

Slovenská technická univerzita v Bratislave, Stavebná fakulta

Ing. Martin Pitoňák

Autoreferát dizertačnej práce

**VYUŽITIE DRUŽICOVEJ GRADIENTOMETRIE PRI RIEŠENÍ
GEODETICKÝCH OKRAJOVÝCH ÚLOH**

na získanie akademického titulu doktor (philosophiae doctor, PhD.)

v doktorandskom študijnom programe: 3636 geodézia a kartografia

Bratislava 2014

Dizertačná práca bola vypracovaná v dennej forme doktorandského štúdia na Katedre geodetických základov Stavebnej fakulty Slovenskej technickej univerzity v Bratislave.

Predkladateľ: Ing. Martin Pitoňák
Katedra geodetických základov
Stavebná fakulta, STU v Bratislave
Radlinského 11, 813 68 Bratislava

Školiteľ: doc. Ing. Juraj Janák, PhD.
Katedra geodetických základov
Stavebná fakulta, STU v Bratislave
Radlinského 11, 813 68 Bratislava

Konzultant: doc. Ing. Ladislav Husár, PhD.
Katedra geodetických základov
Stavebná fakulta, STU v Bratislave
Radlinského 11, 813 68 Bratislava

Oponenti: prof. Ing. Pavel Novák, Ph.D.
Katedra matematiky
Fakulta aplikovaných vied, ZČU v Plzni
Univerzitní 22, 306 14 Plzeň

doc. RNDr. Roman Pašteka, PhD.
Katedra aplikovanej a environmentálnej geofyziky
Prírodovedecká fakulta, UK v Bratislave
Mlynská dolina, pavilón G, 842 15 Bratislava 4

Ing. Róbert Čunderlík, PhD.
Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Stavebná fakulta, STU v Bratislave
Radlinského 11, 813 68 Bratislava

Autoreferát bol rozoslaný:

Obhajoba dizertačnej práce sa koná
na Katedre geodetických základov SvF, STU v Bratislave, Radlinského 11, 813 68 Bratislava

.....
Prof. Ing. Alojz Kopáčik, PhD
dekan Stavebnej fakulty STU
Radlinského 11, 813 68 Bratislava

Obsah

1 Úvod	1
2 Ciele dizertačnej práce	2
3 Súčasný stav riešenej problematiky	3
4 Numerický experiment	4
4.1 Testovacia oblasť	4
4.2 Výpočtová schéma	4
4.3 Príprava terestrických dát	5
4.4 Pokračovanie nadol a transformácia GOCE dát na anomálie tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu	6
4.4.1 Regularizácia	8
4.4.2 Praktická aplikácia	10
4.5 Formulácia okrajovej úlohy s Dirichletovými a Newtonovými okrajovými podmienkami ..	11
4.6 Riešenie geodetickej okrajovej úlohy s Dirichletovými a Newtonovými okrajovými podmienkami pomocou MKP	12
4.6.1 Praktické riešenie geodetickej okrajovej úlohy v softvéri ANSYS	15
4.6.2 Testovanie modelov kvázigeoidov na GNSS/nivelačných bodoch a porovnanie s GGM EGM2008	16
5 Prínos pre vedu a prax	18
6 Záver	19
Summary	20
Literatúra	21
Zoznam publikovaných prác z danej problematiky	27

1 Úvod

Poznávanie gravitačného poľa Zeme zaznamenalo v posledných rokoch prudký rozvoj. Je to dôsledok nástupu družicových metód na mapovanie globálneho tiažového poľa Zeme. Prvou takouto misiou bola družica CHAMP (CHALLENGING Mini-satellite Payload; Reigber a kol. (2002)), aj keď bola primárne určená na mapovanie magnetického poľa Zeme. Dvojica družíc GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment; Tapley a kol. (2004)) umožnila monitorovať časové zmeny tiažového poľa Zeme. Prvá gradientometrická misia bola GOCE (Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer; ESA (1999a)), ktorá merala druhé derivácie gravitačného potenciálu na nízkej dráhe. Okrem iných cieľov pomohla určiť globálny geoid (kvázigeoid) s presnosťou 1 - 2 cm na vlnových dĺžkach ≈ 80 km. Družicová gravimetria a gradientometria je schopná zachytiť iba dlhovlnnú a strednovlnnú zložku tiažového poľa Zeme, čo je spôsobené výškou dráhy družice nad povrchom Zeme.

Okrem globálnych družicových dát sú k dispozícii aj lokálne terestrické gravimetrické merania. Vďaka novým typom meraní sa začali rozvíjať nové teórie a stratégie spracovania (napr. predlžovanie dát a ich transformácia na iné veličiny tiažového poľa), ktoré umožňujú porovnávať družicové dát s terestrickými, ich vzájomnú validáciu a kombináciu. Na predlžovanie a transformáciu veličín gravitačného poľa Zeme možno použiť jeden z troch integrálnych vzťahov (Poissonov, Hotineho a Pizzettiho). V prípade družicovej gradientometrie sa využívajú druhé derivácie uvedených vzťahov. Pomocou uvedených vzťahov možno opísať vzájomné vlastnosti veličín gravitačného poľa v rôznych výškach v priestore mimo zemských hmôt.

Ak predĺžujeme (pokračujeme) družicové dáta z dráhy družice na fyzický povrch Zeme, hovoríme o pokračovaní nadol. Pri tomto spôsobe riešime inverziu uvedených integrálnych vzťahov. Tento typ inverznej úlohy je zle podmienený kvôli veľkému číslu podmienenosti matice koeficientov normálnych rovníc a kvôli chybám meraní, ktoré negatívne ovplyvňujú výsledný odhad. Táto neželaná vlastnosť sa dá redukovať pomocou stabilizácie/regularizácie riešenia. Na tento úkon boli definované mnohé metódy (pozri napr. Xu a kol. (2006a)).

Dizertačná práca sa venuje inverzii druhých derivácií Stokesovej a Hotineho funkcie vo sférických súradniciach, ako aj súradniciach v lokálnom súradnicovom systéme orientovanom na sever. Na stabilizáciu riešenia boli využité Tichonovova regularizácia (Tikhonov, 1963a,b) a metóda TSVD (Hansen, 1990). Uvedené metódy boli testované pri získavaní anomálii tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu a tiažových porúch z prvkov poruchového tenzora z reálneho merania (produkt EGG_TRF_2) a aj generovaných z globálneho geopotenciálneho modelu TIM-r1.

Získané poznatky zo stabilizácie riešenia inverzie druhých derivácií Pizzettiho integrálu boli aplikované pri kombinácii družicových a terestrických dát. Táto časť práce sa venuje výpočtu regionálneho kvázigeoidu vo Francúzsku s využitím metódy konečných prvkov. Družicové dáta však neboli pokračované na fyzických povrch Zeme, ale len do výšky 150 km, aby sa minimalizovali chyby z procesu predlžovania družicových dát a aby táto okrajová podmienka nepotláčala riešenie získané metódou konečných prvkov. Uvedená schéma ponúka ďalšiu alternatívu na modelovanie tiažového poľa Zeme z terestrických a družicových meraní k už publikovaných (napr. kolokácia metódou najmenších štvorcov Yildiz (2012), radiálne bázové funkcie Wittwer (2009)).

2 Ciele dizertačnej práce

Hlavným cieľom dizertačnej práce je kombinovať reálne dáta z družicovej gradientometrie a terestrické dáta pri riešení geodetickej okrajovej úlohy pomocou metódy konečných prvkov. Vytvorená výpočtová schéma má poukázať na ďalšie možnosti využitia prvkov gravitačného tenzora meraných družicou GOCE pri modelovaní regionálneho tiažového poľa Zeme. Špecifické ciele:

1. Analýza súčasného stavu využitia dát družicovej gradientometrie pri modelovaní regionálneho tiažového poľa Zeme.
 - (a) Opis súčasného stavu.
 - (b) Stručná charakteristika prvej gradientometrickej družicovej misie GOCE.
 - (c) Opis vybraných metód na stabilizáciu (regularizáciu) riešenia inverzných úloh.
 - (d) Charakteristika dostupných integrálnych transformačných vzťahov na získanie prvkov poruchového tenzora vo sférickom súradnicovom systéme a v lokálnom súradnicovom systéme orientovanom na sever z anomálií tiažového zrýchlenia a tiažových porúch.
 - (e) Formulácia a riešenie geodetickej okrajovej úlohy s Dirichletovými a Newtonovými okrajovými podmienkami pomocou metódy konečných prvkov.
2. Odvodenie integrálnych vzťahov na výpočet prvkov poruchového tenzora vo sférických súradniciach z tiažových porúch.
 - (a) Odvodenie uvedených integrálnych vzťahov, ich numerické overenie pomocou metódy numerickej integrácie a opis vlastností odvodených integračných jadier.
3. Numerické experimenty vykonané pomocou syntetických dát z geopotenciálnych modelov, ako aj s využitím reálnych dát.
 - (a) Priama inverzia integrálnych vzťahov na získanie prvkov poruchového tenzora vo sférických súradniciach z anomálií tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu a z tiažových porúch s využitím syntetických dát a zašumených syntetických dát.
 - (b) Priama inverzia integrálnych vzťahov na získanie prvkov poruchového tenzora v lokálnom súradnicovom systéme orientovanom na sever z anomálií tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu a z tiažových porúch s využitím syntetických dát a zašumených syntetických dát.
 - (c) Priama inverzia integrálnych vzťahov na získanie prvkov poruchového tenzora v lokálnom súradnicovom systéme orientovanom na sever z anomálií tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu a z tiažových porúch s využitím reálnych dát.
 - (d) Praktický výpočet regionálneho kvázigeoidu v oblasti Francúzska z GOCE a terestrických meraní pomocou metódy konečných prvkov a jeho testovanie na vybraných GNSS/nivelačných bodoch.
4. Softvérové zabezpečenie riešenej problematiky, t.j. príprava skriptov na:
 - (a) konverziu dát z misie GOCE z formátu XML do dátového formátu,
 - (b) praktické riešenie integrálnych vzťahov na získanie prvkov poruchového tenzora v lokálnom súradnicovom systéme orientovanom na sever z anomálií tiažového zrýchlenia a z tiažových porúch,

- (c) tvorbu vstupného súboru do prostredia ANSYS s geometriou a okrajovými podmienkami, na automatizované načítanie výstupov z prostredia ANSYS a výpočet kvázi-geoidu.

3 Súčasný stav riešenej problematiky

Začiatky gradientometrie siahajú približne na začiatok dvadsiateho storočia Eötvös (1906), kedy maďarský fyzik Loránd Eötvös modifikoval torzné váhy. Prvé princípy družicových gradientometrov boli opísané na konci a 50-tych rokov minulého storočia napr. Carroll a Savet (1959); Rummel a kol. (1979). Nová éra v poznávaní gravitačného poľa Zeme sa začala 17. marca 2009. V tento deň vypustila Európska vesmírna agentúra (ESA) v rámci programu ESA Living Planet ESA (1999b) na obežnú dráhu Zeme družicu GOCE (Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer) (napr. ESA (1999a); Drinkwater a kol. (2007)). Družica GOCE tak doplnila už existujúce misie CHAMP (CHALLENGING Mini-satellite Payload; Reigber a kol. (2002)) a GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment; Tapley a kol. (2004)). Jej jedinečnosť bola v tom, že na palube niesla¹ družicový gradientometer, prístroj na meranie druhých derivácií gravitačného potenciálu.

Z vývojom novým meracích systémov úzko súvisel aj pokrok v geodetickej teórii. Bolo publikovaných mnoho prác zaoberajúcich sa využitím družicovej gradientometrie napr. Moritz (1967), Moritz (1971), Reed (1973), Heck (1979), Rummel (1986), Koop a Stelpstra (1989), Xu (1992), Thalhammer (1995), van Gelderen a Rummel (2001, 2002), Li (2002, 2005), Denker (2003), Haagmans a kol. (2003), Kern a kol. (2003), Martinec (2003), Bölling a Grafarend (2005), Kern a Haagmans (2005), Tóth a kol. (2006), Janák a kol. (2009) a Eshagh (2011c). Uvedené práce boli publikované pred dostupnosťou reálnych družicových gradientometrických dát, čo však neznižuje ich prínos.

Iné práce venujúce sa regularizácii riešenia a vyhladeniu družicových gradientometrických dát pomocou izostaticky kompenzovanej topografie, boli publikované napr. nasledujúcimi autormi Heck a Wild (2005), Wild a Heck (2005), Wild a Heck (2008), Janák a Wild-Pfeiffer (2010), Janák a kol. (2012), Grombein a kol. (2011). Teraz práce zaoberajúce sa regularizáciou pokračovania nadol a transformácie prvkov poruchového tenzora napr. Xu (1992), Xu a Rummel (1994), Xu (1998).

Kolokácia metódou najmenších štvorcov bola použitá napr. v prácach Tscherning a kol. (1990), Tscherning (1993), Arabelos a Tscherning (1990, 1993, 1995), Tscherning a Arabelos (2011), Yildiz (2012). Radiálne bázové funkcie boli použité napr. v Eicker a kol. (2013), Schmidt a kol. (2007), Klees a kol. (2008).

V predkladanej práci využívame na kombináciu družicových a terestrických dát numerickú metódu na riešenie okrajových úloh - metódu konečných prvkov. Numerické metódy na riešenie geodetických okrajových úloh zaznamenali prudký rozvoj s nástupom výpočtovej techniky. Prvé štúdie boli publikované v prácach Junkins a Engels (1979), Meissl (1981), Baker (1988), Shaofeng a Dingo (1991), v ktorých sa zamerali na využitie MKP (metódy konečných prvkov). Metóda okrajových prvkov (hraničných prvkov) bola diskutovaná v Klees (1992), Klees (1993), Klees (1995) a Klees (1997). Holota (1997, 1999), Nesvadba a kol. (2007) a Holota a Nesvadba (2008) sa zaoberali variančnými metódami (Rektorys (1999)). Praktické aspekty uvedených metód boli diskutované napr. v prácach Fašková (2006), Fašková a kol. (2007), Čunderlík a kol. (2008), Čunderlík a Mikula (2010), Šprlák a kol. (2011), Čunderlík a kol. (2012), či Janák a kol. (2014).

