

Vedecká rada Stavebnej fakulty STU v Bratislave

Ing. Róbert Čunderlík

Autoreferát dizertačnej práce

**Využitie metódy okrajových prvkov na riešenie  
Neumannovej geodetickej okrajovej úlohy**

na získanie

vedecko-akademickej hodnosti philosophiae doctor

v odbore doktorandského štúdia:

39-31-9 Geodézia a geodetická kartografia

Bratislava 2004

Dizertačná práca bola vypracovaná v dennej forme doktorandského štúdia na Katedre geodetických základov Stavebnej fakulty STU v Bratislave.

**Predkladateľ:** Ing. Róbert Čunderlík  
Katedra geodetických základov  
SvF STU v Bratislave  
Radlinského 11, 813 68 Bratislava

**Školiteľ:** Doc. Ing. Marcel Mojzeš, PhD.  
Katedra geodetických základov

**Školiteľ-konzultant:** Doc. RNDr. Karol Mikula, PhD.  
Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie  
SvF STU v Bratislave  
Radlinského 11, 813 68 Bratislava

**Oponenti:** RNDr. Ing. Petr Holota, DrSc.  
Výzkumný ústav geodetický, topografický a kartografický  
250 66 Zdiby 98, Česká republika

Prof. Ing. Jan Kostelecký, DrSc.  
Výzkumný ústav geodetický, topografický a kartografický  
250 66 Zdiby 98, Česká republika

Prof. RNDr. Zdeněk Martinec, DrSc.  
Matematicko-fyzikální fakulta UK v Praze  
Ke Karlovu 3, Praha 2, 121 16, Česká republika

Autoreferát bol rozoslaný dňa: .....

Obhajoba dizertačnej práce sa koná ..... o ..... h pred  
komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v odbore doktorandského štúdia,  
vymenovanou predsedom spoločnej odborovej komisie dňa .....

39-31-9 Geodézia a geodetická kartografia

na Katedre geodetických základov SvF STU v Bratislave, Radlinského 11.

**Predseda spoločnej odborovej komisie:**  
Prof. Ing. Vlastimil Staněk, PhD.  
Katedra geodézie SvF STU  
Radlinského 11, 813 68 Bratislava

# 1. Úvod

Určovanie tiažového poľa Zeme patrí medzi základné úlohy geodézie. Z matematického hľadiska ide o riešenie geodetickej okrajovej úlohy, ktorá je zvyčajne formulovaná v tvare Laplaceovej rovnice pre vonkajšiu oblasť. Súčasná koncepcia riešenia využíva ako okrajovú podmienku (OP) základnú gravimetrickú rovnicu, t.j. OP Newtonovho typu. Kombinácia gravimetrických a družicových meraní v bodoch na zemskom povrchu umožňuje priame určovanie Neumannových OP v tvare povrchových tiažových porúch, ktoré predstavujú derivácie neznámeho poruchového potenciálu. Takto môžeme definovať Neumannovu geodetickej okrajovej úlohu (NGOÚ), ktorá je teoreticky známa, ale jej praktické riešenie na fyzickom povrchu Zeme je stále otvorený problém.

Súčasný rozvoj výpočtovej techniky prináša praktické uplatnenie numerických metód na riešenie rôznych fyzikálnych problémov. Ich aplikácie poskytujú nové a efektívne možnosti riešenia parciálnych diferenciálnych rovníc. Numerické metódy sú založené na slabej (integrálnej) formulácii parciálnej diferenciálnej rovnice a vedú k približným (variačným), ale uspokojivým riešeniam. Metóda okrajových prvkov (MOP) je najvhodnejšia numerická metóda na riešenie vonkajších okrajových úloh, teda aj na riešenie NGOÚ.

Predložená dizertačná práca poukazuje na možnosť využitia metódy okrajových prvkov na riešenie Neumannovej geodetickej okrajovej úlohy. Navrhované riešenie predstavuje nový prístup k určovaniu tiažového poľa Zeme. Dizertačná práca popisuje teoretickú formuláciu priestorovej aplikácie MOP pomocou metódy kolokácie s využitím lineárnych básových funkcií. Praktická časť je zameraná na vlastné numerické experimenty, ktorých výsledkom je určenie globálneho modelu kvázigeoidu Zeme ako aj lokálne riešenie v oblasti Európy.

## Pod'akovanie:

Výpočty prezentovaných výsledkov boli realizované v Interdisciplinárnom centre pre matematické a počítačové modelovanie (ICM) Varšavskej Univerzity v Poľsku pôsobiacom pri Medzinárodnom matematickom centre Stefana Banacha – „Stefan Banach Centre of Excellence“.

## 2. Súčasný stav riešenia geodetickej okrajovej úlohy

V súčasnosti existujú dve základné koncepcie riešenia geodetickej okrajovej úlohy pomocou gravimetrických údajov, Stokes-Helmertova a Molodenského koncepcia. V oboch prípadoch je OP definovaná v tvare základnej gravimetrickej rovnice (OP Newtonovho typu). Stokes-Helmertova koncepcia vedie k určovaniu geoidu ako základnej ekvipotenciálnej plochy (Stokes, 1849). Vstupné tiažové anomálie sú definované na geoid, ktorý je zároveň považovaný za hranicu oblasti. Preto ide o okrajovú úlohu s voľnou hranicou. Pri tejto koncepcii treba zohľadniť vplyv hmôt medzi geoidom a povrchom Zeme a určitým spôsobom ich redukovať, napr. pomocou Helmertovej kondenzačnej vrstvy (Helmert, 1884), (Vaníček, Martinec, 1994),

(Vaníček a kol., 1999). Výsledný poruchový potenciál na geoide sa pomocou Brunsovoho vzťahu transformuje na výšku geoidu nad elipsoidom.

Molodenského koncepcia využíva povrchové tiažové anomálie. Hranicou oblasti je teluroid, ktorý je bližšou aproximáciou zemského povrchu (Molodenskij, 1960). OP sú definované na teluroide, preto odpadá problém redukcie hmôt. Riešenie vedie k určeniu poruchového potenciálu na teluroide, ktorý sa transformuje na výškové anomálie, resp. výšky kvázigeoidu nad elipsoidom (Moritz, 1974), (Moritz, 1980).

Z hľadiska praktických riešení sa v súčasnosti používajú nasledovné postupy. Na určovanie globálneho priebehu geoidu sa vzľadom na obrovskú rozlohu Zeme využíva rozvoj tiažového potenciálu do radu plošných sférických funkcií a Legendreových polynómov. Geopotenciálne modely sú založené na určovaní geopotenciálnych koeficientov z družicových, altimetrických a gravimetrických údajov (Rapp, 1994). V súčasnosti sa používajú geopotenciálne modely stupňa 360, napr. EGM-96 (Lemoine a kol., 1996). Pre lokálne riešenia s vysokými nárokmi na presnosť sa používa technológia „remove-restore“ v kombinácii s rýchlou Fourierovou transformáciou. Takýmto spôsobom sa obchádza potreba integrácie cez celý povrch Zeme a vyčíslenie Stokesovho integrálu sa realizuje len v záujmovej oblasti (Schwartz, Sideris, Forsberg, 1990), (Sideris, 1994).

Využitie MOP na riešenie geodetickej okrajovej úlohy nie je zatiaľ veľmi zaužívané. Danej problematike sa venuje výskumná skupina okolo prof. Kleesa v Holandsku, známa je aplikácia Galerkinovej MOP na linearizovaný Molodenského problém použitím konštantných básových funkcií (Klees a kol., 1999). Na Slovensku prvé kroky, t.j. dvojrozmernú aplikáciu MOP na riešenie geodetickej okrajovej úlohy, urobil Ing. Janák (Janák, 1999). Využitie MOP na riešenie NGOÚ a následné praktické experimenty zatiaľ nie sú známe.

### 3. Ciele dizertačnej práce

Hlavným cieľom dizertačnej práce je návrh riešenia NGOÚ pomocou priestorovej aplikácie MOP. Navrhované riešenie vychádza z myšlienky využiť gravimetrické a družicové merania na určenie Neumannových OP v tvare povrchových tiažových porúch. Keďže Neumannové OP sú dané na členitom fyzickom povrchu Zeme, klasické riešenie nie je známe. Aplikácia MOP však umožňuje nájsť približné (variačné) riešenie NGOÚ.

