triedy 2 nazývali **snarky** (podľa novely Lewisa Carrolla „Hunting the snarks“).

Tvrdenie 9.2. *Žiaden snark nemá hamiltonovskú kružnicu.*

Dôkaz. Sporom predpokladajme, že snark G má hamiltonovskú kružnicu. Keďže všetky vrcholy G majú nepárny stupeň, tak G má párne veľa vrcholov (pozri cvičenie 2.1). To znamená, že hamiltonovská kružnica grafu G má párnu dĺžku, a teda jej hrany možno rozložiť na dva 1-faktory. Nuž a zvyšné hrany grafu G tvoria tretí faktor. Teda $\chi'(G) = 3$, čo je v spore s predpokladom, že G je snark, čiže graf, pre ktorý $\chi'(G) = 4$. $\square$

Tvrdenie 9.2 nemožno obrátiť. Na obrázku 33 je takzvaný **Tuttov graf**. Tento graf má chromatický index 3, je dokonca 3-súvislý, a predsa nemá hamiltonovskú kružnicu.



Obrázok 33

Problém príslušnosti do triedy 1 je pre párne grafy triviálny.

VETA 9.3. *Každý párny graf patrí do triedy 1.*

DÔKAZ. Vetu dokážeme indukciou vzhľadom na počet hrán m párneho grafu.

1° Ak $m = 1$, tak $\Delta_G = 1$ a jedna farba stačí na ofarbenie jedinej hrany grafu G.

2° Predpokladajme, že pre graf G platí $m > 1$ a tvrdenie vety platí pre párne grafy na menej ako m hranách. Nech je H graf, získaný z G odstránením jedinej hrany $e = uv$. Potom podľa indukčného predpokladu platí $\chi'(H) \leq \Delta_G$. Ofarbime teda hrany H práve Δ_G farbami. Potom je v grafe H aspoň jedna farba nepoužitá na hrany incidentné s vrcholom u, a aspoň jedna farba nie je použitá na ofarbenie hrán incidentných s vrcholom v. Ak existuje jedna farba, ktorá chýba pri u aj pri v, tak môžeme touto farbou ofarbiť hranu e a dostaneme korektné ofarbenie hrán grafu G.

Predpokladajme preto, že množiny chýbajúcich farieb vo vrcholoch u a v sú disjunktné. Nech napríklad vo vrchole u chýba modrá farba a vo vrchole v chýba červená. Zostrojme teraz najväčší súvislý podgraf P grafu H, ktorý obsahuje vrchol u a tie hrany H, ktoré majú červenú, respektíve modrú farbu. Zjavne P je cesta začínajúca v u. Keby táto cesta končila vo vrchole v, tak by začínala červenou a končila modrou farbou. To znamená, že by mala párnu dĺžku, čo nie je možné, lebo graf G je párny a vrcholy u a v patria do rôznych farebných tried vrcholového 2-farbenia grafu G. Keďže v nemôže byť ani vnútorným vrcholom cesty P, tak cesta P vrchol v neobsahuje. Teda keď zameníme farby hrán cesty P, červenú za modrú a naopak, dostaneme korektné hranové ofarbenie grafu H, pri ktorom jak vo vrchole u, tak vo v, chýba červená farba. Ako sme už rozobrali vyššie, teraz možno hrany grafu G korektne ofarbiť Δ_G farbami. $\square$

Na záver tejto časti si ukážeme, aká je situácia pri kompletných grafoch.

Tvrdenie 9.4. *Pre kompletný graf* K_n *platí*

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n-1 & \textit{ak je } n \textit{ párne;} \\ n & \textit{ak je } n \textit{ nepárne.} \end{cases}$$

Dôkaz. Keďže každý vrchol grafu K_n má stupeň $n-1$, tak podľa Vizingovej vety je chromatický index K_n buď $n-1$, alebo n.

Ak je n nepárne, tak najväčšie možné párovanie grafu K_n má $\frac{1}{2}(n-1)$ hrán. Lenže K_n má presne $\frac{1}{2}n(n-1)$ hrán, a preto sa v tomto prípade chromatický index rovná n.

Na druhej strane ak je n párne, označme $V(K_n) = \{v_\infty, v_0, v_1, \ldots, v_{n-2}\}$. Potom hranové farbenie zodpovedá $n-1$ 1-faktorom $F_0, F_1, \ldots, F_{n-2}$, pričom hranami faktoru F_i sú $E(F_i) = \{v_\infty v_i, v_{i-1}v_{i+1}, v_{i-2}v_{i+2}, \ldots, v_{i-\frac{1}{2}(n-2)}v_{i+\frac{1}{2}(n-2)}\}$, kde sčítanie a odčítanie v indexoch je modulo $n-1$. □

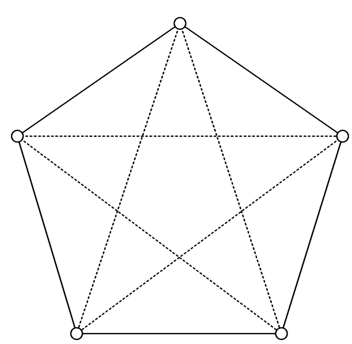
Ramseyove čísla

Definícia. **Ramseyove číslo** $R(k)$ je najmenšie n také, že pri ľubovoľnom rozklade hrán kompletného grafu K_n na dve časti G_1 a G_2, buď G_1, alebo G_2, obsahuje kompletný graf K_k ako svoj podgraf.

Všimnime si, že $R(2) = 2$. Nasledujúce tvrdenie sa často objavuje ako hlavolam v takzvanej „rekreačnej matematike".

Tvrdenie 9.5. $R(3) = 6$.

Dôkaz. Na obrázku 34 je znázornený rozklad hrán grafu K_5 na dve časti. Hrany jednej sú vyznačené plnou a hrany druhej prerušovanou čiarou. Keďže ani jedna časť neobsahuje kompletný graf na 3 vrcholoch, máme $R(3) > 5$.



Obrázok 34

Zostáva nám dokázať, že $R(3) \leq 6$. Uvažujme kompletný graf na $n \geq 6$ vrcholoch, ktorého hrany sú rozdelené do dvoch podgrafov G_1 a G_2. Nech je u vrchol tohoto kompletného grafu. Keďže u je incidentný s $n-1 \geq 5$ hranami, tak podľa

Dirichletovho princípu aspoň 3 hrany incidentné s u patria do rovnakého podgrafu. Povedzme, že sú to hrany uv_1, uv_2 a uv_3 a všetky patria do G_1. Teraz ak aspoň jedna z hrán v_1v_2, v_2v_3 a v_3v_1 patrí do G_1, tak G_1 obsahuje K_3 ako svoj podgraf. Ak však všetky hrany v_1v_2, v_2v_3 a v_3v_1 patria do G_2, tak G_2 obsahuje K_3 ako svoj podgraf. $\square$

Teraz si ukážeme, v akých hraniciach sa číslo $R(k)$ pohybuje. Dôkaz nasledújúcej vety je v podstate založený na myšlienke dôkazu tvrdenia 9.5.

VETA 9.6 (**Ramseyova veta**). *Pre $k \geq 2$ platí $R(k) \leq 2^{2k-3}$.*

DÔKAZ. Keďže $R(2) = 2$ a $R(3) = 6 \leq 8$, tak tvrdenie zjavne platí pre $k \leq 3$.

