Stavebná fakulta STU v Bratislave

Ing. Michal Šprlák

Autoreferát dizertačnej práce

NUMERICKÉ TESTOVANIE PROCEDÚR NA URČENIE KVÁZIGEOIDU

na získanie akademického titulu doktor (philosophiae doctor, PhD.)

v doktorandskom študijnom programe: 5.1.3 Geodézia a kartografia

Bratislava 2008

Dizertačná práca bola vypracovaná v dennej forme doktorandského štúdia na Katedre geodetických základov Stavebnej fakulty STU v Bratislave.

Predkladateľ: Ing. Michal Šprlák
Katedra geodetických základov, Stavebná fakulta STU
Radlinského 11, 813 68 Bratislava

Školiteľ: Doc. Ing. Marcel Mojzeš, PhD.
Katedra geodetických základov, Stavebná fakulta STU
Radlinského 11, 813 68 Bratislava

Oponenti: Prof. Ing. Pavel Novák, PhD.
Katedra matematiky, Fakulta aplikovaných věd ZU
Univerzitní 22, 306 14 Plzeň, Česká republika

Doc. Ing. Antonín Zeman, DrSc.
Katedra vyšší geodézie, Fakulta stavební ČVUT
Thákurova 7, 166 29 Praha, Česká republika

Ing. RNDr. Peter Holota, DrSc.
Výskumný ústav geodetický, topografický a kartografický
250 66 Zdiby, Česká republika

Autoreferát bol rozoslaný: ....
Obhajoba dizertačnej práce sa koná .... o .... h.
na Stavebnej fakulte STU, Radlinského 11, 813 68 Bratislava v knižnici Katedry geodetických základov.

Prof. Ing. Alojz Kopáčik, PhD.
dekan Stavebnej fakulty STU

Obsah

Úvod

Význam poznania tiažového poľa Zeme pri riešení problémov v inžinierskych a vedeckých disciplínach nemožno spochybňovať. Zatiaľ čo geológia a geofyzika využívajú prejavy tiažového poľa pri štúdiu zloženia zemského telesa, v geodézií je tiažové pole nevyhnutným nástrojom na modelovanie referenčných plôch pre určovanie nadmorských výšok pomocou globálnych navigačných satelitných systémov (GNSS). Geoid ako nulová ekvipotenciálna plocha totožná so strednou hladinou morí a oceánov predĺžená pod kontinenty sa považuje za najprirodzenejšiu referenčnú plochu s jasným fyzikálnym významom a je základom pre ortometrické nadmorské výšky. Presné určenie geoidu ale vyžaduje poznať hustotu topografických hmôt. Naproti tomu, určenie kvázigeoidu nie je znalosťou hustoty topografických hmôt obmedzené, čím sa situácia výrazne zjednoduší. Kvázigeoid, predstavujúci referenčnú plochu pre normálne Molodenského nadmorské výšky, však jasný fyzikálny význam nemá a jeho rozdiely od geoidu v oblasti kontinentov dosahujú aj niekoľko decimetrov.

Existuje niekoľko principiálne odlišných metód na určenie geoidu a kvázigeoidu. Z porúch dráhových parametrov umelých družíc Zeme odhadujeme koeficienty rozvoja potenciálu do radu sférických harmonických funkcií, čo sa s výhodou využíva v globálnych aplikáciách. Geometrický vzťah medzi sklonom, ktorý je definovaný rozdielom astronomickej a elipsoidickej zemepisnej šírky, a relatívnym prevýšením referenčnej plochy je základom astronomicko-geodetickej metódy v regionálnych a lokálnych aplikáciách. Rovnaké priestorové rozlíšenie možno dosiahnuť aj pri metóde gravimetrickej. Jej podstatou je formulácia a riešenie geodetických okrajových úloh, v ktorých okrajové podmienky predstavujú samotné gravimetrické merania.

Používanie Molodenského normálnych nadmorských výšok a bohatá databáza údajov z gravimetrického mapovania na Slovensku boli a stále sú motivújúcimi faktormi na určovanie kvázigeoidu gravimetrickou metódou. Celkom paradoxne, vzhľadom na pomerne širokú geodetickú komunitu na Slovensku a jej praktické potreby sa modelovaniu kvázigeoidu u nás venuje len úzka skupina odborníkov pôsobiacich na Stavebnej fakulte Slovenskej technickej univerzity v Bratislave. Zatiaľ čo klasické prístupy analytických riešení jednoduchého Molodenského problému (JMP) sú v strede pozornosti Katedry geodetických základov, netradičnými numerickými metódami na riešenie geodetických okrajových úloh sa zaoberajú na Katedre matematiky a deskriptívnej geometrie. Úsilie a motivácia predkladanej práce spočíva v porovnaní analytických riešení JMP a numerického riešenia zmiešanej geodetickej okrajovej úlohy metódou konečných prvkov (MKP) pri určovaní a spresňovaní regionálneho modelu kvázigeoidu na území Slovenska.

1 Súčasný stav

Počiatky modelovania kvázigeoidu v období samostatnej Slovenskej republiky siahajú do 90-tych rokov minulého storočia. Historicky prvý regionálny model kvázigeoidu u nás určili Pecár a Grand (1994). Neskôr, pravdepodobne kvôli teoretickým znalostiam v tejto problematike, Geodetický a kartografický ústav prišiel s požiadavkou spresňovania modelu kvázigeoidu na Katedru geodetických základov Stavebnej fakulty Slovenskej technickej univerzity v Bratislave. V rámci vedecko-technických projektov vznikli verzie kvázigeoidov s označením DMQ95, DMQ96 (z angl. Digital Model of Quasigeoid), GMSQ98 a GMSQ03 (z angl. Gravimetric Model of Slovak Quasigeoid), pričom modifikácie posledných dvoch verzií boli oficiálne publikované v (Mojzeš a Janák, 1998, 1999; Mojzeš a kol., 2006). S rozširovaním teoretických vedomostí a praktických skúseností kolektívu na Katedre geodetických základov postupne vzniklo niekoľko ďalších modelov kvázigeoidu, napr. GMSQ_ACA a GMSQ_MOA (Vaľko et al., 2008). V uvedených modeloch kvázigeoidu sa vychádzalo z klasického prístupu analytického riešenia JMP, pričom jednotlivé verzie sa od seba odlišovali najmä dosiahnutou presnosťou, vstupnými gravimetrickými údajmi, ale aj použitým programovým vybavením pri výpočte vplyvu blízkych zón. Preferovaná vo všetkých prípadoch bola metóda RCR (angl. remove-compute-restore) so sférickou Stokesovou funkciou a integračným polomerom $\psi_0 = 3^\circ$ okolo každého výpočtového bodu. Rovnako tak, s výnimkou modelu GMSQ03B, sa v praktickom riešení používal výhradne geopotenciálny model Zeme (GMZ) EGM96. Okrem toho Fašková a kol. (2007) určili model kvázigeoidu na území Slovenska numerickým riešením zmiešanej geodetickej okrajovej úlohy MKP s okrajovými podmienkami 1. a 2. druhu.

Alternatívne procedúry pri určení kvázigeoidu na základe analytického riešenia JMP predstavujú odhady s normálnym tiažovým poľom generovaným ekvipotenciálnym elipsoidom spolu s deterministickými modifikáciami sférickej Stokesovej funkcie (ďalej len deterministické modifikácie). Tieto doposiaľ neboli pri modelovaní kvázigeoidu na území Slovenska využité. Rovnako tak bola len veľmi malá pozornosť venovaná optimálnej veľkosti integračného polomeru a príspevku kombinovaných GMZ, ktoré vznikli na základe údajov družicových misií CHAMP a GRACE. Podobne pri aplikácií MKP na riešenie zmiešanej geodetickej okrajovej úlohy neboli využité okrajové podmienky 3. druhu. Doplnenie uvedených nedostatkov v predkladanej dizertačnej práci naznačuje ďalšie pokroky v metodologickej a praktickej koncepcií presného určovania kvázigeoidu, o ktorej ako prvý na našom území diskutoval v svojej dizertačnej práci Janák (1999). Z hľadiska témy, rozsahu a obsahu predkladanej dizertačnej práce a jej porovnávacieho charakteru možno konštatovať najväčší prienik s prácami (Kern, 2003; Ågren, 2004; Ellmann, 2004) výkonanými v zahraničí.