Splnenie tohto cieľa vyžaduje splnenie nasledovných čiastkových cieľov:

- **Teoretická formulácia navrhovaného riešenia**
  - formulácia NGOÚ na základe vzťahov teórie potenciálu
  - návrh priestorovej aplikácie MOP na riešenie NGOÚ
    - výber vhodnej metódy na diskretizáciu okrajových integrálnych rovníc s cieľom znížiť nároky na pamäťové požiadavky
    - výber efektívneho spôsobu diskretizácie integrálnych operátorov
    - výber vhodnej metódy na riešenie vzniknutej lineárnej sústavy rovníc
  - návrh transformácie poruchového potenciálu v bodoch na zemskom povrchu na určovanie priebehu kvázigeoidu

- **Praktické aplikácie navrhovaného riešenia**
  - zostavenie výpočtového programu na základe teoretickej formulácie navrhovaného riešenia
  - návrh aproximácie zemského povrchu vhodnou trianguláciou
    - homogénna globálna triangulácia
    - lokálne zjemnenie triangulácie v záujmovej oblasti
  - príprava vstupných údajov
  - realizácia výpočtov na vysokokapacitných počítačoch
  - grafické znázornenie dosiahnutých výsledkov
- **Analýza dosiahnutých výsledkov**
  - posúdenie presnosti výsledkov numerických experimentov
  - posúdenie výhod a nedostatkov navrhovaného riešenia

## 4. Návrh využitia MOP na riešenie NGOÚ

Metóda okrajových prvkov je numerická metóda na riešenie parciálnych diferenciálnych rovníc. Jej podstata spočíva v nahradení parciálnej diferenciálnej rovnice popisujúcej riešenie na danej oblasti pomocou integrálnych rovníc, ktoré vyjadrujú riešenie iba na hranici oblasti. Tým sa ako keby redukuje dimenzia problému. Preto je MOP vhodná aj na riešenie vonkajších okrajových úloh, teda aj NGOÚ. Následnou diskretizáciou okrajových integrálnych rovníc sa riešenie prevedie na systém algebraických rovníc.

Geodetická okrajová úloha je vyjadrená pomocou Laplaceovej rovnici pre poruchový potenciál  $T$ , ktorý je harmonickou funkciou mimo telesa Zeme (za určitých predpokladov pre normálne pole generované vhodným normálnym telesom). Definovaním Neumannových OP v tvare povrchových tiažových porúch  $\delta g$  môžeme definovať Neumannovu geodetickú okrajovú úlohu

$$\Delta T(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 - \Omega, \quad (1a)$$

$$\langle \nabla T(\mathbf{x}), \mathbf{n}_e(\mathbf{x}) \rangle = -\delta g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (1b)$$

$$T(\mathbf{x}) \rightarrow 0 \text{ pre } \mathbf{x} \rightarrow \infty, \quad (1c)$$

kde  $\mathbf{n}_e$  je vonkajšia normála k ekvipotenciálnemu elipsoidu,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  označuje skalárny súčin,  $\Omega$  predstavuje teleso Zeme s povrchom  $\Gamma$  ako hranicou oblasti. Takto definovaná NGOÚ predstavuje vonkajšiu okrajovú úlohu so šikmou deriváciou pre Laplaceovu rovnicu (1a) s Neumannovými OP (1b). Problém šikmej derivácie spočíva v skutočnosti, že normála k zemskému povrchu  $\mathbf{n}_\Gamma$  nie je totožná s normálou k ekvipotenciálnemu elipsoidu  $\mathbf{n}_e$ .

Na riešenie NGOÚ (1) použijeme MOP. Priama formulácia MOP vychádza z dvojnásobnej aplikácie Greenovej vety na slabú formuláciu Laplaceovej rovnice (1a) (Brebbia a kol., 1984). Uvedeným spôsobom dostaneme okrajovú integrálnu rovnicu v tvare

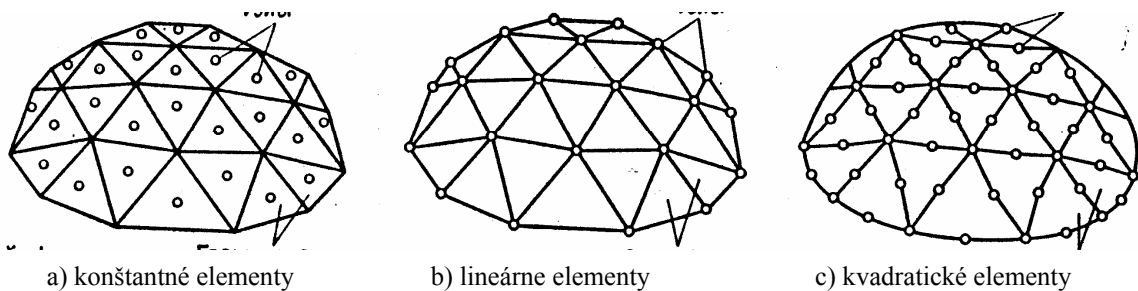
$$4\pi T(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} T(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial n_{\Gamma}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\Gamma} \frac{\partial T}{\partial n_{\Gamma}}(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (2)$$

Jadrová funkcia  $G$  predstavuje fundamentálne riešenie Laplacovej rovnice. V 3D má tvar

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^3. \quad (3)$$

Problém šikmej derivácie je ošetrený pomocou projekcie tiažových porúch do smeru normály k zemskému povrchu  $\mathbf{n}_{\Gamma}$ , t.j. ako vstupné hodnoty budeme uvažovať  $\delta g(\mathbf{x}) \cos \alpha(\mathbf{x})$ , kde  $\alpha(\mathbf{x})$  je uhol  $\angle(\mathbf{n}_{\Gamma}, \mathbf{n}_e)$  v danom bode  $\mathbf{x}$ .

Na odvodenie systému algebraických rovníc z okrajových integrálnych rovníc (2) použijeme metódu kolokácie s lineárnymi bázovými funkciami. Metóda kolokácie vyžaduje aproximáciu hranice oblasti pomocou množiny trojuholníkových elementov  $\Delta\Gamma_j$  (Obr.1). Na danom elemente sa okrajové funkcie aproximujú pomocou interpolačných funkcií zvoleného stupňa: a)  $C^0$  kolokácia - konštantné, b)  $C^1$  kolokácia - lineárne, c)  $C^2$  kolokácia - kvadratické bázové funkcie (Obr.1). Obr.1 zobrazuje rozloženie kolokačných bodov pre jednotlivé typy interpolačných funkcií.



Obr.1: Diskretizácia hranice oblasti pomocou trojuholníkových elementov.

Pre navrhované riešenie NGOÚ pomocou MOP použijeme lineárne bázové funkcie. Hlavným dôvodom je fakt, že v tomto prípade sú kolokačné body totožné s vrcholmi trojuholníkových elementov (Obr.1b) a ich počet je menší ako v prípade konštantných bázových funkcií (Obr.1a). To znamená, že budeme uvažovať lineárny priebeh okrajových funkcií na danom elemente

$$T(\mathbf{x}) \approx \sum_{k=1}^3 T_k \psi_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Delta\Gamma_j, \quad (4a)$$

$$\delta g(\mathbf{x}) \approx \sum_{k=1}^3 \delta g_k \psi_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Delta\Gamma_j, \quad (4b)$$

kde  $T_k$  a  $\delta g_k$  pre  $k=1, 2, 3$  predstavujú hodnoty okrajových funkcií v kolokačných bodoch zvoleného elementu. Lineárne bázové funkcie  $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N\}$  sú dané vzťahmi

$$\begin{aligned} \psi_j(\mathbf{x}_i) &= 1, & \mathbf{x}_i &= \mathbf{x}_j, \\ \psi_j(\mathbf{x}_i) &= 0, & \mathbf{x}_i &\neq \mathbf{x}_j, \end{aligned} \quad i=1, \dots, N; j=1, \dots, N, \quad (5)$$

kde  $N$  je počet kolokačných bodov  $\mathbf{x}_i$ . Uvedené aproximácie umožňujú prepísať okrajovú integrálnu rovnicu (2) v diskretnom tvare pre daný kolokačný bod  $i$

$$c_i T_i \psi_i + \sum_{j=1}^N \int_{\text{sup}\psi_j} \frac{\partial G_{ij}}{\partial \mathbf{n}_\Gamma} T_j \psi_j d\Gamma_j = \sum_{j=1}^N \int_{\text{sup}\psi_j} G_{ij} \delta \mathbf{g}_j \psi_j d\Gamma_j, \quad i=1, \dots, N, \quad (6)$$

kde  $\text{sup}\psi_j$  je nosič  $j$ -tej bázy funkcie. Funkcia  $c_i$  predstavuje „priestorový segment“ vymedzený trojuholníkovoými elementmi, ktoré sa spájajú v danom kolokačnom bode. V prípade  $C^1$  kolokácie platí vzťah (Brož, Procházka, 1987)

$$c_i = \sum_{s=1}^S \frac{\varphi_{i_s}}{4\pi} (1 - \cos \phi_{i_s}), \quad (7)$$