¹Družica GOCE zhorela v atmosfére 11. novembra 2013.

4 Numerický experiment

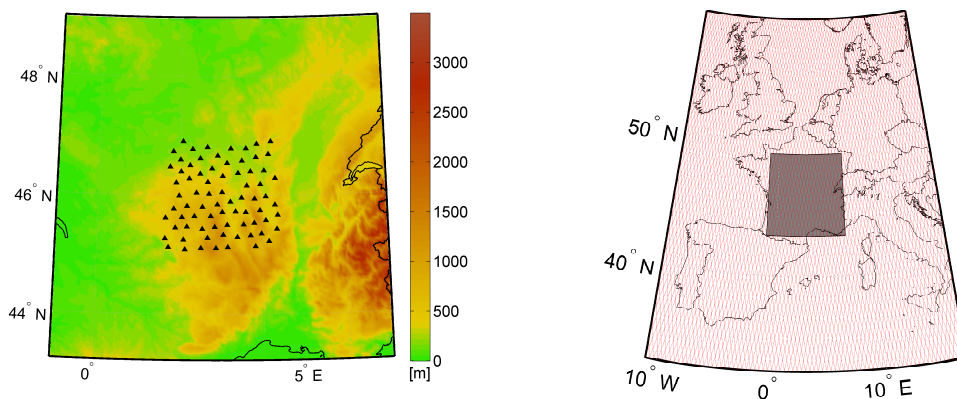
4.1 Testovacia oblasť

Praktická realizácia riešenia inverzie druhých derivácií Pizzettiho integrálu bola vykonaná v oblasti ohraničenej poludníkmi -1° a 7° a rovnobežkami 43° a 49° (pozri obr. 1). Dôvodov na výber oblasti bolo viacero. Hlavným bola dostupnosť terestrických meraní. V spomínanej oblasti sú dostupné anomálie tiažového zrýchlenia vo výške 200000 bodoch (obr. 4 vľavo, hustota 0.59 bodu/ km^2). Ich presnosť sa pohybuje na úrovni $0.25 - 0.75$ mGal. Tieto dáta pochádzajú z Medzinárodného gravimetrického úradu² (Duquenne (2007)). Výsledný model možno otestovať pomocou 75 GNSS/nivelačných bodov, ktoré pochádzajú z Francúzskej základnej siete (French Basic Network; SGN (1996))³ a zo siete NIVAG (Bouron (2004)). Presnosť elipsoidických výšok je $2 - 3$ cm. Uvedené body sú pripojené do Francúzskej národnej nivelačnej siete (NGF-IGN69).

Prvá podmienka bola dôležitá kvôli numerickému experimentu, ktorý využíval na modelovanie regionálneho kvázigeoidu kombináciu družicových a terestrických dát.

Druhou podmienkou bola dostatočná veľkosť testovacej oblasti, kvôli priestorovej rozlíšiteľnosti družicových dát.

Poslednou podmienkou bola členitosť terénu. Na východe testovacej oblasti sa nachádzajú západné Alpy, na juhu sa nachádza pobrežie Stredozemného mora. Nadmorské výšky v testovacej oblasti varírujú od minimálnej hodnoty 0 m po maximálnu hodnotu 3498 m (štatistika z modelu SRTM3 (Rodriguez a kol., 2005)) (pozri obr. 1). Pokrytie dátami z misie GOCE v období od 1.11.2009 po 31.12.2009 sa nachádza na obr. 1 (vpravo).



Obr. 1: Výšky v testovacej oblasti z modelu SRTM3 (Rodriguez a kol. (2005)) a rozloženie GNSS/nivelačných bodov (vľavo) a pokrytie družicovými dátami (vpravo).

4.2 Výpočtová schéma

Výpočtová schéma na modelovanie regionálneho tiažového poľa Zeme sa nachádza na obr. 2. Táto schéma kombinuje družicové a terestrické dáta. Uvedené dáta boli použité ako okrajové podmienky (OP). Okrem anomálii tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu sme použili

²International Gravimetric Bureau.

³Francúzska sieť GPS 1. rádu

aj dáta z globálneho geopotenciálneho modelu (GGM) TIM-r1. Z uvedeného modelu bol generovaný poruchový potenciál do n/k 224 a bol aplikovaný ako OP na bočných hraniciach výpočtovej oblasti. Dáta z GGM ovplyvňujú výsledné riešenie približne do vzdialenosti 0.5° (Fašková a kol. (2010)). Schéma je navrhnutá na modelovanie 3D presného tiažového poľa ohraničeného fyzickým povrchom Zeme a sférickou plochou pod dráhou družice GOCE. Hlavnou výhodou je prirodzená kombinácia družicových a terestrických dát.

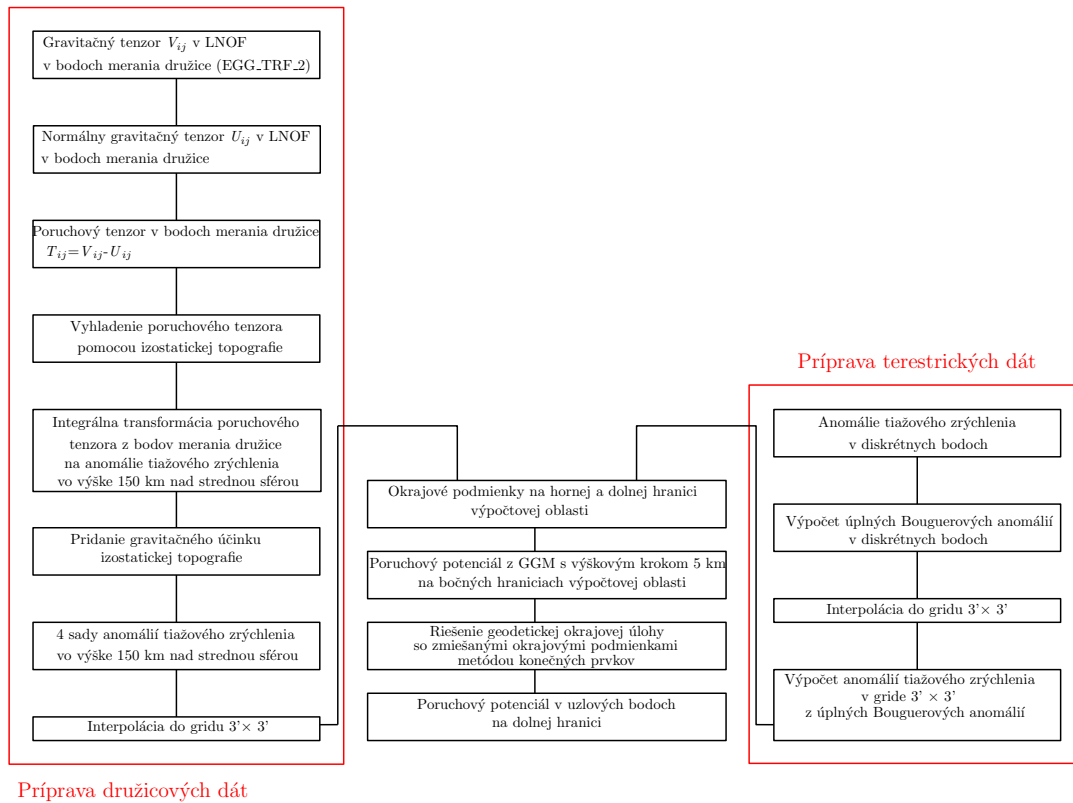
Problematikou vyhladenia gravitačných gradientov meraných družicou GOCE pomocou izostaticky kompenzovanej topografie sa zaoberali najmä Wild a Heck (2008), Janák a Wild-Pfeiffer (2010), Grombein a kol. (2011), Janák a kol. (2012), či Grombein a kol. (2014b). Vo svojich prácach ukázali, že pomocou odstránenia vplyvu gravitačného účinku izostaticky kompenzovanej topografie sme schopný vyhladiť meraný signál približne o 20-30 %. Preto sme skúmali využitie metódy R-C-R (Remove-Compute-Restore) (napr. Forsberg a Tscherning (1997)). V našom experimente sme využili existujúci globálny geopotenciálny model gravitačného potenciálu topografie a izostázi s názvom RWI (Rock-Water-Ice, Grombein a kol. (2014a)). Tento model je poskytovaný v troch variantách (topografický potenciál, izostatický potenciál a izostaticky kompenzovaný topografický potenciál). My sme použili poslednú variantu. Pri výpočte gravitačného účinku izostaticky kompenzovanej topografie bola vykonaná syntéza do n/k 224, pretože všetky výsledky porovnávame s GGM TIM-r1 (n/k 224). Schéma výpočtu pomocou metódy R-C-R je znázornená na obr. 3.

Ďalším dôležitým krokom výpočtovej schémy je pokračovanie nadol a transformácia gravitačného tenzora na anomálie tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu. Transformácia a pokračovanie nadol je vykonané v jednom kroku, s využitím druhých derivácií Pizzettiho integrálneho vzťahu (Pizzetti (1911)). V našom prípade je pokračovanie nadol numericky zle podmienené⁴. Regularizácia (stabilizácia) riešenia je nevyhnutná. Každý meraný prvok gravitačného tenzora môže byť pokračovaný nadol a transformovaný na samostatnú sadu anomálii tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu. To nám umožňuje ľubovoľne kombinovať jednotlivé sady anomálii tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu. Proces prípravy OP na hornej a dolnej hranici je popísaný v kap. 4.3 a 4.4.

4.3 Príprava terestrických dát

Pozemné dáta v testovacej oblasti tvorili anomálie tiažového zrýchlenia v 244009 diskretných bodoch z Medzinárodného gravimetrického úradu a pokrývajú oblasť približne $6^\circ \times 8^\circ$ vo Francúzsku (obr. 4 vľavo). Pre praktické riešenie pomocou MKP bolo potrebné anomálie tiažového zrýchlenia vyinterpolovať do pravidelnej siete. Tento krok bol nutný kvôli lepším vlastnostiam elementov pri diskretizácii výpočtovej oblasti na konečné prvky (elementy), a tým presnejšiemu numerickému riešeniu. Zvolený bol krok interpolácie 3'. Nakoľko anomálie tiažového zrýchlenia majú členitý charakter, nebolo možné ich interpolovať priamo z meraní v diskretných bodoch. Preto sme sa rozhodli vypočítať z anomálii tiažového zrýchlenia úplné Bouguerove anomálie, ktoré majú hladší charakter. Výpočet terénnych korekcií bol vykonaný v programe `dte_dp.c` (Janák a Vaníček (2005)). Následne boli úplné Bouguerove anomálie vyinterpolované do pravidelnej siete s krokom 3' v programe `Surfer 11` (Golden Software (2014)) interpolačnou metódou kriging a z nich spätne vypočítané anomálie tiažového zrýchlenia (obr. 4 vpravo). Výšky bodov v pravidelnom gride s krokom 3' boli použité z modelu SRTM3. Takto získané anomálie tiažového zrýchlenia na fyzickom povrchu Zeme tvorili OP 3. typu (Newtonova OP) na dolnej hranici konečnej oblasti.

⁴Matica koeficientov normálnych rovníc má veľké číslo podmienenosti.



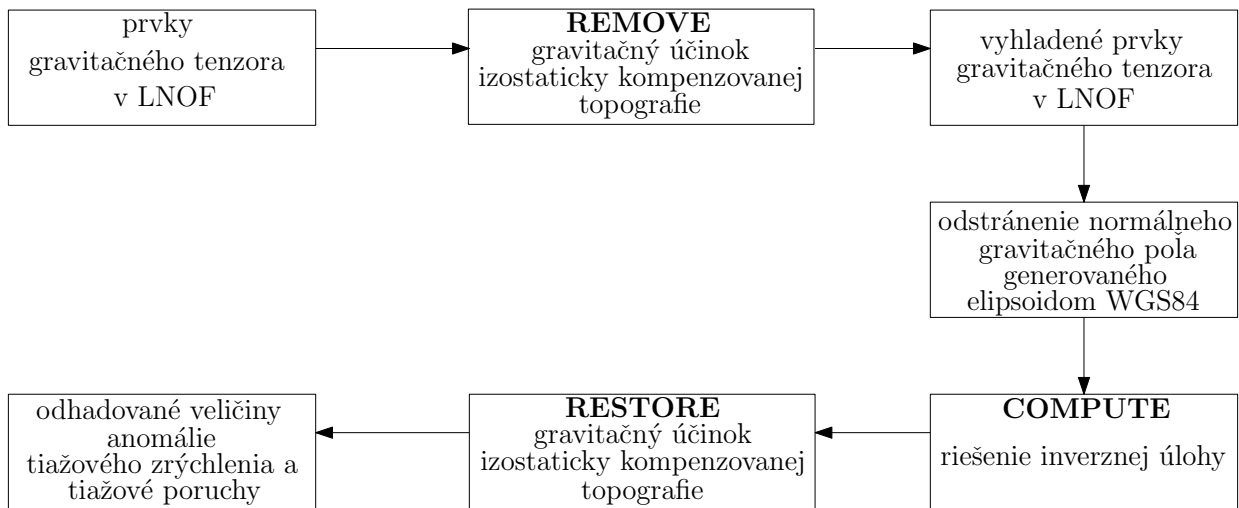
Obr. 2: Schéma metódy na modelovanie regionálneho tiažového poľa využívajúcej kombináciu terestrických a družicových dát (Janák a kol. (2014)).