2 Ciele dizertačnej práce

Hlavným cieľom dizertačnej práce je objektívne porovnanie presnosti procedúr a algoritmov pri spresňovaní regionálneho modelu kvázigeoidu s využitím analytického riešenia JMP a numerického riešenia zmiešanej geodetickej okrajovej úlohy MKP. Konkrétne úlohy vedúce k splneniu uvedeného cieľa možno podľa ich charakteru rozdeliť na:

a) **Teoretické úlohy**, v rámci ktorých je uvedený matematický popis procedúr na základe doposiaľ publikovaných prác. V tejto časti je rozpracovaný príspevok k problematike deterministických modifikácií, a to:

   - rozdelením na základné a v tvare zvyšku Taylorovho polynómu
   - zovšeobecneným vyjadrením deterministických modifikácií a odhadov výškovej anomálie

b) **Softvérové riešenia**, pretože existujúce programy nepokrývajú celú škálu testovaných procedúr. Z pohľadu vykonania numerických experimentov je preto dôležitá príprava programov na numerický výpočet:

   - plošného integrálu so sférickou Stokesovou funkciou a deterministickými modifikáciami
   - vplyvu vzdialených zón

c) **Numerické experimenty**, vykonané pomocou syntetických (simulovaných) a reálnych údajov a ich zhodnotením na základe vykonaných prác u nás a v zahraničí. Úlohou numerických experimentov je porovnať:

   - algoritmy výpočtu plošného integrálu
   - približné a gradientové riešenie JMP
   - metódu RCR a odhad s normálnym tiažovým poľom generovaným ekvipotenciálnym elipsoidom
   - kombinované GMZ
   - deterministické modifikácie
   - numerické riešenie zmiešanej geodetickej okrajovej úlohy MKP

3 Teória

Analytické riešenia JMP v tvare plošných integrálov sa stali akýmsi štandardom pri praktickom určovaní regionálnych modelov kvázigeoidu. Aj keď priamy výpočet plošného integrálu okolo celej Zeme nie je možný bolo navrhnutých niekoľko procedúr a metód, ako sa s týmto problémom vysporiadať. V súvislosti s prudkým rozvojom výpočtovej techniky sa do pozornosti dostali numerické metódy riešenia okrajových úloh. Tieto sú silnými nástrojmi v mnohých inžinierskych a vedeckých odvetviach, pri modelovaní kvázigeoidu je ich využitie skôr netradičné. Práve tento fakt je motivujúcim pre aplikáciu MKP pri riešení zmiešanej geodetickej okrajovej úlohy.

3.1 Formulácia a analytické riešenie pre JMP

Nech $\Omega \subset R^3$ je oblasť s hranicou $\partial\Omega$. Nech W je skutočný tiažový potenciál a U je normálny tiažový potenciál. Potom $T = W - U$ je poruchový potenciál, ktorý na základe teórie potenciálu je harmonickou funkciou v $R^3 - \Omega$, kde spĺňa Laplaceovu diferenciálnu rovnicu. Spojením Laplaceovej diferenciálnej rovnice pre poruchový potenciál a okrajovej podmienky 3. druhu v sférickej aproximácií formulujeme JMP v tvare:

$$\nabla^2 T = 0 \quad \text{v} \quad R^3 - \Omega \tag{1}$$

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{R}\,T \quad \text{na} \quad \partial\Omega \tag{2}$$

kde R je polomer referenčnej sféry. Hranicou $\partial\Omega$ oblasti Ω je teluroid, ktorého odľahlosť od ekvipotenciálneho elipsoidu je rovná Molodenského normálnej nadmorskej výške H^n. Okrajová podmienka (2) sa nazýva povrchová anomália tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu a získame ju rozdielom skutočného tiažového zrýchlenia g v bode P na povrchu Zeme a normálneho tiažového zrýchlenia γ v bode Q na teluroide, platí (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005, rov. 8-23):

$$\Delta g = g(\mathrm{P}) - \gamma(\mathrm{Q}) \tag{3}$$

Analytické riešenie JMP (1) a (2) podľa (Molodensky a kol., 1962) pre poruchový potenciál v tvare nekonečného radu sa v bežných podmienkach obmedzuje na prvé dva členy, potom hovoríme o tzv. gradientovom riešení JMP (Moritz, 1980), ktoré má tvar plošného integrálu okolo jednotkovej sféry σ a platí:

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_\sigma \left(\Delta g + G_1\right)\, S\left(\cos\psi\right)\, \mathrm{d}\sigma \tag{4}$$

kde G_1 je korekčný člen, $S\left(\cos\psi\right)$ je sférická Stokesova funkcia (Stokes, 1849), závislá od sférickej vzdialenosti ψ výpočtového bodu a stredu integračného elementu. Výškovú anomáliu ζ, ktorá odpovedá geometrickej odľahlosti medzi zemským povrchom a teluroidom, resp. medzi ekvipotenciálnym elipsoidom a plochou kvázigeoidu, získame pomocou

Brunsovho vzorca (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005, rov. 8-26):

$$\zeta = \frac{T}{\gamma} \tag{5}$$

kde $\gamma = \gamma(Q)$ je normálne tiažové zrýchlenie na teluroide. Výsledný tvar gradientového riešenia JMP pre výškovú anomáliu je nasledovný:

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint\limits_{\sigma} \left(\Delta g + G_1\right) \, S\left(\cos\psi\right) \, \mathrm{d}\sigma \tag{6}$$

V prípade zanedbania korekčného člena G_1 v poslednej rovnici hovoríme o približnom riešení JMP. Moritz (1980, kap. 48) navrhol nahradiť korekčný člen G_1 topografickou korekciou δg_t a ukázal, že takéto riešenie je presnejšie ako riešenie približné.

3.2 Praktické určenie kvázigeoidu

Gradientové riešenie JMP podľa rovnice (6) po formálnej stránke predstavuje plošný integrál okolo jednotkovej sféry σ. Jeho obmedzenie súvisí s nedostatočnou znalosťou podrobných gravimetrických údajov okolo celej Zeme. Obvykle máme k dispozícii gravimetrické údaje do niekoľkých stupňov od hraníc výpočtovej oblasti, mnohokrát rôznej presnosti a pôvodu. Okrem toho je globálna integrácia nevýhodná aj z hľadiska výpočtového času.

Pri určení kvázigeoidu pristupujeme k praktickým odhadom na určenie výškovej anomálie, ktoré sú založené na rozklade plošného integrálu okolo celej Zeme. Odhad výškovej anomálie, v ktorom vykonáme rozklad plošného integrálu v priestorovej oblasti pozostáva z dvoch členov a má nasledovný tvar:

$$\hat{\zeta} = \frac{c}{2\pi} \iint\limits_{\sigma_0} \Delta\hat{g}^T \, S(y) \, \mathrm{d}\sigma + c \sum_{n=2}^{M_{max}} Q_n(y_0) \, \Delta\hat{g}_n^S \tag{7}$$

kde $c = \frac{R}{2\gamma}$, $\Delta\hat{g}^T$ sú realizácie pozemných gravimetrických údajov, $\Delta\hat{g}_n^S$ predstavujú realizácie družicových gravimetrických údajov, $y = \cos\psi$, $y_0 = \cos\psi_0$, M_{max} je maximálny stupeň sférických harmonických koeficientov GMZ a pre koeficienty $Q_n(y_0)$ platí:

$$Q_n(y_0) = \int\limits_{-1}^{y_0} S(y) \, P_n(y) \, \mathrm{d}y \tag{8}$$

kde $P_n(y)$ je Legendreov polynóm 1. druhu stupňa n. Rovnica (7) pozostáva z dvoch analogických členov. Prvý člen predstavuje obmedzenú integráciu v oblasti σ_0 so známymi gravimetrickými údajmi a integračným polomerom ψ_0 okolo každého výpočtového bodu a nazývame ho vplyv blízkych zón. Druhý člen v rovnici (7) je konečným radom gravimetrických údajov v spektrálnej oblasti, reprezentuje zbytok plošného integrálu v oblasti $\sigma - \sigma_0$ a nazýva sa vplyv vzdialených zón. Keďže normálne tiažové pole je generované ekvipotenciálnym elipsoidom, podľa tejto vlastnosti sa odhad (7) nazýva odhadom výškovej anomálie s normálnym tiažovým poľom generovaným ekvipotenciálnym elipsoidom.