Uvažujme kompletný graf $K_{2^{2k-3}}$ a jeho rozklad na dva podgrafy G_1 a G_2. Označme $V_0 = V(K_{2^{2k-3}})$. Potom $|V_0| = 2^{2k-3}$. Nech je u_0 ľubovoľný vrchol grafu $K_{2^{2k-3}}$, čiže $u_0 \in V_0$. Keďže u_0 je v $K_{2^{2k-3}}$ incidentný s práve $2^{2k-3} - 1$ hranami, tak aspoň 2^{2k-4} z nich patrí do jedného z grafov G_1, respektíve G_2. Označme si množinu koncových vrcholov týchto hrán V_1 a vyberme $u_1 \in V_1$. Všimnime si, že platí $|V_1| \geq 2^{2k-4}$.

Keďže u_1 je incidentný s aspoň $2^{2k-4}-1$ hranami, ktorých koncové vrcholy patria do V_1, tak aspoň 2^{2k-5} z týchto hrán patrí do jedného z grafov G_1, respektíve G_2. Označme si množinu koncových vrcholov týchto hrán V_2 a vyberme $u_2 \in V_2$. Potom $|V_2| \geq 2^{2k-5}$.

Podobne zvoľme $u_3 \in V_3$, $u_4 \in V_4$, ... Keďže $|V_{2k-3}| \geq 2^{(2k-3)-(2k-3)} = 2^0 = 1$, tak ešte aj V_{2k-3} je neprázdna množina. Teda sme získali postupnosť $2k-2$ vrcholov $v_0, v_1, \ldots, v_{2k-3}$.

Všimnime si, že pre každé i, $0 \leq i \leq 2k-4$, všetky hrany u_iu_j, kde $j > i$, patria do G_1, alebo všetky tieto hrany patria do G_2. Označme symbolom W_t tie vrcholy u_i, $0 \leq i \leq 2k-4$, pre ktoré všetky hrany u_iu_j, kde $j > i$, patria do G_t. Potom na vrcholoch $W_t \cup \{u_{2k-3}\}$ máme kompletný podgraf grafu G_t, $1 \leq t \leq 2$. A podľa Dirichletovho princípu aspoň jeden z týchto kompletných podgrafov má aspoň $\lceil \frac{2k-3}{2} \rceil + 1 = k$ vrcholov. $\square$

VETA 9.7 (**Erdősova veta**). *Ak platí*

$$\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$$

tak $R(k) > n$.

DÔKAZ. Tento dôkaz využíva pravdepodobnostné metódy. Nebol to prvý dôkaz tohoto druhu. Kvôli svojej jednoduchosti a elegancii však mal pre rozvoj matematiky v 20. storočí nesmierny význam.

Ak chceme ukázať $R(k) > n$, tak treba nahliadnuť, že čosi existuje. Potrebujeme ukázať, že existuje rozklad grafu K_n na dva podgrafy G_1 a G_2, z ktorých žiaden neobsahuje K_k ako svoj podgraf.

Pohádžme hrany K_n do G_1 a G_2 náhodne. Presnejšie, zadefinujme pravdepodobnosti položením

$$Pr[uv \in E(G_1)] = Pr[uv \in E(G_2)] = \tfrac{1}{2}$$

Tieto pravdepodobnosti sú nezávislé pre rôzne hrany a zodpovedajú experimentu, v ktorom by sme si pre každú hranu hodili mincou.

Nech je S množina k vrcholov. Označme symbolom A_S udalosť, že všetky hrany, ktorých koncové vrcholy patria do S, sú v G_1, alebo všetky sú v G_2. Potom

$$Pr[A_S] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} = 2^{1-\binom{k}{2}}$$

Uvažujme teraz udalosť A, že nastane A_S pre aspoň jednu z k-prvkových podmnožín S, množiny $V(K_n)$. Určiť presne $Pr[A]$ je mimoriadne ťažké, pretože A_S a $A_{S'}$ nie sú nezávislé udalosti pre $S \neq S'$. Lenže pravdepodobnosť, že nastane jedna z dvoch udalostí sa nanajvýš rovná súčtu pravdepodobností týchto dvoch udalostí. Teda

$$Pr[A] \leq \sum_S Pr[A_S] = \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}$$

lebo existuje $\binom{n}{k}$ uvažovaných množín S. Podľa predpokladu vety $\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}} < 1$, čo značí, že opak udalosti A nastáva s nenulovou pravdepodobnosťou. Inak povedané, existuje rozklad grafu K_n na dva podgrafy G_1 a G_2, z ktorých žiaden neobsahuje K_k ako svoj podgraf. $\square$

Použitím hrubých odhadov pre kombinačné čísla sa na základe vety 9.7 dá dokázať nasledujúci dôsledok.

DÔSLEDOK. *Pre $k \geq 3$ platí $R(k) > 2^{k/2}$.*

A pre k dostatočne veľké sa dá dokonca ukázať

$$R(k) > \frac{k}{e\sqrt{2}} 2^{k/2}$$

Ramseyova veta bola dokázaná v roku 1930 a Erdősova v roku 1947. Keďže hranice v týchto vetách sa od seba podstatne líšia, je prekvapujúce, že sa od tých čias v oblasti Ramseyových čísel nepodarilo urobiť podstatný krok vpred. Je to zrejme spôsobené tým, že presné určenie čísel $R(k)$ je mimoriadne ťažké. Vie sa, že $R(4) = 18$ (Greenwood a Gleason, 1955). Avšak už pre $k = 5$ presnú hodnotu $R(k)$ nepoznáme. Vieme, že $43 \leq R(5) \leq 49$, $102 \leq R(6) \leq 165$, $205 \leq R(7) \leq 540$, $282 \leq R(8) \leq 1870$ atď.

Paul Erdős, jeden z najvýznamnejších matematikov 20. storočia, vysvetľoval problematiku Ramseyových čísel na nasledujúcom hypotetickom príklade. Predstavme si, že na Zem zaútočia mimozemšťania a povedia, že nás nezničia, len ak vypočítame presne hodnotu $R(5)$. Tak keď zhromaždíme všetkých vynikajúcich matematikov na planéte a zapojíme do výpočtu všetky výkonné počítače, ktoré máme, tak by sa nám mohlo podariť presne určiť hodnotu $R(5)$. Ak nám však mimozemšťania dajú za úlohu určiť presnú hodnotu $R(6)$, tak jediným riešením pre nás je vymyslieť nové zbrane a začať zbrojiť.

Záverom tejto kapitoly zavedieme zovšeobecnené Ramseyove čísla.

Definícia. Nech sú $q_1, q_2, \ldots, q_r$ a t kladné prirodzené čísla také, že $q_i \geq t$ pre $i = 1, 2, \ldots, r$. **Ramseyovo číslo** $R(q_1, q_2, \ldots, q_r; t)$ je najmenšie prirodzené číslo n také, že ak je V ľubovoľná množina s aspoň $R(q_1, q_2, \ldots, q_n; t)$ objektami a všetky t-prvkové podmnožiny V sú rozdelené do r skupín, tak buď existuje q_1 objektov, ktorých všetky t-prvkové podmnožiny patria do prvej skupiny, alebo existuje q_2 objektov, ktorých všetky t-prvkové podmnožiny patria do druhej skupiny, ..., alebo existuje q_r objektov, ktorých všetky t-prvkové podmnožiny patria do n-tej skupiny.

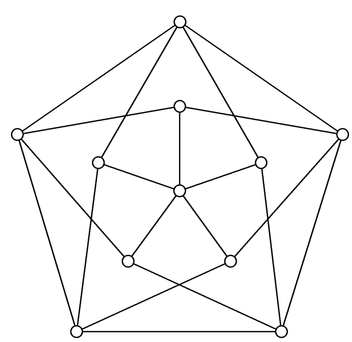
Dá sa ukázať, že pre každé $q_1, q_2, \ldots, q_r$ a t Ramseyovo číslo $R(q_1, q_2, \ldots, q_r; t)$ existuje. Teda naša definícia je korektná.