4.4 Pokračovanie nadol a transformácia GOCE dát na anomálie tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu

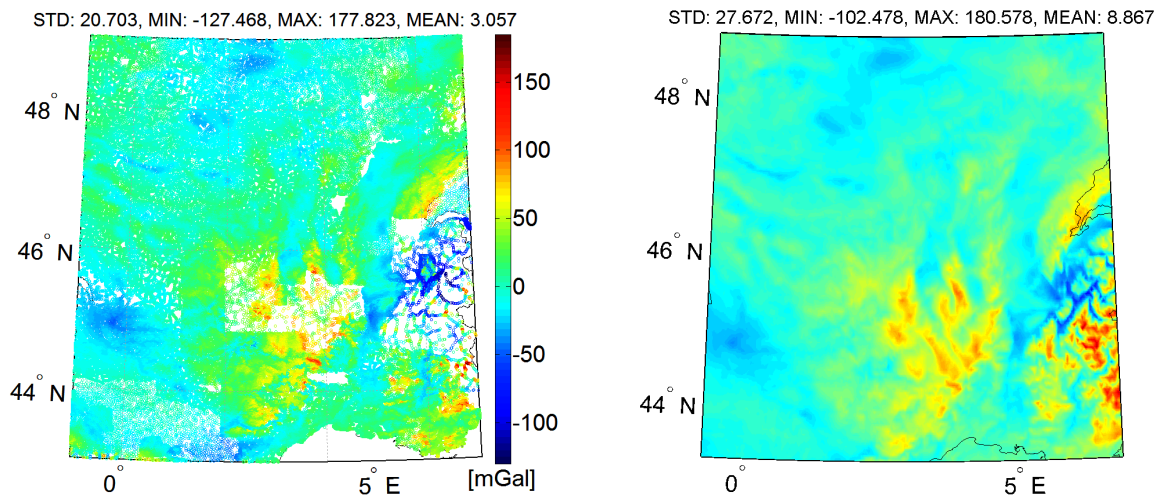
Problematikou modelovania regionálneho tiažového poľa z gradientometrických dát sa zaoberali mnohí autori. Jedným z prvých bol Reed (1973). Vo svojej práci použil inverziu druhých derivácií Pizzettiho integrálu (Pizzetti (1911)) na získanie anomálií tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu. Podobné práce publikovali (Xu (1992, 1998, 2009), Kotsakis (2007), Janák a kol. (2009), Eshagh a Sjöberg (2011), Eshagh (2011a,b) a Shen a kol. (2012)). Uvedené štúdie využívali simulované gradientometrické údaje. Práca s reálnymi dátami je náročnejšia nakoľko nie sú ani v rovnakej výške, ani v pravidelnom gride. V prezentovanom experimente boli použité reálne gradientometrické merania z produktu EGG_TRF_2 (Gruber a kol. (2010)). Ide o kalibrované gravitačné gradienty v LNOF (lokálny súradnicový systém orientovaný na sever). LNOF je pravotočivý súradnicový systém, ktorého počiatok je v ťažisku družice, os x smeruje na sever, os y smeruje na západ a os z v smere sprievodiča ku družici. Vzájomný vzťah medzi prvkami poruchového tenzora a anomáliami tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu možno získať derivovaním Pizzettiho integrálu. V LNOF platí

$$T_{ij}(r, \Omega) = \frac{R}{4\pi} \iint_{\Omega'} \Delta g(R, \Omega') S_{ij}(\psi, r, R) d\Omega', \quad i, j = x, y, z. \quad (1)$$

kde T_{ij} je príslušný prvok poruchového tenzora v LNOF v bode merania družice, Ω reprezentuje horizontálnu polohu, t.j. (φ, λ) , Δg sú anomálie tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu v integračnom bode. S_{ij} sú druhé derivácie zovšeobecnenej Stokesovej funkcie podľa i a j a $d\Omega'$ je plošný integračný element. Druhé derivácie zovšeobecnenej Stokesovej funkcie možno nájsť



Obr. 3: Schéma metódy Remove-Compute-Restore.



Obr. 4: Anomálie tiažového zrýchlenia v diskretných bodoch (vľavo) a v pravidelnom gride s krokom 3' (vpravo). Obe mapy majú rovnakú farebnú stupnicu.

v Wolf a Denker (2005); Wolf (2007). Žiaden z týchto vzťahov nie je singularný za predpokladu, že $r \neq R$. Vyšetrovanie singularít bolo vykonané v práci Eshagh (2009).

Rovnica 1 sa z matematického hľadiska nazýva integrálna Fredholmova rovnica prvého druhu (pozri Aster et al. (2005), Press a kol. (1992)). Inverzia⁵ a diskretizácia uvedenej rovnice vedie k numerickej nestabilite riešenia. To znamená, že riešenie je veľmi náchylné na náhodné chyby meraní a matica koeficientov normálnych rovníc je zle podmienená. Po diskretizácii môžeme rovnicu (1) prepísať pomocou Gauss-Markovho modelu do tvaru

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{\epsilon}, \quad (2)$$

kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times K}$ je matica plánu, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{K \times 1}$ je vektor neznámych (odhadovaných) parametrov, $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^{M \times 1}$ je vektor meraní a vektor náhodných chýb $\boldsymbol{\epsilon} \in \mathbb{R}^{M \times 1}$ s nulovou strednou hodnotou a kovariančnou maticou $\sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1}$, \mathbf{P} je matica váh a σ_0 je jednotková stredná chyba. Odhad vektora

⁵Odhadujeme anomálie tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu, ktoré sú na pravej strane rovnice 1 z prvkov poruchového tenzora na ľavej strane rovnice

neznámých parametrov a kovariančnej matice pomocou MNS získať zo známych vzťahov

$$\mathbf{x}_{LSM} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}, \quad (3)$$

$$\mathbf{D}_{\mathbf{x}_{LSM}} = \sigma_0^2 \mathbf{N}^{-1}. \quad (4)$$

Zavedme do rovnice (3) substitúciu $\mathbf{b} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}$ a dostaneme

$$\mathbf{x}_{LSM} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{b}. \quad (5)$$

Maticu koeficientov normálnych rovníc môžeme rozložiť pomocou SVD (singular value decomposition) do tvaru

$$\mathbf{N} = \mathbf{U} \mathbf{W} \mathbf{V}^T. \quad (6)$$

Jednotlivé matice sú štvorcové a s rozmermi $K \times K$. Ďalej platí $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}$, $\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{V} \mathbf{V}^T = \mathbf{I}$, $\text{diag}(\mathbf{W}) = (\lambda_1^{sing} \lambda_2^{sing} \dots \lambda_K^{sing})$, λ_i^{sing} sú singulárne čísla matice \mathbf{N} usporiadané od najväčšieho po najmenšie. Matice \mathbf{U} a \mathbf{V} rozpíšeme pomocou stĺpcových vektorov $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^{K \times 1}$ a $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^{K \times 1}$. Potom sa matica koeficientov normálnych rovníc dá prepísať z tvaru (6) na tvar

$$\mathbf{N} = \sum_{i=1}^K \mathbf{u}_i \lambda_i^{sing} \mathbf{v}_i^T. \quad (7)$$

Vektory \mathbf{u}_i a \mathbf{v}_i sa nazývajú ľavý a pravý singulárny vektor.

4.4.1 Regularizácia

Na regularizáciu (stabilizáciu) riešenia lineárnych zle podmienených úloh existuje viacero regularizačných metód. Regularizačné metódy možno rozdeliť do viacerých skupín (pozri napr. Xu a kol. (2006a); Hansen (2007)). V ďalšom sa obmedzíme na popis iba použitých metód, a to Tichonovovej regularizácie a obmedzenej dekompozície pomocou matice singulárnych čísel. Obe metódy sú založené na modifikácii matice koeficientov normálnych rovníc. Na odhad vhodného regularizačného parametra pre metódu Tichonovovej regularizácie boli použité metódy L-krivky (napr. Hansen a O'Leary (1993)), GCV (generalized cross validation; napr. Wahba (1990)), iteratívnej vrcholovej metódy (napr. Hoerl a Kennard (1970)), jednoduchého vrcholového parametra (napr. Hoerl a kol. (1975)) a VCE (Variance Component Estimation; napr. Koch a Kusche (2002)). Na odhad obmedzujúceho parametra boli použité metódy L-krivky (napr. Hansen a O'Leary (1993)), GCV (generalized cross validation; napr. Wahba (1990)) a iteratívna vrcholová metóda (napr. Xu (1998)).

Tichonova regularizácia (Tikhonov (1963a,b); Tikhonov a kol. (1977)) je založená na minimalizácii Tichonovovej vyhladzovacej funkcie

$$\Phi^{\alpha_{reg}}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{l}\|_2^2 + \alpha_{reg} \|\mathbf{x}\|_2^2 = \min., \quad (8)$$

kde $\|\cdot\|_2$ je L_2 norma a α_{reg} je regularizačný parameter. Vzťah pre Tichonovovu regularizáciu, ktorý je riešením kritéria 8, môžeme zapísať ako

$$\mathbf{x}_{\alpha_{reg}} = (\mathbf{N} + \alpha_{reg} \mathbf{R})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}, \quad (9)$$

kde $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{K \times K}$ je pozitívne definitná symetrická regularizačná matica. Ak zvolíme $\mathbf{R} = \mathbf{I}$, potom môžeme rovnicu (9) prepísať do tvaru

$$\mathbf{x}_{\alpha_{reg}} = (\mathbf{N} + \alpha_{reg} \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}, \quad (10)$$

kde $\mathbf{x}_{\alpha_{reg}}$ je regularizované riešenie. Aplikovaním operátora strednej hodnoty $E(\cdot)$ na (10) dostaneme $E(\mathbf{x}_{\alpha_{reg}}) = \bar{\mathbf{x}} - \alpha_{reg} (\mathbf{N} + \alpha_{reg} \mathbf{I})^{-1} \bar{\mathbf{x}}$. Symbol $\bar{\mathbf{x}}$ označuje vektor skutočných, ale neznámych parametrov \mathbf{x} . Je zrejmé, že riešenie získané regularizáciou je vychýlené (z angl. biased). Vychýlenosť (bias) riešenia $\mathbf{b}_{\alpha_{reg}}$ sa dá vypočítať zo vzťahu

$$\mathbf{b}_{\alpha_{reg}} = -\alpha_{reg} (\mathbf{N} + \alpha_{reg} \mathbf{I})^{-1} \bar{\mathbf{x}}. \quad (11)$$

Regularizovaný odhad vektora neznámych parametrov korigovaný o vychýlenosť získame zo vzťahu

$$\mathbf{x}_{\alpha_{BC}} = \mathbf{x}_{\alpha_{reg}} - \mathbf{b}_{\alpha_{reg}} = \mathbf{x}_{\alpha_{reg}} + \alpha_{reg} (\mathbf{N} + \alpha_{reg} \mathbf{I})^{-1} \bar{\mathbf{x}}. \quad (12)$$

Nakoľko pri praktických úlohách nepoznáme $\bar{\mathbf{x}}$, môžeme ho v rovnici (12) nahradiť $\mathbf{x}_{\alpha_{reg}}$ (pozri Xu a kol. (2006b); Xu (2009)). Potom rovnica (12) prejde na tvar

$$\mathbf{x}_{\alpha_{BC}} = (\mathbf{I} + \alpha_{reg} (\mathbf{N} + \alpha_{reg} \mathbf{I})^{-1}) \mathbf{x}_{\alpha_{reg}}. \quad (13)$$

Takto získané riešenie je korigované o vychýlenosť prvého rádu. Vychýlenosť vyšších rádov sa dá odhadnúť a korigovať rovnakým spôsobom ako je to uvedené v rovnici (13) (pozri Shen a kol. (2012)). Regularizačný parameter by mal spĺňať nasledujúcu podmienku Xu (2012)

$$0 < \alpha_{reg} / \lambda_1^{sing2} \ll 1, \quad 0 < \lambda_K^{sing2} / \alpha_{reg} \ll 1. \quad (14)$$

Metóda obmedzenej dekompozície pomocou matice singulárnych čísel (TSVD) sa zvykne najčastejšie používať pre úlohy, v ktorých je matica koeficientov normálnych rovníc \mathbf{N} singulárna (nemá plnú hodnotu). Avšak táto metóda bola úspešne použitá aj pri získaní anomálií tiažového zrýchlenia zo simulovaných gradientometrických meraní napr. (Xu (1998)). V uvedenom prípade má matica \mathbf{N} veľké číslo podmienenosti a plnú hodnotu. Prepíšme vzťah na odhad neznámych pomocou MNŠ (3) aplikáciou vzťahu (7) do spektrálneho tvaru

$$\mathbf{x}_{LSM} = \sum_{i=1}^K \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}}{\lambda_i^{sing}} \mathbf{v}_i. \quad (15)$$

odstránením najmenších singulárnych čísel z odhadu MNŠ dostaneme vzťah pre metódu TSVD

$$\mathbf{x}_{\tau} = \sum_{i=1}^{\tau} \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}}{\lambda_i^{sing}} \mathbf{v}_i, \quad (16)$$

kde τ je obmedzujúci parameter (truncation parameter). Aj odhad získaný pomocou TSVD je vychýlený. Vychýlenosť sa dá spočítať podľa

$$\mathbf{b}_{\tau} = \sum_{i=\tau+1}^K \mathbf{v}_i^T \mathbf{x}_{\tau} \mathbf{v}_i. \quad (17)$$

Riešenie korigované o vychýlenosť získame jednoduchým odčítaním \mathbf{b}_{τ} od \mathbf{x}_{τ} . Platí