Ak súčasne s rozkladom plošného integrálu v priestorovej oblasti vykonáme aj rozklad v oblasti frekvenčnej, dostávame odhad výškovej anomálie, ktorý sa v literatúre označuje ako metóda RCR (Rapp a Rummel, 1971):

$$\hat{\zeta}^{RCR} = c \sum_{n=2}^{M_{max}} \frac{2}{n-1}\, \Delta\hat{g}_n^S + \frac{c}{2\pi} \iint_{\sigma_0} \left[\Delta\hat{g}^T - \sum_{n=2}^{M_{max}} \Delta\hat{g}_n^S \right] S\left(\cos\psi\right)\, \mathrm{d}\sigma \tag{9}$$

Prvý člen na pravej strane predstavuje dlhovlnnú zložku výškovej anomálie. Druhý člen je integrál v oblasti σ_0 so zvoleným integračným polomerom ψ_0 okolo každého výpočtového bodu. Vo vnútri integrálu vystupujú anomálie tiažového zrýchlenia zbavené vplyvu svojej dlhovlnnej zložky do stupňa M_{max}. Nazývame ich reziduálne anomálie tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu a výsledok integrácie reziduálnou výškovou anomáliou. Metóda RCR je po matematickej stránke ekvivalentná s odhadom (7). Na rozdiel od odhadu (7) je pri metóde RCR normálne tiažové pole generované sféroidom stupňa M_{max}.

3.3 Deterministické modifikácie

Sférická Stokesova funkcia plní úlohu váhovej funkcie a ovplyvňuje rýchlosť konvergencie vplyvu vzdialených zón. Tento určujeme pomocou sférických harmonických koeficientov GMZ, ktoré však poznáme len do maximálneho stupňa a rádu M_{max}. Za účelom urýchlenej konvergencie vplyvu vzdialených zón bolo v literatúre navrhnutých niekoľko deterministických modifikácií. Ich formálna podobnosť je motivujúcim faktorom pre zovšeobecnenie v nasledovnom tvare:

$$\tilde{S}_B(y) = \tilde{S}(y) - \sum_{b=0}^{B} \frac{(y-y_0)^b}{b!} \frac{\mathrm{d}^b \tilde{S}(y_0)}{\mathrm{d}y^b} \tag{10}$$

pričom $\tilde{S}(y) = S(y) - \sum_{k=2}^{P} \frac{2k+1}{2}\, a_k\, P_k(y) - \sum_{k=2}^{L} \frac{2k+1}{2}\, b_k\, P_k(y)$, a_k a b_k predstavujú koeficienty deterministickej modifikácie a B je maximálny stupeň Taylorovho polynómu. Ak $B \geq 0$ hovoríme o tzv. deterministických modifikáciách v tvare zvyšku Taylorovho polynómu, inak hovoríme o základných deterministických modifikáciách. Na základe voľby koeficientov a_k a b_k definujeme tvar konkrétnej váhovej funkcie, najčastejšie diskutované deterministické modifikácie sú uvedené v tab. 1.

modifikácia	B	a_k	b_k
(Stokes, 1849)	-	0	0
(Molodensky a kol., 1962)	-	0	$\sum_{k=2}^{L} \frac{2k+1}{2}\, b_k\, e_{nk} = Q_n(y_0)$ [1]
(Wong a Gore, 1969)	-	$\frac{2}{k-1}$	0
(Vaníček a Kleusberg, 1987)	-	$\frac{2}{k-1}$	$\sum_{k=2}^{L} \frac{2k+1}{2}\, b_k\, e_{nk} = Q_n(y_0) - \sum_{k=2}^{P} \frac{2k+1}{2}\, a_k\, e_{nk}$ [1]
(Meissl, 1971)	0	0	0
(Jekeli, 1980)	0	0	$\sum_{k=2}^{L} \frac{2k+1}{2}\, b_k\, e_{nk} = Q_n(y_0)$ [1]
(Heck a Grüninger, 1987)	0	$\frac{2}{k-1}$	0
(Featherstone a kol., 1998)	0	$\frac{2}{k-1}$	$\sum_{k=2}^{L} \frac{2k+1}{2}\, b_k\, e_{nk} = Q_n(y_0) - \sum_{k=2}^{P} \frac{2k+1}{2}\, a_k\, e_{nk}$ [1]

Tabuľka 1: Deterministické modifikácie a ich charakteristiky

[1] $e_{nk} = \int_{-1}^{y_0} P_n(y)\, P_k(y)\, \mathrm{d}y$

Na základe rovnice (10) dokážeme zovšeobecniť aj odhady výškovej anomálie. V prípade normálneho tiažového poľa generovaného ekvipotenciálnym elipsoidom zmena váhovej funkcie $S(y)$ na $\tilde{S}_B(y)$ spôsobí aj zmenu koeficientov $Q_n(y_0)$ na $\left[d_n + \tilde{Q}_n^B(y_0)\right]$ a pre odhad výškovej anomálie platí:

$$\hat{\zeta}_B^* = \frac{c}{2\pi} \iint_{\sigma_0} \Delta\hat{g}^T\ \tilde{S}_B(y)\, \mathrm{d}\sigma + c \sum_{n=2}^{M_{max}} \left[d_n + \tilde{Q}_n^B(y_0)\right]\ \Delta\hat{g}_n^S \tag{11}$$

kde

$$d_n = \begin{cases} a_n + b_n, & \text{ak} \quad 2 \le n \le L \\ a_n, & \text{ak} \quad L < n \le P \\ 0, & \text{ak} \quad P < n < \infty \end{cases} \tag{12}$$

a koeficienty $\tilde{Q}_n^B(y_0)$ sú definované nasledovne:

$$\tilde{Q}_n^B(y_0) = \int_{-1}^{y_0} \tilde{S}(y)\, P_n(y)\, \mathrm{d}y + \int_{y_0}^{1} \sum_{b=0}^{B} \frac{(y-y_0)^b}{b!} \frac{\mathrm{d}^b \tilde{S}(y_0)}{\mathrm{d}y^b}\, P_n(y)\, \mathrm{d}y \tag{13}$$

Na rozdiel od odhadu (11) pri metóde RCR sa zmení len váhová funkcia vo vnútri obmedzenej integrácie a odhad výškovej anomálie bude:

$$\hat{\zeta}_B^{RCR*} = c \sum_{n=2}^{M_{max}} \frac{2}{n-1}\, \Delta\hat{g}_n^S + \frac{c}{2\pi} \iint_{\sigma_0} \left[\Delta\hat{g}^T - \sum_{n=2}^{M_{max}} \Delta\hat{g}_n^S \right] \tilde{S}_B(y)\, \mathrm{d}\sigma \tag{14}$$

3.4 Algoritmy numerického výpočtu plošného integrálu

Vplyv blízkych zón je plošný integrál v oblasti σ_0, v ktorej poznáme podrobné gravimetrické údaje. Tieto na zemskom povrchu získavame meraním v diskrétnych bodoch vytvárajúcich nepravidelnú trojuholníkovú sieť. Diskrétne gravimetrické údaje transformujeme do pravidelnej zemepisnej siete interpolačnými metódami. Získavame tak stredné gravimetrické údaje a numerickými metódami vypočítame hodnotu plošného integrálu.

Numerickú integráciu možno považovať za najprirodzenejší algoritmus numerického výpočtu integrálu spojitej funkcie na uzatvorenom intervale. V prvom kroku uzatvorený interval diskretizujeme na konečný počet podintervalov s konečným rozmerom. Diskretizáciu do pravidelnej siete na sfére vykonávame najčastejšie v zemepisnom súradnicovom systéme sieťou zemepisných poludníkov a rovnobežiek. V ďalšom určíme stredné (reprezentatívne) hodnoty funkcie v jednotlivých integračných elementoch $\Delta\sigma_k$. Tieto nazývame strednými anomáliami tiažového zrýchlenia $\overline{\Delta g}$, ktoré sú podľa vety o integrálnej strednej hodnote definované nasledovne:

$$\overline{\Delta g} = \frac{1}{\Delta\sigma_k} \iint_{\sigma_k} \Delta g \, \mathrm{d}\sigma_k \tag{15}$$

Súčiny strednej hodnoty funkcie a veľkosti podintervalu nakoniec sčítame a dostávame numerickú hodnotu integrálu v uzatvorenom intervale. Potom výpočet vplyvu blízkych zón numerickou integráciou bude (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005, rov. 2-408):

$$\zeta_{\odot}^{NI}(\varphi, \lambda) = \frac{c\, \Delta\varphi\, \Delta\lambda}{2\pi} \sum_{k}^{j} \overline{\Delta g}\,(\varphi', \lambda')\, S(y)\, \cos\varphi' \tag{16}$$

pričom (φ, λ) predstavujú sférickú zemepisnú šírku a dĺžku výpočtového bodu, (φ', λ') sférickú zemepisnú šírku a dĺžku stredu integračného elementu, j je počet všetkých integračných elementov v oblasti σ_0 a $\Delta\sigma_k = \Delta\varphi\, \Delta\lambda\, \cos\varphi'$. Dôležitým faktom je singularita sférickej Stokesovej funkcie pre $y = 1$ ($\psi = 0°$). V literatúre bolo navrhnutých niekoľko spôsobov ako sa s týmto problémom vysporiadať.