Všimnime si, že $R(k, k; 2)$ je vlastne Ramseyovo číslo $R(k)$. Na druhej strane, $R(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}; 1) = n + 1$ podľa Dirichletovho princípu. Teda môžeme povedať, že Ramseyove čísla sú zovšeobecnením Dirichletovho princípu.

Cvičenia

Cvičenie 9.1. Určte chromatické indexy grafov Platónovských telies: pravidelného štvorstena, kocky, osemstena, dvanásťstena a dvadsaťstena.

Cvičenie 9.2. Na obrázku 35 je **Grötzschov graf**. Zistite chromatické číslo a chromatický index tohoto grafu. Je tento graf rovinný?



Obrázok 35

Cvičenie 9.3. Dokážte, že Petersenov graf je snark.

Cvičenie 9.4. Charakterizujte grafy G, pre ktoré $\chi'(G) = 2$.

Cvičenie 9.5. Označme symbolom $\beta_1(G)$ počet hrán maximového párovania grafu G. Ukážte, že ak platí $m_G > \Delta_G \cdot \beta_1(G)$, tak graf G je z triedy 2.

Cvičenie 9.6. Ukážte, že každý pravidelný graf na nepárnom počte vrcholov je z triedy 2.

CVIČENIE 9.7. Ukážte, že každý súvislý kubický graf, ktorý nie je 2-súvislý (teda taký, ktorý má most), je z triedy 2.

CVIČENIE 9.8. Na konci akademického roka je potrebné vyskúšať n_1 študentov, z ktorých každý si zapísal práve k kurzov z n_2 možných. Študentov je potrebné skúšať individuálne a predpokladáme, že každá zo skúšok musí trvať presne 20 minút. Cieľom je zostaviť taký harmonogram, aby skúšky skončili v najkratšom možnom termíne. Zostavte pre túto úlohu matematický model a presne určte čas, potrebný na skúšanie.

CVIČENIE 9.9. Predpokladajme, že v skupine 6 ľudí je každá dvojica buď priateľmi, alebo nepriateľmi. Dokážte, že buď existuje trojica ľudí, ktorí sú navzájom priatelia, alebo trojica ľudí, ktorí sú navzájom nepriatelia (predpokladá sa, že relácia „byť priateľom“ je symetrická, čiže ak je a priateľom b, tak aj b je priateľom a).

CVIČENIE 9.10. Majme skupinu n ľudí, z ktorých sa každá dvojica buď pozná alebo nepozná. Dokážte, že v tejto skupine sú dvaja ľudia, ktorí majú rovnaký počet známych.

CVIČENIE 9.11*. Dokážte, že $R(3,4;2) = 9$. (Využite skutočnosť, že neexistuje regulárny graf stupňa 5 na 9 vrcholoch.)

CVIČENIE 9.12. S využitím predchádzajúceho cvičenia ukážte, že $R(4) \leq 18$.

CVIČENIE 9.13. S využitím symetrií Cayleyho grafu (respektíve cyklickej grupy $(\mathbb{Z}_{17};\oplus)$) nahliadnite, že graf $Cay((\mathbb{Z}_{17};\oplus),\{1,2,4,8,9,13,15,16\})$ neobsahuje K_4 a ani takú štvoricu vrcholov, z ktorých by žiadne 2 neboli susedné. Z toho odvoďte $R(4) = 18$.

CVIČENIE 9.14. Dokážte nasledujúce tvrdenie

$$R(q_1, q_2; 2) \leq R(q_1-1, q_2; 2) + R(q_1, q_2-1; 2)$$

CVIČENIE 9.15. Ukážte, že $R(3,3,3;2) \leq 17$.

10 MATROIDY

Úloha o minimovej kostre a Pažravý algoritmus

V druhej kapitole sme zaviedli kostru prehľadávania do šírky a do hĺbky, neskôr sme opísali využitie týchto dvoch typov kostier, a v piatej kapitole sme ukázali, ako sa dá zistiť počet kostier súvislého grafu. V tejto si vysvetlíme veľmi jednoduchý algoritmus, ktorý nájde najlacnejšiu kostru ohodnoteného grafu.

DEFINÍCIA. **Ohodnotený graf** je taký graf $G = (V(G), E(G))$, v ktorom je každej hrane e priradená nezáporná hodnota $w(e)$. Hodnotu $w(e)$ nazývame **váha hrany**, prípadne **cena** a podobne. **Váha podgrafu** H grafu G je súčet váh hrán tohoto podgrafu. Váhu podgrafu H označujeme $w(H)$.

DEFINÍCIA. **Úloha o minimovej kostre** ohodnoteného grafu G spočíva v nájdení najlacnejšej kostry grafu G (čiže kostry s najmenšou váhou).

Nasledujúca veta nám opisuje, ako možno nájsť najlacnejšiu kostru grafu.

VETA 10.1. *Nech sú $T_1, T_2, \ldots, T_k$ vrcholovo disjunktné podgrafy grafu G, pričom všetky tieto podgrafy sú stromy. Nech je dané i, $1 \leq i \leq k$, a nech má hrana u_0v_0 najmenšiu váhu spomedzi všetkých hrán uv grafu G, pre ktoré platí $u \in V(T_i)$ a $v \notin V(T_i)$. Potom medzi kostrami grafu G, ktoré obsahujú stromy $T_1, T_2, \ldots, T_k$, existuje najlacnejšia, obsahujúca hranu u_0v_0.*

DÔKAZ. Nech je T taká najlacnejšia kostra grafu G obsahujúca všetky stromy $T_1, T_2, \ldots, T_k$, ktorá neobsahuje hranu u_0v_0. Potom je u_0v_0 chorda grafu G vzhľadom na kostru T. Táto chorda určuje bázickú kružnicu $C_{u_0v_0}$. Keďže $u_0 \in V(T_i)$ a $v_0 \notin V(T_i)$, tak $C_{u_0v_0}$ obsahuje ešte aspoň jednu hranu $u'v'$ takú, že $u' \in V(T_i)$ a $v' \notin V(T_i)$. Keďže u_0v_0 je jediná chorda $C_{u_0v_0}$, tak $u'v'$ je vetva, čiže $v'u' \in E(T)$. Graf na hranách $E(T) \cup \{u_0v_0\}$ obsahoval jedinú kružnicu, a preto graf na hranách $E(T) \cup \{u_0v_0\} - \{u'v'\}$ nemá žiadnu kružnicu, čiže je kostrou. Označme si túto kostru T'. Keďže váha $u'v'$ nie je menšia, ako váha u_0v_0 kostra T' je hľadaná najlacnejšia kostra. $\square$

Na základe predchádzajúcej vety môžeme zostaviť algoritmus hľadajúci najlacnejšiu kostru.

ALGORITMUS: MINIMOVÁ KOSTRA.
Vstup: ohodnotený graf $G = (V, E)$.

Výstup: minimová kostra grafu s hranami v množine T.

```
Begin
  T:=∅;                                                  { inicializácia }
  While E≠∅ Do Begin
    nech e ∈ E s minimálnou váhou;
    E:=E − {e};
    If T ∪ {e} neobsahuje kružnicu Then T:=T ∪ {e};      { zväčší T}
  End;
End.
```

Ak E obsahuje všetky hrany usporiadane podľa váh vzostupne, tak predchádzajúci algoritmus pracuje v čase $O(m_G)$, kde m_G je počet hrán grafu G.

Všimnime si, že algoritmus Minimová kostra rozširuje čiastočnú kostru v každej etape tým najtriviálnejším spôsobom, rozšírením o najvýhodnejší prvok. Takýmto spôsobom možno riešiť viaceré úlohy pomocou takzvaného Pažravého algoritmu.