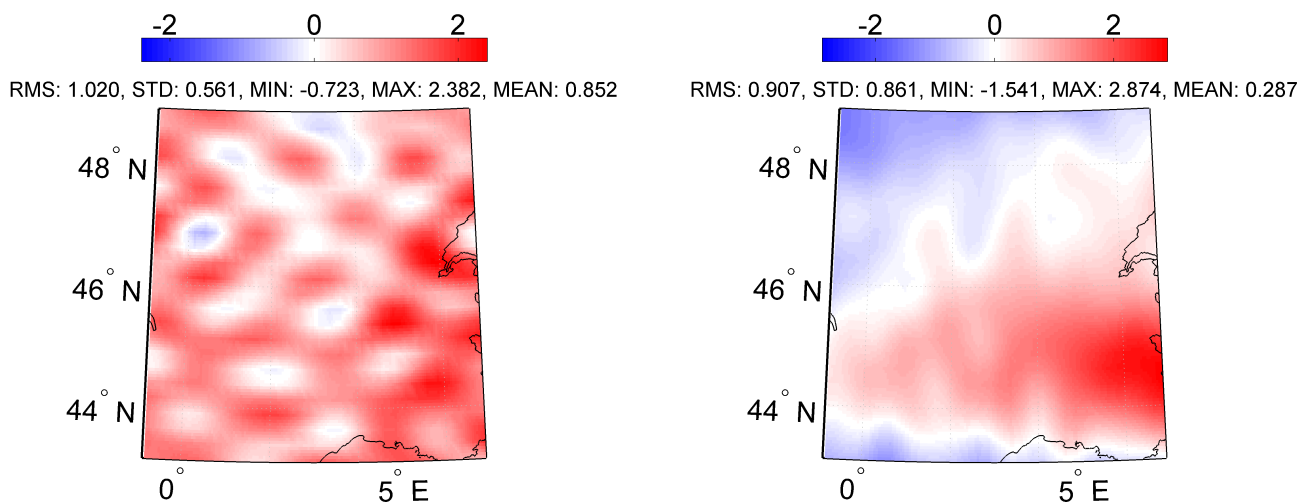
$$\mathbf{x}_{\tau_{BC}} = \mathbf{x}_{\tau} - \mathbf{b}_{\tau}. \quad (18)$$

4.4.2 Praktická aplikácia

Numerický experiment bol vykonaný v testovacej oblasti bližšie popísanej v kap. 4.1. Použili sme dáta z produktu EGG_TRF_2 z obdobia november a december 2009 (nereprocesovaná verzia). Na eliminovanie okrajového efektu bola testovacia oblasť zväčšená o 10° na všetky strany. Pokrytie zväčšenej testovacej oblasti družicovými dátami sa nachádza na obr. 1 (vpravo). Prvky normálneho gravitačného tenzora, potrebné na výpočet poruchového tenzora, boli vypočítané podľa vzťahov publikovaných v Reed (1973) a Šprlák (2012). Integračný polomer bol 10° . Vplyv vzdialených zón bol vypočítaný podľa Eshagh (2011a). Prvky poruchového tenzora boli pokračované nadol a transformované na anomálie tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu do pravidelného gridu $0.25^\circ \times 0.25^\circ$ a do výšky 150° km nad sférou s polomerom R_{mean} . Stredný polomer sféry bol vypočítaný pomocou vzťahu na výpočet dĺžky sprievodiča k elipsoidu

$$R_{mean} = \sqrt{\left(\frac{a^2(1-e^2)}{1-e^2\cos^2\varphi_s}\right)}, \quad (19)$$

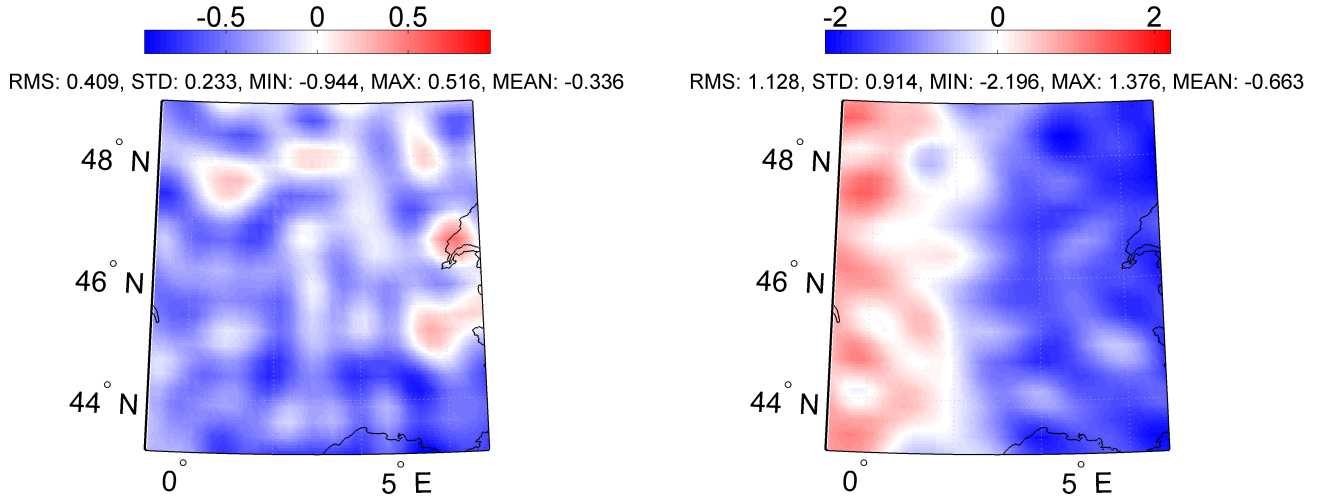
kde φ_s je stredná sférická šírka, a je dĺžka hlavnej polosi referenčného elipsoidu a e je prvá numerická excentricita. Sféru s polomerom R_{mean} ⁶ budeme ďalej nazývať stredná sféra. Pri praktických výpočtoch bol použitý referenčný elipsoid WGS84 (World Geodetic System 1984) (NIMA (2000)). Pokračované a transformované boli všetky štyri presne merané prvky gravitačného tenzora. Na regularizáciu riešenia sme testovali Tichonovovu regularizáciu a obmedzenú dekompozíciu pomocou matice singulárnych čísel. Na odhad regularizačného a obmedzujúceho parametra sme použili už vyššie uvedené metódy. Výsledné riešenia boli porovnávané s GGM TIM-r1 (Pail a kol. (2011)). Stručná štatistika sa nachádza v tab. 1. Rozdiely najpresnejších riešení s GGM TIM-r1 sú vykreslené na obr. 5 a obr. 6.



Obr. 5: rozdiely anomálii tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu vo výške $R_{mean}+150$ km získané z T_{xx} (vľavo) a z T_{yy} (vpravo) (jednotky mGal).

Z dosiahnutých výsledkov sa ako najvhodnejšia metóda na riešenie tohto typu úloh javí stabilizácia pomocou Tichonovovej regularizácie. Tichonovova regularizácia bola pomerne často používaná aj v iných prácach (pozri napr. Eshagh a Sjöberg (2011); Eshagh (2011a); Xu (1998);

⁶Pre našu oblasť bol $R_{mean} = 6367239.862$ m.



Obr. 6: rozdiely anomálii tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu vo výške $R_{mean}+150$ km získané z T_{zz} (vľavo) a z T_{xz} (vpravo) (jednotky mGal).

Shen a kol. (2012)). Pri našich numerických experimentoch metóda TSVD neposkytovala požadovanú presnosť (z výnimkou odhadu obmedzujúceho parametra pomocou IVM). Najpresnejšie riešenia, v porovnaní s GGM TIM-r1, boli získané z radiálnej zložky poruchového tenzora. Táto skutočnosť sa dala predpokladať vzhľadom na vlastnosti daného integrálneho jadra. Má zvonovitý tvar, maximum dosahuje nad výpočtovým bodom a zo stúpajúcou sférickou vzdialenosťou prudko klesá k nule. Vlastnosti ostatných možno nájsť napr. v Eshagh (2011a).

4.5 Formulácia okrajovej úlohy s Dirichletovými a Newtonovými okrajovými podmienkami

Okrajovú úlohu s Dirichletovými a Newtonovými okrajovými podmienkami (OP) môžeme formulovať nasledujúco. Majme konečnú oblasť Υ , ktorá je ohraničená plochami Γ_i , $i = 1, 2, \dots, 6$. Príklad takejto oblasti sa nachádza na obr. 7. Spodná hranica Γ_1 je tvorená fyzickým povrchom Zeme a uvažujme na nej anomálie tiažového zrýchlenia (OP 3. typu) z terestrického merania. Na hornej hranici Γ_6 tvorenej sférou uvažujme anomálie tiažového zrýchlenia získané z pokračovania nadol prvkov gravitačného tenzora. Na bočné hranice Γ_2 , Γ_3 , Γ_4 a Γ_5 aplikujme poruchový potenciál (OP 1. typu) z GGM. Potom je geodetická okrajová úloha s Dirichletovými a Newtonovými OP definovaná nasledujúco

$$\nabla^2 T = 0, \text{ v } \Upsilon, \quad (20)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n_{\Gamma_1}} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial n_{\Gamma_1}} T = \Delta g_{TER}, \text{ na } \Gamma_1, \quad (21)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n_{\Gamma_6}} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial n_{\Gamma_6}} T = \Delta g_{DC}, \text{ na } \Gamma_6, \quad (22)$$

$$T = T_{GGM}, \text{ na } \Gamma_{2,3,4,5}, \quad (23)$$

kde T je poruchový potenciál, Δg sú anomálie tiažového zrýchlenia z terestrického merania (index TER) a získané z pokračovaných a transformovaných gradientometrických dát (index

Tabuľka 1: Štatistika rozdielov medzi anomáliami tiažového zrýchlenia získanými pokračovaním nadol prvkov poruchového tenzora do výšky $R_{mean}+150$ km s využitím uvedených regularizačných metód a modelom TIM-r1 (n/k 224).

			MNŠ	TSVD (L-krivka)	Tichonov (L-krivka)	TSVD (GCV)	Tichonov (GCV)	Tichonov (JVP)	Tichonov (IVM)	TSVD (IVM)	Tichonov (VCE)
Δg z prvku poruchového tenzora [mGal]	T_{xx}	rms	1002.960	663.925	1.020	454.253	1.020	4.972	7.167	18.218	2.648
		std	1003.595	664.334	0.561	454.510	0.561	1.569	4.325	8.104	1.890
		min	-3758.385	-2155.609	-0.723	-1431.783	-0.722	1.135	-14.151	-40.521	-1.989
		max	3250.524	2547.802	2.382	1949.549	2.382	6.913	2.269	-5.243	4.737
		mean	-5.968	-5.651	0.852	-5.952	0.852	4.718	-5.717	-16.320	1.856
	T_{yy}	rms	963.024	605.992	1.548	292.211	1.548	2.569	1.690	17.146	0.907
		std	963.650	606.378	1.545	292.357	1.545	1.568	1.687	5.409	0.861
		min	-3315.656	-2354.759	-3.115	-857.615	-3.115	-1.836	-2.740	-31.018	-1.541
		max	2997.703	1559.207	3.401	887.742	3.401	5.115	3.621	-7.867	2.874
		mean	-1.730	-3.337	-0.111	-5.091	-0.111	2.036	0.120	-16.272	0.287
	T_{zz}	rms	1931.622	66.843	1.059	893.088	1.059	0.828	45.073	8.948	0.409
		std	1932.878	66.610	0.980	893.654	0.980	0.662	45.098	4.661	0.233
		min	-5807.074	-212.479	-3.707	-3071.287	-3.707	-1.741	-139.893	-24.879	-0.944
		max	5483.457	212.945	4.092	2738.273	4.092	3.355	144.921	3.120	0.516
		mean	-3.265	-6.073	0.402	-5.384	0.402	0.498	0.613	-7.641	-0.336
	T_{xz}	rms	2059.539	1788.991	1.759	1804.548	1.759	1.599	7.008	16.262	1.128
		std	2060.854	1790.128	1.214	1805.697	1.214	0.902	4.254	6.909	0.914
		min	-6570.075	-5579.321	-2.208	-5894.063	-2.208	-0.954	-14.012	-36.381	-2.196
		max	6565.972	5937.404	4.861	5986.803	4.861	3.791	2.290	-4.860	1.376
		mean	-10.628	-10.170	1.273	-9.802	1.273	1.320	-5.571	-14.724	-0.663

DC), γ je normálne tiažové zrýchlenie a n_{Γ_i} označuje vonkajšiu normálu k hranici Γ_i . Nakoľko nás zaujíma iba riešenie v konečnej oblasti Υ , neriešime regulárnosť riešenia v nekonečne.

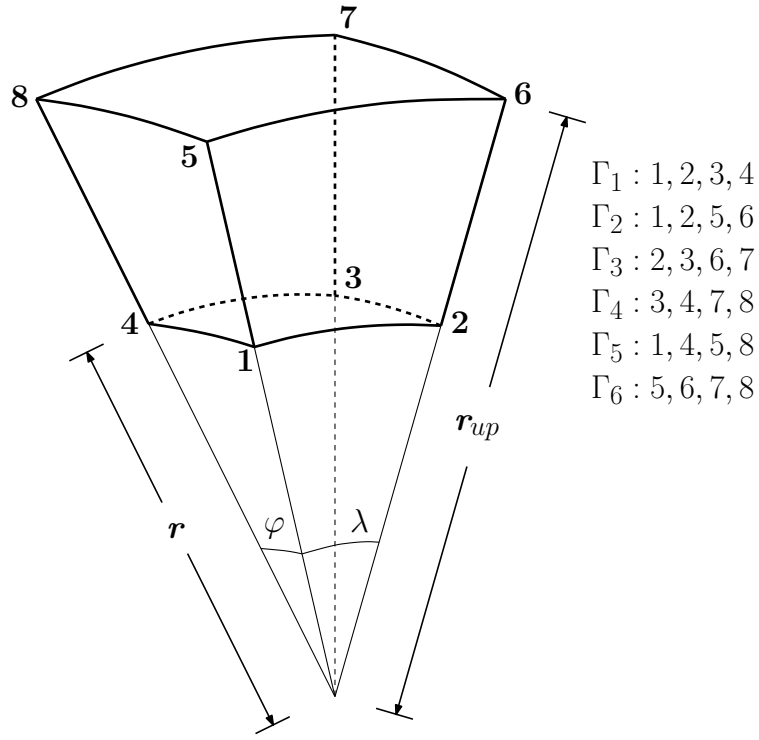
4.6 Riešenie geodetickej okrajovej úlohy s Dirichletovými a Newtonovými okrajovými podmienkami pomocou MKP

Riešme geodeticú okrajovú úlohu naformulovanú pomocou rovníc 20 - 23. Prvým krokom riešenia je diskretizácia konečnej oblasti Υ na konečný počet malých prvkov (elementov), ktoré označíme ako Υ^e . Konečná oblasť bola diskretizovaná pomocou trojbokých hranolov, pričom hranice Γ_1 a Γ_6 tvorila sieť trojuholníkov. Je zjavné, že tvar elementov priamo ovplyvňuje aproximačné funkcie pomocou, ktorých zjednodušene vyjadríme priebeh neznámej funkcie na jednotlivých elementoch. Aproximačné funkcie pri MKP majú tvar polynómu. Tvar aproximačných funkcií pre daný typ elementu možno nájsť napr. v Reddy (1993).