Alternatívny spôsob numerického výpočtu vplyvu blízkych zón predstavuje rýchla Fourierova transformácia (RFT) (Cooley a Tukey, 1965). Táto umožňuje prechod z časovej, resp. priestorovej oblasti do oblasti frekvenčnej a má nespočetné množstvo aplikácií najmä v problematike spracovania signálu. Najdôležitejšiou vlastnosťou Fourierovej transformácie z hľadiska výpočtu vplyvu blízkych zón je veta o konvolúcií. Na základe tejto vety dokážeme vyjadriť konvolučný integrál pomocou Fourierovej transformácie $\mathcal{F}$ a jej inverzie $\mathcal{F}^{-1}$. Príkladom konvolučného integrálu je aj vplyv blízkych zón, ktorého výpočet algoritmom RFT je nasledovný:

$$\zeta_{\odot}^{RFT}(\varphi, \lambda) = \frac{c\, \Delta\varphi\, \Delta\lambda}{2\pi}\, \mathcal{F}^{-1}\left\{ \mathcal{F}\left[S(y)\right]\; \mathcal{F}\left[\, \overline{\Delta g}\,(\varphi', \lambda')\; \cos\varphi' \right] \right\} \tag{17}$$

Aproximácie váhovej funkcie v rovine a na sfére viedli k niekoľkým algoritmom RFT. Z týchto len jednorozmerná RFT na sfére je exaktná, rovnako ako numerická integrácia.

3.5 Využitie MKP pri riešení zmiešanej geodetickej okrajovej úlohy

MKP zaraďujeme do skupiny tzv. variačných metód na riešenie okrajových úloh, kedy sa pomocou aparátu matematickej algebry a analýzy prepracujeme od okrajovej úlohy k systému lineárnych rovníc, pričom predpokladáme konečnú oblasť riešenia so známymi okrajovými podmienkami. Nie je teda možné touto numerickou metódou priamo riešiť JMP (1) a (2). Alternatívu k JMP, pri ktorej možno využiť MKP, predstavuje zmiešaná geodetická okrajová úloha s okrajovými podmienkami 1. a 3. druhu, ktorú formulujeme nasledovne.

Nech $\Omega' \subset R^3$ je konečná oblasť ohraničená plochami $\Gamma_i,\ i = 1, 2, \ldots, 6$. Nech poruchový potenciál T v oblasti Ω' vyhovuje Laplaceovej diferenciálnej rovnici, na hranici Γ_1 nech sú známe anomálie tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu Δg a na hraniciach $\Gamma_i,\ i = 2, 3, \ldots, 6$ nech je známy poruchový potenciál T_{GMZ}, potom bude:

$$\nabla^2 T = 0 \quad \text{v} \quad \Omega' \tag{18}$$

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{R}\, T \quad \text{na} \quad \Gamma_1 \tag{19}$$

$$T = T_{GMZ} \quad \text{na} \quad \Gamma_i,\ i = 2, 3 \ldots 6 \tag{20}$$

Všeobecný postup pri riešení okrajových úloh pomocou MKP možno zhrnúť do týchto krokov (Reddy, 1993): diskretizácia oblasti na elementy, odvodenie slabej formulácie diferenciálnej rovnice, zostavenie systému lineárnych rovníc na jednotlivých elementoch, zostavenie globálneho konečno-prvkového modelu, riešenie systému lineárnych rovníc.

Diskretizáciu konečnej oblasti riešenia možno vykonať niekoľkými spôsobmi v závislosti od tvaru a dimenzie oblasti riešenia. Pre zmiešanú geodetickú okrajovú úlohu (18) až (20) boli použité 4-uzlové a 8-uzlové elementy. Tvar elementov priamo ovplyvňuje tzv. aproximačné funkcie, ktoré sú v MKP funkciami polynomickými. Veľkosť elementov výrazne ovplyvňuje presnosť numerického riešenia okrajovej úlohy.

Pod slabou formuláciou diferenciálnej rovnice rozumieme integrálnu identitu:

$$\int\limits_{\Omega'} \nabla w \cdot \nabla T \,\mathrm{d}\Omega' = \int\limits_{\partial\Omega'} w\, \frac{\partial T}{\partial n'}\, \mathrm{d}\sigma \tag{21}$$

v ktorej zoslabíme požiadavky na neznámy poruchový potenciál T, pričom w je testovacia funkcia, n' predstavuje vonkajšiu normálu k hranici $\partial\Omega' = \sum_{i=1}^{6} \Gamma_i$ oblasti Ω'. Riešenie, ktoré spĺňa slabú formuláciu nazývame slabým riešením a z fyzikálneho hľadiska odpovedá podmienke minima potenciálnej energie.

Slabé riešenie v ďalšom kroku nahradíme riešením približným na každom elemente. Poruchový potenciál T vyjadríme v tvare lineárnej kombinácie poruchového potenciálu T_j^e v j-tom uzlovom bode elementu Ω'_e a aproximačnej funkcie Ψ_j^e. Môžeme teda napísať:

$$T \approx T^e = \sum_{j=1}^{N} T_j^e\, \Psi_j^e \tag{22}$$

kde N je počet uzlových bodov elementu. Dosadením približného riešenia (22) pre poruchový potenciál do slabej formulácie (21) a uvážením aproximačných funkcií Ψ_i^e, $i = 1, 2, \ldots, N$ namiesto testovacej funkcie w získame systém lineárnych rovníc pre element Ω'_e v tvare:

$$\sum_{j=1}^{N} T_j^e \int\limits_{\Omega'_e} \nabla\Psi_i^e \cdot \nabla\Psi_j^e \,\mathrm{d}\Omega'_e = \int\limits_{\partial\Omega'_e} \Psi_i^e\, \frac{\partial T}{\partial n'_e}\, \mathrm{d}\sigma, \quad i = 1, \ldots, N \tag{23}$$

pričom $\partial\Omega'_e$ je hranica elementu Ω'_e a n'_e je vonkajšia normála k tejto hranici. Integrál na ľavej strane rovnice (23) závisí od známych aproximačných funkcií, ktorých priebeh súvisí s tvarom elementu a počtom uzlových bodov. Tento integrál označujeme symbolom K_{ij}^e a tvorí koeficienty tzv. matice tuhosti. Integrál na pravej strane predstavuje prvok tzv. vektora tokov cez hranice elementu a označujeme ho Q_i^e. Potom v maticovom zápise systém lineárnych rovníc pre element Ω'_e bude:

$$\sum_{j=1}^{N} K_{ij}^e\, T_j^e = Q_i^e, \quad i = 1, \ldots, N \tag{24}$$

Obdobným spôsobom vieme vytvoriť sústavy rovníc pre všetky elementy, ktorými diskretizujeme oblasť riešenia. Ak na hraniciach elementu poznáme anomálie tiažového zrýchlenia Δg, deriváciu poruchového potenciálu v smere vonkajšej normály v rovnici (23) nahradíme podľa (19) výrazom $\frac{\partial T}{\partial n'_e} \approx \frac{\partial T}{\partial r} = -\Delta g - \frac{2}{R}T$.

Aby sme získali numerické riešenie zmiešanej geodetickej okrajovej úlohy (18) až (20) v oblasti Ω', vytvoríme tzv. globálny konečno-prvkový model. V tomto spojíme sústavy rovníc pre všetky elementy, pričom využijeme princíp spojitosti riešenia medzi elementami a rovnováhu tokov. Pre riešiteľnosť globálneho konečno-prvkového modelu metódami matematickej algebry je nevyhnutné zadať okrajové podmienky podľa rovníc (19) a (20).

4 Numerické experimenty

Ako vyplýva z teoretickej časti predkladaného príspevku existuje niekoľko principiálne odlišných procedúr na určenie regionálneho modelu kvázigeoidu. Za účelom ich objektívneho porovnania boli vykonané numerické experimenty. Vnútorná presnosť procedúr a algoritmov bola testovaná s využitím sférických harmonických koeficientov syntetického modelu Zeme (SMZ). Porovnanie deterministických modifikácií a kombinovaných GMZ bolo vykonané pomocou globálnej strednej kvadratickej chyby. Nakoniec boli využité reálne gravimetrické údaje, digitálne modely reliéfu a kombinované GMZ pri ďalšom spresňovaní gravimetrického modelu kvázigeoidu na území Slovenska, ktorého absolútna presnosť bola testovaná na množine bodov z meraní globálneho polohového systému (GPS) a nivelácie. Vzhľadom na značný počet numerických experimentov sa v ďalšom obmedzíme len tie najdôležitejšie.