Definícia. Majme množinu X a nejaký systém $\mathcal{M}$ podmnožín množiny X. **Systém $\mathcal{M}$** je **uzavretý na inklúziu** ak platí

$$(\forall R)(\forall S)\big([(S \in \mathcal{M}) \ \&\ (R \subseteq S)] \Rightarrow (R \in \mathcal{M})\big)$$

čiže ak s každou množinou obsahuje aj všetky jej podmnožiny.

Algoritmus: **Pažravý (greedy) algoritmus**.

Vstup: systém $\mathcal{M}$ podmnožín množiny X uzavretý na inklúziu;
každý prvok $x \in X$ má priradenú nezápornú váhu.

Výstup: množina $M \in \mathcal{M}$ s maximálnou váhou.

```
Begin
  M:=∅;                                                  { inicializácia }
  While X≠∅ Do Begin
    nech x ∈ X s maximálnou váhou;
    X:=X − {x};
    If M ∪ {x} ∈ ℳ Then M:=M ∪ {x};                      { zväčší M}
  End;
End.
```

Poznámka. Nech sú $w(e)$ váhy hrán grafu G, pričom všetky sú menšie ako W. Zvoľme nové váhy $w'(e) = W - w(e)$. Ak za $\mathcal{M}$ zvolíme množiny hrán všetkých **acyklických podgrafov** grafu G (to sú také podgrafy grafu G, ktorých všetky komponenty súvislosti sú stromy), tak Pažravý algoritmus pri váhach $w'(e)$ rieši úlohu o minimovej kostre grafu G.

Je zrejmé, že Pažravý algoritmus vždy nájde maximálnu, čiže vzhľadom na inklúziu nezväčšiteľnú, množinu $M \in \mathcal{M}$. Nemusí však vždy nájsť množinu s najväčšou váhou. Uvažujme nasledujúcu úlohu.

Definícia. **Úloha o maximovom párovaní** spočíva v nájdení takého párovania M ohodnoteného grafu G, ktoré má maximálnu váhu.

V úlohe o maximovom párovaní je systém $\mathcal{M}$ tvorený množinami hrán párovaní grafu G. Je zrejmé, že $\mathcal{M}$ je uzavretý na inklúziu. Napriek tomu, Pažravý algoritmus nemusí vždy nájsť maximové párovanie:

Príklad. Majme ohodnotený graf $G = (V(G), E(G))$, kde $V(G) = \{a, b, c, d\}$ a $E(G) = \{ab, bc, cd\}$, pričom $w(ab) = w(cd) = 2$ a $w(bc) = 3$. Keby sme chceli nájsť maximové párovanie v tomto grafe, tak Pažravý algoritmus by našiel hranu bc s váhou 3 a vzápätí by skončil. Pritom maximové párovanie je $\{ab, cd\}$ s váhou 4.

Všimnime si, že maximové párovanie z predchádzajúceho príkladu má viac hrán ako párovanie, ktoré našiel Pažravý algoritmus.

Matroidy

Uvedieme tri rozličné definície matroidu.

Definícia 1. Nech je $\mathcal{M}$ systém podmnožín množiny X uzavretý na inklúziu. Potom $\mathcal{M}$ je **matroid**, ak pri ľubovoľnom priradení váh prvkom množiny X Pažravý algoritmus rieši korektne úlohu nájdenia váhou maximovej množiny z $\mathcal{M}$.

Definícia 2. Systém $\mathcal{M}$ podmnožín množiny X uzavretý na inklúziu je **matroid**, ak pre ľubovoľné dve množiny $I, J \in \mathcal{M}$ také, že $|J| = |I| + 1$, existuje prvok $x \in J - I$ taký, že $I \cup \{x\} \in \mathcal{M}$.

Definícia 3. Systém $\mathcal{M}$ podmnožín množiny X uzavretý na inklúziu je **matroid**, ak pre ľubovoľnú množinu $A \subseteq X$ majú každé dve podmnožiny A patriace do $\mathcal{M}$, ktoré sú vzhľadom na inklúziu maximálne, rovnakú veľkosť.

Zjednodušene povedané, tieto definície tvrdia, že ak štruktúra $\mathcal{M}$ tvorí matroid, tak optimalizačnú úlohu na $\mathcal{M}$ rieši „triviálny" algoritmus.

Nasledujúcu vetu dokázali R. Rado a J. Edmonds.

Veta 10.2. *Definície 1, 2 a 3 sú navzájom ekvivalentné.*

Dôkaz. Nech $\mathcal{M}$ vyhovuje Definícii 1. Dokážeme, že vyhovuje aj Definícii 2. Sporom predpokladajme, že existujú množiny $I, J \in \mathcal{M}$ také, že $|I| = k$, $|J| = k+1$, a pre žiaden prvok $x \in J - I$ neplatí $I \cup \{x\} \in \mathcal{M}$. Definujme váhy prvkov z X nasledujúcim spôsobom

$$w(x) = \begin{cases} k+2 & \text{ak } x \in I; \\ k+1 & \text{ak } x \in J - I; \\ 0 & \text{ak } x \notin I \cup J. \end{cases}$$

Potom Pažravý algoritmus vyberie všetky prvky množiny I a možno ešte pridá niekoľko prvkov z $X - (I \cup J)$ s nulovou váhou, keďže $I \cup \{x\} \notin \mathcal{M}$ pre každý prvok $x \in J - I$. To však znamená, že Pažravý algoritmus nájde množinu s váhou $w(I) = k(k+2) < (k+1)^2 \leq w(J)$, čo je v spore s tým, že nájde množinu z $\mathcal{M}$ s maximovou váhou.

Nech $\mathcal{M}$ vyhovuje Definícii 2. Dokážeme, že vyhovuje Definícii 3. Sporom predpokladajme, že existuje množina $A \subseteq X$ a dve množiny $I, J \in \mathcal{M}$ také, že $I, J \subseteq A$, $|I| < |J|$, ktoré nemožno rozšíriť na väčšie množiny z $\mathcal{M}$ v A. Keďže $\mathcal{M}$ je systém uzavretý na inklúziu, tak existuje $J' \subseteq J$ taká, že $|J'| = |I| + 1$. Potom podľa Definície 2 existuje prvok $x \in J' - I$ taký, že $I \cup \{x\} \in \mathcal{M}$, čo je spor s maximálnosťou I v A.

Nech $\mathcal{M}$ vyhovuje Definícii 3. Dokážeme, že vyhovuje Definícii 1. Sporom predpokladajme, že pri váhach $w(x)$ Pažravý algoritmus nájde $I = \{x_1, x_2, \ldots, x_i\} \in \mathcal{M}$, pričom existuje maximálna množina $J = \{y_1, y_2, \ldots, y_j\} \in \mathcal{M}$ s väčšou váhou. Keďže I aj J sú vzhľadom na inklúziu maximálne množiny, tak platí $i = j$ podľa Definície 3. V ďalšom predpokladajme, že prvky I aj J sú usporiadané podľa váh. Teda $w(x_1) \geq w(x_2) \geq \cdots \geq w(x_i)$ a $w(y_1) \geq w(y_2) \geq \cdots \geq w(y_i)$. Keďže $w(J) > w(I)$, tak existuje index k taký, že $w(y_k) > w(x_k)$. Nech je k_0 najmenší index s touto vlastnosťou. Položme $A = \{x \in X; w(x) \geq w(y_{k_0})\}$ a označme $I' = I \cap A$. Potom $|I'| < k_0$. Pažravý algoritmus našiel I' a ďalej pokračoval mimo množiny A. To znamená, že neexistuje prvok $x \in A - I'$ taký, že $I' \cup \{x\} \in \mathcal{M}$, čo je spor s Definíciou 3, pretože každá maximálna množina z $\mathcal{M}$ v A má mohutnosť aspoň k_0.