Ďalším krokom je odvodenie slabej formulácie pre každý element Υ^e . Pod slabou formuláciou možno rozumieť integrálnu identitu, ktorá má zoslabené požiadavky na neznámu funkciu, v našom prípade poruchový potenciál. Laplaceovu diferenciálnu rovnicu (20) vynásobíme testovacou funkciou w a integrovaním v oblasti Υ^e dostaneme

$$\int_{\Upsilon^e} \nabla^2 T w \, dx \, dy \, dz = 0. \quad (24)$$

Upravme rovnice 21 a 22 do tvaru



Obr. 7: Grafické znázornenie výpočtovej oblasti. Spodná hranica Γ_1 je reprezentovaná fyzickým povrchom Zeme.

$$\frac{\partial T}{\partial n_{\Gamma_1}} = \Delta g_{TER} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial n_{\Gamma_1}} T, \quad \frac{\partial T}{\partial n_{\Gamma_6}} = \Delta g_{DC} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial n_{\Gamma_6}} T. \quad (25)$$

Aplikáciou Greenovej vety na rovnicu 24 dostaneme

$$\int_{\Upsilon^e} \nabla T \cdot \nabla w \, dx \, dy \, dz - \int_{\Gamma_1^e} w q_{n_{TER}} \, d\sigma - \int_{\Gamma_6^e} w q_{n_{DC}} \, d\sigma = 0, \quad (26)$$

kde

$$q_{n_{TER}} = \frac{\partial T}{\partial n_{\Gamma_1}}, \quad q_{n_{DC}} = \frac{\partial T}{\partial n_{\Gamma_6}}, \quad (27)$$

Γ^e je hranica elementu Υ^e , q_n je derivácia poruchového potenciálu v smere vonkajšej normály k hranici Γ^e . Potom môžeme slabú formuláciu Laplaceovej diferenciálnej rovnice zapísať v tvare

$$\int_{\Upsilon^e} \nabla T \cdot \nabla w \, dx \, dy \, dz - \int_{\Gamma_1^e} w \left(\Delta g_{TER} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial n_{\Gamma_1}} T \right) \, d\sigma - \int_{\Gamma_6^e} w \left(\Delta g_{DC} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial n_{\Gamma_6}} T \right) \, d\sigma = 0, \quad (28)$$

V tomto kroku nahradíme slabú formuláciu približným riešením na každom elemente. Keďže OP poznáme iba v diskretných bodoch, môžeme pre konkrétny element definovať iba približne riešenie v tvare lineárnej kombinácie poruchového potenciálu t_j^e v j -tom uzlovom bode elementu Υ^e a aproximačnej funkcie Ψ_j^e . Približné riešenie má tvar

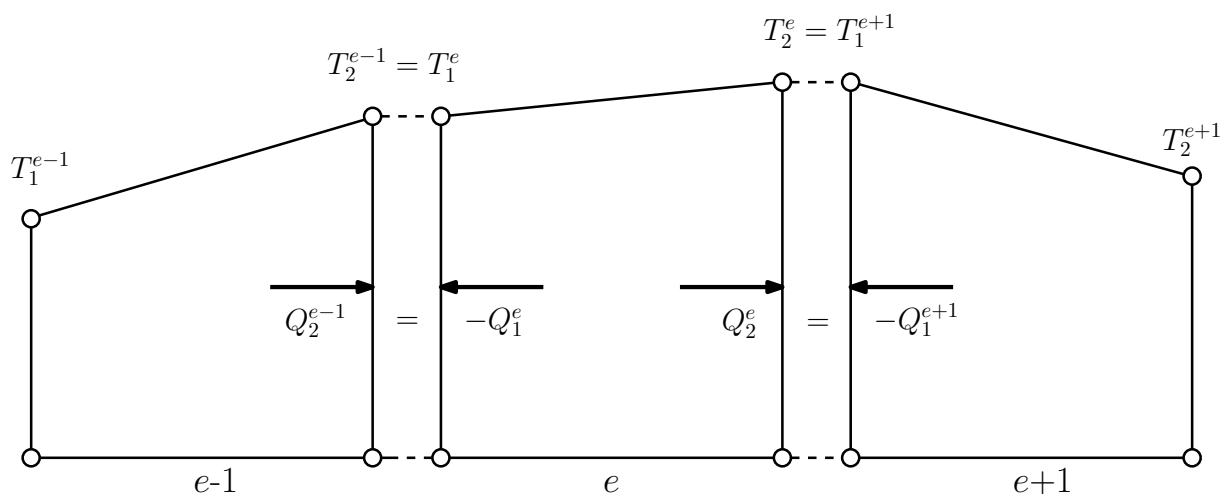
$$T \approx T^e = \sum_{j=1}^L t_j^e \Psi_j^e, \quad (29)$$

kde L je počet uzlových bodov elementu. Dosadením približného riešenia (29) do slabej formulácie (28) a nahradením testovacej funkcie aproximačnými funkciami Ψ_j^e , $j = 1, 2, \dots, L$, dostaneme systém lineárnych rovníc pre element Υ^e

$$\underbrace{\sum_{j=1}^L t_j^e \int_{\Upsilon^e} \nabla \Psi_j^e \nabla \Psi_j^e dx dy dz}_{K_{ij}^e} \quad (30)$$

$$= \underbrace{\int_{\Gamma_1^e} \Psi_i^e \left(\Delta g_{TER} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial n_{\Gamma_1}} T \right) d\sigma + \int_{\Gamma_6^e} \Psi_i^e \left(\Delta g_{DC} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial n_{\Gamma_6}} T \right) d\sigma}_{Q_i^e},$$

kde K_{ij}^e sú prvky matice tuhosti (z angl. stiffness matrix) a Q_i^e sú prvky vektora tokov (z angl. vector of fluxes) cez hranice elementu. Obdobným postupom vieme zostaviť sústavy rovníc pre všetky elementy, ktorými je výpočtová oblasť aproximovaná. Spojíme sústavy rovníc na všetkých elementoch výpočtovej oblasti, pričom uvažíme princípy spojitosti riešenia v medzielementových uzlových bodoch a bilancie tokov na medzielementových hraniciach (pozri obr. 8) a dostaneme globálny konečno-prvkový model.



Obr. 8: Princípy spojitosti riešenia v medzielementových uzlových bodoch a bilancie tokov na medzielementových hraniciach.

Pre riešiteľnosť globálneho konečno-prvkového modelu je nevyhnutné zadať OP. Užitočné neznáme sú hodnoty poruchového potenciálu v uzlových bodoch elementov a hodnoty tokov cez hranice elementov sú neúžitočné neznáme. Výhodou MKP oproti ostatným variančným metódam je, že matica globálneho konečno-prvkového modelu má priaznivé vlastnosti a veľa jej prvkov je nulových, čo uľahčuje jej numerické riešenie. Metódami matematickej algebry získame priebeh poruchového potenciálu v konečnej oblasti Υ . Pre modelovanie regionálneho kvázigeoidu sa môžeme obmedziť len na hodnoty poruchového potenciálu v uzlových bodoch na dolnej hranici (Γ_1).

4.6.1 Praktické riešenie geodetickej okrajovej úlohy v softvéri ANSYS

Praktické riešenie geodetickej okrajovej úlohy formulovanej v kap. 4.5 pomocou MKP bolo vykonané v MKP softvéri ANSYS (<http://www.ansys.stuba.sk/>). Na diskretizáciu výpočtovej oblasti sme použili 3D lineárne šesť-uzlové elementy SOLID70 s jedným stupňom voľnosti (poruchový potenciál) v každom uzle. Ukážka výpočtovej oblasti sa nachádza na obr. 7. Dolná hranica bola tvorená fyzickým povrchom Zeme a horná hranica bola vo výške 150 km nad sférou s polomerom R_{mean} . Pri praktickej aplikácii boli na hornej a dolnej hranici uvažované sférické aproximácie základnej rovnice fyzikálnej geodézie. Horná a dolná hranica bola diskretizovaná trojuholníkovými reťazcami. Veľkosť elementov na povrchu Zeme bola $3' \times 3'$ a výšky⁷ sme testovali v dvoch variantách 3750 m a 5000 m. Počet uzlových bodov a elementov pri týchto dvoch veľkostiach je uvedený v tab. 2. Z priebehu poruchového potenciálu na dolnej hranici sme pomocou Brunsovho vzorca vypočítali priebeh kvázigeoidu.

Tabuľka 2: Počet uzlových bodov a elementov pri dvoch rôznych veľkostiach elementov.

Veľkosť elementu	počet uzlových bodov	počet elementov
$3' \times 3' \times 5000$ m	575360	1097100
$3' \times 3' \times 3750$ m	760960	1462800

Pred riešením geodetickej okrajovej úlohy s reálnymi dátami na hornej hranici sme vykonali experimenty s dátami z GGM, ktorých cieľom bolo:

- (i) overiť vplyv výšky elementu na výslednú presnosť regionálneho kvázigeoidu,
- (ii) overiť vplyv maximálneho stupňa GGM na výslednú presnosť,

Modely regionálneho kvázigeoidu boli porovnávané na testovacích GNSS/nivelačných bodoch (obr. 1 vľavo).

V prvom experimente sme testovali dve výšky elementov, 3750 m a 5000 m a tiež vplyv maximálneho stupňa použitého GGM na výslednú presnosť. Výška 3750 m bola zvolená z ohľadom na maximálnu výšku 3498 m v testovacej oblasti a výšku hornej hranice 150000 m, aby bol počet jednotlivých vrstiev elementov celé číslo. Pri tomto experimente sme použili GGM TIM-r1 do n/k 224 (maximálny stupeň GGM) a 170⁸. Na hornej hranici boli použili syntetické anomálie tiažového zrýchlenia generované do rovnakého stupňa ako poruchový potenciál na bočných hraniciach, a na dolnej hranici OP tvorili terestrické anomálie tiažového zrýchlenia. Štatistika rozdielov medzi jednotlivými riešeniami získanými MKP na GNSS/nivelačných bodoch je uvedená v tab. 3.

Výsledky dosiahnuté v tomto experimente ukazujú, že výška elementu ktorým bola diskretizovaná konečná oblasť, nemá vplyv na výslednú presnosť. Pri použití dát do maximálneho stupňa bola dosiahnutá lepšia presnosť ako pri výpočte z dátami len do stupňa 170. Preto v ďalších experimentoch použijeme výšku elementu 5000 m a na boky konečnej oblasti budeme generovať poruchový potenciál do maximálneho stupňa GGM TIM-r1.

V experimente s reálnymi dátami sme ako OP na hornej hranici použili anomálie tiažového zrýchlenia získané zo všetkých použitých prvkov poruchového tenzora získaných inverziou integrálnych vzťahov (1).

⁷Uvedené výšky platia až od druhej vrstvy elementov, pretože prvá vrstva aproximovala fyzický povrch Zeme.

⁸Na výpočet koeficientov do tohto stupňa nebola použitá regularizácia. Globálne geopotenciálne modely z misie GOCE pri testovaní na GNSS/nivelačných bodoch (Gruber a kol. (2011)) vykazovali stratu presnosti pri vyšších stupňoch GGM (približne 170).

Tabuľka 3: Štatistika rozdielov kvázigeoidov získaných pomocou MKP (na hornej hranici anomálie tiažového zrýchlenia z GGM TIM-r1, na bočných hraniciach poruchový potenciál z rovnakého modelu, na spodnej hranici terestrické anomálie tiažového zrýchlenia) na testovacích GNSS/nivelačných bodoch (jednotky m).

T(n/k)	170	170	224	224
výška elementu (m)	3750	5000	3750	5000
std	0.099	0.099	0.097	0.097
min	0.593	0.592	0.597	0.597
max	1.047	1.048	1.039	1.040
mean	0.852	0.852	0.848	0.848

4.6.2 Testovanie modelov kvázigeoidov na GNSS/nivelačných bodoch a porovnanie s GGM EGM2008

Pomocou vyššie uvedeného postupu sme získali 6 modelov kvázigeoidu, ktoré bolo potrebné nezávisle otestovať. Za taký test možno považovať porovnanie na GNSS/nivelačných bodoch. Ich poloha je znázornená na obr. 1 vľavo. Druhým testom, ktorý však už nebol nezávislý, bolo porovnanie s GGM EGM2008 (n/k 2190). Štatistika porovnania vypočítaných kvázigeoidov na GNSS/nivelačných sa nachádza v tab. 4 a porovnanie s GGM EGM2008 (Pavlis a kol. (2012)) v tab. 5.

Tabuľka 4: Štatistika rozdielov kvázigeoidov získaných pomocou MKP (na hornej hranici anomálie tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu získané z jednotlivých prvkov poruchového tenzora, na bočných hraniciach poruchový potenciál z GGM TIM-r1 (n/k 224), výška elementu 5000 m, na spodnej hranici terestrické anomálie tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu) na testovacích GNSS/nivelačných bodoch (jednotky m).