4.1 Testovanie vnútornej presnosti procedúr pomocou SMZ

SMZ, ktoré definujeme ako umelé modely tiažového poľa Zeme, sa stali dôležitým nástrojom pri testovaní vnútornej presnosti procedúr a algoritmov. Pre nasledujúce numerické experimenty bol zvolený SMZ založený na rozvoji potenciálu do radu sférických harmonických funkcií s priestorovým rozlíšením 5' × 5'. Tento obsahuje sférické harmonické koeficienty do stupňa a rádu M_{max}=2160, pomocou ktorých dokážeme vygenerovať nielen vstupné hodnoty, ale aj hodnoty kontrolné.

Testovanie vnútornej presnosti algoritmov výpočtu plošného integrálu, deterministických modifikácií a numerického riešenia zmiešanej geodetickej okrajovej úlohy MKP bolo vykonané na časti európskeho kontinentu v oblasti $\varphi \in \langle 40°, 60° \rangle$ a $\lambda \in \langle 0°, 30° \rangle$ na ploche referenčnej sféry s polomerom $R = 6371$ km. V rámci dizertačnej práce boli vytvorené programy (s pracovnými názvami NUMINT1, NUMINT2, 1D-FFT) na numerický výpočet plošného integrálu a boli porovnané s existujúcimi programami GEOFOUR, SPFOUR a STOKES (Tscherning a kol., 1992). Okrem toho bol vytvorený aj program na výpočet vplyvu vzdialených zón. Integrácia anomálií tiažového zrýchlenia v testovaných programoch sa vykonávala s krokom 5' v smere zemepisnej šírky aj v smere zemepisnej dĺžky

Program	M	min. (m)	max. (m)	str. hod. (m)	št. odch. (m)
NUMINT1	2	-0.076	0.060	-0.005	0.011
	360	-0.025	0.024	0.000	0.006
NUMINT2	2	-0.071	0.105	0.000	0.012
	360	-0.044	0.063	0.000	0.009
1D-FFT	2	-0.076	0.060	-0.005	0.011
	360	-0.025	0.024	0.000	0.006
GEOFOUR	2	-12.834	-4.020	-7.415	1.471
	360	-0.120	0.094	0.000	0.021
SPFOUR	2	-0.105	0.261	-0.004	0.014
	360	-0.024	0.026	0.000	0.006
STOKES	2	-0.066	0.050	-0.004	0.011
	360	-0.026	0.029	0.000	0.006

Tabuľka 2: Štatistika rozdielov medzi modelmi kvázigeoidu výpočítaných integráciou v programoch a SMZ

s integračným polomerom $\psi_0 = 6°$. Pre účely numerického porovnania odhadu výškovej anomálie s normálnym tiažovým poľom generovaným ekvipotenciálnym elipsoidom podľa rovnice (7) a metódy RCR podľa rovnice (9) boli uvážené maximálne stupne dlhovlnnej zložky $M = 2$ a 360. Normálne tiažové pole bolo definované parametrami geodetického referenčného systému 1980 (GRS80) (Moritz, 1992). Deterministické modifikácie implementované do programu NUMINT2, boli vytvorené programy na výpočet vplyvu vzdialených zón a rovnako boli testované pomocou SMZ. Rovnako tak sa vykonalo testovanie MKP pri numerickom riešení zmiešanej geodetickej okrajovej úlohy (18) až (20) v programe ANSYS, verzia 8.1 (http://www.ansys.stuba.sk). Výška hornej hranice oblasti riešenia ($R_{upp} - R$) bola zvolená v rozmedzí od 10 km až do 1000 km s nepravidelným intervalom. Podobne boli testované aj stupne diskretizácie sférickej plochy. Z dôvodu obmedzenej pamäti počítača (1GB) bolo možné dosiahnuť diskretizáciu 5'×5', len ak výška hornej hranice oblasti riešenia dosahovala hodnoty 10 km a 50 km. V ostatných prípadoch bola použitá veľkosť plošného elementu 15'×15' a 30'×30'. Výsledným riešením v programe ANSYS boli hodnoty poruchového potenciálu v celej oblasti riešenia. Vnútorná presnosť MKP bola testovaná len na dolnej hranici oblasti riešenia, na ktorej boli hodnoty poruchového potenciálu pretransformované na výškové anomálie Brunsovým vzorcom (5).

Štandardná odchýlka pri testovaní algoritmov výpočtu plošného integrálu a deterministických modifikácií dosiahla niekoľko milimetrov, ako je uvedené v tab. 2, a je spôsobená diskretizačnými chybami. Program GEOFOUR sa ukázal ako nevhodný pri odhade s normálnym tiažovým poľom generovaným ekvipotenciálnym elipsoidom. Výsledky poukazujú

$R_{upp} - R$ (km)	diskr.	min. (m)	max. (m)	str. hod. (m)	št. odch. (m)
10	5'×5'	-0.031	0.032	0.000	0.005
	15'×15'	-0.116	0.130	0.001	0.032
	30'×30'	-0.264	0.329	0.001	0.080
50	5'×5'	-0.090	0.072	0.001	0.011
	15'×15'	-0.186	0.201	0.002	0.046
	30'×30'	-0.577	0.606	0.003	0.152
100	15'×15'	-0.219	0.220	0.005	0.050
	30'×30'	-0.641	0.691	0.006	0.168
250	15'×15'	-0.237	0.241	0.010	0.054
	30'×30'	-0.616	0.748	0.014	0.182
500	15'×15'	-0.239	0.259	0.016	0.056
	30'×30'	-0.614	0.766	0.027	0.187
1000	15'×15'	-0.236	0.271	0.021	0.057
	30'×30'	-0.613	0.780	0.038	0.190

Tabuľka 3: Štatistika rozdielov medzi modelmi kvázigeoidu výpočítaných MKP a SMZ

na numerickú správnosť programov vytvorených v rámci predkladanej dizertačnej práce. Niekoľko milimetrové rozdiely vnútornej presnosti sa prejavujú aj v závislosti od voľby maximálneho stupňa dlhovlnnej zložky tiažového poľa, avšak len pri sférickej Stokesovej funkcií. Pre deterministické modifikácie sa otázka voľby normálneho tiažového poľa ukazuje ako nepodstatná. Štatistika rozdielov medzi modelmi kvázigeoidu určených MKP v programe ANSYS a SMZ je uvedená v tab. 3. Štandardná odchýlka závisí nielen od stupňa diskretizácie, ale aj od výšky hornej hranice oblasti riešenia. Celkom logicky zjemňovaním diskretizácie pri rovnakej výške hornej hranice oblasti riešenia štandardná odchýlka klesá. Výsledky na úrovni niekoľkých milimetrov porovnateľné s predchádzajúcimi numerickými experimentami, boli získané len pri diskretizácií 5'×5' s výškou hornej hranice oblasti 10 km a 50 km. V ostatných prípadoch štandardná odchýlka dosahuje aj niekoľko centimetrov.

4.2 Testovanie absolútnej presnosti procedúr pri určení kvázigeoidu na území Slovenska

Na území Slovenska je dostupných viacej ako 200 000 diskrétnych gravimetrických údajov z gravimetrického mapovania. Z okolitých štátov sú dostupné stredné hodnoty Bouguerových anomálií tiažového zrýchlenia s krokom 5'×7.5'. Tieto spolu s digitálnymi modelmi terénu a GMZ sú základom modelovania gravimetrického kvázigeoidu na našom území.