Teraz keď využijeme definíciu ekvivalencie a pravidlo sylogizmu, dostávame, že všetky tri definície sú navzájom ekvivalentné. □

Definícia. Nech je $\mathcal{M}$ matroid na množine X. Množiny zo systému $\mathcal{M}$ nazývame **nezávislé množiny** a maximálne nezávislé množiny nazývame **bázy** matroidu. Počet prvkov ľubovoľnej bázy je **rank matroidu**. **Rank množiny** $A \subseteq X$ je počet prvkov maximálnej nezávislej podmnožiny A. Rank množiny A označujeme $r(A)$. **Obal množiny** $A \subseteq X$ v $\mathcal{M}$ je najväčšia nadmnožina A, ktorá má rovnaký rank ako A. Minimálne závislé množiny nazývame **kružnice**.

Príklad 1. Matroidom je vektorový priestor, pričom nezávislé množiny sú množiny lineárne nezávislých vektorov. Bázou takéhoto matroidu je ľubovoľná báza vektorového priestoru a rankom je dimenzia vektorového priestoru.

Príklad 2. Matroid v grafe môže byť tvorený množinami hrán acyklických podgrafov daného grafu, pričom každá minimálna závislá množina je tvorená hranami kružnice. Tento matroid nazývame **grafový matroid**.

Všimnime si, že nezávislé množiny grafového matroidu sme už spomínali v cvičení 5.8. Matroidy sú veľmi pekné štruktúry, ako ukazujú nasledujúce dve tvrdenia.

Veta 10.3. *Nech je $\mathcal{M}$ matroid na množine X, $I \in \mathcal{M}$ a $x \in X$. Potom buď $I \cup \{x\} \in \mathcal{M}$, alebo $I \cup \{x\}$ obsahuje jedinú kružnicu.*

Dôkaz. Nech $I \cup \{x\} \notin \mathcal{M}$. Položme $C = \{c; (I \cup \{x\}) - \{c\} \in \mathcal{M}\}$. Ukážeme, že

C je kružnicou matroidu $\mathcal{M}$. Ak by bola C nezávislá, tak by sa dala doplniť na bázu $I \cup \{x\}$, ktorá by obsahovala $|I|$ prvkov. Čiže táto báza by bola tvaru $(I \cup \{x\}) - \{c\}$ čo je absurdné, lebo potom by platilo $c \in C$ a súčasne $c \notin C$. Teda C je závislá. Ak vynecháme z C ľubovoľný prvok c', tak $C - \{c'\} \subseteq (I \cup \{x\}) - \{c'\} \in \mathcal{M}$. Teda aj $C - \{c'\} \in \mathcal{M}$, a preto je C minimálna závislá množina.

Nech je D iná kružnica v $I \cup \{x\}$. Keďže $C \nsubseteq D$, tak existuje prvok $c \in C - D$. Potom $D \subseteq (I \cup \{x\}) - \{c\} \in \mathcal{M}$, a preto je D nezávislá, čiže D nemôže byť kružnicou. $\square$

VETA 10.4. *Nech je $\mathcal{M}$ matroid na množine X a $A \subseteq X$. Množina A má jediný obal, ktorý má tvar $sp(A) = \{x \in X;\ r(A \cup \{x\}) = r(A)\}$.*

DÔKAZ. Nech je O obal množiny A a $x \in O$. Potom $r(A \cup \{x\}) = r(A)$, lebo v opačnom prípade by platilo $r(O) \geq r(A \cup \{x\}) > r(A)$, čo je v spore s definíciou obalu. Čiže $O \subseteq sp(A)$. K tomu, aby sme dokázali $O = sp(A)$, stačí teraz dokázať $r(sp(A)) = r(A)$. Sporom predpokladajme, že $r(sp(A)) > r(A)$. Nech je B bázou A. Keďže $r(sp(A)) > r(A)$, tak podľa Definície 3 existuje prvok $x \in sp(A) - B$ taký, že $B \cup \{x\} \in \mathcal{M}$. Potom $r(A \cup \{x\}) = |B \cup \{x\}| > |B| = r(A)$, čo je v spore s definíciou množiny $sp(A)$. $\square$

Podľa vety 10.4, keď chceme zostrojiť obal množiny A v matroide, tak nám stačí krok za krokom preveriť prvky $X - A$. Teda obal vieme zostrojiť „rýchlo“.

PRÍKLAD 1. Nech je π rozklad množiny X na disjunktné podmnožiny, čiže nech $\pi = (X_1, X_2, \ldots, X_k)$. Podmnožinu I množiny X nazveme nezávislou, ak žiadne dva prvky z I neležia v rovnakej triede rozkladu π. Takto definované nezávislé množiny tvoria **matroid rozkladu** (pomocou Definície 3 možno overiť, že ide o matroid). Bázy sú systémy rozličných reprezentantov π (pozri nasledujúcu kapitolu) a kružnice sú dvojice prvkov z jednej triedy rozkladu π.

PRÍKLAD 2. Nech je X množina stĺpcov matice A. Množiny lineárne nezávislých stĺpcov sú nezávislé množiny **maticového matroidu**. Tento matroid je podmatroidom matroidu vektorového priestoru.

Nasledujúca veta ukazuje, že z algoritmického hľadiska sú zaujímavé nielen matroidy, ale aj ich prieniky. Vetu uvádzame bez dôkazu.

VETA 10.5. *Nech sú $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ matroidy na množine X, $A_{\mathcal{M}}$ a $A_{\mathcal{N}}$ sú Pažravé algoritmy zodpovedajúce týmto algoritmom a nech je $K(|X|)$ horný odhad zložitosti spracovania úlohy s rozmerom $|X|$ pre tieto algoritmy. Potom existuje algoritmus riešiaci úlohu o prieniku matroidov $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ v čase $O(|X|^3 K(|X|))$.*

Záverom poznamenajme, že úloha o prieniku dvoch matroidov je v istom zmysle hraničná. Existujú totiž úlohy, ktoré možno interpretovať ako úlohy o prieniku troch matroidov, avšak zatiaľ nie sú známe polynomiálne algoritmy na ich riešenie.

Cvičenia

Cvičenie 10.1. Nech je P konečná množina bodov v rovine. Ukážte, že žiadne dve hrany kostry, ktorá je minimálna vzhľadom na Euklidovskú metriku, sa nepretínajú mimo vrchola. (Táto kostra je kostrou kompletného grafu na vrcholoch P, pričom každá hrana má váhu rovnajúcu sa vzájomnej vzdialenosti koncových vrcholov tejto hrany.)

Cvičenie 10.2. Nech je P konečná množina bodov v rovine. Ukážte, že existuje taká kostra, ktorá je minimálna vzhľadom na Euklidovskú metriku a každý vrchol tejto kostry má stupeň nanajvýš 5.

Cvičenie 10.3. Zadefinujme matroid pre Fanovu rovinu nasledovne. Množina $S \subseteq X$ je nezávislá ak $|S| < 3$, alebo $|S| = 3$ a S netvorí priamku. Ukážte, že nezávislé množiny tvoria matroid. Opíšte kružnice, obaly a rankovú funkciu v tomto matroide.

Cvičenie 10.4. Daný je orientovaný graf $G = (V(G), E(G))$, ktorého každý šíp e je ohodnotený kladnou váhou $w(e) > 0$. Úlohou je nájsť množinu $M \subseteq E$, ktorej váha je maximová, pričom žiadne dve hrany M nesmú končiť v rovnakom vrchole. Rieši túto úlohu Pažravý algoritmus? Ak áno, čo sú závislé množiny a čo kružnice príslušného matroidu?