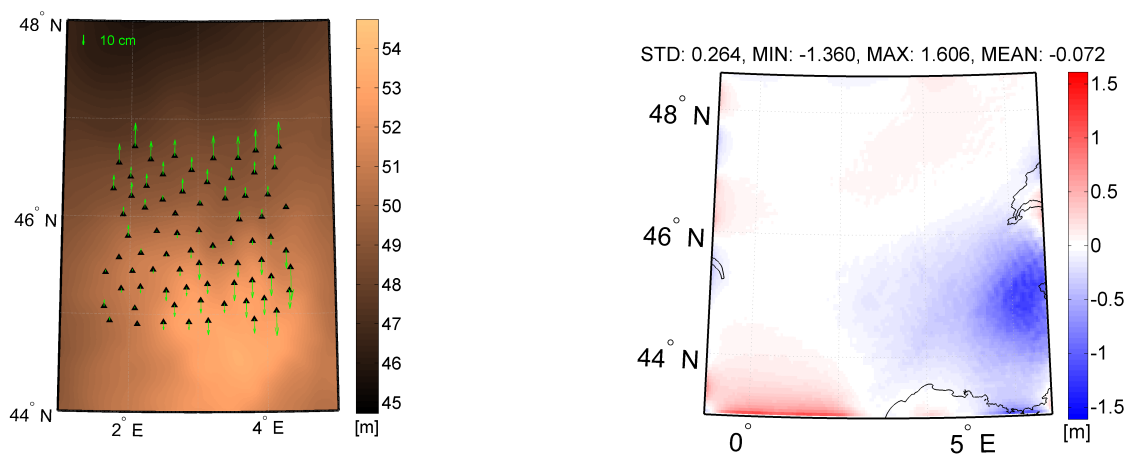
Δg z prvku	T_{xx}	T_{yy}	T_{zz}	T_{xz}	$\frac{T_{xx}+T_{yy}+T_{zz}}{3}$	$\frac{T_{xx}+T_{yy}+T_{zz}+T_{xz}}{4}$
std	0.103	0.115	0.096	0.087	0.105	0.100
min	0.461	0.475	0.647	0.747	0.528	0.583
max	0.929	0.987	1.089	1.139	1.001	1.034
mean	0.717	0.750	0.903	0.973	0.790	0.836

Na základe výsledkov uvedených v tab. 4 a v tab. 5 možno povedať, že najpresnejšie riešenie, na základe testovania na GNSS/nivelačných bodoch a porovnania s EGM2008, bolo získané z anomálii tiažového zrýchlenia z prvku T_{xz} . Kombinácia diagonálnych resp. všetkých presne meraných prvkov očakávané zlepšenie neprinesla. Najmenej presné výsledky boli dosiahnuté použitím anomálii tiažového zrýchlenia z prvku T_{yy} . Najpresnejšie riešenia, ich rozdiely na GNSS/nivelačných bodoch a s EGM2008 sú vykreslené na obr. 9.

Najväčšie rozdiely vypočítaných modelov kvázigeoidu s GGM EGM2008 boli dosiahnuté v oblasti vysokých pohorí a na krajoch územia. Rozdiely na krajoch územia pochádzajú z vplyvu OP 1.typu (poruchový potenciál z GGM TIM-r1). Tento vplyv dosahuje pri riešení geodetickej okrajovej úlohy MKP niekoľko elementov (pozri Fašková a kol. (2010)). Jednou z možností

Tabuľka 5: Štatistika rozdielov kvázigeoidov získaných pomocou MKP (na hornej hranici anomálie tiažového zrýchlenia získané z jednotlivých prvkov poruchového tenzora, na bočných hraniciach poruchový potenciál z GGM TIM-r1 (n/k 224), výška elementu 5000 m, na spodnej hranici terestrické anomálie tiažového zrýchlenia) s GGM EGM2008 (n/k 2190) (jednotky m).

Δg z prvku	T_{xx}	T_{yy}	T_{zz}	T_{xz}	$\frac{T_{xx}+T_{yy}+T_{zz}}{3}$	$\frac{T_{xx}+T_{yy}+T_{zz}+T_{xz}}{4}$
std	0.293	0.297	0.275	0.264	0.287	0.280
min	-1.369	-1.372	-1.360	-1.360	-1.360	-1.360
max	1.606	1.606	1.606	1.606	1.606	1.606
mean	-0.192	-0.171	-0.103	-0.072	-0.155	-0.134



Obr. 9: Kvázigeoid získaný MKP a jeho rozdiely na GNSS/nivelačných bodoch a rozdiely medzi riešením MKP a EGM2008 (vpravo).

vysvetlenia rozdielov v hornatej časti územia je metodika prípravy pozemných dát. Pri ich preg-ridovaní mohlo dôjsť k viacerým chybám. Jednou z najzávažnejších bolo použitie digitálneho výškového modelu SRTM3. Tento model bol použitý pri prepočítavaní úplných Bouguerových anomálií na anomálie tiažového zrýchlenia. Presnosť výšok z modelu SRTM3 v rovinných častiach sa pohybuje na úrovni ≈ 5 m (Karwel a Ewiak (2008)). V hornatých častiach je to približne až 20 m a horšie Tighe a Chamberlain (2009). Tento fakt mohol negatívne ovplyvniť presnosť výsledného modelu kvázigeoidu v porovnaní s GGM EGM2008.

Tabuľka 6: Štatistika rozdielov kvázigeoidov získaných pomocou MKP (na hornej a bočných hraniciach dáta z GGM TIM-r1 - TIM-r4, výška elementu 5000 m, na spodnej hranici terestrické anomálie tiažového zrýchlenia) na testovacích GNSS/nivelačných bodoch (jednotky m).

	TIM-r1	TIM-r2	TIM-r3	TIM-r4
std	0.097	0.100	0.098	0.096
min	0.597	0.596	0.608	0.615
max	1.040	1.052	1.053	1.053
mean	0.848	0.851	0.857	0.858

Posledné porovnanie vypočítaných kvázigeoidov bolo robené s dostupnými GGM vypočítaných stratégiou TIM. Nakoľko GGM z tejto stratégie sú vypočítané do maximálneho stupňa 250 (GGM TIM-r2 až TIM-r4, TIM-r1 len do 224) a my sme na spodnej hranici konečnej oblasti použili terestrické dáta obsahujúce celé spektrum tiažového poľa. Porovnanie iba z hodnotami získanými syntézou by nebolo korektné. Preto sme vypočítali ďalšie štyri kvázigeoidy, kde sme na hornú hranicu použili anomálie tiažového zrýchlenia z GGM TIM-r1 - TIM-r4 a bočné hranice poruchový potenciál z rovnakých modelov. Na spodnú hranicu sme použili terestrické anomálie. Štatistika porovnania týchto kvázigeoidov na GNSS/nivelačných bodoch sa nachádza v tab. 6. Porovnaním výsledkov v tab. 6 a 4 je zrejmé, že najlepšie riešenie získané z reálnych družicových dát je o 9 mm lepšie ako najlepšie získané z GGM TIM-r4. Pričom anomálie tiažového zrýchlenia boli získané iba z dvoch mesiacov meraní a model TIM-r4 bol vypočítaný približne z dvojtročného pokrytia.

5 Prínos pre vedu a prax

- Praktické riešenie priamej inverzie integrálnych vzťahov na výpočet anomálií tiažového zrýchlenia a tiažových porúch z reálnych meraných prvkov gravitačného tenzora. Pri riešení inverznej úlohy s reálnymi dátami boli testované dve regularizačné metódy a viacero metód na odhad regularizačného a obmedzujúceho parametra.
- Boli odvodené integrálne vzťahy na výpočet prvkov poruchového tenzora v sférickom súradnicovom systéme. Odvodené integrálne vzťahy boli otestované riešením priamej úlohy. Taktiež boli využité pri získavaní tiažových porúch zo simulovaných prvkov poruchového tenzora. Tiež sa podarilo zjednodušiť už publikované druhé derivácie zovšeobecnenej Hotiného funkcie podľa ψ a r a doplniť spektrálne tvary druhých derivácii zovšeobecnenej Stokesovej funkcie vo sférických súradniciach.

- Bola otestovaná nová metóda na modelovanie regionálneho tiažového poľa Zeme kombinujúca družicové a terestrické merania pomocou metódy konečných prvkov. Aplikáciou tejto metódy s využitím reálnych dát sa podarilo dosiahnuť, pri testovaní na GNSS/nivelačných bodoch, zlepšenie o 9 mm v porovnaní s dátami z globálnych geopotenciálnych modelov.
- Bola otestovaná možnosť spresnenia výsledkov získaných riešením inverznej úlohy s využitím možnosti vyhladenia prvkov gravitačného tenzora pomocou gravitačného účinku izostaticky kompenzovanej topografie.
- Bola vytvorená séria skriptov, ktorá pokrýva riešenie problematiky od prípravy vstupných dát až po načítanie výstupu zo softvéru ANSYS a výpočet kvázigeoidu.

6 Záver

Cieľom dizertačnej práce bolo riešiť geodetickú okrajovú úlohu, ktorá na svojich hraniciach kombinovala terestrické dáta a dáta pochádzajúce z družicovej gradientometrie, pomocou metódy konečných prvkov. Motiváciou k práci bola možnosť spresniť regionálne modely kvázigeoidov s využitím reálnych gradientometrických dát a taktiež možnosť ľubovolnej kombinácie jednotlivých prvkov poruchového tenzora. Takúto možnosť neposkytujú globálne geopotenciálne modely.

Teoretická časť práce bola venovaná opisu družicovej misie GOCE a jej dátovým produktom. Taktiež tu bola diskutovaná problematika stabilizácie riešenia inverzných úloh. V kapitole o integrálnych transformáciách na výpočet prvkov poruchového tenzora sa podarilo odvodiť nové vzťahy na výpočet prvkov poruchového tenzora vo sférickom súradnicovom systéme z tiažových porúch.

Veľká časť numerických experimentov sa zaoberala testovaním presnosti Tichonovovej regularizácie a TSVD pri stabilizácii procesu riešenia inverzie druhých derivácií Pizzettiho a Hotiného integrálu. Testované boli na simulovaných dátach kontaminovaných šumom 10 mE a na reálnych dátach. Odhady anomálií tiažového zrýchlenia a tiažových porúch získané regularizovaným riešením boli porovnávané s globálnym geopotenciálnym modelom TIM-r1. Presnosť získaných hodnôt vo výške 10 km nad strednou sférou z reálnych dát sa pohybovala na úrovni ≈ 7.5 mGal (z T_{zz}) až ≈ 11 mGal (z T_{xx}). Túto presnosť sa podarilo zlepšiť aplikovaním metódy remove-compute-restore s využitím gravitačného účinku izostaticky kompenzovanej topografie približne o 20 až 30 %. Najlepšie výsledky boli dosiahnuté pomocou Tichonovovej regularizácie.

Nosná časť práce bola venovaná výpočtu regionálneho kvázigeoidu vo Francúzsku pomocou metódy konečných prvkov. Pomocou tejto metódy sa podarilo skombinovať terestrické dáta s družicovými. Pod pojmom družicové boli myslené anomálie tiažového zrýchlenia získané pokračovaním nadol a transformáciou prvkov gravitačného tenzora meraného gradientometrom na družici GOCE. Výhodou aplikácie reálnych dát oproti syntetickým dátam bola najmä možnosť ľubovolnej kombinácie jednotlivých prvkov gravitačného tenzora. Týmto prístupom sa podarilo dosiahnuť o 9 mm presnejší kvázigeoid ako pri využití dát z globálnych geopotenciálnych modelov z misie GOCE. Výsledný model kvázigeoidu dosiahol na GNSS/nivelačných bodoch presnosť 8.7 cm.

Summary

Solving of the geodetic boundary value problems with data from satellite gradiometry

The thesis deals with quasigeoid determination from the satellite and terrestrial data using the finite element method. The main part of the thesis discusses the topic of the free-air gravity anomalies and gravity disturbances from the satellite gravity gradiometry data. For this purpose, direct inversion of the second order derivation of Pizzetti's and Hotine's integral equations is used. Two methods for the stabilization of the solution and several methods for the regularization and truncation parameter determination were tested. The most accurate results in comparison to the global geopotential model TIM-r1 were achieved using the Tikhonov regularization. Free-air gravity anomalies computed this way were applied on the upper boundary. On the bottom boundary, defined by the Earth's surface, the free-air gravity anomalies prepared from the terrestrial gravity measurements were used. The standard deviation of the final quasigeoid model tested by a GNSS/leveling method in France was 8.7 cm.

Literatúra

- Arabelos, D. a Tscherning, C. C. (1990). Simulation of regional gravity field recovery from satellite gravity gradiometer data using collocation and FFT. *Bull. Geod.*
- Arabelos, D. a Tscherning, C. C. (1993). Regional recovery of the gravity field from SGG and SST/GPS data using collocation. *In: Study of the Gravity Field Determination Using Gradiometry and GPS, Phase 1. Final Report ESA Contract 9877/92/F/FL.*
- Arabelos, D. a Tscherning, C. C. (1995). Regional recovery of the gravity field from the satellite gradiometer and gravity vector data using collocation. *J. Geophys. Res.*, 100 (B11):22009–22015.
- Aster, R. C., Borchers, B., a Thurber, C. H. (2005). *Parameter Estimation and Inverse Problems.* Elsevier, Amsterdam.
- Baker, E. M. (1988). *A finite element model of the Earth anomalous gravitational potential.* Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University.
- Bölling, C. a Grafarend, E. W. (2005). Ellipsoidal spectral properties of the Earth's gravitational potential and its first and second derivatives. *J. Geod.*, 79:300–330.
- Bouyon, P. (2004). Entretien du ngf avec assistance gps (nivag) – spécifications de produit. Technical report, Service de Géodésie et Nivellement, Institut Géographique National.
- Carroll, J. J. a Savet, P. (1959). Gravity difference detection. *Aerospace Engineering*, pages 44–47.
- Čunderlík, R., Fašková, Z., a Mikula, K. (2012). Fixed gravimetric BVP for the vertical datum problem. *In Geodesy for Planet Earth*, pages 333–341. Springer.
- Čunderlík, R. a Mikula, K. (2010). Direct BEM for high-resolution global gravity field modelling. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 54(2):219–238.
- Čunderlík, R., Mikula, K., a Mojžeš, M. (2008). Numerical solution of the linearized fixed gravimetric boundary-value problem. *Journal of Geodesy*, 82(1):15–29.
- Denker, H. (2003). Computation of gravity gradients for Europe for calibration/validation of GOCE data. *In: Tziavos (Ed.) Gravity and Geoid 2002, 3rd Meeting of the IGGC, Ziti Editions*, pages 287–292.
- Drinkwater, M. R., Haagmans, R., Muzi, D., Popescu, A., Floberghagen, R., Kern, M., a Fehring, M. (2007). The GOCE gravity mission: ESA first core earth explorer. *In: Proceedings of the 3rd International GOCE User Workshop, ESA SP-627*, pages 1–8.
- Duquenne, H. (2007). A data set to test geoid computation methods. *In: Proceedings of the 1st International Symposium of the International Gravity Field Service (IGFS), Istanbul, Turkey, Harita Dergisi(Special Issue 18):61–65.*
- Eicker, A., Schall, J., a Kusche, J. (2013). Regional gravity modelling from spaceborne data: case studies with GOCE. *Geophysical Journal International*, page ggt485.