Modely kvázigeoidu pri testovaní približného a gradientového riešenia, kombinovaných GMZ a deterministických modifikácií boli vypočítané v oblasti $\varphi \in \langle 47.5°, 50° \rangle$ a $\lambda \in \langle 16.7°, 23° \rangle$. Pri analytických riešeniach JMP sa predpokladalo normálne tiažové pole generované ekvipotenciálnym elipsoidom GRS80. Integrácia vstupných údajov sa vykonala s krokom 20" v smere zemepisnej šírky a 30" v smere zemepisnej dĺžky s integračnými polomermi $\psi_0 \in \langle 0.1°, 1.0° \rangle$ s krokom 0.1° a $\psi_0 \in (1.0°, 3.0° \rangle$ s krokom 0.2°. Vplyv vzdialených zón bol vypočítaný pomocou kombinovaných GMZ EGM96 (Lemoine a kol., 1998), EIGEN-CG01C (Reigber a kol., 2006), EIGEN-CG03C (Förste a kol., 2005), EIGEN-GL04C (Förste a kol., 2008) a EGM2008 (Pavlis a kol., 2008) na povrchu teluroidu, ktorého plocha bola určená z digitálneho modelu terénu SRTM-3 (Rodriguez a kol., 2005). Pri testovaní MKP bolo možné dosiahnuť diskretizáciu oblasti 4-uzlovými elementami s veľkosťou 3' v smere zemepisnej šírky a 4.5' v smere zemepisnej dĺžky. Dolná hranica oblasti riešenia bola totožná s plochou teluroidu, súbežne s touto vo výške 10 km sa nachádzala horná hranica. Hodnoty poruchového potenciálu na hornej a bočných hraniciach oblasti riešenia boli vypočítané zo sférických harmonických koeficientov GMZ EGM96 a EGM2008 do maximálneho stupňa a rádu 360, resp. 2160. Numerické riešenie zmiešanej geodetickej okrajovej úlohy MKP bolo vykonané v programe ANSYS ver. 8.1. Kvalita gravimetrických modelov kvázigeoidu bola testovaná geometricky určenými výškovými anomáliami na množine 41 bodov Slovenskej geodynamickej referenčnej siete 1995 (SGRN95) (Hefty, 1997).

Na základe štatistiky rozdielov medzi gravimetrickými a geometrickými výškami kvázigeoidu na testovacích bodoch siete SGRN95 možno konštatovať, že štandardná odchýlka absolútnej presnosti modelov kvázigeoidu sa mení s integračným polomerom. Ak sa integrácia vykonáva len do niekoľkých desatín stupňa je riešenie ovplyvnené najmä rýchlosťou konvergencie vplyvu vzdialených zón a presnosťou GMZ. Na druhej strane, hromadenie chýb pozemných gravimetrických údajov spôsobuje opätovný nárast štandardnej odchýlky pri väčších integračných polomeroch. Pri praktickom určení kvázigeoidu by malo byť preferované gradientové riešenie s korekčným členom G_1, kedy je minimálna hodnota štandardnej odchýlky na úrovni 0.07 m pri integračných polomeroch okolo 1°, pozri tab. 4. Tieto hodnoty boli dosiahnuté s využitím sférických harmonických koeficientov GMZ EGM96. Štatistika testovania modelov kvázigeoidu na uzemí Slovenska určených len pomocou sférických harmonických koeficientov kombinovaných GMZ dokazuje prínos modelu EGM2008, kedy štandardná odchýlka dosahuje 0.04 m, ak M_{max}=2160 a je pod hranicou 0.20 m, ak M_{max}=360, pozri tab. 5. V prípade ostatných kombinovaných GMZ presahuje hodnoty 0.20 m a pre spresnenie modelu kvázigeoidu je nevyhnutné využiť aj podrobné gravimetrické údaje. Naproti tomu, ak uvážime podrobné gravimetrické údaje

$\psi_0(°)$	min. (m)	max. (m)	str. hod. (m)	št. odch. (m)
0.1	0.297	0.917	0.628	0.138
0.2	0.401	0.847	0.610	0.118
0.3	0.394	0.808	0.590	0.103
0.4	0.362	0.748	0.573	0.084
0.5	0.401	0.691	0.552	0.078
0.6	0.413	0.682	0.530	0.065
0.7	0.395	0.678	0.508	0.064
0.8	0.379	0.669	0.488	0.069
0.9	0.356	0.683	0.471	0.069
1.0	0.333	0.675	0.453	0.067
1.2	0.325	0.667	0.421	0.064
1.4	0.278	0.642	0.387	0.066
1.6	0.163	0.660	0.359	0.090
1.8	0.149	0.662	0.328	0.107
2.0	0.057	0.681	0.302	0.127
2.2	0.009	0.743	0.282	0.146
2.4	0.039	0.707	0.266	0.161
2.6	0.018	0.703	0.267	0.174
2.8	0.016	0.725	0.272	0.179
3.0	0.024	0.705	0.289	0.180

Tabuľka 4: Štatistika rozdielov medzi gravimetrickými a geometrickými výškami kvázigeoidu na množine GPS/nivelačných bodov, vstupné údaje: $\Delta g + G_1$, váhová funkcia: (Stokes, 1849), GMZ: EGM96, M_{max}=360

GMZ	M_{max}	min. (m)	max. (m)	str. hod. (m)	št. odch. (m)
EGM96	360	0.155	0.926	0.603	0.232
EGM2008	360	0.091	0.763	0.398	0.173
EGM2008	2160	0.337	0.527	0.418	0.037
EIGEN-CG01C	360	-0.261	0.690	0.328	0.228
EIGEN-CG03C	360	-0.182	0.777	0.325	0.213
EIGEN-GL04C	360	-0.217	0.715	0.346	0.219

Tabuľka 5: Štatistika rozdielov medzi gravimetrickými a geometrickými výškami kvázigeoidu na množine GPS/nivelačných bodov pre kombinované GMZ

spolu s kombinovaným GMZ EGM2008, dochádza k zhoršeniu presnosti výsledného modelu kvázigeoidu, pozri tab. 6. Pre zlepšenie filtračných vlastností je potrebné využiť deterministické modifikácie, kedy sa dosahuje urýchlená konvergencia vplyvu vzdialených zón a postačuje uvážiť sférické harmonické koeficienty do stupňa a rádu 360. Štatistika testovania modelov kvázigeoidu určených numerickým riešením zmiešanej geodetickej okrajovej úlohy MKP je uvedená v tab. 7. Štandardná odchýlka presahuje hodnotu 0.20 m, ak sú okrajové podmienky 1. druhu určené pomocou GMZ EGM96. Zlepšenie presnosti modelu kvázigeoidu pozorujeme, ak na výpočet okrajových podmienok 1. druhu použijeme sférické harmonické koeficienty GMZ EGM2008. Takmer rovnaká absolútna presnosť odpovedá modelom kvázigeoidu určených len pomocou sférických harmonických koeficientov

$\psi_0(°)$	min. (m)	max. (m)	str. hod. (m)	št. odch. (m)
0.1	0.313	0.468	0.402	0.034
0.2	0.277	0.467	0.381	0.043
0.3	0.221	0.444	0.358	0.064
0.4	0.168	0.446	0.338	0.078
0.5	0.120	0.444	0.320	0.090
0.6	0.090	0.441	0.304	0.097
0.7	0.059	0.437	0.294	0.097
0.8	0.053	0.437	0.286	0.098
0.9	0.058	0.436	0.282	0.096
1.0	0.070	0.433	0.279	0.092
1.2	0.100	0.441	0.277	0.081
1.4	0.117	0.462	0.277	0.076
1.6	0.137	0.506	0.279	0.079
1.8	0.138	0.541	0.289	0.090
2.0	0.143	0.662	0.307	0.111
2.2	0.151	0.770	0.331	0.134
2.4	0.174	0.824	0.358	0.147
2.6	0.179	0.846	0.391	0.158
2.8	0.194	0.876	0.434	0.170
3.0	0.225	0.914	0.478	0.177

Tabuľka 6: Štatistika rozdielov medzi gravimetrickými a geometrickými výškami kvázigeoidu na množine GPS/nivelačných bodov, vstupné údaje: $\Delta g + G_1$, váhová funkcia: (Stokes, 1849), GMZ: EGM2008, M_{max}=2160

GMZ	M_{max}	min. (m)	max. (m)	str. hod. (m)	št. odch. (m)
EGM96	360	0.164	0.926	0.605	0.229
EGM2008	2160	0.322	0.528	0.417	0.042

Tabuľka 7: Štatistika rozdielov medzi gravimetrickými a geometrickými výškami kvázigeoidu na množine GPS/nivelačných bodov pre MKP, diskretizácia 3'×4.5', vstupné údaje: Δg

týchto GMZ, pozri tab. 5, čo poukazuje na silnú koreláciu numerického riešenia zmiešanej geodetickej okrajovej úlohy MKP s použitým GMZ.