Cvičenie 10.5. Nech je $\mathcal{M}$ matroid a $\mathcal{C}$ je množina jeho kružníc. Dokážte, že potom platí

(a) ak $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ a $C_1 \subseteq C_2$, tak $C_1 = C_2$;
(b)* ak $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, $x \in C_1 \cap C_2$ a $y \in C_1 - C_2$, tak existuje kružnica $C_3 \in \mathcal{C}$ taká, že $x \notin C_3$, $y \in C_3$ a $C_3 \subseteq C_1 \cup C_2$ (pozri cvičenie 5.8).

Cvičenie 10.6*. Nech systém $\mathcal{C}$ podmnožín množiny X spĺňa podmienky (a) a (b) z cvičenia 10.5. Dokážte, že potom systém $\mathcal{M}$ takých podmnožín množiny X, ktoré neobsahujú žiadnu množinu z $\mathcal{C}$ ako svoju podmnožinu, tvorí matroid na X.

Cvičenie 10.7. Pre daný graf G a $S \subseteq V(G)$ máme zistiť, či existuje kostra grafu G taká, že všetky vrcholy množiny S sú jej **listami** (sú susedné s jedinou hranou kostry). Sformulujte túto úlohu ako úlohu o prieniku dvoch matroidov.

Cvičenie 10.8. Pre daný graf G, $v \in V(G)$ a konštantu k máme zistiť, či existuje taká kostra grafu G, v ktorej stupeň vrchola v nie je väčší ako k. Sformulujte túto úlohu ako úlohu o prieniku dvoch matroidov.

Cvičenie 10.9. Nech je G párny graf. Sformulujte úlohu o párovaní s maximálnym možným počtom hrán v grafe G ako úlohu o prieniku dvoch matroidov.

Cvičenie 10.10. Nech je $G = (V(G), E(G))$ párny graf, ktorý má na každej hrane e nezápornú váhu $w(e)$. Sformulujte úlohu o maximovom párovaní ako úlohu o prieniku dvoch matroidov.

Cvičenie 10.11. Nech je $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ systém podmnožín (nie nutne disjunktných) konečnej množiny X. Sformulujte úlohu existencie transverzály (systému rozličných reprezentantov) ako úlohu o prieniku dvoch matroidov.

11 ZLOŽITOSŤ ALGORITMOV

Triedy P a NP

Už v predchádzajúcich kapitolách sme kde-tu poznamenali, že istý problém je „ľahký“, respektíve „ťažký“, v tom zmysle, že algoritmus riešiaci tento problém je „rýchly“, respektíve „pomalý“. V tejto kapitole si tieto vágne poznámky spresníme. Začneme s „ľahkými“ problémami.

Definícia. Problém patrí do **triedy P**, ak na jeho riešenie existuje algoritmus, ktorého čas výpočtu možno zhora ohraničiť pomocou polynómu, ktorého argumentom je rozmer problému.

V predchádzajúcej definícii je jeden nedostatok. Nedefinovali sme pojem algoritmu. Keďže sa chceme vyhnúť zavádzaniu ďalších a ďalších pojmov, tak pod pojmom algoritmu budeme rozumieť program napísaný v programovacom jazyku, alebo v pseudokóde (ako tomu bolo pri všetkých algoritmoch uvádzaných v tomto texte).

Príklad. Prehľadávanie do šírky (respektíve do hĺbky) súvislého grafu patrí do triedy P. Aby sme to ukázali, najprv si všimnime, že rozmer problému (čiže zadanie súvislého grafu G s m_G hranami), je aspoň m_G. To preto, lebo pri akokoľvek šikovnej reprezentácii všeobecného grafu potrebujeme do počítača zadať každú hranu. Keďže algoritmus, ktorý sme opísali v kapitole 2, prezrie každú hranu práve dvakrát, tak čas výpočtu tohoto algoritmu možno zhora ohraničiť polynómom $f(x) = 2x$, kde x je veľkosť vstupu.

Polynomiálny je aj algoritmus na hľadanie maximálneho toku z kapitoly 4, avšak tento algoritmus už nie je lineárny. Do triedy P patrí aj problém zistiť, či má graf eulerovskú kružnicu, respektíve úloha nájdenia takejto kružnice, úloha nájdenia (identifikovania) všetkých blokov grafu a dokonca aj problém zistiť, či je graf rovinný. Preto sú všetky tieto problémy a úlohy „ľahké“.

V ďalšom sa budeme venovať len úlohám, ktoré „ľahké“ nie sú. Tieto úlohy budú „ťažké“. Z teoretických dôvodov zavedieme nasledujúcu definíciu.

Definícia. **Nedeterministický algoritmus** je taký algoritmus, ktorý sa počas chodu sám rozhoduje, ktorú z predpísaných možností si vyberie.

Príklad. Nasledujúci algoritmus je nedeterministický. Tento algoritmus zistí, či je možné vrcholy grafu regulárne zafarbiť pomocou k farieb.

ALGORITMUS: k-FARBENIE.
Vstup: graf $G = (V(G), E(G))$ a prirodzené číslo k.
Výstup: množiny $X_1, X_2, \ldots, X_k$ vrcholov, predstavujúce farebné triedy.

```
Begin
  Forall i ∈ {1,2,...,k} Do X_i:=∅;              { X_i má vrcholy i-tej farby }
  Forall v ∈ V(G) Do                              { nedeterministické zafarbenie }
   X_i:=X_i ∪ {v} pre nejaké i ∈ {1,2,...,k};
  Forall i ∈ {1,2,...,k} Do                       { overenie správnosti zafarbenia }
   Forall u,v ∈ X_i Do
    If u ≠ v And uv ∈ E(G) Then Odmietni;
  If Neodmietol Then Akceptuj;
End.
```

DEFINÍCIA. Problém patrí do **triedy NP**, ak na jeho riešenie existuje algoritmus, ktorého čas výpočtu na nedeterministickom počítači možno zhora ohraničiť pomocou polynómu, ktorého argumentom je rozmer problému.

Všimnime si, že trieda P je podtriedou triedy NP. Keďže u nás budú mať úlohy len konečne veľa inštancií, tak problém príslušnosti úlohy do triedy NP bude ekvivalentný problému overenia správnosti riešenia v polynomiálnom čase.

Za základnú úlohu z triedy NP považujeme úlohu o splniteľnosti. Táto úloha sa tiež nazýva SAT (satisfability). Na jej zavedenie si pripomeňme pojem konjunktívneho normálneho tvaru, ktorému sme sa venovali v predchádzajúcom semestri.

DEFINÍCIA. Výroková formula je v **konjunktívnom normálnom tvare** ak je konjunkciou niekoľkých formúl o ktorých platí:

(a) každá je disjunkciou konečne veľa prvotných formúl, prípadne ich negácií;
(b) v žiadnej sa nevyskytuje súčasne prvotná formula aj jej negácia;

Formula je **splniteľná**, ak existuje ohodnotenie prvotných premenných prvkami 0 a 1 tak, že hodnota výrazu po dosadení je 1. **Úloha o splniteľnosti**, nazývaná aj **SAT**, je úloha rozhodnúť, či je formula na vstupe, ktorá je v konjunktívnom normálnom tvare, splniteľná.

TVRDENIE 11.1. *Úloha o splniteľnosti patrí do triedy NP.*

DÔKAZ. Táto úloha patrí do triedy NP, pretože ak máme priradené hodnoty 0 a 1 prvotným formuliam (Booleovým premenným), tak vieme v polynomiálnom (dokonca v lineárnom) čase rozhodnúť, či je riešenie správne. □

DEFINÍCIA. Úloha U_1 je **polynomiálne redukovateľná** na úlohu U_2, ak každý vstup úlohy U_1 vieme polynomiálne transformovať na vstup úlohy U_2 a príslušný výstup z úlohy U_2 vieme polynomiálne transformovať na správny výstup U_1 pri danom vstupe. Úloha U je **NP-ťažká**, ak je možné ľubovoľnú úlohu z triedy NP polynomiálne redukovať na U a úloha je **NP-úplná**, ak je NP-ťažká a patrí do triedy NP.