kde  $\varphi_{i_s}$  je uhol medzi dvomi rovinami, ktoré sa pretínajú v normále  $\mathbf{n}_e$  daného bodu a vytvárajú strany  $s$ -tého trojuholníka v  $\text{sup}\psi_j$ . Uhlovú odľahlosť tohto elementu od normály  $\mathbf{n}_e$  vyjadruje  $\phi_{i_s}$ . Parameter  $S$  označuje počet elementov, ktoré sa spájajú v  $i$ -tom kolokačnom bode. Rovnice (6) predstavujú sústavu algebraických rovníc

$$\mathbf{M} \mathbf{T} = \mathbf{L} \delta \mathbf{g}, \quad (8)$$

kde  $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_N)$  a  $\delta \mathbf{g} = (\delta g_1, \dots, \delta g_N)$ . Koeficienty matíc  $\mathbf{M}$  a  $\mathbf{L}$  vyjadrujú jednotlivé integrály z diskretných rovníc (6), ktoré je potrebné vyčísliť. Pre regulárne integrály je možné použiť aproximáciu pomocou Gaussových kvadrátúr definovaných na trojuholníku (Laursen, Gellert, 1978). Problém nastáva pri vyčísľovaní diagonálnych prvkov kvôli singularite jadrových funkcií. Vďaka prvému členu s funkciou  $c_i$  v rovnici (6) platí, že diagonálny koeficient  $M_{ii}$  je rovný práve funkcii  $c_i$  (Brebbia a kol., 1984). Na vyčíslenie diagonálnych prvkov  $L_{ii}$  sa dajú použiť analytické vzťahy. Dizertačná práca obsahuje podrobný popis vzťahov na vyčíslenie regulárnych aj singularných integrálov.

Dosadením Neumannových OP do sústavy (8) dostaneme známy vektor na pravej strane. Neznáme hodnoty poruchového potenciálu v kolokačných bodoch sa vypočítajú riešením vzniknutej sústavy algebraických rovníc. Výber vhodnej metódy riešenia je determinovaný vlastnosťami matice systému  $\mathbf{M}$ . V našom prípade sa jedná o plnú, nesymetrickú, pozitívne definitnú a diagonálne dominantnú maticu. Vzhľadom na obrovský počet neznámych použijeme na jej riešenie nestacionárnu iteračnú metódu stabilizovaných bikonjugovaných gradientov (Bi-CGSTAB) (Barrett a kol., 1994).

Posledným krokom navrhovaného riešenia je transformácia poruchového potenciálu na výškové anomálie, resp. na výšky kvázigeoidu v jednotlivých kolokačných bodoch. Navrhujeme iteračným spôsobom použiť modifikovaný Brunsov vzťah pre Molodenského koncepciu, symbolicky vyjadrený vzťahom

$$\zeta^{i+1}(B, L) = \frac{T(B, L, H)}{\gamma(B, H - \zeta^i)}, \quad (9)$$

kde  $T(B, L, H)$  je poruchový potenciál v kolokačnom bode na zemskom povrchu,  $\zeta^i(B, L)$  je výšková anomália v  $i$ -tej iterácii a  $T(B, H - \zeta^i)$  predstavuje normálne tiažové zrýchlenie na „iteračnom“ teluroide. Na dosiahnutie konvergencie je postačujúce použiť dve, prípadne tri, iterácie. V nulte iterácii je najvhodnejšie dosadiť nulové výškové anomálie, t.j. „nulový iteračný teluroid“ bude totožný so zemským povrchom.

Uvedeným spôsobom vypočítame približné (variačné) riešenie NGOÚ priamo na fyzickom povrchu Zeme. Navrhované riešenie vedie k určovaniu kvázigeoidu, ktorý síce nie je ekvipotenciálnou plochou, ale slúži ako vzťažná plocha na určovanie normálnych výšok.

## 5. Numerické experimenty

Na základe teoretickej formulácie riešenia NGOÚ pomocou MOP bola v rámci dizertačnej práce vykonaná algoritmizácia riešenia a následné vytvorenie výpočtového programu v jazyku C. Vzhľadom na obrovskú rozlohu Zeme a snahu dosiahnuť čo najpresnejšie výsledky bolo nevyhnutné použiť vysoko-pamäťové paralelné počítače na realizáciu výpočtov. Výsledné výpočty boli vykonané v *ICM Varšava* (pozri podakovanie) na paralelnom počítači TAJFUN: CRAY SV1-1/32 s 32 procesormi a 32 GB internej (zdieľanej) pamäte.

V rámci dizertačnej práce boli vykonané tri numerické experimenty. Prvé dva sa venujú určovaniu globálneho priebehu kvázigeoidu z dvoch rôznych množín vstupných údajov. Tretí numerický experiment poukazuje na možnosť spresnenia riešenia v určitej oblasti pomocou lokálneho zjemnenia triangulácie. V našom prípade ide o určovanie priebehu kvázigeoidu v oblasti Európy.

### 5.1 Globálny model kvázigeoidu Zeme

Prvé dva numerické experimenty sa zaoberajú možnosťou využitia navrhovaného riešenia NGOÚ na určovanie globálneho priebehu kvázigeoidu. Cieľom je praktické overenie, či približné (variačné) riešenie pomocou MOP môže slúžiť ako alternatívny spôsob k doteraz zaužívanému modelovaniu pomocou plošných sférických funkcií a Legendreových polynómov (geopotenciálne modely, napr. EGM-96).

- **Diskretizácia zemského povrchu**

Na aproximáciu zemského povrchu sme použili približne homogénnu trianguláciu, kde vrcholy trojuholníkov predstavujú kolokačné body. Zvolená triangulácia bola založená na postupnom delení „12-stena“ až po požadovanú hustotu (Obr.2). Vytvorený algoritmus generuje horizontálnu polohu kolokačných bodov, spája ich do trojuholníkových elementov a následne vytvára väzby medzi susednými bodmi.

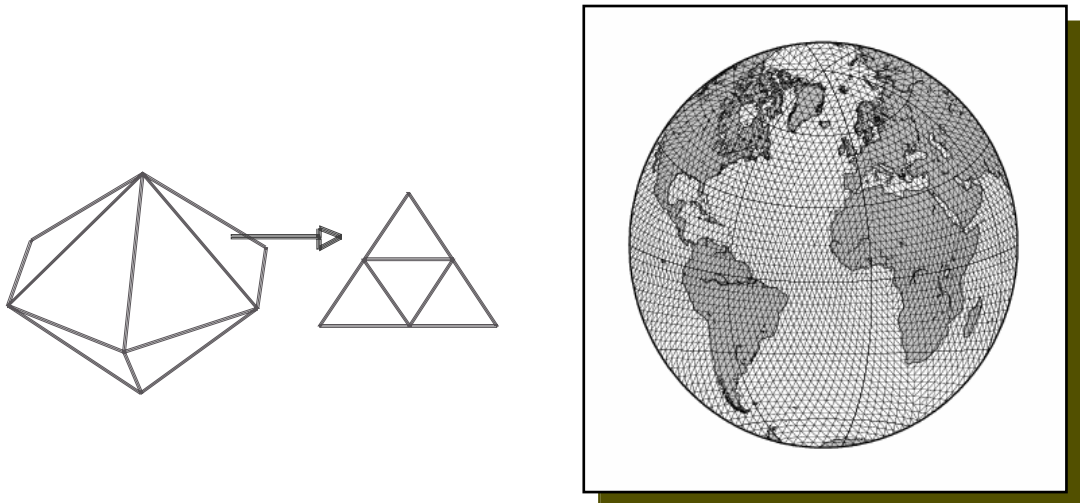
- **Vstupné údaje**

Nakoľko sme nemali k dispozícii žiadne databázy tiažových porúch ako aj digitálny model terénu v elipsoidických výškach, musli sme si potrebné veličiny vygenerovať z dostupných zdrojov. Vytvorili sme dve varianty vstupných dát:



Množina A: Tiažové poruchy generované dostupným softvérom (Rapp, 1994) pomocou geopotenciálnych koeficientov EGM-96 (Lemoine a kol., 1996). Elipsoidické výšky určené ako kombinácia geopotenciálneho modelu EGM-96 a digitálneho modelu terénu GTOPO-30 (EROS Data Centre)

Množina B: Tiažové poruchy generované z dostupnej databázy tiažových anomálii, ktoré boli použité na určovanie geopotenciálnych koeficientov EGM-96 (Pavllis, Kenyon, 1996). Elipsoidické výšky určené ako kombinácia geopotenciálneho modelu EGM-96 a nadmorských výšok v uvedenej databáze.