- Eötvös, L. (1906). Bestimmung der Gradienten der Schwerkraft und ihrer Niveauflächen mit Hilfe der Drehwaage. In *Verhandlungen der 15. allgemeinen Konferenz der Internationalen Erdmessung, Budapest*, volume 1, pages 337–396.
- ESA (1999a). Gravity field and steady-state ocean circulation. *Technical report, Reports for Mission Selection - The Four Candidate Earth Explorer Core Missions*.
- ESA (1999b). Introducing the "Living Planet" Programme - The ESA strategy for earth observation. *ESA SP-1231. ESA Publication Division, ESTEC, Noordwijk, Netherlands*.
- Eshagh, M. (2009). On satellite gravity gradiometry. *Doctoral Dissertation in Geodesy. Royal Institute of Technology (KTH), Stockholm, Sweden*.
- Eshagh, M. (2011a). The effect of spatial truncation error on integral inversion of satellite gravity gradiometry data. *Advances in Space Research*, 47:1238–1247.
- Eshagh, M. (2011b). Inversion of satellite gradiometry data using statistically modified integral formulas for local gravity field recovery. *Advances in Space Research*, 47:74–85.
- Eshagh, M. (2011c). On integral approach to regional gravity field modelling from satellite gradiometric data. *Acta Geophysica*, 59(1):29–54.
- Eshagh, M. a Sjöberg, L. E. (2011). Determination of gravity anomaly at sea level from inversion of satellite gravity gradiometric data. *Journal of Geodynamics*, 51(1):366–377.
- Fašková, Z., Čunderlík, R., a Mikula, K. (2010). Finite element method for solving geodetic boundary value problems. *Journal of geodesy*, 84(2):135–144.
- Fašková, Z. (2006). Application of the finite element method to the geodetic boundary value problem in Europe. *Journal of Electrical Engineering*, 57:39–42.
- Fašková, Z., Čunderlík, R., Janák, J., Mikula, K., a Šprlák, M. (2007). Gravimetric quasigeoid in Slovakia by the finite element method. *Kybernetika*, 43:789–796.
- Forsberg, R. a Tscherning, C. (1997). Topographic effects in gravity field modelling for BVP. *Geodetic Boundary Value Problems in View of the One Centimeter Geoid*, pages 239–272.
- Golden Software, I. (2014). Surfer Users Guide. Technical report.
- Grombein, T., Luo, X., Seitz, K., a Heck, B. (2014a). A Wavelet-Based Assessment of Topographic-Isostatic Reductions for GOCE Gravity Gradients. *Surveys in Geophysics*, pages 1–24.
- Grombein, T., Seitz, K., a Heck, B. (2011). Smoothing GOCE gravity gradients by means of topographic-isostatic reductions. In: *Ouwehand, L. (Ed.): Proceedings of the 4th International GOCE User Workshop, ESA Publication SP-696, ESA/ESTEC (ISBN (Online) 978-92-9092-260-5, ISSN 1609-042X)*.
- Grombein, T., Seitz, K., a Heck, B. (2014b). Topographic-isostatic reduction of GOCE gravity gradients. *Proceeding of the XXV General Assembly of the International Union of Geodesy and Geophysics, Melbourne, Australia, International Association of Geodesy Symposia*.
- Gruber, T., Rummel, R., Abrikosov, O., a van Hees, R. (2010). GOCE Level 2 Product Data Handbook. GO-MA-HPF-GS-0110. Issue 4.2(The European GOCE Gravity Consortium).

- Gruber, T., Visser, P., Ackermann, C., a Hosse, M. (2011). Validation of GOCE gravity field models by means of orbit residuals and geoid comparisons. *Journal of geodesy*, 85(11):845–860.
- Haagmans, R., Prijatna, K., a D., O. O. C. (2003). An alternative concept for validation of GOCE gradiometry results based on regional gravity. *In: Tziavos (Ed.) Gravity and Geoid 2002*, (178):281–286.
- Hansen, P. C. (1990). Truncated singular value decomposition solutions to discrete ill-posed problems with ill-determined numerical rank. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 11(3):503–518.
- Hansen, P. C. (2007). Regularization tools 4.0 for Matlab 7.3. *Numer. Algorithmus*, (46):189–194.
- Hansen, P. C. a O'FLeary, D. P. (1993). The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems. *Siam J.Sci. Comput.*, 14:1487–1503.
- Heck, B. (1979). Zur lokalen Geoidbestimmung aus terrestrischen Messungen vertikaler Schweregradienten. *Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C*, (Nr. 259).
- Heck, B. a Wild, F. (2005). Topographic-isostatic reductions in satellite gravity gradiometry based on a generalized condensation model. *In A Window on the Future of Geodesy*, pages 294–299. Springer.
- Hoerl, A. E. a Kennard, R. W. (1970). Ridge regression: Biased estimation for nonorthogonal problems. *Technometrics*, 12(1):55–67.
- Hoerl, A. E., Kennard, R. W., a Baldwin, K. F. (1975). Ridge regression: some simulations. *Commun. Statist.*, 4:105–123.
- Holota, P. (1997). Variational methods for geodetic boundary value problems. *In Geodetic Boundary Value Problems in View of the One Centimeter Geoid*, pages 468–481. Springer.
- Holota, P. (1999). Variational methods in geoid determination and function bases. *Physics and Chemistry of the Earth, Part A: Solid Earth and Geodesy*, 24(1):3–14.
- Holota, P. a Nesvadba, O. (2008). Model refinements and numerical solutions of weakly formulated boundary-value problems in physical geodesy. *In VI Hotine-Marussi Symposium on Theoretical and Computational Geodesy*, pages 320–326. Springer.
- Janák, J., Fukuda, Y., a Xu, P. (2009). Application of GOCE data for regional gravity field modeling. *Earth, Planets and Space*, 61(7):835–843.
- Janák, J., Pitoňák, M., a Minarechová, Z. (2014). Regional quasigeoid from GOCE and terrestrial measurements. *Studia Geophysica et Geodaetica (accepted for publication)*.
- Janák, J. a Vaníček, P. (2005). Mean free-air gravity anomalies in the mountains. *Stud. Geophys. Geod.*, 49:31–42.
- Janák, J. a Wild-Pfeiffer, F. (2010). Comparison of various topographic-isostatic effects in terms of smoothing gradiometric observations. *In: Proc. of IAG International Symposium Gravity, Geoid and Earth Observation. IAG Symposia, Vol. 135, Mertikas, S. (Ed.)*, Vol. 135:377–382.

- Janák, J., Wild-Pfeiffer, F., a Heck, B. (2012). Smoothing the gradiometric observations using different topographic-isostatic models: A regional case study. *In: Sneew N., Novák P., Crespi M., Sanso F. (eds.): VII Hotine-Marussi Symposium on Mathematical Geodesy, Rome, 6-10 July 2009, IAG Symposia*, Vol. 137:245–250.
- Junkins, J. L. and Engels, R. (1979). The finite element approach in gravity modelling. *Manuscripta geodaetica*, 4:185–206.
- Karwel, K. a Ewiak, I. (2008). Estimation of the accuracy of the SRTM terrain model on the area of Poland. In *Proceedings of the XXI ISPRS Congress*, pages 3–11.
- Kern, M. a Haagmans, R. (2005). Determination of gravity gradients from terrestrial gravity data for calibration and validation of gradiometric GOCE data. *Gravity, Geoid and Space Missions, International Association of Geodesy Symposia*, 129:95–100.
- Kern, M., Schwarz, K. P., a Sneew, N. (2003). A study on the combination of satellite, airborne, and terrestrial gravity data. *J. Geod.*, 77:217–225.
- Klees, R. (1992). Lösung der fixen geodatischen Randwertproblems mit Hilfe der Randelementmethode. *Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C*, (Nr. 382).
- Klees, R. (1993). Gravity field determination using boundary element methods. *Surveys in geophysics*, 14(4-5):419–432.
- Klees, R. (1995). Boundary value problems and approximation of integral equations by finite elements. *Manuscripta geodätica*, 20(5):345–361.
- Klees, R. (1997). Topics on boundary element methods. In *Geodetic Boundary Value Problems in View of the One Centimeter Geoid*, pages 482–531. Springer.
- Klees, R., Tenzer, R., Prutkin, I., a Wittwer, T. (2008). A data-driven approach to local gravity field modelling using spherical radial basis functions. *Journal of Geodesy*, 82(8):457–471.
- Koch, K.-R. a Kusche, J. (2002). Regularization of geopotential determination from satellite data by variance components. *Journal of Geodesy*, 76(5):259–268.
- Koop, R. a Stelpstra, D. (1989). On the computation of the gravitational potential and its first and second order derivatives. *Manuscripta Geodaetica*, 14:373–382.
- Kotsakis, C. (2007). A covariance adaptive approach for regularized inversion in linear models. *Geophys. J. Int.*, 171:509–522.
- Li, J. (2002). A formula for computing the gravity disturbance from the second radial derivative of the disturbing potential. *J. Geod.*, 76:226–231.
- Li, J. (2005). Integral formulas for computing the disturbing potential, gravity anomaly and the deflection of the vertical from the second-order radial gradient of the disturbing potential. *J. Geod.*, 79:64–70.
- Martinec, Z. (2003). Greens function solution to spherical gradiometric boundary-value problems. *J. Geod.*, 77:41–49.
- Meissl, P. (1981). The use of finite elements in physical geodesy. *Report 313, Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University*.

- Moritz, H. (1967). Kinematical geodesy. Technical report, Report no. 16, Department of Geodetic Science, Ohio State University.
- Moritz, H. (1971). Kinematical geodesy 2. *Report no. 165, Department of Geodetic Science, Ohio State University.*
- Nesvadba, O., Holota, P., a Klees, R. (2007). A direct method and its numerical interpretation in the determination of the Earth gravity field from terrestrial data. In *Dynamic Planet*, pages 370–376. Springer.
- NIMA (2000). World Geodetic System 1984: Its Definition and Relationship with Local Geodetic Systems. Technical report, National Imagery and Mapping Agency.
- Pail, R., Bruinsma, S., Migliaccio, F., Förste, Ch. Goiginger, H., Schuh, W., Höck, E., Reguzzoni, M., Brockmann, J., Abrikosov, O., Veicherts, M., Fecher, T., Mayrhofer, R., Krasbutter, I., Sansò, F., a Tscherning, C. (2011). First GOCE gravity field models derived by three different approaches. *J. Geod.*, 85:819–843.
- Pavlis, N. K., Holmes, S. A., Kenyon, S. C., a Factor, J. K. (2012). The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008). *J. Geophys. Res.*, 117(B04406).
- Pizzetti, P. (1911). Sopra il calcolo teorico delle deviazioni del geoide dall ellissoide. *Atti R. Accad. Sci. Torino*, 46(331).
- Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A., a Vetterling, W. T. (1992). Numerical recipes in C: the art of scientific programming. *Section*, 10:408–412.
- Reddy, J. N. (1993). An introduction to the finite element method. 2. *Mc Graw-Hill, Singapore*, 46(331).
- Reed, G. B. (1973). Application of Kinematical Geodesy for Determining the Shorts Wavelength Component of the Gravity Field by Satellite Gradiometry. *Report no. 201, Department of Geodetic Science, Ohio State University.*
- Reigber, C., Lühr, H., a Schwintzer, P. (2002). Champ mission status. *Advances in Space Research*, 30(2):129–134.
- Rektorys, K. (1999). Variační metody. *Academia Praha.*
- Rodriguez, E., Morris, C. S., Belz, J. E., Chapin, E. C., Martin, J. M., Daffer, W., a Hensley, S. (2005). An assessment of the SRTM topographic products. *JPL Pub*, (D31639).
- Rummel, R. (1986). *Satellite gradiometry*. Springer, Berlin.
- Rummel, R., Schwarz, K.-P., a Gerstl, M. (1979). Least squares collocation and regularization. *Bulletin Geodesique*, 53(4):343–361.
- Schmidt, M., Fengler, M., Mayer-Gürr, T., Eicker, A., Kusche, J., Sánchez, L., a Han, S.-C. (2007). Regional gravity modeling in terms of spherical base functions. *Journal of Geodesy*, 81(1):17–38.
- SGN (1996). Spécifications du Réseau de Base Français. version 2.2. Technical report, Service de Géodésie et Nivellement, Institut Géographique National.