Z predchádzajúcej definície je zrejmé, že keby sa čo len pre jednu NP-úplnú úlohu podarilo nájsť polynomiálny algoritmus na klasickom, deterministickom počítači, tak by sme hneď mali polynomiálne algoritmy pre všetky úlohy z triedy NP. V tom prípade by platilo P=NP. A práve problém, či platí P=NP, je jedným z najzávažnejších problémov súčasnej matematiky.

Dôkaz nasledujúceho tvrdenia ďaleko presahuje rámec týchto skrípt.

VETA 11.2. *Úloha o splniteľnosti je NP-úplná.*

Veta 11.2 bude pre nás v ďalšom výklade veľmi dôležitá. To preto, lebo k tomu, aby sme ukázali, že nejaká úloha U je NP-ťažká, potrebujeme podľa definície nájsť polynomiálnu redukciu každej úlohy z triedy NP na U. Keďže zložením dvoch polynómov dostaneme opäť len polynóm, tak veta 11.2 nám dáva inú možnosť. Stačí, ak nájdeme polynomiálnu redukciu úlohy o splniteľnosti SAT na U a podľa vety 11.2 budeme vedieť, že existuje polynomiálna redukcia ľubovoľnej úlohy z triedy NP na U.

Niektoré NP-úplné problémy

DEFINÍCIA. **Úloha o 3-splniteľnosti**, nazývaná tiež 3-SAT, je úloha rozhodnúť, či je splniteľná formula v konjunktívnom normálnom tvare, v ktorej sú v každom z disjunktov nanajvýš 3 prvotné formuly.

VETA 11.3. *Úloha o 3-splniteľnosti je NP-úplná.*

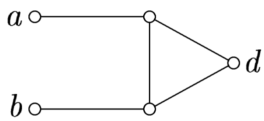
DÔKAZ. Táto úloha je špeciálnym prípadom úlohy o splniteľnosti, a preto patrí do triedy NP. V ďalšom dokážeme, že úloha o splniteľnosti je polynomiálne redukovateľná na úlohu o 3-splniteľnosti, čím dokážeme, že úloha o 3-splniteľnosti je NP-ťažká.

Majme formulu v tvare $D_1 \mathbin{\&} D_2 \mathbin{\&} \dots \mathbin{\&} D_k$, kde $D_i = (l_{i,1} \vee l_{i,2} \vee \cdots \vee l_{i,r_i})$ pre $i = 1, 2, \dots, k$ a každé $l_{i,j}$ je buď prvotnou formulou alebo jej negáciou. Všetky disjunkty D_i nahraďme $r_i - 2$ disjunktami

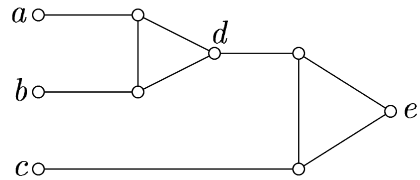
$$(l_{i,1} \vee l_{i,2} \vee z_{i,1}) \mathbin{\&} (\neg z_{i,1} \vee l_{i,3} \vee z_{i,2}) \mathbin{\&} \dots \mathbin{\&} (\neg z_{i,r_i-3} \vee l_{i,r_i-1} \vee l_{i,r_i})$$

kde $z_{i,1}, z_{i,2}, \dots, z_{i,r_i-3}$ sú nové prvotné formuly. Dostali sme formulu, v ktorej má každý disjunkt nanajvýš 3 prvotné formuly, pričom táto nová formula je splniteľná práve vtedy, keď je splniteľná pôvodná formula. Ak je t počet prvotných formúl (aj s opakovaním) pôvodnej formuly, tak počet prvotných formúl (aj s opakovaním) v novej formule je nanajvýš $3t$, čiže vstup sme redukovali polynomiálne. Výstup vieme tiež redukovať polynomiálne. Stačí zabudnúť hodnoty premenných $z_{i,j}$. Teda úloha o 3-splniteľnosti je NP-ťažká a patrí do triedy NP, čiže je NP-úplná. □

VETA 11.4. *Úloha zistiť, či možno graf na vstupe regulárne zafarbiť 3 farbami je NP-úplná.*

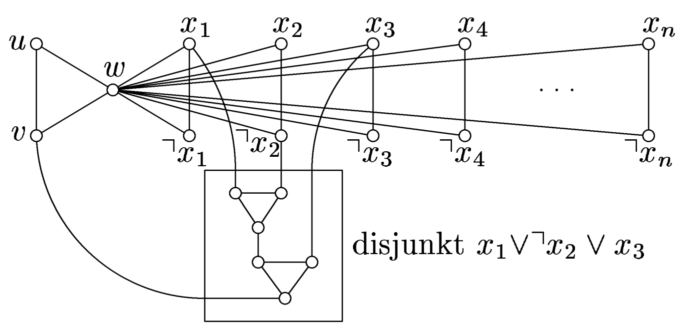


Obrázok 36



Obrázok 37

Dôkaz. Keďže existuje lineárny (vzhľadom na počet hrán) algoritmus, ktorý rozhodne, či je farbenie správne, tak úloha patrí do triedy NP. V ďalšom zostrojíme redukciu úlohy o 3-splniteľnosti na úlohu o 3-farbiteľnosti grafu. Uvažujme graf na obrázku 36. Ak sú vrcholy a aj b zafarbené rovnakou farbou, tak pri regulárnom 3-zafarbení je touto farbou zafarbený aj vrchol d. Preto ak sú zafarbené rovnakou farbou všetky vrcholy a, b a c na obrázku 37, tak je touto farbou zafarbený aj vrchol e.



Obrázok 38

Formule v konjunktívnom normálnom tvare priradíme graf zobrazený na obrázku 38. Vrcholmi tohoto grafu sú všetky prvotné formuly a ich negácie, tri nové vrcholy u, v a w, ďalej 6 nových vrcholov pre každý disjunkt obsahujúci tri prvotné formuly a tri nové vrcholy pre každý disjunkt obsahujúci dve prvotné formuly. Vrcholy u, v a w sú spojené hranami, teda pri regulárnom 3-zafarbení budú mať tieto vrcholy tri rôzne farby. Označme 0 farbu, ktorou je zafarbený vrchol v, 1 farbu vrchola u a 2 farbu vrchola w. Keďže w je spojený hranou s každou prvotnou formulou, tak tieto dostanú iba farby 0 a 1, ktoré budú predstavovať ich logickú hodnotu (zjavne x_i a $\neg x_i$ dostanú rôzne farby). Pre každý disjunkt zostrojíme podgraf analogicky ako pre disjunkt $x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3$, pozri obrázok 38. Spodný vrchol tohoto podgrafu naviac spojíme hranou s vrcholom v. Podľa predchádzajúcich úvah, ak by mali všetky zložky jedného disjunktu farbu 0, tak túto farbu dostane aj spodný vrchol tohoto disjunktu. Keďže farbu 0 má aj vrchol v, tak farbenie nebude regulárne. Teda ak formula nie je splniteľná, tak neexistuje regulárne zafarbenie zostrojeného grafu 3 farbami. Naopak, ak je formula splniteľná, tak v každom disjunkte môže mať jeden z literálov (pod pojmom literál sa rozumie prvotná formula, respektíve jej negácia) farbu 1, a preto môže mať farbu 1 aj spodný vrchol tohoto disjunktu. To znamená, že formula je splniteľná práve vtedy, keď možno zostrojený graf regulárne zafarbiť 3 farbami. Ak máme vo formule n premenných a k disjunktov, tak zostrojený graf má nanajvýš $2n + 6k + 3$ vrcholov, čiže redukcia je polynomiálna. □

DEFINÍCIA. Kompletný podgraf grafu nazývame **klika** a množinu vrcholov, z ktorých žiadne dva nie sú spojené hranou, nazývame **nezávislá množina vrcholov**.