Obr.2: Homogénna triangulácia zemského povrchu

- **Realizácia výpočtov na paralelnom počítači**

Hlavným limitujúcim faktorom pri realizácii výpočtov boli enormné požiadavky na množstvo dostupnej internej pamäte. Uživateľský limit 17 GB v *ICM Varšava* umožnil vykonať výpočty pri aproximácii zemského povrchu pomocou 44 378 kolokačných bodov, čo predstavuje 88 752 trojuholníkových elementov (intervalový krok v zemepisnej šírke:  $\Delta B = 1.0227^\circ$ ). Celkový čas jednotlivých výpočtov bol približne 7 hod., z toho 95% času trvalo vyčísľovanie koeficientov matice systému a pravej strany. Riešenie sústavy algebraických rovníc pomocou nestacionárnej iteračnej metódy Bi-CGSTAB bez „predpodmieňovania“ trvalo len niekoľko minút, pričom na dosiahnutie predpísanej tolerancie  $\varepsilon$  absolútnej chyby rezídua stačilo 16 iterácií (množina A), resp. 17 iterácií (množina B). Výsledkom výpočtov boli Globálne modely kvázigeoidu Zeme pre obe množiny vstupných dát.

- **Analýza výsledkov a porovnanie s EGM-96**

Globálne modely kvázigeoidu Zeme predstavujú približné (variačné) riešenie NGOÚ, ktoré zahŕňajú tri druhy aproximácií:

- a) hranica oblasti je aproximovaná po častiach rovinnými plochami
- b) okrajové funkcie sú aproximované po častiach lineárnymi funkciami
- c) na diskretizáciu integrálnych operátorov sa používajú Gaussove kvadratury

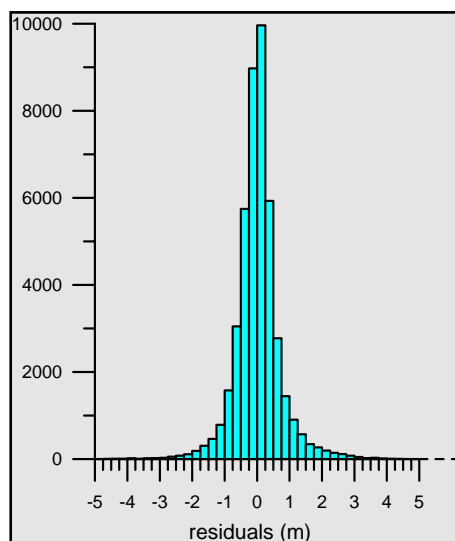
Teoretická presnosť variačného riešenia je daná mierou jednotlivých aproximácií ako aj presnosťou vstupných údajov. Hlavný vplyv na dosiahnutú presnosť riešenia má miera

diskretizácie hranice oblasti, t.j. jemnosť triangulácie zemského povrchu. Presný odhad teoretickej presnosti numerických výsledkov je veľmi komplikovaný problém. Preto na posúdenie presnosti porovnáme výsledné Globálne modely kvázigeoidu Zeme s geopotenciálnym modelom EGM-96.

**Množina A:** Vstupné tiažové poruchy sú generované z geopotenciálnych koeficientov EGM-96. Porovnanie výsledného Globálneho modelu kvázigeoidu Zeme s EGM-96 ukazuje výbornú zhodu variačného riešenia s geopotenciálnym modelom. To potvrdzuje matematickú spoľahlivosť navrhovaného riešenia. Štatistická analýza vzniknutých rozdielov (Tab.1+Obr.3) hovorí o vysokej presnosti Globálneho modelu kvázigeoidu Zeme.

<b>ŠTATISTICKÉ CHARAKTERISTIKY</b>					
<b><i>Rezíduá: (EGM-96) - (MOP)</i></b>					
<b>OBLASŤ</b>	<b>Celková (Obr.3)*</b>	<b>Oceány a moria</b>	<b>Kontinenty a ostrovy</b>	<b>Antarktída</b>	<b>Kontinenty bez Ant.</b>
<i>Počet bodov</i>	44 377	29 405	14 972	1 029	13 943
<i>Stredná hodnota</i>	0.026 m	0.029 m	0.020 m	0.946 m	-0.048 m
<i>Štand. odchýlka</i>	0.706 m	0.570 m	0.918 m	1.723 m	0.786 m
<i>Max. rezíduum</i>	6.161 m	3.613 m	6.161 m	5.010 m	6.161 m
<i>Min. rezíduum</i>	-6.145 m	-5.682 m	-6.145 m	-5.509 m	-6.145 m

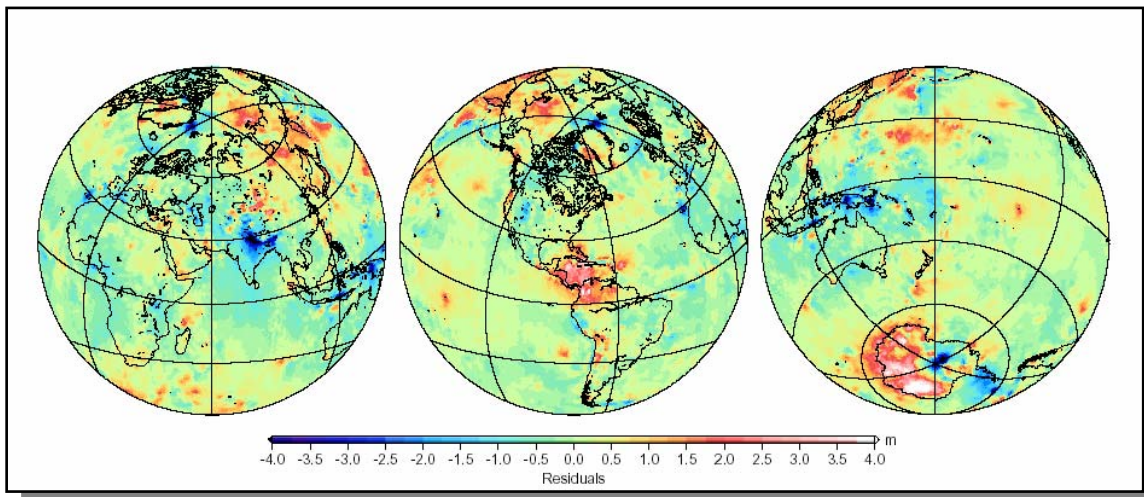
Tab.1



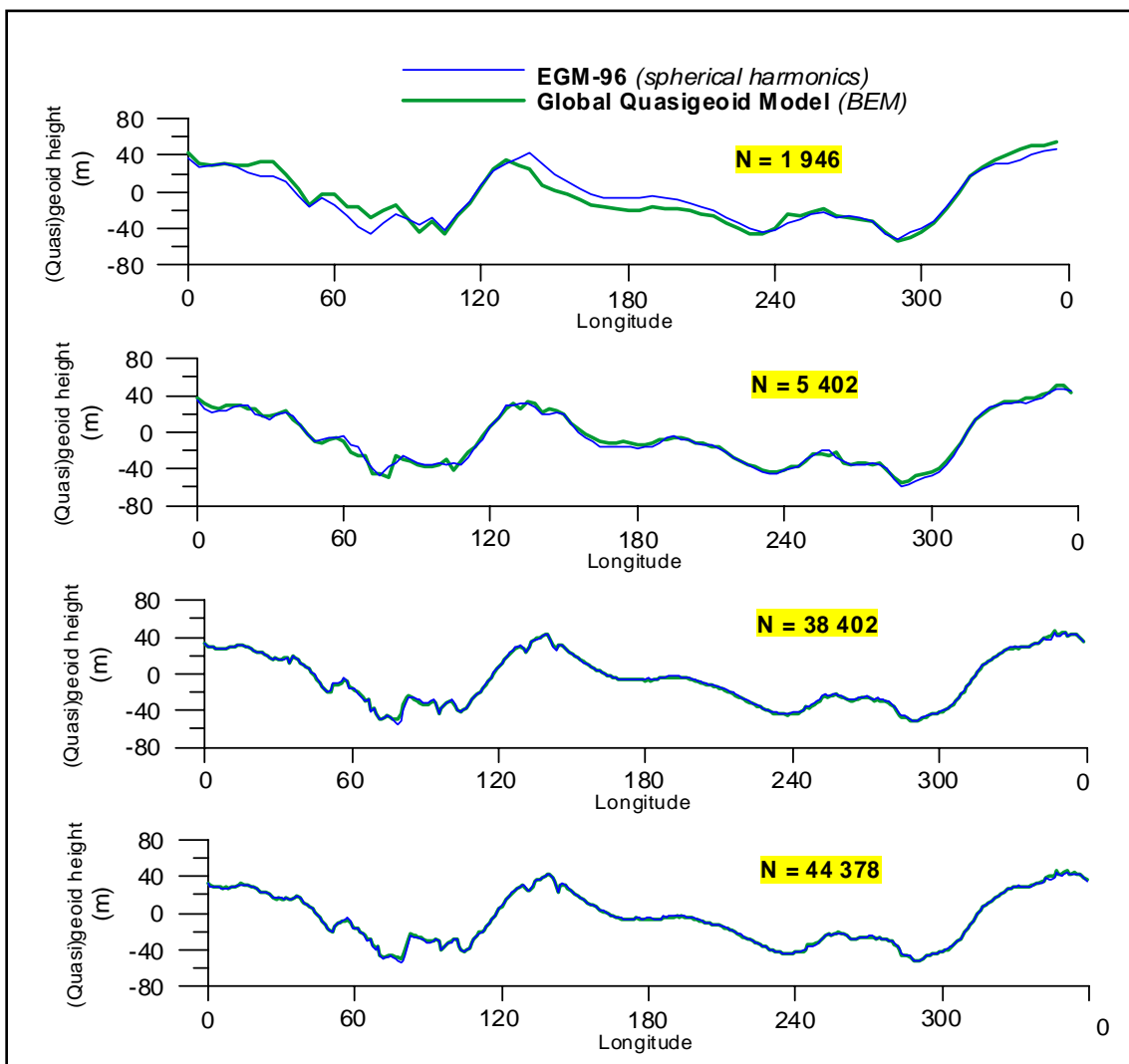
Obr.3: Histogram rezíduí (\*Tab.1)