- Shaofeng, B. a Dingo, C. (1991). The finite element method for the geodetic boundary value problem. *Manuscr. Geod.*, 16:353–359.
- Shen, Y., Xu, P., a Li, B. (2012). Bias-corrected regularized solution to inverse ill-posed models. *J. Geod.*, 86:597–608.
- Šprlák, M. (2012). GUI application for evaluation of the gravitational tensor components generated by level ellipsoid of revolution. *Computers & Geosciences*, 46:77–83.
- Šprlák, M., Fašková, Z., a Mikula, K. (2011). On the application of the coupled finite-infinite element method to geodetic boundary-value problem. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 55(3):479–487.
- Tapley, B. D., Bettadpur, S., Watkins, M., a Reigber, C. (2004). The gravity recovery and climate experiment: Mission overview and early results. *Geophysical Research Letters*, 31(9).
- Thalhammer, M. (1995). Regionale Gravitationsfeldbestimmung mit zukünftigen Satellitenmissionen (SST und Gradiometrie). *Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C*, (Nr. 437).
- Tighe, M. L. a Chamberlain, D. (2009). Accuracy Comparison of the SRTM, ASTER, NED, NEXTMAP® USA Digital Terrain Model over Several USA Study Sites. In *Proceedings of the ASPRS/MAPPS 2009 Fall Conference, San Antonio, TX*.
- Tikhonov, A. N. (1963a). Regularization of incorrectly posed problems. In *Soviet Math. Dokl.*, volume 4, pages 1624–1627.
- Tikhonov, A. N. (1963b). Solution of incorrectly formulated problems and regularization method. *Soviet Math.*, Dokl. 4:1035–1038.
- Tikhonov, A. N., Arsenin, V. Y., a John, F. (1977). *Solutions of ill-posed problems*. Winston Washington, DC.
- Tóth, G., Földáry, L., Tziavos, I. N., a Ádám, J. (2006). Upward/downward continuation of gravity gradients for precise geoid determination. *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica*, 41:21–30.
- Tscherning, C. C. (1993). Computation of covariances of derivatives of the anomalous gravity potential in a rotated reference frame. *Manus. Geod.*, pages 115–123.
- Tscherning, C. C. and Arabelos, D. (2011). Gravity anomaly and gradient recovery from GOCE gradient data using LSC and comparisons with known ground data. In: *Proceedings of the 4th International GOCE User Workshop, ESA Publications Division, Noordwijk, SP-696*.
- Tscherning, C. C., Forsberg, R., and Vermeer, M. (1990). Methods for regional gravity field modeling from SST and SGG data. *Reports of the Finnish Geodetic Institute*, 90:2.
- van Gelderen, M. a Rummel, R. (2001). The solution of the general geodetic boundary value problem by least squares. *J. Geod.*, pages 1–11.
- van Gelderen, M. a Rummel, R. (2002). Corrections to: The solution of the general geodetic boundary value problem by least squares. *J. Geod.*, 76:121–122.
- Wahba, G. (1990). *Spline models for observational data*, volume 59. SIAM.

- Wild, F. a Heck, B. A. (2005). A comparison of different isostatic models applied to satellite gravity gradiometry. *In: Jekeli C., Bastos L., Fernandes L.(eds.) Gravity, geoid and space missions, IAG symposia series*, 129:230–235.
- Wild, F. a Heck, B. A. (2008). Topographic and isostatic reductions for use in satellite gravity gradiometry. *In: Xu, P., Liu, J., Dermanis, A. (Eds.) Proc. of the VI. Hotine-Marussi symposium. IAG Proc., IAG Symposia*, 132:49–55.
- Wittwer, T. (2009). *Regional gravity field modelling with radial basis functions*. NCG, Nederlandse Commissie voor Geodesie.
- Wolf, K. I. (2007). Kombination globaler Potentialmodelle mit terrestrische Schweredaten für die Berechnung der zweiten Ableitungen des Gravitationspotentials in Satellitenbahnhöhe. *Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C*, (Nr. 603).
- Wolf, K. I. a Denker, H. (2005). Upward continuation of ground data for GOCE calibration. *In: Jekeli C., Bastos L., Fernandes L.(eds.) Gravity, geoid and space missions, IAG symposia series*, 129:60–65.
- Xu, G. (2012). *Sciences of Geodesy-II: Innovations and Future Developments*. Springer.
- Xu, P. (1992). Determination of surface gravity anomalies using gradiometric observables. *Geophysical Journal International*, 110(2):321–332.
- Xu, P. (1998). Truncated SVD methods for discrete linear ill-posed problems. *Geophysical Journal International*, 135(2):505–514.
- Xu, P. (2009). Iterative generalized cross-validation for fusing heteroscedastic data of inverse ill-posed problems. *Geophysical Journal International*, 179:182–200.
- Xu, P., Fukuda, Y., a Liu, Y. (2006a). Multiple parameter regularization: numerical solutions and applications to determination of geopotential from precise satellite orbits. *J. Geod.*, 80:17–27.
- Xu, P. a Rummel, R. (1994). Generalized ridge regression with applications in determination of potential fields. *Manuscripta Geodaetica*, 20:8–20.
- Xu, P., Shen, Y. Z., Fukuda, Y., a Liu, Y. (2006b). Variance components estimation in linear inverse ill-posed models. *J. Geod.*, 80:69–81.
- Yildiz, H. (2012). A study of regional gravity field recovery from GOCE vertical gravity gradient data in the Auvergne test area using collocation. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 56:171–184.

Zoznam publikovaných prác z danej problematiky

Vedecké práce v zahraničných karentovaných časopisoch

Janák, J., Pitoňák, M., Minarechová, Z. (accepted for publication). Regional quasigeoid from GOCE and terrestrial measurements. *Studia Geophysica et Geodaetica*.

Vedecké práce v zahraničných nekarentovaných časopisoch

Janák, J., *Pitoňák, M.* (2011). Comparison and testing of GOCE global gravity models in Central Europe. Journal of geodetic science, ISSN 2081-9943, Vol. 1, No. 4, p. 333-347.

Publikované príspevky na zahraničných vedeckých konferenciách

Pitoňák, M. (2012). Testovanie optimálnej geometrie pre regionálne modelovanie tiažového poľa Zeme z meraní družice GOCE. In: Juniorstav 2012 (CD-ROM): 14. odborná konferencia doktorského studia. Brno, VUT, 26.1.2012. ISBN 978-80-214-4393-8. nestr.

Pitoňák, M. (2011). Porovnanie tiažových modelov Zeme z družicovej misie GOCE. In: Juniorstav 2011 (CD-ROM): 13. Odborná konferencia doktorského studia. Brno, VUT, 4.2.2011. ISBN 978-80-214-4232-0. nestr.

Publikované príspevky na domácich vedeckých konferenciách

Letko, P., *Pitoňák, M.* (2013). Validácia globálneho tiažového poľa z misie GOCE porovnaním s gravimetrickým mapovaním a regionálnym kvázigeoidom. In: Nové poznatky z realizácie a interpretácie geodetických meraní: Zborník referátov z vedecko-odborného seminára s medzinárodnou účasťou. Štrbské Pleso, SR, 21-22.11.2013. - Bratislava : Slovenská spoločnosť geodetov a kartografov. ISBN 978-80-89626-01-4. p. 99-109.

Pitoňák, M. (2013). Porovnanie geopotenciálnych modelov z misie GOCE s regionálnymi kvázigeoidmi na Slovensku. In: Advances in Architectural, Civil and Environmental Engineering [CD-ROM]: 23rd Annual PhD student conference. Bratislava, SR, 30.10.2013. - Bratislava: Nakladateľstvo STU. ISBN 978-80-227-4102-6. p. 163-170.

Janák, J., *Pitoňák, M.* (2012). Testovanie geopotenciálnych modelov Zeme z družicovej misie GOCE. In: Využitie moderných geodetických technológií v súčasných geodetických referenčných systémoch : Zborník referátov z vedecko-odborného seminára s medzinárodnou účasťou. Tatranská Lomnica, SR, 24-25.11.2012. - Bratislava: Slovenská spoločnosť geodetov a kartografov. ISBN 978-80-89626-00-7. p. 123-132.

Abstrakty príspevkov zo zahraničných konferencií

Janák, J., *Pitoňák, M.*, Minarechová, Z., Huang, J. (2014). Comutation of precise regional geoid in great lakes region using GOCE data and two different approaches. In: Geophysical Research Abstracts Volume 16/2014: EGU General Assembly 2014.

Janák, J., *Pitoňák, M.*, Minarechová, Z., Huang, J. (2013). Comparison of stokesian and Finite element approaches for geoid determination in Great lakes region. In: 150th Anniversary of the IAG [elektronický zdroj]: Book of abstracts. Potsdam, 1 - 6.9.2013. p. 375.

Janák, J., *Pitoňák, M.*, Minarechová, Z. (2013). Regional quasigeoid from GOCE and terrestrial measurements. In: Geophysical Research Abstracts Volume 15/2013: EGU General Assembly 2013.

Pitoňák, M., Janák, J. (2012). Downward continuation and transformation of GOCE-based disturbing gravity tensor. In: Gravitifield Symposium [elektronický zdroj]: Benátky, Taliansko, 9 - 12.10.2012.

Janák, J., *Pitoňák, M.* (2012) Comparison of Stokes and Hostines integral transformation. In:

Geophysical Research Abstracts Volume 14/2012: EGU General Assembly 2012.

Janák, J., Gírethová, J., *Pitoňák, M.*, Minarechová, Z. (2011). Empirical test of optimal geometry of boundary value problem domain for regional applications using GOCE measurements. In: Geophysical Research Abstracts Volume 13/2011: EGU General Assembly 2011.

Abstrakty príspevkov z domácich konferencií

Janák, J., *Pitoňák, M.*, Minarechová, Z., Huang, J. (2013). Modelovanie lokálneho geoidu a kvázigeoidu z meraní GOCE a terestrických meraní numerickými metódami. In: Nové poznatky z realizácie a interpretácie geodetických meraní : Zborník referátov z vedecko-odborného seminára s medzinárodnou účasťou. Štrbské Pleso, SR, 21-22.11.2013. - Bratislava: Slovenská spoločnosť geodetov a kartografov, ISBN 978-80-89626-01-4. p. 97.

Pitoňák, M., Janák, J., Minarechová, Z. (2013). Local gravity field model from GOCE and terrestrial measurements. In: 10th Slovak Geophysical Conference [elektronický zdroj]: Abstracts. Smolenice, SR, 19-21.8.2013. - Bratislava: SAV, 2013. - ISBN 978-80-85754-27-8. p. 57.

Janák, J., *Pitoňák, M.* (2012). Testovanie stability procesu pokračovania gradiometrických meraní družice GOCE nadol. In: 60 rokov pôsobenia Katedry geodetických základov 1952 - 2012 : Zborník abstraktov k odbornému semináru. Kočovce, SR, 4-5.12.2012. - Bratislava: STU v Bratislave SvF, 2012. - ISBN 978-80-227-3843-9. p. 59.

Janák, J., *Pitoňák, M.* (2011). Preparation of GOCE data for regional gravity field modelling. In: 9th Slovak Geophysical Conference [elektronický zdroj] : Abstracts. Bratislava, SR, 22-23.6.2013. - Bratislava: SAV, 2011. p. 100.

Postery z domácich konferencií

Janák, J., *Pitoňák, M.* (2010). Družicová misia GOCE - súčasný stav a analýza prvých výsledkov. In: Družicové technológie a súčasná geodézia: Odborná konferencia. Bratislava, SR, 8.12.2010. - ISBN 978-80-227-3446-2.

Ohlasy

Janák, J., *Pitoňák, M.* (2011). Comparison and testing of GOCE global gravity models in Central Europe. Journal of geodetic science, ISSN 2081-9943, Vol. 1, No. 4, p. 333-347.

1. Eshagh, M., Ebadi, S. (2014). A strategy to calibrate errors of Earth gravity models. Journal of Applied Geophysics, 103, p. 215-220.
2. Eshagh, M. (2013). On the reliability and error calibration of some recent Earth's gravity models of GOCE with respect to EGM08. Acta Geodaetica et Geophysica, 48(2), p. 199-208.
3. Eshagh, M., Ebadi, S. (2013). Geoid modelling based on EGM08 and recent Earth gravity models of GOCE. Earth Science Informatics, 6(3), p. 113-125.
4. Eshagh, M., Romeshkani, M. (2013). Quality assessment for terrestrial gravity anomalies by variance component estimation using GOCE gradiometric data and Earth's gravity models. Studia Geophysica et Geodaetica, 57(1), p. 67-83.

5. Gerlach, C., Šprlák, M., Bentel, K., Pettersen, B. R. (2013). Observation, Validation, Modeling - Historical Lines and Recent Results in Norwegian Gravity Field Research. *Kart og Plan*, 73, p. 128-151.
6. Godah, W., Krynski, J. (2013). Comparison of GGMs based on one year GOCE observations with the EGM08 and terrestrial data over the area of Sudan. *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation*.
7. Godah, W., Krynski, J. (2013). Evaluation of recent goce geopotential models over the area of Poland. *Acta Geodynamica et Geomaterialia*, 10 (3), p. 379-386.
8. Jung, W., Brozena, J., Peters, M. (2013). Predicting gravity and sediment thickness in Afghanistan. *Geophysical Journal International*, 192(2), p. 586-601.
9. Odera, P. A., Fukuda, Y. (2013). Towards an improvement of the geoid model in Japan by GOCE data: A case study of the Shikoku area. *Earth, Planets and Space*, 65 (4), p. 361-366.
10. Rexer, M., Hirt, C., Pail, R., Claessens, S. (2013). Evaluation of the third-and fourth-generation GOCE Earth gravity field models with Australian terrestrial gravity data in spherical harmonics. *Journal of Geodesy*, p. 1-15.
11. Guimaraes, G. N., Matos, A. C., Blitzkow, D. (2012). An evaluation of recent GOCE geopotential models in Brazil. *Journal of Geodetic Science*, 2(2), p. 144-155.
12. Szucs, E. (2012). Validation of GOCE time-wise gravity field models using GPS-levelling, gravity, vertical deflections and gravity gradient measurements in Hungary. *Periodica Polytechnica Civil Engineering*, 56(1), p. 3-11.
13. Šprlák, M., Gerlach, C., Pettersen, B. (2012). Validation of GOCE global gravity field models using terrestrial gravity data in Norway. *Journal of Geodetic Science*, 2(2), p. 134-143.
14. Godah, W., Krynski, J. (2011). Validation of GOCE gravity field models over Poland using the EGM2008 and GPS/levelling data. *Geoinformation Issues*, 3(1).