VETA 11.5. *Úloha $U(n,k)$ zistiť, či v danom n-vrcholovom grafe existuje klika s k vrcholmi, je NP-úplná.*

DÔKAZ. Na preverenie, či je nájdený podgraf na k vrcholoch kompletný, stačí $\binom{k}{2} < \frac{1}{2}k^2 < \frac{1}{2}n^2$ operácií a preto táto úloha patrí do triedy NP.

V ďalšom zostrojíme redukciu úlohy o splniteľnosti na úlohu $U(n,k)$. Nech je $f = D_1 \ \& \ D_2 \ \& \ \dots \ \& \ D_k$ formula v konjunktívnom normálnom tvare. Predpokladajme, že sa v tejto formule vyskytuje n prvtotných formúl, vrátane opakovania. Zostrojme graf $G = (V(G), E(G))$ nasledujúcim spôsobom

$$V(G) = \{[a,i];\ a \text{ je zložka disjunktu } D_i\};$$
$$E(G) = \{[a,i][b,j];\ i \neq j \text{ a } a \neq \neg b\}.$$

Všimnime si, že vrcholy zodpovedajú literálom (prvotným formuliam, respektíve ich negáciám) z disjunktov a je ich práve toľko, koľko je prvotných formúl v celej formule f, vrátane opakovania. Dve zložky z rôznych disjunktov sú spojené hranou práve vtedy, keď môžu súčasne nadobúdať hodnotu 1. Ak je formula f splniteľná, tak existuje také priradenie hodnôt 0 a 1 premenným, pri ktorom v každom disjunkte existuje prvok s hodnotou 1. Takéto prvky potom tvoria kliku veľkosti k v grafe G. Naopak, ak v G existuje klika na k vrcholoch, tak rôzne vrcholy tejto kliky sú zo skupín zodpovedajúcich rôznym disjunktom. Keďže tieto vrcholy predstavujú zložky disjunktov, ktoré môžu súčasne nadobúdať hodnotu 1, tak formula f je splniteľná. □

Nasledujúce tvrdenie je triviálnym dôsledkom predchádzajúcej vety.

VETA 11.6. *Úloha $U'(n,k)$ zistiť, či v grafe na n vrcholoch existuje nezávislá množina k vrcholov, je NP-úplná.*

DÔKAZ. Ide o dôsledok vety 11.5 pre doplnok grafu. □

LEMA 11.7. *Nech je daný graf $G = (V(G), E(G))$. Množina $P \subseteq V(G)$ tvorí vrcholové pokrytie grafu G práve vtedy, keď je $V(G) - P$ nezávislá množina.*

DÔKAZ. Ak je P vrcholové pokrytie, tak uv nie je hrana grafu G pre žiadne $u, v \in V(G) - P$. Teda $V(G) - P$ je nezávislá množina. Naopak, ak je množina $V(G) - P$ nezávislá, tak neexistuje hrana, ktorá by spájala dva vrcholy z tejto množiny. Teda všetky hrany majú aspoň jeden vrchol v množine P, čiže P tvorí vrcholové pokrytie. □

VETA 11.8. *Úloha $U^*(n,k)$ zistiť, či má graf na n vrcholoch vrcholové pokrytie veľkosti k, je NP-úplná.*

DÔKAZ. Ide o dôsledok vety 11.6 a lemy 11.7. □

Medzi ďalšie známe NP-úplné problémy patrí problém zistiť, či graf na vstupe obsahuje hamiltonovskú kružnicu. Preto sme v kapitole 3 spomínali, že je tento problém „ťažký“.

NP-úplným problémom je aj určenie chromatického indexu grafu. Tento problém je NP-úplný dokonca pre kubické grafy. Preto je hľadanie snarkov také zložité. Výklad zakončíme ďalšou aplikáciou teórie grafov, ktorá je taktiež NP-úplnou úlohou.

Predpokladajme, že firma má filiálky v n mestách, ktoré sú všetky navzájom prepojené priamymi leteckými linkami. Obchodný cestujúci potrebuje navštíviť všetky filiálky a potom sa chce vrátiť do mesta, z ktorého vyšiel. Letenky medzi rôznymi mestami majú rôzne ceny, pretože tieto mestá majú rôzne vzdialenosti. **Problém obchodného cestujúceho** spočíva v nájdení najlacnejšej (teda najkratšej) okružnej trasy. Ako sme spomenuli, aj problém obchodného cestujúceho je NP-úplný.

Cvičenia

Cvičenie 11.1. Ukážte, že úloha nájdenia maximálneho toku v sieti patrí do triedy P.

Cvičenie 11.2. Dokážte, že úloha rozhodnúť, či pre dva grafy na vstupe G a H, graf G obsahuje H ako svoj podgraf, je NP-úplná.

Cvičenie 11.3. Ukážte, že ak by sme mali polynomiálny algoritmus na výpočet dĺžky najkratšej trasy pre obchodného cestujúceho, tak by sme vedeli vytvoriť polynomiálny algoritmus na jej vyhľadanie.

Cvičenie 11.4. Nech je $G = (V(G), E(G))$ graf, $S \subseteq V(G)$ a k je konštanta. Dokážte, že nasledujúce úlohy sú NP-úplné.

(a) Úloha zistiť, či existuje kostra grafu G, ktorej množina listov je práve množina S.
(b) Úloha zistiť, či existuje kostra grafu G, ktorej množina listov je podmnožinou množiny S.
(c) Úloha zistiť, či existuje kostra grafu G, ktorá má práve k listov.
(d) Úloha zistiť, či existuje kostra grafu G, v ktorej stupne vrcholov neprevýšia k.

Porovnajte tieto úlohy s úlohami z cvičení 10.7 a 10.8.

Zoznam použitých označení a symbolov

Index

Literatúra

[1] ARCHDEACON, D.: *Problems in topological graph theory.* Personal www-page, http://emba.uvm.edu/~archdeac/newlist/problems.html 2007.

[2] BRUALDI, R.: *Introductory combinatorics. 2-nd edition.* Prentice Hall Engelwood Cliffs 1992.

[3] DIESTEL, R.: *Graph theory. 3-rd edition.* Personal www-page, http://www.math.uni-hamburg.de/home/diestel/books/graph.theory/ 2007.

[4] HARTSFIELD, N. – RINGEL, G.: *Pearls in graph theory.* Academic Press, San Diego 1994.

[5] CHARTRAND, G. – LESNIAK, L.: *Graphs and digraphs.* Chapman and Hall, London 1996.

[6] KNOR, M.: *Kombinatorika a teória grafov I.* Univerzita Komenského, Bratislava 2000.

[7] KNOR, M. – NIEPEL, Ľ.: *Kombinatorika a teória grafov II.* Univerzita Komenského, Bratislava 2000.

[8] PLESNÍK, J.: *Grafové algoritmy.* Veda, Bratislava 1978.

[9] SPENCER, J.: *Ten lectures on the probabilistic method.* SIAM, Philadelphia 1987.

[10] WEISSTEIN, E.: *Ramsey number.* From MathWorld - a Wolfram Web Resource, http://mathworld.wolfram.com/RamseyNumber.html 2007.

[11] WILSON, R.J. – WATKINS, J.J.: *Graphs, an introductory approach.* Wiley, New York 1990.

[12] ZNÁM, Š.: *Kombinatorika a teória grafov.* MFF UK, Bratislava 1985.

Obsah