Najvýraznejšie záporné rozdiely vznikli v oblasti Himaláji (Obr.4). Ich korelácia s tvarom pohoria naznačuje pravdepodobný pôvod v horizontálnom posune práve v oblasti najväčších zvislicových odchýlok. Výrazné rezíduá na Antarktíde môžu byť spojené s ľadovcovou pokrývkou v tejto oblasti.

Na základe skúseností z numerických experimentov môžeme potvrdiť zvyšovanie presnosti variačného riešenia v závislosti od zjemňovania globálnej triangulácie (Tab.2). Pre lepšie vizuálne porovnanie sú na Obr.5 zobrazené odpovedajúce profily po rovnobežke 30° severnej šírky.



Obr.4: Porovnanie Globálneho modelu kvázigeoidu Zeme (Množina A) s EGM-96 (44 378 kolokačných bodov)



Obr.5: Porovnanie variačného riešenia NGOŮ s EGM-96 pri zjemňovaní globalnej triangulácie (profily po rovnobežke 30° severnej šírky)

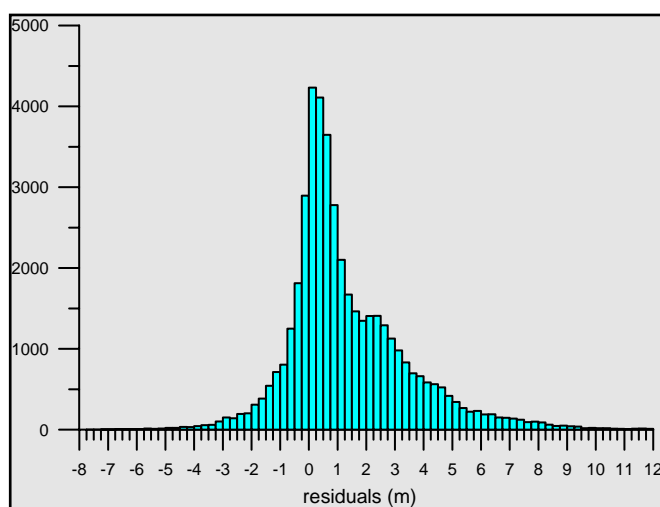
<b>ŠTATISTICKÉ CHARAKTERISTIKY</b>				
<i>Pre rôzne stupne triangulácie</i>				
<b><u>Rezíduá: (EGM-96) - (MOP)</u></b>				
<i>Počet bodov</i>	<b>1 946</b>	<b>5 402</b>	<b>38 402</b>	<b>44 378</b>
<i>ΔB</i>	5°	3°	1.125°	1.0227°
<i>Stredná hodnota</i>	0.580 m	-0.349 m	0.457 m	0.026 m
<i>Štand. odchýlka</i>	7.525 m	3.951 m	0.869 m	0.706 m
<i>Max. rezíduum</i>	47.875 m	32.778 m	7.987 m	6.161 m
<i>Min. rezíduum</i>	-42.496 m	-33.064 m	-7.368 m	-6.145 m

Tab.2

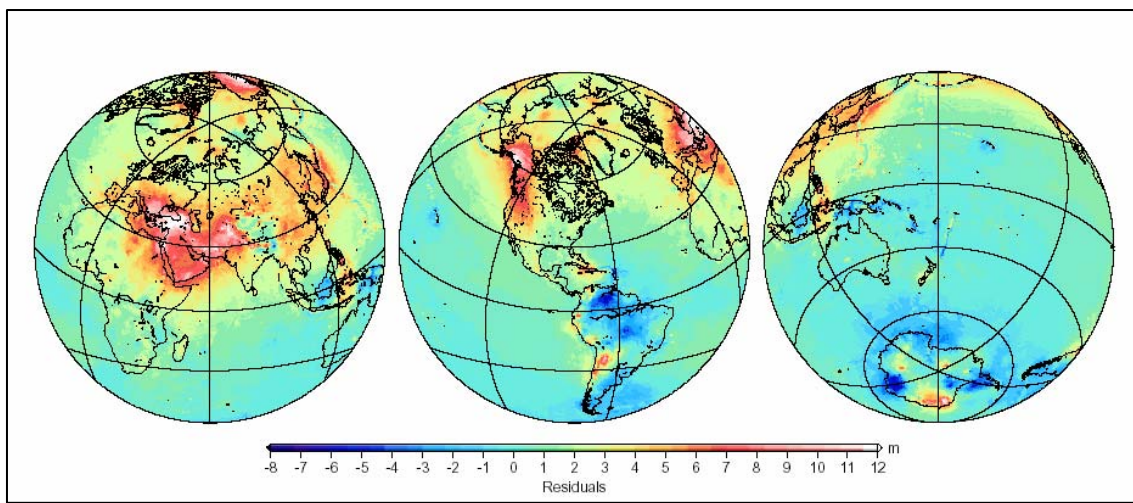
**Množina B:** Vstupné tiažové poruchy sú generované z dostupnej databázy tiažových anomálií. Preto výsledný Globálny model kvázigeoidu Zeme je takmer nezávislý od EGM-96 (použitý len na generovanie elipsoidických výšok). Jeho porovnanie s EGM-96 ukazuje zhoršenie presnosti oproti predchádzajúcemu prípadu, avšak opäť vidno pomerne dobrú zhodu s EGM-96 (Tab.3+Obr.6).

<b>ŠTATISTICKÉ CHARAKTERISTIKY</b>					
<b><u>Rezíduá: (EGM-96) - (MOP)</u></b>					
<b>OBLASŤ</b>	<b>Celková (Obr.6)*</b>	<b>Oceány a moria</b>	<b>Kontinenty a ostrovy</b>	<b>Antarktída</b>	<b>Kontinenty bez Ant.</b>
<i>Počet bodov</i>	44 377	29 405	14 972	1 029	13 943
<i>Stredná</i>	1.329 m	0.735 m	2.497 m	-0.187 m	2.695 m
<i>Štand. odchýlka</i>	2.122 m	1.365 m	2.763 m	2.645 m	2.666 m
<i>Max. rezíduum</i>	15.367 m	11.079 m	15.367 m	12.213 m	15.367 m
<i>Min. rezíduum</i>	-8.317 m	-7.581 m	-8.317 m	-8.317 m	-6.838 m

Tab.3



Obr.6: Histogram rezíduí (\*Tab.3)



Obr.7: Porovnanie Globálneho modelu kvázigeoidu Zeme (Množina B) s EGM-96 (44 378 kolokačných bodov)