5 Prínos dizertačnej práce pre vedu a prax

Hlavným cieľom dizertačnej práce bolo objektívne porovnanie procedúr a algoritmov pri spresňovaní regionálneho modelu kvázigeoidu s využitím analytických riešení JMP a numerických riešení zmiešanej geodetickej okrajovej úlohy MKP. Za prínosy dizertačnej práce podstatné pre rozvoj vedy v oblasti geodézie možno označiť:

- zovšeobecnené vyjadrenie deterministických modifikácií a odhadov výškovej anomálie

- odvodenie derivácií sférickej Stokesovej funkcie až do 4. rádu
- odvodenie vzťahu na výpočet koeficientov rozvoja chybovej váhovej funkcie a odstránenie singularity pre deterministické modifikácie v tvare zvyšku Taylorovho polynómu

Za prínosy podstatné pre rozvoj praktického určovania kvázigeoidu na území Slovenska možno označiť:

- vytvorené programy na výpočet vplyvu blízkych a vzdialených zón
- aplikáciu odhadu s normálnym tiažovým poľom generovaným ekvipotenciálnym elipsoidom a deterministických modifikácií
- aplikáciu MKP pri numerickom riešení zmiešanej geodetickej okrajovej úlohy

Za prínosy podstatné pre rozvoj praxe v oblasti geodézie možno označiť modely kvázigeoidu, ktoré po procese fitovania bude možné využiť pri:

- určovaní Molodenského normálnych nadmorských výšok pomocou GNSS
- analýze a testovaní systematických chýb vo výškových sieťach
- transformácií súradníc

Záver

V predkladanom príspevku boli diskutované procedúry praktického určovania regionálneho modelu kvázigeoidu. Štandardné prístupy založené na analytickom riešení JMP a netradičná aplikácia MKP pri riešení zmiešanej geodetickej okrajovej úlohy boli matematicky popísané a numericky testované pomocou syntetických a reálnych údajov.

Z pohľadu praktického určovania kvázigeoidu možno konštatovať niekoľko dôležitých skutočností. Vnútorná presnosť štandardných procedúr dosahuje niekoľko milimetrov a vyplýva z diskretizačných chýb, prípadne chýb, ktorých sa dopúšťame pri odstránení singularity váhovej funkcie. Metóda RCR a odhad s normálnym tiažovým poľom generovaným ekvipotenciálnym elipsoidom sú nielen po matematickej, ale aj numerickej stránke ekvivalentné. Deterministické modifikácie sú z numerického hľadiska rovnaké so zanedbateľnými rozdielmi vnútornej presnosti. Testovanie MKP preukázalo nestabilitu algoritmu so zmenou výšky hornej hranice oblasti riešenia.

Na základe testovania absolútnej presnosti modelov kvázigeoidu na území Slovenska možno povedať, že gradientové riešenie s korekčným členom G_1 by malo byť preferované.

Najlepšie výsledky pri určení modelu kvázigeoidu pomocou sférických harmonických koeficientov GMZ boli dosiahnuté pri použití modelu EGM2008. V prípade kombinovaných GMZ EIGEN nebolo preukázané výrazné zlepšenie presnosti v porovnaní s EGM96. Reálne gravimetrické údaje v kombinácií s GMZ EGM2008 len nepatrným spôsobom zlepšili presnosť výsledného modelu kvázigeoidu. V prípade ostatných GMZ je pre zvýšenie presnosti modelu kvázigeoidu kombinácia s gravimetrickými údajmi nevyhnutná. Deterministické modifikácie preukázali aj pri použití reálnych údajov urýchlenú konvergenciu a filtračné vlastnosti. Ich použitie sa ukázalo ako výhodné v prípade, že sa v kombinácií pozemných gravimetrických údajov a GMZ EGM2008 použije maximálny stupeň sférických harmonických koeficientov M_{max}=360, čo výrazne skracuje výpočtový čas. Okrem toho bola dokumentovaná redukcia možných systematických chýb v procedúre výpočtu kvázigeoidu. Numerické riešenie zmiešanej geodetickej okrajovej úlohy s okrajovými podmienkami 1. a 3. druhu poukázalo na silnú koreláciu v závislosti od použitého GMZ.

Z hľadiska spresňovania gravimetrického modelu kvázigeoidu na Slovensku je nevyhnutné zaoberať sa ďalšími teoretickými a praktickými úlohami. V rámci analytických riešení JMP bude nevyhnutné zaoberať sa problematikou elipsoidických korekcií a vplyvom korekčných členov G_2, resp. G_3. Rovnako tak je nevyhnutné zaoberať sa otázkou vplyvu vzdialených zón, ktorý je spôsobený korekčnými členmi. Ďalšie pokroky v aplikácií MKP možno dosiahnuť uvážením okrajových podmienok z priamych meraní, resp. pokračovania originálnych meraní. V tomto smere sa javí MKP výhodná napríklad pri kombinácií leteckej a pozemnej gravimetrie alebo využití údajov družicovej misie GOCE.

Literatúra

Ågren J (2004) Regional geoid determination methods for the era of satellite gravimetry: Numerical investigation using synthetic Earth gravity models. PhD. thesis, Department of Infrastructure, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden.

Cooley JW, Tukey JW (1965) An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. Mathematics of Computation, 19, s. 297–301.

Ellmann A (2004) Geoid for the Baltic countries determined by the least squares modification of Stokes' formula. PhD. thesis, Department of Infrastructure, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden.

Fašková Z, Mikula K, Čunderlík R, Janák J, Šprlák M (2007) Gravimetric quasigeoid in Slovakia by the finite element method. Kybernetika, 43, s. 789-796.

Featherstone WE, Evans JD, Olliver JG (1998) A Meissl-modified Vaníček and Kleusberg kernel to reduce the truncation error in gravimetric geoid computations. Journal of Geodesy, 72, s. 154-160.

Förste C, Flechtner F, Schmidt R, Meyer U, Stubenvoll R, Barthelmess F, König R, Neumayer KH, Rothacher M, Reigber C, Biancale R, Bruinsma S, Lemoine JM, Raimondo JC (2005) A new high resolution global gravity field model derived from combination of GRACE and CHAMP mission and altimetry/gravimetry surface gravity data. Poster presented at EGU General Assembly 2005, Vienna, Austria.

Förste C, Schmidt R, Stubenvoll R, Flechtner F, Meyer U, König R, Neumayer KH, Biancale R, Lemoine JM, Bruinsma S, Loyer S, Barthelmess F, Esselborn S (2008) The GeoForschungsZentrum Potsdam/Groupe de Recherche de Géodésie Spatiale satellite-only and combined gravity field models: EIGEN-GL04S1 and EIGEN-GL04C. Journal of Geodesy, 82, s. 331-346.

Heck B, Grüninger W (1987) Modification of Stokes's integral formula by combining two classical approaches. Proceedings of the XIX General Assembly of the International Union of Geodesy and Geophysics, Vol. 2, Vancouver, Canada, s. 309-337.

Hefty J (1997) Zavedenie verzie 4.0 Bernského softwaru, spracovanie pripájacích meraní vybraných bodov AGS so SLOVGERENET, porovnanie spracovania verziou 3.5 a 4.0 a jeho analýza. Správa z riešenia čiastkovej úlohy *Integrovaná geodetická sieť* vedecko-technického projektu *Štátny informačný systém*, Stavebná fakulta, Slovenská technická univerzita, Bratislava.

Hofmann-Wellenhof B, Moritz H (2005) Physical geodesy. Springer Verlag, Wien, Austria.

Janák J (1999) Koncepcia určovania presného kvázigeoidu. Dizertačná práca, Katedra geodetických základov, Stavebná fakulta, Slovenská technická univerzita, Bratislava.

Jekeli C (1980) Reducing the error in geoid undulation computations by modifying Stokes's function. Report No. 301, Department of Geodetic Science and Surveying, Ohio State University, Columbus, USA.

Kern M (2003) An analysis of the combination and downward continuation of satellite, airborne and terrestrial gravity data. PhD. thesis, Department of Geomatic Engineering, University of Calgary, Canada.

Lemoine FG, Kenyon SC, Factor JK, Trimmer RG, Pavlis NK, Chin DS, Cox CM, Klosko SM, Luthcke SB, Torrence MH, Wang YM, Williamson RG, Pavlis EC, Rapp RH, Olson TR, (1998) The development of the joint NASA GSFC and NIMA geopotential model EGM96. NASA Technical Report 1998-206861, NASA/GSFC, Greenbelt, USA.

Meissl P (1971) Preparation for the numerical evaluation of the second-order Molodensky-type formulas. Report No. 163, Department of Geodetic Science and Surveying, Ohio State University, Columbus, USA.