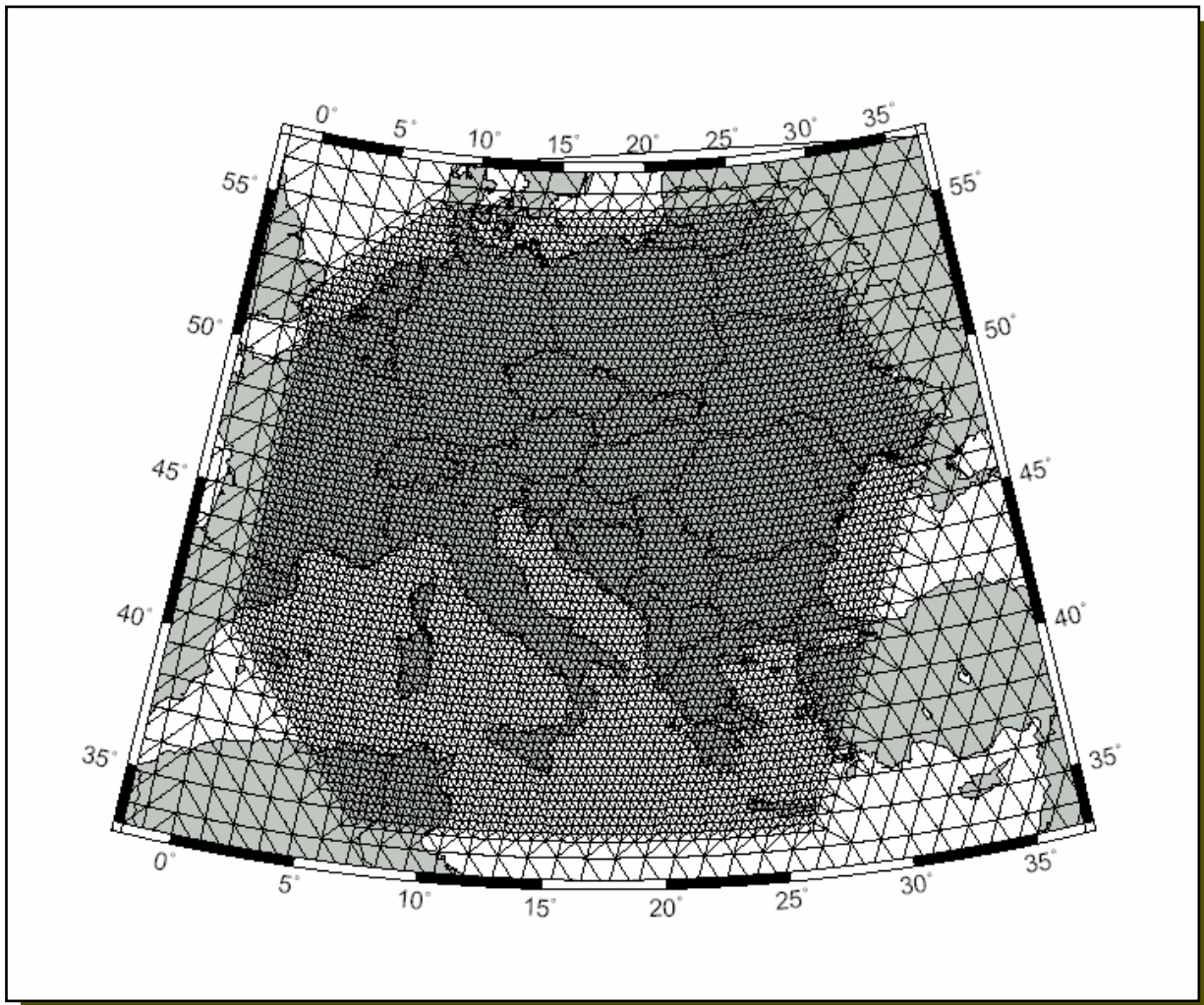
Znázornené rezíduá (Obr.7) ukazujú lepšiu zhodu v oblasti morí a oceánov, zatiaľ čo výrazné rozdiely sú v oblasti kontinentov, najmä v Ázii. Uvedený fakt môže byť spôsobený nehomogenitou gravimetrických dát v dostupnej databáze tiažových anomálií. Systematický posun variačného riešenia voči EGM-96 v niektorých oblastiach môže byť spôsobený skutočnosťou, že geopotenciálne koeficienty nižších stupňov sú určované z družicových meraní. V prvom prípade (množina A) to je zohľadnené v hodnotách vstupných tiažových porúch, zatiaľ čo v druhom prípade (množina B) sú vstupné údaje úplne nezávislé od geopotenciálnych koeficientov.

## 5.2 Lokálne zjemnenie riešenia v oblasti Európy

Tretí numerický experiment poukazuje na možnosť spresnenia riešenia v určitej oblasti pomocou lokálneho zjemnenia triangulácie. Zemský povrch bol aproximovaný pomocou 43 733 kolokačných bodov, t.j. 38 402 bodov globálnej triangulácie ( $\Delta B = 1.125^\circ$ ) a 5 331 bodov pre lokálne zjemnenie ( $\Delta B = 0.28125^\circ$ ) v oblasti Európy (Obr.8). Vstupné údaje v kolokačných bodoch boli vygenerované rovnakým spôsobom ako v prvom experimente (množina A).

Na výpočet bolo použitých 16.5 GB internej pamäte paralelného počítača TAJFUN v *ICM Varšava*. Celkový čas výpočtu trval približne 7 hod. Lokálne zjemnenie si vyžiadalo zvýšenie počtu iterácií na riešenie sústavy algebraických rovníc. 25 iterácií metódou Bi-CGSTAB bez „predpodmieňovania“ bolo potrebných na dosiahnutie predpísanej tolerancie  $\varepsilon$  absolútnej chyby rezídua. Výsledkom tretieho experimentu je priebeh kvázigeoidu vo zvolenej časti Európy. Porovnanie variačného riešenia s geopotenciálnym modelom EGM-96 hovorí o presnosti dosiahnutého numerického výsledku (Tab.4+Obr.9+Obr.10). Je zrejmé, že lokálnym zjemnením triangulácie došlo k presnejšiemu riešeniu v danej oblasti. Tento fakt je motivujúci pre spresňovanie globálneho ako aj lokálneho riešenia NGOÚ pomocou adaptívneho zjemňovania v budúcnosti.

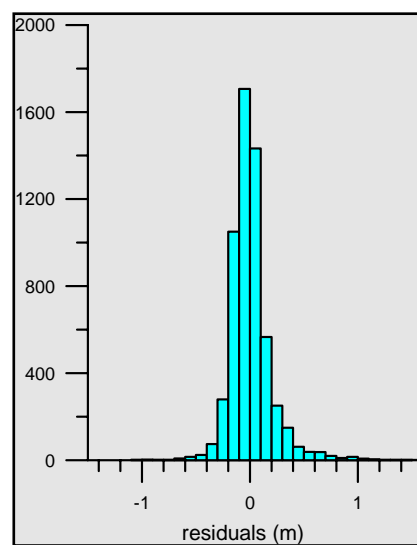




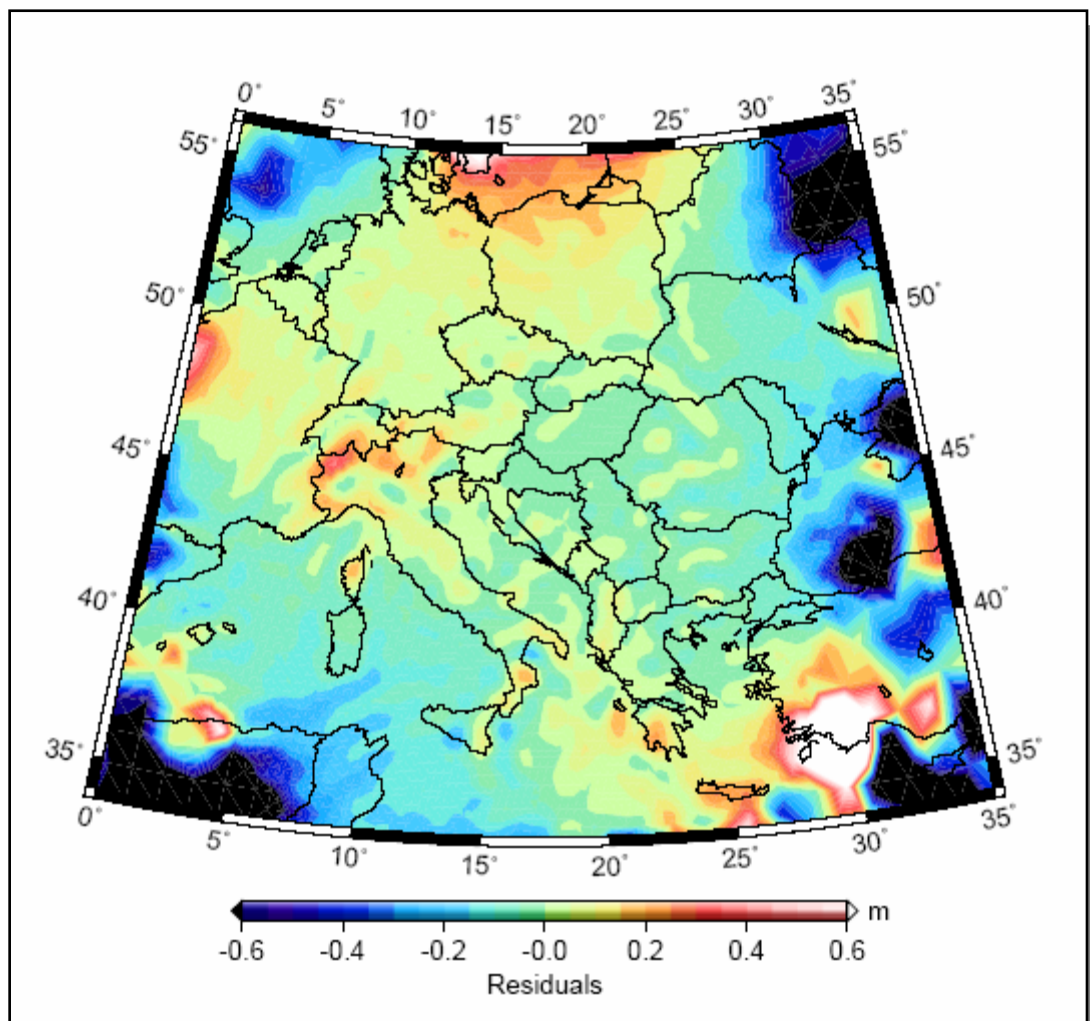
Obr.8: Lokálne zjemnenie triangulácie v oblasti Európy

<i>ŠTATISTICKÉ CHARAKTERISTIKY</i> (v oblasti lokálneho zjemnenia)	
<b><i>Rezíduá: (EGM-96) - (MOP)</i></b>	
<i>Počet bodov</i>	5 764
<i>Stredná hodnota</i>	0.006 m
<i>Štand. odchýlka</i>	0.195 m
<i>Max. rezíduum</i>	1.530 m
<i>Min. rezíduum</i>	-1.035 m

Tab.4



Obr.9: Histogram rezíduí



Obr.10: Porovnanie lokálneho variačného riešenia s EGM-96 v oblasti Európy

## 6. Prínos dizertačnej práce pre rozvoj geodézie

Výsledky dizertačnej práce potvrdili možnosť využitia MOP na riešenie NGOÚ. Navrhovaný spôsob umožňuje nájsť približné (variačné) riešenie NGOÚ priamo na členitom fyzickom povrchu Zeme, kde klasické riešenie nie je známe. Praktické riešenia numerických experimentov a ich porovnanie s úplne odlišnou metódou určovania geopotenciálnych modelov (pomocou plošných sférických funkcií a vyčíslovania geopotenciálnych koeficientov) poukazujú na pomerne vysokú presnosť dosiahnutých výsledkov. Z tohto hľadiska predstavuje navrhované riešenie alternatívny spôsob k určovaniu globálneho tiažového poľa Zeme.

Využitie povrchových tiažových porúch ako Neumannových OP má evidentný praktický význam. Gravimetrické merania netreba sprevádzať s finančne a časovo náročnou niveláciou. Elipsoidické výšky získané z družicových observácií sú postačujúcou výškovou informáciou. Uvedená výhoda je zrejma najmä v hornatých oblastiach.

Tretí numerický experiment poukázal na možnosť dosiahnutia presnejšieho riešenia vo vybranej oblasti pomocou lokálneho zjemnenia triangulácie. Táto skutočnosť pôsobí motivujúci pre spresňovanie globálneho ako aj lokálneho riešenia NGOÚ pomocou adaptívneho zjemňovania v závislosti od výrazných zmien vstupných dát (ťažových porúch aj členitosti terénu).

Hlavným limitujúcim faktorom pre navrhované riešenie sú enormné nároky na potrebné výpočtové vybavenie (paralelné počítače). Avšak aj tieto požiadavky je možné čiastočne redukovať, napr. elimináciou vzdialených zón a následným zriadením určujúcej matice. Okrem toho presnosť variačného riešenia je možné zvyšovať použitím, napr. interpolačných funkcií vyššieho stupňa, vyšším stupňom Gaussových kvadrátúr, prípadne aplikáciou inej numerickej metódy ako je kolokácia.

Navrhované riešenie NGOÚ pomocou MOP má aj širší význam pre rozvoj geodézie. Určovanie poruchového potenciálu a jeho následná transformácia na geopotenciálne kóty v bodoch priamo na zemskom povrchu môžu byť užitočné pri zjednocovaní výškových systémov ako aj pri zisťovaní systematických tendencií v nivelačných ťahoch. Aplikácia MOP umožňuje použiť podoblasti s rôznymi typmi OP. Kombinácia Dirichletových OP pre oblasť morí a oceánov a Neumannových OP pre oblasť pevnín poskytuje nové možnosti pri využití MOP na riešenie geodetickej okrajovej úlohy.

## 7. Záver

Dizertačná práca poukazuje na možnosť využitia metódy okrajových prvkov na riešenie Neumannovej geodetickej okrajovej úlohy. Navrhované riešenie vedie k približnému (variačnému) riešeniu priamo na fyzickom povrchu Zeme. Dosiahnuté výsledky praktických experimentov a ich porovnanie s geopotenciálnym modelom EGM-96 ukazujú pomerne vysokú presnosť navrhovaného riešenia, čo naznačuje zrejme perspektívy v oblasti globálneho ako aj lokálneho určovania tiažového poľa Zeme.

Prezentované výsledky potvrdili možnosť využitia Neumannových okrajových podmienok v tvare povrchových tiažových porúch pre praktické účely. MOP založená na diskretizácii okrajových integrálnych rovníc pomocou metódy kolokácie s lineárnymi bázovými funkciami sa osvedčila ako veľmi efektívna a vhodná numerická metóda na riešenie NGOÚ. Príklad lokálneho zjemnenia riešenia naznačil nové možnosti na dosiahnutie presnejších výsledkov.

Na záver môžeme konštatovať, že dosiahnuté výsledky prezentovanej dizertačnej práce a získané numerické skúsenosti pôsobia motivujúco pre ďalšiu výskumnú činnosť v blízkej budúcnosti. Vytvorený algoritmus a výpočtový program tvoria základ pre ďalšie numerické experimenty. Dúfame, že navrhované riešenie bude čoskoro aplikovateľné na presné určovanie priebehu kvázigeoidu v záujmových oblastiach, napr. na území Slovenska.



## Zoznam publikovaných prác

Čunderlík, R., Mikula, K., Mojzeš M.: *3D BEM application to Neumann geodetic BVP using the collocation with linear basis functions*. In: [Proceedings of contributed papers and posters, ALGORITMY 2002](#), Conference on Scientific Computing, Vysoké Tatry-Podbanské, Slovakia, 2002, s. 268-275.

Čunderlík, R., Mikula, K., Mojzeš M.: *Numerical Solution of Neumann Geodetic Boundary Value Problem*. In: Proceeding of the IAG Symposium G11, Scientific Assembly of IAG, Budapest, 2001, CD verzia.

Čunderlík, R.: *Využitie metódy okrajových prvkov na určovanie Globálneho kvázigeoidu Zeme*. In: Sborník příspěvků doktorandů sekce Geodézie a kartografie, Brno, 2001, s. 9-12.

Mojzeš, M., Gerhátová, L., Čunderlík, R.: *Presnosť gravimetrického mapovania v mierke 1:25 000 na území Slovenska*. In: Sborník příspěvků zo semináře s mezinárodní účastí: Prostorový referenční rámec v České republice – správa a modernizace, VUT FS Brno, 2001, s. 80-85.

Čunderlík, R., Mikula, K., Mojzeš M.: *The Boundary Element Method Applied to the Determination of the Global Quasigeoid*. In: [Proceedings of contributed papers and posters, ALGORITMY 2000](#), Conference on Scientific Computing, Vysoké Tatry-Podbanské, Slovakia, 2000, s. 301-308.

Mojzeš, M., Czarnecki, K., Čunderlík, R.: *Geodynamics of the Tatra Mountains*. In: Proceedings of the EGS Symposium G12, XXV GA of EGS, Nice. Reports on Geodesy 6 (52), 2000, s. 35-38.

Mojzeš M., Čunderlík, R.: *Monitorovanie pohybov geologických celkov pomocou techniky GPS*. In: Sborník referátů zo semináře s mezinárodní účastí: GPS a speciální geodetické práce. VUT FS Brno, Czech Republic, 2000, s. 70-78.