Mojzeš M, Janák J (1998) Gravimetric model of Slovak quasigeoid. Proceedings of the Second Continental Workshop on the Geoid in Europe, Reports of the Finnish Geodetic Institute, 98, s. 277-280.

Mojzeš M, Janák J (1999) New gravimetric quasigeoid of Slovakia. Bolletino di Geophisica Theoretica ed Applicata, 40, s. 211-217.

Mojzeš M, Janák J, Papčo J (2006) Improvement of the gravimetric model of quasigeoid in Slovakia. Newton's Bulletin, 3, s. 28-32.

Molodensky MS, Eremeev VF, Yurkina MI (1962) Methods of study of the external gravitational field and figure of the Earth. Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, Izreal.

Moritz H (1980) Advanced physical geodesy. Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe.

Moritz H (1992) Geodetic reference system 1980. Bulletin Geodesique, 66, s. 187-192.

Pavlis NK, Holmes SA, Kenyon SC, Factor JK (2008) An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008. Presented at European Geosciences Union 2008 General Assembly, Vienna, Austria.

Pecár J, Grand T (1994) Prvý kvázigeoidu pre územie Slovenska. In: Modernizácia geodetických základov Slovenska, Slovenská spoločnosť geodetov a kartografov pri Výskumnom ústave geodézie a kartografie, Bratislava.

Rapp RH, Rummel R (1971) Methods for the computation of detailed geoids and their accuracy. Report No. 233, Department of Geodetic Science and Surveying, Ohio State University, Columbus, USA.

Reddy JN (1993) An introduction to the finite element method. McGraw-Hill, Singapore.

Reigber C, Schwintzer P, Stubenvoll R, Schmidt R, Flechtner F, Meyer U, König R, Neumayer H, Förste C, Barthelmes F, Zhu SY, Balmino G, Biancale R, Lemoine JM, Meixner H, Raimondo JC (2006) A high resolution global gravity field model combining CHAMP and GRACE satellite mission and surface data: EIGEN-CG01C. Scientific Technical Report STR06/07, GeoForschungsZentrum, Potsdam, Germany.

Rodriguez E, Morris CS, Belz JE, Chapin EC, Martin JM, Daffer W, Hensley S (2005) Assessment of SRTM topographic products. Technical report JPL D-31639, Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, California, USA.

Stokes GG (1849) On the variation of gravity on the surface of the Earth. Transactions of the Cambridge Philosophical Society, 8, s. 672-695.

Tscherning CC, Knudsen P, Forsberg R (1992) Description of the GRAVSOFT software package. Presented at the 1st Continental workshop on the geoid in Europe, Prague, Czech Republic, May 11-14.

Vaľko M, Mojzeš M, Janák J, Papčo J (2008) Comparison of two different solutions to Molodensky's G_1 term. Studia Geophysica et Geodaetica, 52, s. 71-86.

Vaníček P, Kleusberg A (1987) The Canadian geoid - Stokesian approach. Manuscripta Geodaetica, 12, s. 86-98.

Wong L, Gore R (1969) Accuracy of geoid heights from modified Stokes kernels. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 18, s. 81-91.

Zoznam publikácií

Fašková Z, Mikula K, Čunderlík R, Janák J, *Šprlák M* (2007) Gravimetric quasigeoid in Slovakia by the finite element method. Kybernetika, 43, s. 789-796.

Janák J, Mikula K, *Šprlák M* (2006) Downward continuation of satellite gradiometry data. In: 3rd International GOCE User Workshop, Rome, Italy, s. 30.

Janák J, Mojzeš M, *Šprlák M*, Fašková Z (2008) Európska družicová misia GOCE - nové možnosti spresnenia modelov tiažového poľa. In: Medzinárodná vedecká konferencia 70 rokov SvF STU, Bratislava, s. 55-62.

Janák J, *Šprlák M* (2006) Nový počítačový program na modelovanie tiažového poľa pomocou sférických harmonických funkcií. Geodetický a kartografický obzor, 52, s. 1-8.

Janák J, *Šprlák M*, Mikula K (2007) Downward continuation of second radial derivative of disturbing potential - application for GOCE mission. In: Geophysical Research Abstracts, Vol. 9: Abstracts of the Contributions of the EGU General Assembly, Vienna, Austria.

Mojzeš M, Čunderlík R, Janák J, Papčo J, *Šprlák M*, Vaľko M (2006) Porovnanie gravimetrických modelov kvázigeoidu na území Slovenska. In: GPS + GLONASS + GALILEO:

nové obzory geodézie, Stavebná fakulta, Slovenská technická univerzita, Bratislava, s. 59-68.

Mojzeš M, Ferko J, *Šprlák M*, Vaľko M (2006) Svetový výškový systém a jeho realizácia. In: GPS + GLONASS + GALILEO: nové obzory geodézie, STU Bratislava, s. 143-149.

Mojzeš M, Janák J, Papčo J, *Šprlák M*, Vaľko M (2007) Determination of the Quasigeoid by Solving Neumann Boundary Value Problem. In: Gravity Field of the Earth: Proceedings of the 1st International Symposium of the International Gravity Field Service, Istanbul, Turkey, s. 7-12.

Mojzeš M, *Šprlák M*, Vaľko M, Janák J (2008) Combination of Earth gravity model EGM2008, local gravity data and GNSS observations. Poster presented at AGU Fall Meeting, San Francisco, USA.

Šprlák M (2007) Numerické porovnanie Stokesovho integrálu a metódy konečných prvkov s využitím syntetického modelu Zeme. In: Juniorstav 2007, Brno, Česká republika, s. 344.

Šprlák M (2008) Modifikácie Stokesovej funkcie v tvare zvyšku Taylorovho polynómu. In: Juniorstav 2008, Brno, Česká republika, s. 374.

Šprlák M, Fašková Z, Mikula K (2006) Application of the finite element method to the mixed geodetic boundary value problem with Newton and Dirichlet boundary conditions. In: MAGIA - Mathematics, Geometry and Their Applications, Faculty of Civil Engineering, Slovak University of Technology, Bratislava, s. 23-32.

Šprlák M, Janák J, Mojzeš M (2007) Comparison of gravimetric quasigeoid models using spherical Stokes‘s function and its five deterministic modifications. In: Geophysical Research Abstracts, Vol. 9: Abstracts of the Contributions of the EGU General Assembly, Vienna, Austria.

Šprlák M, Mojzeš M (2008) Modelovanie tiažového poľa Zeme pomocou EGM2008. Poster prezentovaný na medzinárodnej vedeckej konferencií 70 rokov SvF STU, Bratislava.

Šprlák M, Mojzeš M, Janák J (2008) Improvement of regional quasigeoid model in Slovakia using the combined global gravity field model. In: Geophysical Research Abstracts, Vol. 10: Abstracts of the Contributions of the EGU General Assembly, Vienna, Austria.

Summary

Determination of quasigeoid which represents a reference surface for Molodensky's normal heights has been discussed in geodetic studies for many years. Gravimetric method based on formulations and solutions of geodetic boundary value problems is preferred in the determination of regional quasigeoid model. Numerical comparison of procedures and algorithms implied by analytical solution for the simple Molodensky's problem and solution of the mixed boundary value problem by finite element method is the main topic of this dissertation.

Direct application of analytical solution for the simple Molodensky's problem in the form of the surface integral is restricted due to lack of gravity data. Surface integral is divided into truncated integration of gravity data and finite series of spherical harmonics. Normal gravity field can be generated by an equipotential elipsoid or a spheroid. Integration kernel determining the weight of individual gravity data has a filtering properties in truncated integration and defines the convergence of finite series of spherical harmonics. General equations for existing deterministic modifications of spherical Stokes' function and for height anomaly estimators are proposed.

Numerical solution of the mixed geodetic boundary value problem by finite element method is unconventional approach in the determination of regional quasigeoid model. At first, solution domain is divided into finite elements. Using approximation functions and weak formulation of the differential equation element system of linear equations is constructed. According to the principles of continuity of numerical solution and balance of fluxes global system of linear equations is created. Applying boundary values global system of linear equations is solvable.

Procedures for the surface integral evaluation, deterministic modifications of sherical Stokes' function and finite element algorithm are tested using synthetic Earth gravity model. Behavior of global root mean square is studied in order to validate filtering properties and rapid convergence of finite spherical harmonics series when integration kernel is modified. Approximate and gradient solutions for the simple Molodensky's problem, combined global gravity field models, deterministic modifications of spherical Stokes' function and numerical solution of the mixed boundary value problem by finite element method are tested on a set of GPS/levelling points implying for improved quasigeoid models in the area of Slovakia.