Čunderlík, R.: *Lokálny gravimetrický kvázigeoid v Tatrách*. In: Sborník příspěvků doktorandů sekce Geodézie a kartografie, XI. Medzinárodní vědecká konference, VUT FS Brno, 1999, s. 63-66

## Literatúra

- Balaš, J., Sládek, J., Sládek, V.: *Analyza napětí metodou hraničních integrálních rovnic*. VEDA, Bratislava, 1985.
- Barrett, R., Berry, M., Chan, T. F., Demmel, J., Donato, J., Dongarra, J., Eijkhout, V., Pozo, R., Romine, C., Van der Vorst, H.: *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*. <http://www.netlib.org/templates/Templates.html>, 1994.
- Brož, P., Procházka P.: *Metoda okrajových prvku v inženýrské praxi*. Teoretická knižnice inženýra, SNTL, Praha, 1987.
- Brebbia, C. A., Telles, J. C. F., Wrobel, L. C.: *Boundary Element Techniques, Theory and Applications in Engineering*. Springer-Verlag, New York, 1984.
- EROS Data Centre: *GTOPO-30*, <http://edcdaac.usgs.gov/gtopo30/gtopo30.html>
- Grafarend, E., W., Ardalán, A., A.: *World Geodetic Datum 2000*. Journal of Geodesy, No. 73: 611-623, 1999.
- Hartmann, F.: *Introduction to Boundary Elements. Theory and Applications*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- Heiskanen, W. A., Moritz, H.: *Physical Geodesy*. W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1967.
- Helmert, F.R.: *Die mathematischen und physicalischen Theorien der höheren Geodäsie*. Vol. 2, B.G. Teubner, Leipzig, 1884.
- Holota, P.: *Variational methods and subsidiary conditions for geoid determination*. In: Proceedings of the Second Continental Workshop on the Geoid in Europe. Reports of the Finish Geodetic Institute, Masala, 1998.
- Holota, P.: *Variational methods in geoid determination and function bases*. Physics and Chemistry of the Earth part A-solid Earth and Geodesy, No: 24 (1): 3-14. Pergamon-Elsevier Science Ltd, Oxford, 1999.
- Hörmander, L.: *The Boundary Problems of Physical Geodesy*. The Archive for Rational Mechanics and Analysis, 62, 1976.
- Janák, J.: *Koncepcia určovania presného kvázigeoidu*. PhD Thesis, SvF STU, Bratislava, 1999.
- Kearsley, A.W., Forsberg, R.: *Taylored Geopotential Models - Application and Shortcomings*. In: Manuscripta Geodaetica, Vol. 15, pp. 151-158, 1990.

- Klees, R.: *On Singular Surface Integrals in Physical Geodesy*. <http://www.geo.tudelft.nl/fmr/deosletter/97-1/html/art2/art2.html>, DEOS Progress Letter 97/1, Delft University Press, 1997.
- Klees, R., Gelderen M., Lage C., Schwab C.: *Fast numerical solution of the linearized Molodensky problem*. Seminar für Angewandte Mathematik, Eigenössische Technische Hochschule, Zürich, Switzerland, 1999.
- Klees, R., Lehmann R.: *Calculation of strongly singular and hypersingular surface integrals*. *Journal of Geodesy*, No: 72 (9): 530-546, 1998.
- Klees, R., Lehmann R.: *Integration of a priori gravity field models in boundary element formulations to geodetic boundary value problems*. <http://www.geo.tudelft.nl/fmr/deosletter/98-1/art2.pdf>, DEOS Progress Letter 98/1, Delft University Press, 1998.
- Kirkup, S.: *The BEM for Laplace Problems*. Manual. <http://www.boundary-element-method.com/bemlap/manual.htm> , Integrated Sound Software, 2000.
- Laursen, M.E., Gellert, M.: *Some Criteria for Numerically Integrated Matrices and Quadrature Formulas for Triangles*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 12, pp: 67-76, 1978.
- Lehmann R.: *Fast space-domain evaluation of geodetic surface integrals*. *Journal of Geodesy*, No: 71 (9): 533-540, 1997.
- Lemoine, F.G., Kenyon, S.C., Factor, J.K., Trimmer, R.G., Pavlis, N.K., Chinn, D.S., Cox, C.M., Klosko, S.M., Luthcke, S.B., Torrence, M.H., Wang, Y.M., Williamson, R.G., Pavlis, E.C., Rapp, R.H., Olson, T.R.: *EGM-96 - The Development of the NASA GSFC and NIMA Joint Geopotential Model*. <http://cddisa.gsfc.nasa.gov/926/egm96/> , 1996.
- Lucquin, B., Pironneau, O.: *Introduction to Scientific Computing*. John Wiley, 1998.
- Martinec, Z.: *Boundary value problems for gravimetric determination of a precise geoid*. *Lecture Notes in Earth Sciences*. Springer, 1998.
- Molodenskij, M.S., Jeremejev, B.F., Jurkina, M.I.: *Methods for study of the external gravitational field and figure of the Earth*. Israel program for scientific translations, Jerusalem, 1962 (translated from Russian original, Moscow, 1960).
- Moritz, H.: *Advanced Physical Geodesy*. Helbert Wichmann Verlag, Karlsruhe, Germany, 1980.
- Moritz, H.: *Geodetic reference system 1980*. *Bulletin Geodesique*, No: 66 (2): 187-192, 1992.
- Moritz, H.: *Introduction to Molodensky's theory*. In: *International School of Advanced Geodesy*, Erice, Italy, 1974.

- Pavllis, N.K., Kenyon, S.C., Manning, D.M.: *Gravity anomaly data*. <http://www.ngdc.noaa.gov/seg/potfld/gravity/data/global/egm96/>, 1996.
- Rapp, R.H.: *Global Geoid Determination*. In: *Geoid and its geophysical interpretations*. CRC Press, 1994.
- Rapp, R.H.: *Past and future development in geopotential modelling*. In: *Geodesy on the Move, Gravity, Geoid, Geodynamics and Antarctica*, Proceeding papers for IAG Scientific Assembly in Rio de Janeiro in Brazil. Springer, Heidelberg, 1998.
- Rapp, R.H.: *The Use of Potential Coefficient Models in Computing Geoid Undulation*. In: *International School for the Determination and Use of the Geoid*. Milano, 1994.
- Rektorys, K.: *Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky*. SNTL, Praha, 1974.
- Rektorys, K. a kol.: *Přehled užití matematiky*. SNTL, Praha, 1973.
- Torge, W.: *Gravimetry*. Walter de Gruyter, Berlin · New York, 1989.
- Schatz, A. H., Thomée, V., Wendland, W. L.: *Mathematical Theory of Finite and Boundary Element Methods*. Birkhäuser Verlag, Basel · Boston · Berlin, 1990.
- Schwartz, K.P., Sideris, M.G. and Forsberg, R.: *The Use of FFT techniques in physical geodesy*. *Geophysical Journal International*, Vol: 100 (3): 485-514, 1990.
- Sideris, M. G.: *Geoid determination by FFT techniques*. In: *International School for the Determination and Use of the Geoid*. Milano, 1994.
- Stokes, G.G.: *On the variation of gravity at the surface of the Earth*. *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, 1849.
- Vaniček, P., Krakiwsky, E.: *Geodesy – The Concepts*. The North-Holland Publishing Company, Amsterdam · New York · Oxford, 1982.
- Vaniček, P, Martinec, Z.: *The Stokes-Helmert scheme for the evaluation of a precise geoid*. *Manuscripta Geodetica*, Vol. 19, Springer-Verlag, 1994.
- Vaniček, P, Huang, J., Novák, P., Pagiatakis, S., Véronneau, M., Martinec, Z., Featherstone, W. E.: *Determination of the boundary values for the Stokes-Helmert problem*. *Journal of Geodesy*, No: 73 (4): 180-192, 1999.

## Summary

The determination of the external gravity field is usually formulated in terms of the geodetic boundary value problem for the Laplace equation. The present concepts use the fundamental gravimetric equation with input gravity anomalies as a boundary condition (BC), i.e. the Newton BC. A combination of gravimetric and satellite measurements allows to define the Neumann BC in the form of surface gravity disturbances that correspond to derivatives of the unknown disturbing potential.

The presented thesis introduces a 3D application of the boundary element method (BEM) to the Neumann geodetic boundary value problem (NGBVP). It represents a new approach to the solution of the geodetic boundary value problem. NGBVP describes the exterior oblique derivative problem for the Laplace equation. As the Neumann BC are defined on the real Earth's surface, a classical solution is unknown. An application of BEM enables to obtain its approximate variational solution.

The proposed 3D BEM application to NGBVP uses the collocation technique with linear basis functions for deriving the linear system of equations from the boundary integral equations. The integrals with regular integrands, that represent non-diagonal coefficients, are approximated by the Gaussian quadrature formulas defined on a triangle. The non-regular integrals (singular elements) arise for diagonal components. They require special evaluation techniques in order to handle the singularity of the kernel function. The nonstationary iterative method BiConjugate Gradient Stabilized (BiCGSTAB) is implemented for solving the large linear system. The disturbing potential on the Earth's surface as a direct result is transformed to the height anomalies using the modified Bruns formula in an iterative way.

The numerical experiments of the thesis deal with the global as well as local quasigeoid modelling. The global treatment is based on a discretization of the Earth's surface by an approximately homogenous triangulation of the topography. With respect to a giant size of the Earth and in order to get accuracy as high as possible, computing on parallel computers is necessary. The final large scale computation has been accomplished on the high-speed parallel computers at ICM Warsaw. The Global Quasigeoid Models as the numerical results for two input data sets are compared with the geopotential model EGM-96. The local treatment is based on the local refinements of the global triangulation. The obtained numerical results show an increase of accuracy inside the refined area. This fact is motivating for our further investigations. Adaptive refinement procedures indicate new opportunities for the global as well as local gravity field modelling.